

TEKST NR 8

1978

# DYNAMIK OG DIAGRAMMER

INTRODUKTION TIL ENERGY-BOND-GRAPH FORMALISMEN.

PEDER VOETMANN CHRISTIANSEN

TEKSTER  
fra

*Albert Chr. Paulsen*  
IMFUFA, Roskilde Universitetscenter

Postbox 260,  
DK-4000 Roskilde  
tel: 4675 77 11  
fax: 4675 5065  
E-mail ACP@mmf.ruc.dk

priv.: Næsbyvej 40  
DK-4171 Glumsoe  
tel: 5364 6645

IMFUFA

**ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER**  
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES  
FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

## TEKSTER

fra

IMFUFA Roskilde universitetscenter.

---

I denne tekstrække er tidligere udkommet:

1. "TANKER OM EN PRAKSIS" - et matematikprojekt.  
Anne Jensen, Marianne Kesselhahn, Lena Lindenskov og  
Nicolaj Lomholt. Vejleder: Anders Hede Madsen.
2. "OPTIMERING" - Menneskets forøgede beherskelsesmuligheder  
af natur og samfund - Projekt rapport.  
Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen, Gert Kreinøe,  
Peter H. Lassen. Vejleder: Bernhelm Booss.
3. "Opgavesamling," bredde-kursus i fysik.  
Lasse Rasmussen, Aage Bonde Kræmmer, Jens Højgaard Jensen.
4. "Tre essays" - om matematikundervisning, matematiklærer-  
uddannelsen og videnskabsrindalisme.
5. "BIBLIOGRAFISK VEJLEDNING til studiet af DEN MODERNE  
FYSIKS HISTORIE."  
Helge Kragh.
6. "Nogle artikler og debatindlæg om - læreruddannelse og  
undervisning i fysik, og - de naturvidenskabelige fags  
situation efter studenteroprøret."  
Karin Beyer, Jens Højgaard Jensen, Bent C. Jørgensen.
7. "Matematikens forhold til samfundsøkonomien"  
B.V.Gnedenko.

## Forord.

Disse noter er udkommet med et kapitel om ugen som et led i en studiekreds over væskedynamik i efterårssemestret 1978. Formålet er at levere en generelt systemteoretisk baggrund og lede læseren frem til et standpunkt, hvorfra væskedynamikkens korrelations- og response-funktioner kan sammenlignes med lignende begrebsdannelser inden for andre fysiske discipliner. Det specifikt væskedynamiske indhold i noterne er begrænset til en kort gennemgang af rheologiske diagrammer, som bl.a. finder anvendelse i den fænomenologiske teori for visco-elasticitet. Teorien for komplekse, frekvensafhængige response-funktioner er ikke medtaget i denne samling, selv om det var min oprindelige plan. Det er min hensigt at præsentere denne teori i sammenhæng med dens anvendelse i forbindelse med viscoelasticitet og Mössbauereffekt. Der findes i noterne adskillige henvisninger til følgende kapitler, som altså ikke er kommet med i denne omgang. En del af dette stof kan findes i Jesper Gundermann's noter, ref. 1 b.

Jeg er gået ud fra, at læseren har et grundlæggende kendskab til de klassisk-fysiske bevægelsesligninger såsom Newton's love og Maxwell's ligninger. Desuden forudsættes en vis fortrolighed med systemdynamiske diagrammer. (Forrester's teknik ref. 3), som de er blevet benyttet bl.a. til opstilling af "verdensmodellen", kendt fra "Limits to Growth".

Den her præsenterede version af energibåndsteknikken afviger en del fra forbilledet, Paynter's "energy bond graphs", som de fremtræder i internationale tidsskrifter. Jeg har tilstræbt en stærkere sammenknytning med andre teknikker, såsom Forrester's teknik, der opdeler variable i "levels" og "rates", og økologen H.T.Odum's teknik, der udmærker sig ved en klar og overskuelig tegnestil med rige muligheder for opfindelse af nye "ikoner". Desuden er jeg gået et skridt videre end Paynter med hensyn til axiomatisering af teknik-

ken, især hvad angår spørgsmålet om orientering af energibåndene, og den gennemførte betoning af systemets duale symmetri (x-o systemet). Lighederne er dog stadigvæk så store, at det ikke skulle være svært for læseren af disse noter at gå ind i den litteratur, som benytter Paynter's notation.

Jeg har desuden forsøgt at knytte forbindelsen fra energibåndsteknikken bagud i tid til filosofen C.S. Peirce (som også af Paynter er angivet som forbillede). Mit kendskab til Peirce er desværre stærkt begrænset og hovedsageligt andenhånds, men meget tyder på, at hans ideer først nu for alvor er ved at blive aktuelle, ca. 100 år efter de blev formuleret. I en tid, hvor manglende overblik, manglende jordforbindelse, forvildelse og frustration præger billedet i matematik og fysik, og hvor disse videnskaber af studenter opleves som samfundsirrelevante på trods af, at de har været hovedkræfter i de senere års teknologiske udvikling, opstår der et behov for at søge tilbage efter en logisk begrebsafklaring på et grundlæggende niveau. Ud fra denne betragtning kan man måske forstå den fornyede interesse for Peirce. Forvirring opstår, hvis man tror, at man beskæftiger sig med noget andet end det, man i virkeligheden beskæftiger sig med. Mange fysikere tror, at de afdækker lag på lag af sandheder om naturen, medens det de i virkeligheden laver, er at udvikle tegnsystemer i vekselvirkning med den eksperimentalfysiske praksis, som selv er en tegn-aktivitet. Peirce's filosofi er velegnet til at afdække disse forhold og kan måske på længere sigt være medvirkende til, at forskere mere bevidst indretter deres tegn-aktiviteter med henblik på en ønsket praksis, i stedet for omvendt.

Første gang jeg læste om Paynter's system for ca. 7 år siden, gjorde det ikke noget større indtryk på mig. Ideen til en revision og opstramning af det kom først til mig efter længere tids arbejde med økologisk-fysiske problemstillinger, såsom vækstmodeller og udviklingskriterier, hvor jeg benyttede andre diagramteknikker. Den gradvise afklaring skyldes i høj

grad medarbejdere, som straks fangede ideen, først og fremmest Karin Beyer og Jesper Gundermann. Efterhånden er mine anvendelser af teknikken gledet mere og mere over i den "rene fysik", selv om jeg stadig mener, at økologien må være det vigtigste anvendelsesområde på længere sigt. De fysiske naturlove i deres traditionelle formulering er ikke til nogen stor hjælp i økologisk modellering. Energibåndsteknikken er, så vidt jeg kan bedømme, det eneste eksisterende værktøj til modelbygning, som er tilstrækkeligt fleksibelt til økologisk teoriformulering, og som sikrer overholdelsen af de grundlæggende fysiske begrænsninger for al udfoldelse. Værktøjet skærpes imidlertid bedst, når man bruger det til de ting, man har bedst forstand på, og derfor må fysikere i første omgang koncentrere sig om at bruge energibåndsteknikken på fysiske problemstillinger; de vil så sikkert, som jeg, opdage, at der er meget at lære endnu, og at de fiksede og færdige lærebogsløsninger kun er "toppen af isbjerget".

Jeg har endnu ikke (bortset fra en enkelt duplikeret artikel på engelsk) forsøgt at præsentere systemet i en international sammenhæng, men kun "afprøvet" det på studenter og kolleger med begrænset succes. Min hidtidige taktik har været at servere det hele på en gang, som et spil med reglerne stående på en enkelt A4-side, så folk kunne se, hvor simpelt det var. Det har ikke rigtigt virket efter hensigten, og jeg prøver derfor nu en anden metode: at introducere "spillebrikkerne" lidt mere induktivt hen ad vejen, så læseren får en chance for at opdage, at det ikke bare er grebet ud af luften. Til gengæld er noterne forsynet med et stikordsregister, som skulle lette overblikket.

Mit ønske er at slå et slag for kreativiteten i fysikken, modelbyggerens holdning frem for lærebogsterperens. Jeg tror, at verden ville være bedre tjent med, at fysikerne ser den store udfordring til den videnskabelige indsigt og arbejdsmetode, der ligger i at forstå og forvalte vor dagligdags praksis som led i naturen, i stedet for at jage efter

ekstremerne, det absolutte nulpunkt og de uendeligt høje partikelenergier og de mest sjældne jordarter med de mærkeligste magnetiseringer, for at finde nye spændende "effekter". Vi har dårligt nok endnu forstået energiens væsen, indsigt i entropiens, stoffets, rummets og tidens i det menneskelige felt, hvorfra al praksis udgår, og at flygte fra denne "banale" fysik ud i ekstremerne fører blot til teknokrati og fremmedgørelse og flere atomkraftværker.

Til slut en tak til Niels Boye Olsen for at have ført mig ind i de visco-elastiske problemstillinger og til Inger Grethe Christensen for maskinskrivningen.

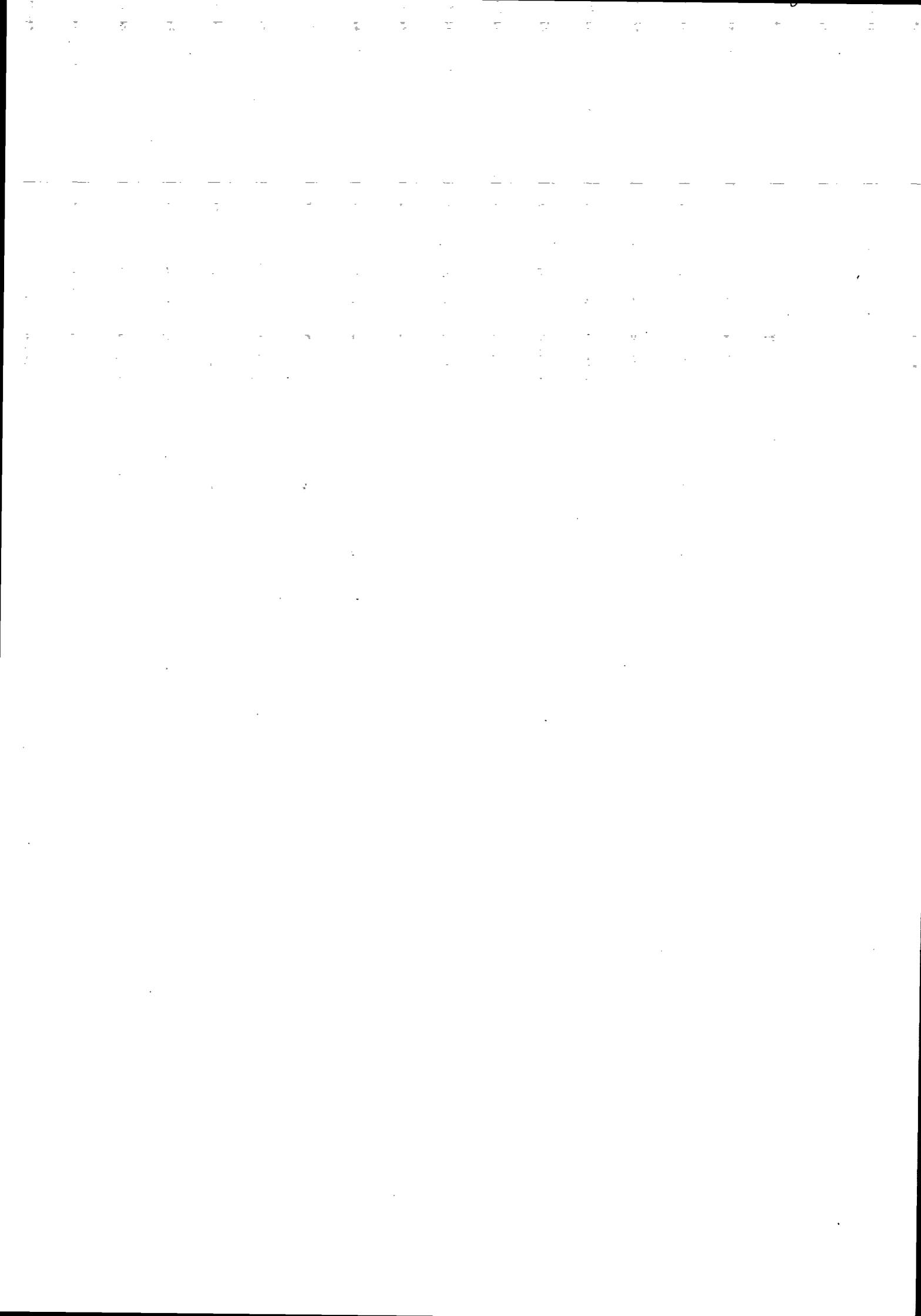
RUC, december 1978.

Peder Voetmann Christiansen.

## I N D H O L D

=====

1. Bevægelsesligninger og klassifikation af variable .....	side	1
2. Energibåndets semiotik .....	-	8
3. Pragmatisme og reticulations-filosofi .....	-	21
4. Basale toporte .....	-	30
5. Skeletdiagrammet .....	-	43
6. Fysikkens ikoner .....	-	59
7. Kilder, lagre og lække m.m. ....	-	63
8. Netværksmodeller og naturlove .....	-	82
9. Responsefunktioner for 1-port systemer .....	-	102
Opgaver .....	-	120
Referencer .....	-	133
Stikordsregister .....	-	136



## 1. Bevægelsesligninger og klassifikation af variable.

I det følgende opstilles en række påstande (aksiomer), som ikke bevises, men eksemplificeres. Det leder frem til en klassificering af de vigtigste typer af fysiske størrelser i 4 hovedgrupper.

Påstand nr. 1. *Alle problemer af dynamisk\* art leder til bevægelsesligninger af typen*

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{R}(\vec{L}, t) \quad (1)$$

hvor  $\vec{L} = (L_1, L_2, \dots, L_n)$  er et sæt af variable, som kaldes Level-variable, og  $R$  et sæt  $(R_1, R_2, \dots, R_n)$ , som kaldes Rate-variable.

Det fremgår af ligning (1), at rate-variablene til hvert tidspunkt  $t$  skal kunne udtrykkes som funktioner af level-variablene og tiden. Hvis tiden ikke indgår explicit i ligning (1) (men kun implicit, gennem level-variablenes tidsafhængighed) siger man, at systemet er autonomt.

### Eksempler på 1.

Eks. 1a) For en partikel, der bevæger sig ud ad x-aksen har vi

$$\frac{dx}{dt} = v \quad (2)$$

d.v.s hastigheden  $v$  optræder her som rate og stedet  $x$  som level.

Hvis den samme partikel bevæger sig i et kraftfelt  $F(x, t)$ , har vi iflg. Newton's anden lov

$$m \frac{dv}{dt} = F(x, t) \quad (3)$$

---

\*Dynamik defineres som studiet af systemer, der ændrer sig i tidens løb, og de kræfter, som virker på systemerne.

Vi kunne så f.x. dividere denne ligning med massen  $m$  og således få  $v$  til at optræde som level, og  $F/m$  som rate. Det er imidlertid ikke særlig godt, bl.a. fordi  $v$  optræder som rate i samme dynamiske problem, lign.(1). Af andre grunde, som vil blive klarere i det følgende, er det bedre at indføre impulsen  $p = v \cdot m$  og så skrive lign.(3) på formen

$$\frac{dp}{dt} = F(x,t) \quad (4)$$

Altså impulsen  $p$  optræder som level-variabel og kraften  $F$  som rate-variabel.

Vi ser, at ligning (2) og (4) kan sammenfattes på formen (1)

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1(L_1, L_2, t) \\ R_2(L_1, L_2, t) \end{pmatrix} \quad (5)$$

med  $L_1=x$ ,  $L_2=p$ ,  $R_1 = v = \frac{p}{m}$ ,  $R_2 = F(x,t)$ , eller med nedenstående systemdynamiske diagram af Forrester-typen, hvor level-variablene  $x$  og  $p$  optræder som "cisterner" og rate-variablene  $v$  og  $F$  som "vandhaner".

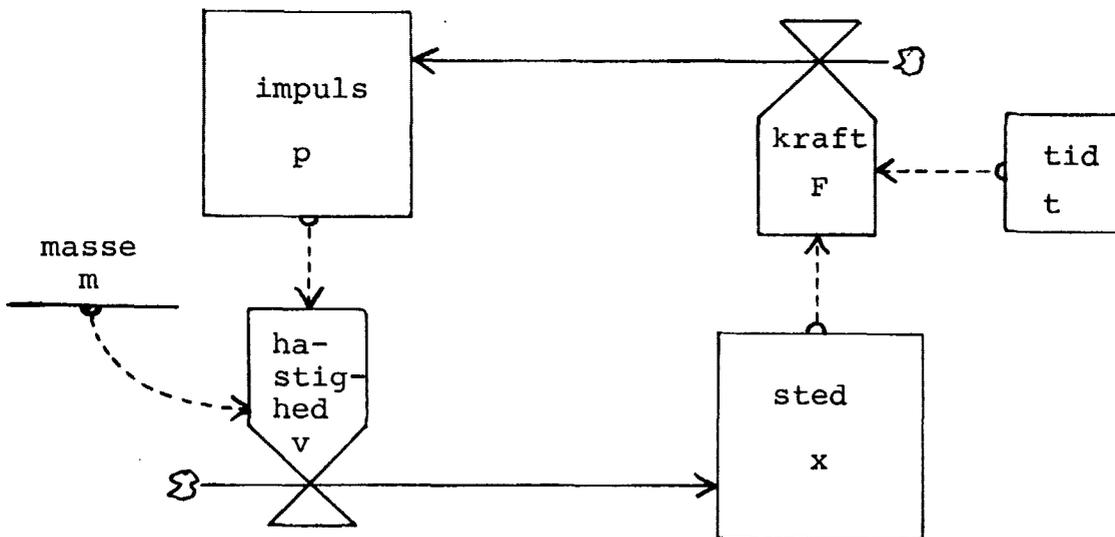


Fig. 1. Partikeldynamik.

Eks. lb) Sædvanligvis siger man, at en tidsligt varierende elektrisk strøm  $I(t)$ , som sendes gennem en spole med selvinduktionen  $L$ , giver anledning til en modelektromotorisk

kraft med størrelsen

$$E = L \frac{dI}{dt} \quad (6)$$

Vi indfører størrelsen  $F = L \cdot I$ , og kan så skrive ligning (6) på standard-formen

$$\frac{dF}{dt} = E$$

Størrelsen  $F$  er den magnetiske flux i spolen, som måles i Weber = Volt·sekund. Hvis strømmen gennem spolen oplader en kondensator (ladning  $Q$ ), har vi

$$\frac{dQ}{dt} = I \quad (8)$$

hvor altså  $I = F/L$ .

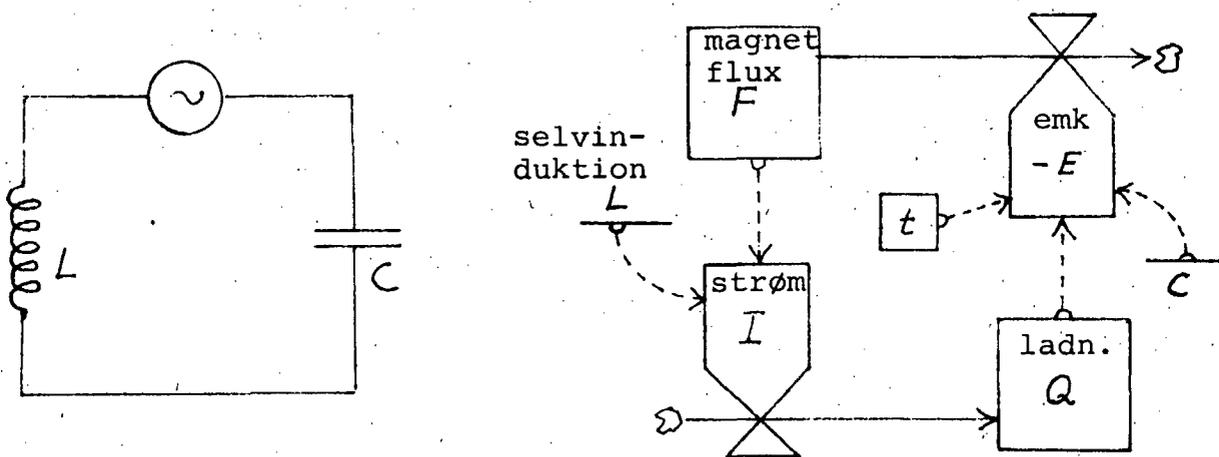


Fig. 2. Elektrodynamik.

I stedet for at tale om "modelektromotorisk kraft" bør man hellere betragte  $E$  som årsag til opvækst af  $F$  og derigennem årsag til strømændring.

Påstand nr. 2. Level-variablene for et system kan vælges som ekstensive variable. Ekstensive variable er additive over delsystemer, og der vil i reglen kunne formuleres bevarelsessætninger for dem.

Eksempler på 2.

Eks.2a) Vi ser på en cyklist, der er i gang med at tilbage-lægge afstanden fra København til Roskilde. Cyklistens af-stand til hhv. København og Roskilde giver os to level-vari-able, som er ekstensive, fordi de til hver en tid kan adderes til den samlede afstand. Den totale afstand er en bevaret størrelse, uafhængig af, hvor cyklisten befinder sig. En af fiduserne ved at vælge level-variablene som ekstensive stør-relser er, at vi får pæne sammenhængende diagrammer, hvor "det der lukkes ud af den ene cisterne, lukkes ind i den anden".

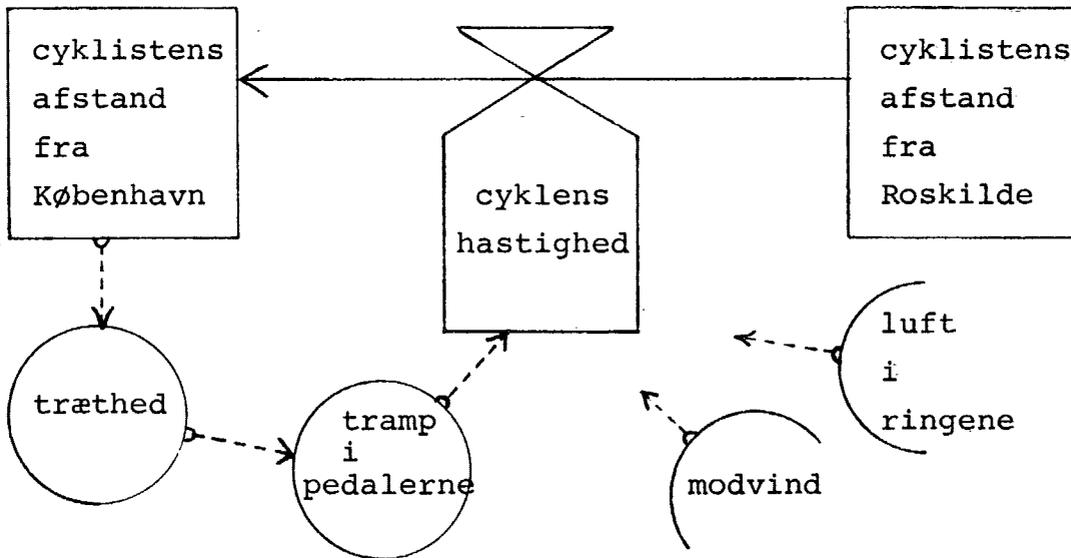


Fig.3 Cykeltur fra København til Roskilde.

Eks. 2b) Vi ser på en hest, der trækker en vogn. De to del-systemer, hesten og vognen, har hver deres impuls, og total-systemets impuls er summen af hestens og vognens. Hestens træk i vognen kan beskrives som en strøm af impuls, der fly-der gennem seletøjet fra hesten til vognen. Ifølge loven om aktion og reaktion flyder der lige meget impuls væk fra hesten gennem seletøjet, som der flyder til vognen. At seletøjet kan "transportere impuls", d.v.s. udøve en kraft på hesten og vognen, hænger sammen med elastiske spændinger, som skyldes, at seletøjet er strakt på grund af forskelle i hestens og

vognens hastighed. Hele dynamikken kan sammenfattes i følgende diagram.

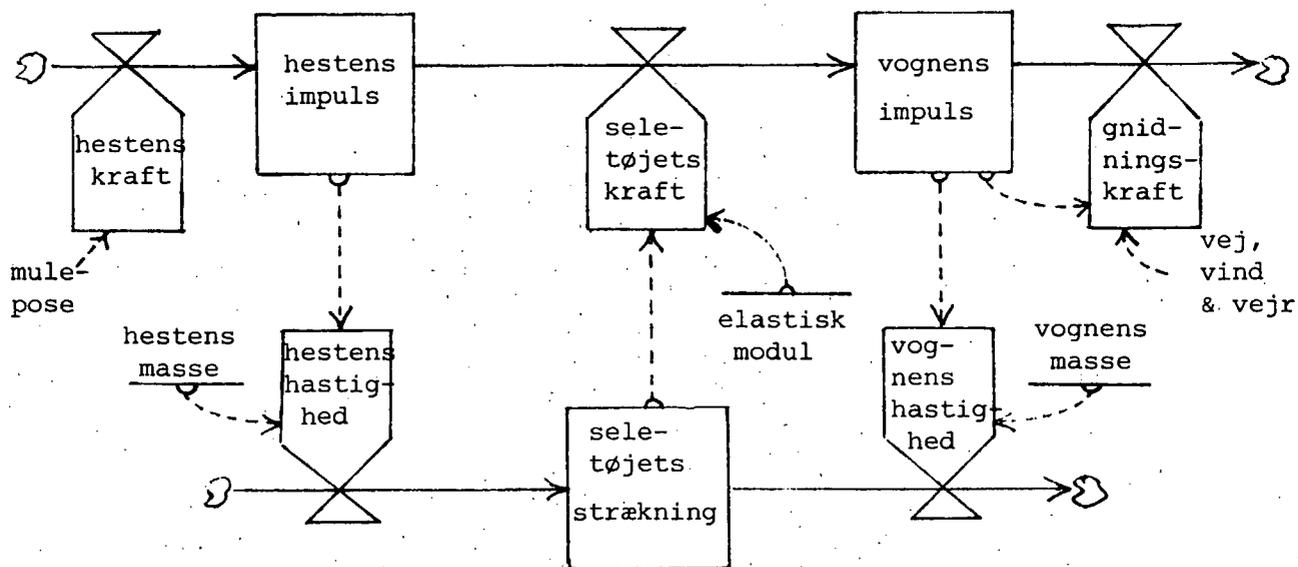


Fig. 4. Hest og vogn.

Påstand nr. 3. *Level-variable kan altid vælges, så de tilhører én af følgende to typer:*

x-type, som skifter fortegn ved tidsvending

o-type, som er uændrede ved tidsvending

Operation "tidsvending" er en matematisk operation, som i den klassiske fysik medfører, at alle variable (ikke blot level-variable) enten skifter fortegn, eller er uændrede. Påstanden er altså en konstatering af, hvordan det forholder sig i den klassiske fysik (i kvantemekanikken er det lidt mere indviklet).

Rumlige afstande er uændrede (o-type), medens tidsforskelle skifter fortegn (x-type). Impulser, Impulsmomenter, hastigheder og strømme skifter fortegn (x), medens masser, ladninger, kræfter og spændinger er uændrede (o). Elektriske felter er uændrede (o), medens magnetfelter skifter fortegn (x). Og sådan kan man blive ved.

Vi kan tænke på "tidsvending" som det, der sker, når vi kører

en film baglæns. Sammenligner vi en bestemt scene fra den baglæns kørte film med den samme scene fra den forlæns kørte, vil vi se, at alle hastigheder har skiftet fortegn, medens f.eks. de rumlige positioner er uændrede. Hvis filmen stoppes, "forsvinder" alle x-variable, og kun variable af o-typen ses på billedet.

Ved at kigge tilbage på de foregående eksempler kan vi se, at x-o klassifikationen kan gennemføres for level-variablene. Det er så klart, at den også kan gennemføres for rate-variablene. Et bestemt rate-level par  $R, L$  hænger jo sammen ved ligningen

$$\frac{dL}{dt} = R$$

Ved tidsvending laver vi substitutionen

$$t \rightarrow t' = -t$$

Hvis nu  $L$  er af x-typen, har vi

$$L \rightarrow L' = -L$$

og vi ser så, at

$$R \rightarrow R' = R$$

idet den samme ligning skal være opfyldt for de tidsvendte størrelser (dem med mærke på). Altså til en x-level svarer en o-rate, og omvendt, til en o-level svarer en x-rate.

Eksempler: Hvis level-variablen er et sted i rummet (o-level) så er den tilhørende rate-variable en hastighed (x-rate).

Hvis level-variablen er et impulsmoment (x-level), så er den tilhørende rate-variable et kraftmoment (o-rate).

Hvis level-variablen er en magnetisk flux i en spole (x-level), så er den tilhørende rate-variable en elektrisk spænding (o-rate).

Hvis level-variablen er ladningen på en kondensator (o-level), så er den tilhørende rate-variabel en elektrisk strøm (x-rate).

O.S.V.

Alt i alt har vi nu 4 hovedtyper af variable, og i nedenstående skema, er de stillet op, sammen med de relationer, som kan opstilles mellem dem:

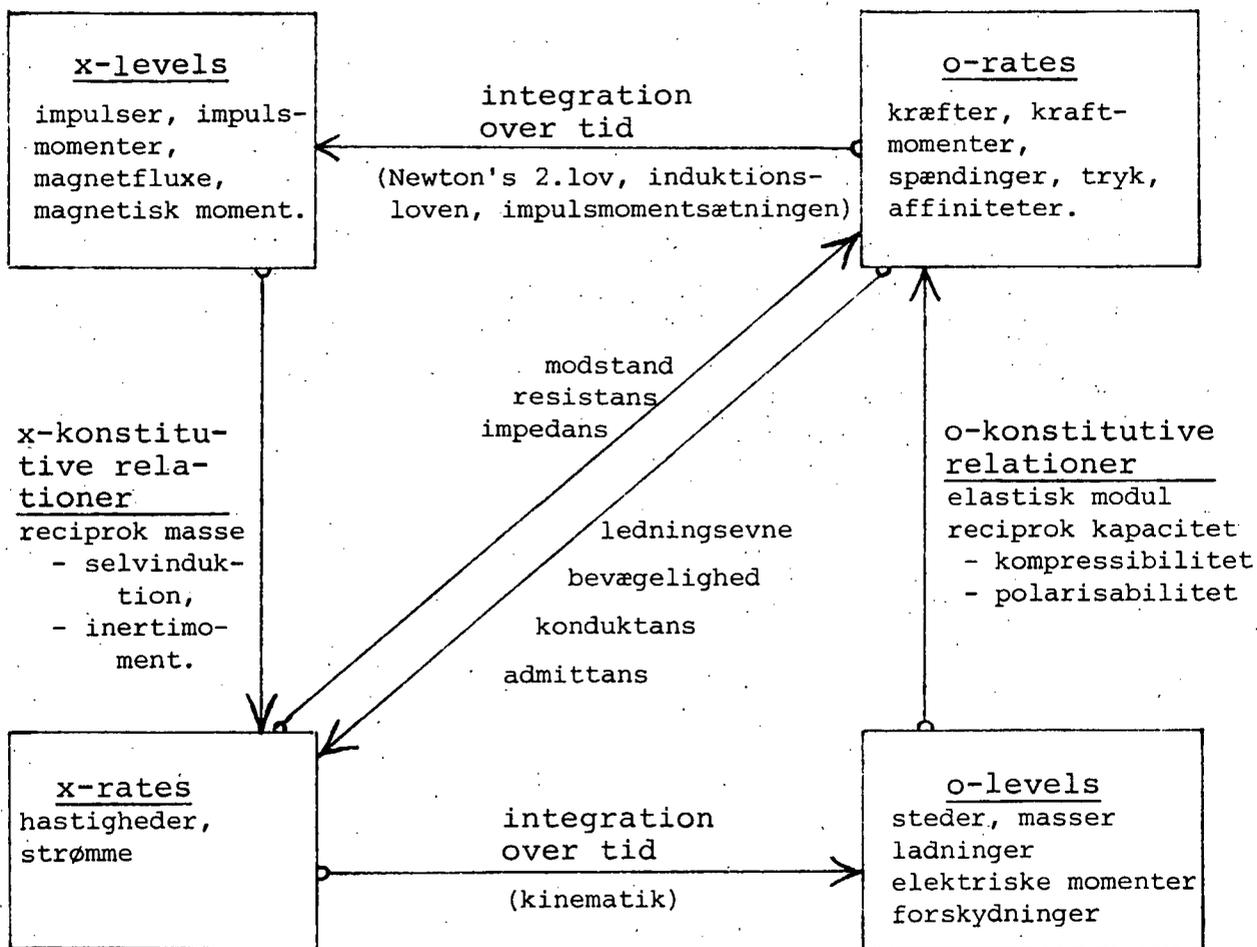


Fig. 5. Skema over dynamiske variable og deres indbyrdes relationer.

## 2. Energibåndets semiotik.

I fysikken anvendes ordet "vekselvirkning" temmelig meget, uden at man spekulerer så dybt over, hvad det betyder. Hvorfor taler man f.x. aldrig om "vekselårsag"? Ordet "virkning" har nok her en anden betydning end i "årsag-virkning". På engelsk hedder det hhv. "interaction" og "cause-effect".

Jeg vil forsøge at oversætte "vekselvirkning" med "gensidig handlen" og anskueliggøre det ved at se på et system med to delsystemer, A og B, hvor A bevirker en ændring af B's tilstand, og omvendt, B bevirker en ændring af A's tilstand. Hvis vi for nemheds skyld tænker os, at tilstanden af hvert af de to delsystemer beskrives med en enkelt level-variabel, hhv.  $L_A$  og  $L_B$ , kan vi afbilde situationen med nedenstående systemdynamiske diagram.

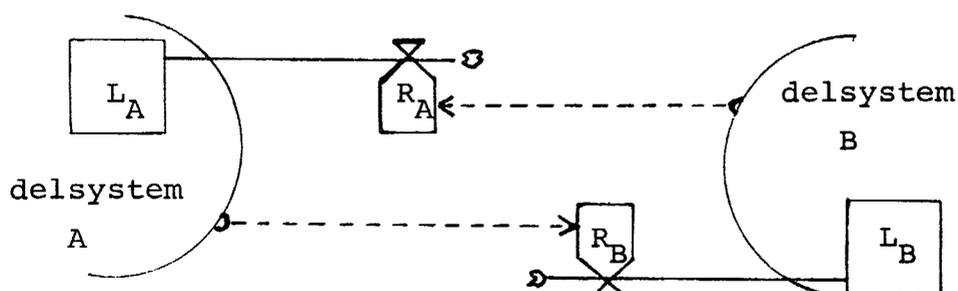


Fig. 6. Systemdynamisk definition af "vekselvirkning".

Karakteristisk for vekselvirkningen er altså, at den variabel som er "input" til system A ( $R_A$ ), samtidig er "output" fra system B, og omvendt: "inputvariablen" for system B ( $R_B$ ) er "output" for system A. De to ratevariable, som indgår i et sådant elementært vekselvirkningsforhold udgør tilsammen et såkaldt vekselvirkningsbånd (eng.: interaction bond) mellem de to systemkomponenter.

Vekselvirkninger i denne betydning optræder ikke blot i naturvidenskabelige modeller, men også f.x. i økonomiske modeller, hvor de kan beskrive varebytning eller pengetransaktio-

ner. I forbindelse med et sådant forhold vil man ofte kunne tale om overførsel af en eller anden slags valuta, f.x. guld eller schweitzerfranc, som ikke har noget specielt at gøre med den vare, der udveksles, men nærmest tjener til registrering af, at en vekselvirkning finder sted.

På samme måde i fysikken: Her har vi en speciel valuta, som hedder energi, og som optræder i forbindelse med alle fysiske former for vekselvirkning. Det vil endda som regel være nemt at udtrykke, hvor meget energi, der overføres, ved de ratevariable, som indgår i vekselvirkningsbåndet. Vi kan f.x. se på en del af modellen "hest og vogn" på fig. 4.

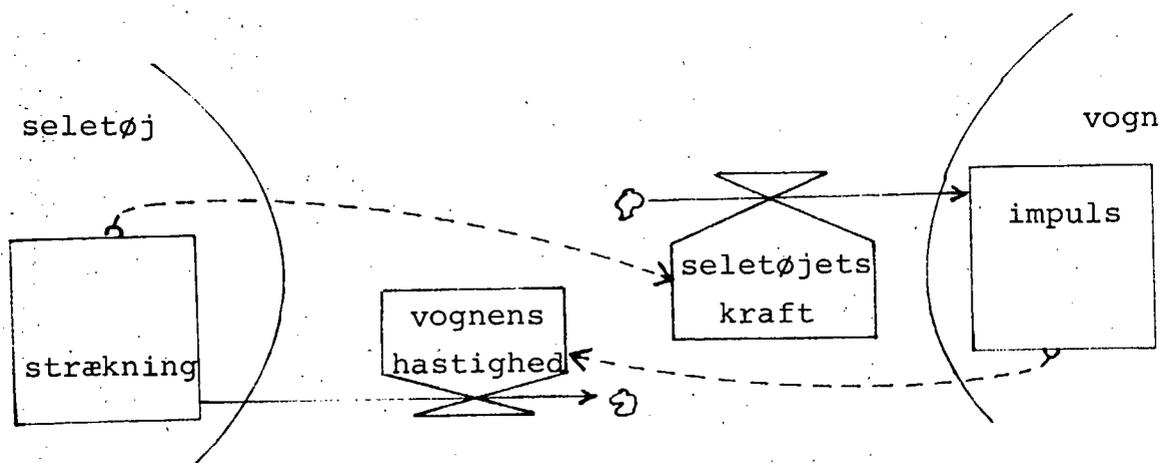


Fig. 7. Hest & Vogn. Vekselvirkningsbåndet mellem seletøj og vogn.

Vi ser her, at de to ratevariable, som udgør vekselvirkningsbåndet, bestemmer energioverførslen på den simple måde, at energioverførslen pr. tidsenhed fra seletøj til vogn netop er produktet af "seletøjets kraft" og "vognens hastighed". Det kan siges at være et held, for vi kunne jo i princippet have defineret vores variable på så mange andre måder, men det giver os endnu et fingerpeg om, hvordan man kan og bør vælge sine variable, og det bringer os til formulering af den næste påstand.

Påstand nr. 4. De to rate variable ( $R_A$  og  $R_B$ ), som indgår i et fysisk vekselvirkningsbånd, kan altid vælges på en sådan måde, at deres produkt ( $R_A \cdot R_B$ ) giver den overførte energi pr. tidsenhed. Et sådant vekselvirk-

ningsbånd kaldes et energibånd (eng.: *energy bond* eller *power bond*).

Vi vil nu for eftertiden tegne et energibånd som en streg. De to ratevariable indiceres med mærker på stregen efter den regel, at input-variablen for en bestemt systemkomponent indiceres nærmest ved den pågældende systemkomponent.



Fig. 8. Energibånd (stregen) med signalindices (de to krøllede mærker) og signalsymboler (" $R_A$ " og " $R_B$ "), som forbinder to systemkomponenter A og B (halvcirklerne). Sml. fig.6.

En energibåndsmodel optræder ikke altid "påklædt" med indices og symboler. I den indledende fase af modelbygningen kan man nøjes med "ikoner", d.v.s. billedmæssige skitser af forskellige systemkomponenter, forbundne med "energibånds-ikoner", d.v.s. streger.

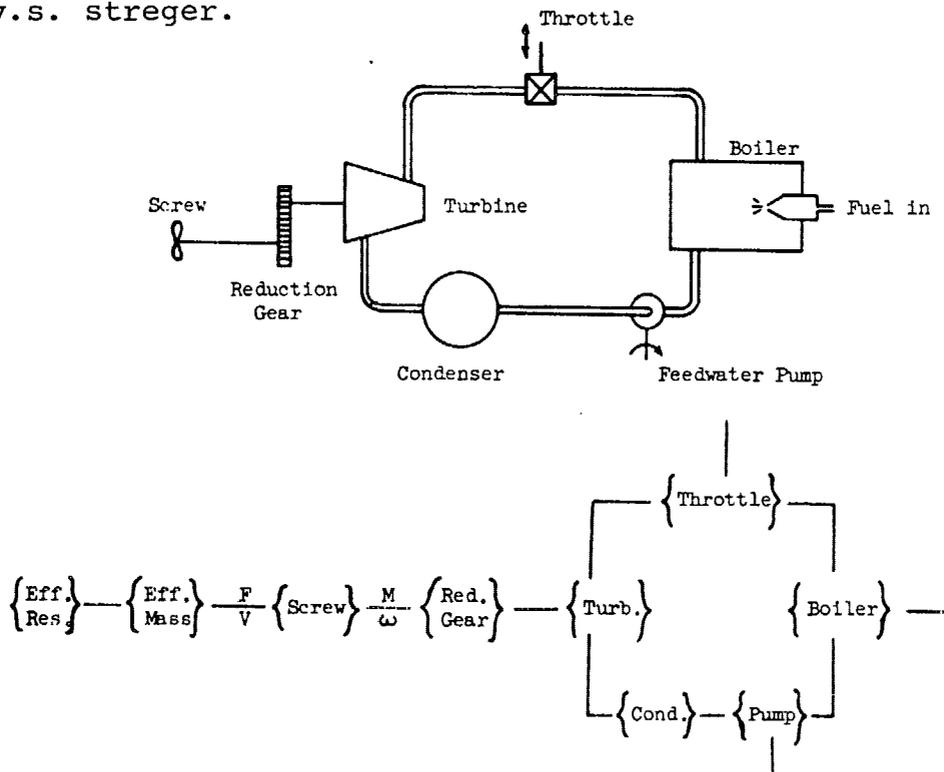


Fig. 9. Energibåndsmodel af fremdriftsmekanismen for et skib. (H.M.Paynter).

De punkter, hvor systemkomponenterne er forbundet med energibånd, kaldes porte. Vi kan altså tale om 1-porte, 2-porte, 3-porte o.s.v. Elektriske komponenter som kun har to terminaler, f.x. batterier, modstande, ampéremetre, kondensatorer, dioder o.s.v. er 1-porte, da der skal bruges mindst to ledninger til at overføre elektrisk energi. Transformatorer (4 terminaler) er 2-porte, medens transistorer i reglen optræder som 3-porte.

Den matematiske abstraktion "et energibånd" dækker over mange forskellige sider af den fysiske virkelighed, svarende til energiens mange forskellige fremtrædelsesformer. Et mekanisk energibånd kan f.ex. være en vægtstang, en roterende aksel, eller en drivrem mellem to hjul. Coaxialkabler, mikrobølgeledere og optiske fibre er elektromagnetiske energibånd. Desuden har vi damprør, hydrauliske rør, og varmtvandsledninger, hvori energitransporten er ledsaget af en stoftransport. En energibåndsbeskrivelse af forskellige tekniske konstruktioner er ofte ret let at lave, fordi energibåndene fremtræder, så de er synlige med det blotte øje, f.ex. som støttepillerne og kablerne, der bærer en bro. Kemikernes brug af konstitutionsformler, hvori bindingerne mellem atomer angives ved streger, kan opfattes som specielle energibånds-grafer, og er da også forbilledet for Paynter's grafiske udvikling af teknikken. Det grafiske system, som her skal benyttes, afviger noget fra Paynter's og ligner mere visse typer af økologiske energy-flow diagrammer. Det logiske indhold i teknikken ligger imidlertid tæt på Paynter's ideer, der kan betragtes som en overbygning på og anvendelse af et logisk system, udviklet af den amerikanske filosof C.S.Peirce (1839-1914).

Peirce har givet betydelige bidrag til den såkaldte relationslogik ("The Logic of Relatives", coll.papers, vol.3) og har grundlagt semiotikken, som er læren om tegn. Det vigtigste element fra semiotikken er opdelingen af tegn i tre hovedtyper:

a) Ikoner, som forstås ud fra en "billedmæssig" lighed med det

objekt (evt. en abstraktion), som de hentyder til. Eksempler: fotografier, skitser, geometriske tegninger, elektriske og rheologiske diagrammer.

b) Indices, som peger på et bestemt objekt uden nødvendigvis at have den mindste lighed med objektet og uden at der kræves specielle regler for at forstå det. Eksempler: en finger, som peger på månen (index betyder pegefinger); et fodspor i sandet (som antyder, at her har gået et væsen); husnumre; de små numre som bruges til at skelne elementerne i en tensor fra hinanden,  $M_{11}$ ,  $M_{12}$ , o.s.v.

c) Symboler, som er tegn, der kræver specielle regler (konventioner) for at blive forstået. Eksempler: bogstaver i et fonetisk alfabet (i modsætning til f.ex. hieroglyffer og kinesiske bogstaver, der har en stærkt ikonisk karakter); matematiske symboler i form af latinske eller græske bogstaver; betegnelser for fysiske enheder, såsom "ampère", "weber" og "poise"; visse billeder, som ikke er ikoner, fordi de skal "forstås symbolsk", såsom en rose i en knyttet næve, der ikke hentyder til botaniske aktiviteter, men til socialdemokratiet.

En hvilken som helst fysisk modelopstilling bevæger sig rundt i det semiotiske univers, snarere end i det fysiske, fordi selve objektet til hver en tid er noget andet end de tegn, vi beskriver det med. Det mest naturlige udviklingsforløb af en modelopstilling er at starte i det ikoniske og ende i det symbolske. Det betyder ikke nødvendigvis at ikoniske modeller er mindreværdige i forhold til de symbolske, men der har været en kraftig tendens, især i matematikken og den teoretiske fysik, til at forsømme det ikoniske lag, og dette forhold har ført til megen forvirring og frustration. Energibåndsteknikken kan opfattes som en modsat rettet tendens, der søger at formalisere og standardisere brugen af ikoner med det formål at bevidstgøre hele vejen fra den eksperimentelle indføling med objektet til den teoretiske symbolmanipulation. Fordelen ved denne metode er bl.a., at det bliver lettere at forstå symbolernes betydning, når de optræder i for-

bindelse med ikoniske diagrammer.

For at lave en ikonisk energibandsmodel, som f.ex. fig.9., må man selvfølgelig "tage energibriller på", når man ser på objektet, og se bort fra de træk, der er uvæsentlige for den energetiske funktion. Bortset herfra vil energibandsmodellen ofte have en slående billedmæssig lighed med objektet (især hvis objektet er en maskine med funktionalistisk design). I andre tilfælde, hvor energioverførslerne ikke finder sted i det sædvanlige fysiske rum, men i et mere abstrakt tilstandsrum, kan det være svært at se den billedmæssige lighed med objektet, men energibandsmodellen har alligevel en ikonisk karakter, fordi den kan ses som billede af analoge objekter med samme energetiske funktion.

Den næste fase i modelarbejdet er så en "påklædning" af den nøgne ikonmodel med indices og symboler. Vi har allerede på fig.8. set, hvorledes de to rate-variable, der gemmer sig i et energibånd, kan angives med signalindices, der angiver kausaliteten (input-output), og symboler, der skrives tæt ved de pågældende indices. Der mangler imidlertid én meget væsentlig ting ved energibåndets tegnsystem, nemlig en angivelse af orientering. Energioverførsel er jo en størrelse med retning i rummet, fra A til B eller omvendt. Orienteringen angives med en pil (fig. 10), og vi kan så supplere vores påstand nr. 4 med, at energioverførslen pr. tidsenhed  $R_A \cdot R_B$  sker i pilens retning.

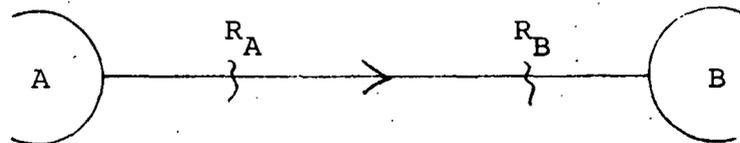


Fig. 10. Orientering af energibånd. Energioverførsel pr. tidsenhed:  $R_A \cdot R_B$  i pilens retning.

Hvis vi vender pilen i fig. 10, men lader symbolerne  $R_A$  og  $R_B$  være uændrede, fremstilles en anden fysisk situation,

idet energioverførslen pr. tidsenhed igen er  $R_A \cdot R_B$  (det samme tal som før), men nu den modsatte vej. Hvis vi derimod skifter fortegn på ét af symbolerne, f.ex. skriver  $-R_A$  i stedet for  $R_A$ , samtidigt med at pilen vendes, kan vi ikke længere være sikre på, at det er en anden fysisk situation, der fremstilles. For at kunne afgøre dette, er det nødvendigt at vide mere om karakteren af den rate variabel, der skiftes fortegn på.

vi har allerede fremsat den påstand, at alle rate variable tilhører enden x- eller o-typen. Lad os i denne generelle diskussion kalde x-rates for strømme og o-rates for spændinger (i den engelske litteratur om emnet benyttes betegnelserne flows (f) for x-rates og efforts (e) for o-rates). Energi-overførslen pr. tidsenhed,  $w = R_A \cdot R_B$ , repræsenterer en strøm af energi og må karakteriseres som en x-rate. Det betyder imidlertid, at af de to energibandsvariable  $R_A$  og  $R_B$ , må den ene være en spænding og den anden en strøm. Et produkt af to x-variable vil jo give en o-variable, og det samme vil et produkt af to o-variable.

Hvis vi på energibåndet angiver strømmen med et x og spændingen med en | (en o set fra siden), ser vi, at der er fire muligheder for indicering af et energibånd mellem system A og system B:

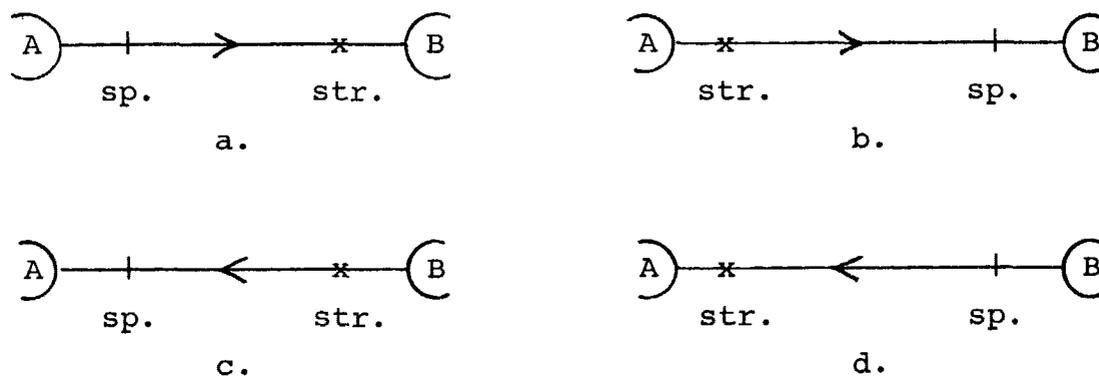


Fig. 11. De fire muligheder for indicering af orientering og kausalitet af et energibånd.

Vi har argumenteret for, at energistrømmens indbyggede "retning i tid" (d.v.s. at den er af x-typen) medfører at netop én af de to energibandsvariable også har "retning i tid" (nemlig strømmen). På lignende måde kan vi udnytte, at energistrømmen også har "retning i rum", idet den kræver en orientering af energibåndet. Vi kan så forvente, at enten strømmen eller spændingen (men ikke begge) på lignende måde har "retning i rum".

En afgørelse af dette spørgsmål hænger på et studium af de måleforskrifter, som gør sig gældende for strømme og spændinger i forskellige energetiske medier. Ser vi f.ex. på elektrisk energioverføring ved én spændingsførende ledning og en jordforbindelse (fig. 12), så er det helt åbenbart strømmen, som har "retning i rum", fordi den måles med et ampèremeter, som indsættes "på langs" i ledningen. Spændingen derimod, måles "på tværs" med et voltmeter, som indsættes mellem ledningen og jord. Strømme er "gennem-variable", medens spændinger er "tvær-variable" (fig. 13).

Med andre ord: Vi skal kende orienteringen af energibåndet før vi kan måle strømmen, hvorimod spændingsmålingen kan foretages uafhængigt af orienteringen.

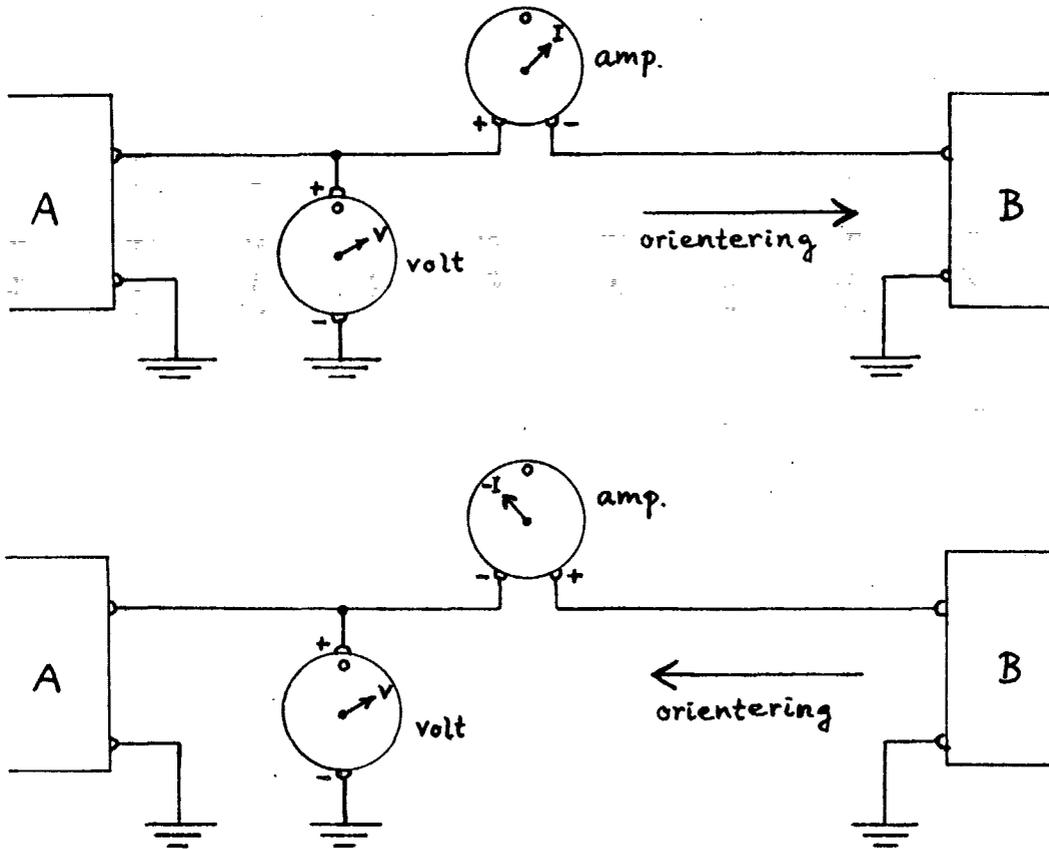


Fig. 12. Elektrisk energioverføring og måleforskrifter for strøm og spænding. Den samme fysiske situation anskuet med to forskellige orienteringer.

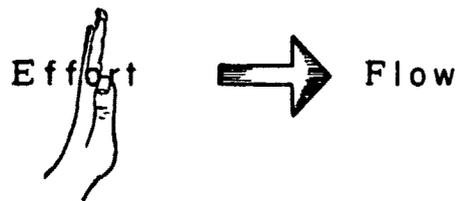


Fig. 13. Paynter's illustration af "tværvariable" og "gennemvariable".

Det er stadigvæk lidt af et åbent spørgsmål, om den samme betragtning: at det er strømmen, som må betragtes som "gennemvariabel" og derfor forbundet med orienteringen, kan gennemføres for alle mulige energetiske medier. Foreløbig må man sige, at det kan gennemføres og virker som det mest rimelige valg inden for den kendte fysik. Der ledes jo imidlertid stadig efter udvidelser af fysikken, og nogle af disse er uforenelige med denne betragtning. F.ex. er der nogle som tror på såkaldte "magnetiske monopoler", d.v.s partikler med magnetisk ladning. Hvis sådanne findes, vil det være et sikkert tegn på, at strøm/orienteringsreglen ikke er universel.

Der er imidlertid inden grund til her at hæfte sig ved sådanne esoteriske muligheder, så vi sammenfatter diskussionen i endnu en påstand:

Påstand nr. 5. *De to energibandsvariable kan karakteriseres som henholdsvis strøm (x-rate) og spænding (o-rate). Den samme fysiske situation kan beskrives med to forskellige orienteringer af energibåndet. Et skift af orienteringen skal så forbindes med et fortegnsskift på det symbolske udtryk for strømmen.*

Denne påstand fører til en sidste revision af energibåndets tegnsystem (fig. 11). Hvor vi før indicerede energistrømmens orientering med en pil og strømvariablen med et kryds, vil vi nu lade krydset og pilen smelte sammen til en pil, som både indicerer orientering og strøm. De fire situationer på fig. 11 kommer nu til at se sådan ud:

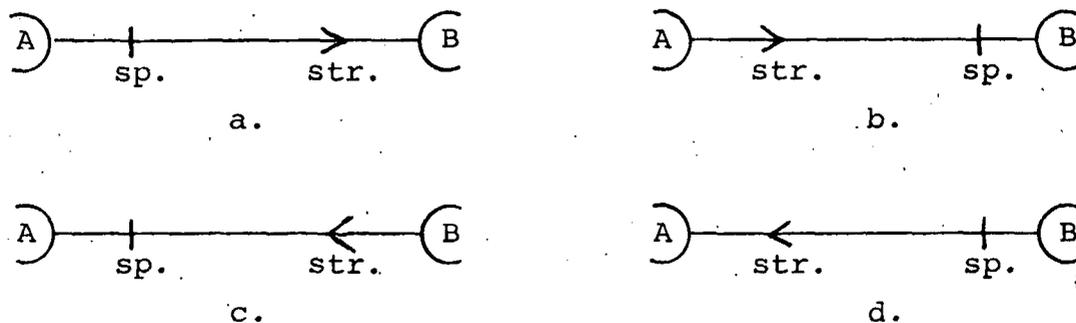


Fig. 14. Revision af tegnsystemet på fig. 11.

Reglen om fremstilling af samme fysiske situation med to forskellige orienteringer kræver angivelse af symbolske udtryk for strøm og spænding, som f.ex. på fig. 15.

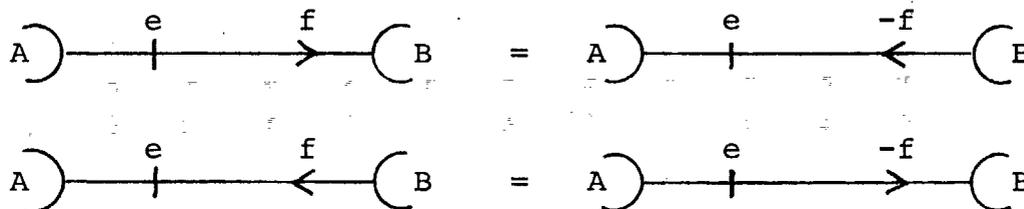


Fig. 15. Reglen om skift af orientering og fortegnsskift af strømsymbolet.

Strøm/orienteringsreglen hænger nøje sammen med, at energibandsvariablene er reelle (ikke komplekse) fysiske størrelser, som defineres operationelt med henvisning til måleforskrifter, som f.ex. i fig. 12. I en mere matematisk sammenhæng er man friere stillet m.h.t. interpretation af de størrelser som vores signalindices hentyder til. De kan beskrives ved mange slags matematiske begreber, såsom komplekse tal, vektorer, eller operatorer, og man må i hvert enkelt tilfælde tage strøm/orienteringsreglen op til fornyet overvejelse og evt. droppe den, eller erstatte den med en anden regel for skift af orientering. Vi skal dog ikke i denne sammenhæng interessere os for disse muligheder, men i stedet se på et par andre eksempler på, at strøm/orienteringsreglen er konsistent med måleforskrifter for energibandsvariable i de mest forskelligartede energetiske medier.

Eksempler på 5.

Eks. 5a) Et hydraulisk energibånd er et stift rør, fyldt med en usammentrykkelig væske, som formodes at kunne strømme gnidningsfrit gennem røret. Strømvariablen defineres som det væskerumfang, der per tidsenhed passerer et vilkårligt tværsnit i røret i en given retning. Denne vilkårligt valgte

retning er energibåndets orientering. Hvis vi beskriver den samme fysiske situation med den modsatte orientering, får strømvariablen den samme numeriske værdi, men det modsatte fortegn. Spændingsvariablen er væskens tryk, som kan måles med et manometer på røret. Spændingsvariablens værdi er uafhængig af den valgte orientering, og det viser sig i øvrigt for det hydrauliske energibånd (i modsætning til det elektriske på fig. 12), at spændingen altid er positiv. Hvis strømmen måles i  $m^3/sec.$  og spændingen i  $N/m^2$ , vil produktet af de to variable give energioverførslen pr. sekund i retning af den valgte orientering, målt i watt.

Eks. 5b) Et longitudinalt mekanisk energibånd kan realiseres ved en elastisk drivrem, som er udspændt over to lige store hjul. Vi kan tænke os, at drivremmen er bemalet med tværgående ækvidistante striber, før den bliver sat på hjulene. Hvis vi kender drivremmens elastiske modul, kan vi så til hver en tid måle den elastiske spænding ved blot at måle afstanden mellem striberne. Når drivremmen kører rundt og udfører arbejde vil det f.ex. kunne konstateres, at den er mere strakt foroven end forneden, m.a.o. oversiden er "højspændt" med en vis kraft  $K_h$ , medens undersiden er "lavspændt" med en vis kraft  $K_l < K_h$  (fig. 16). Spændingsvariablen for energibåndet kan så defineres som forskellen

$$e = K_h - K_l$$

og vi finder, ligesom for det hydrauliske energibånd, at spændingen altid er positiv. Strømvariablen  $f$  defineres ved, at vi vælger en orientering og så måler hastigheden af den lavspændte del af drivremmen i retning af denne orientering. Igen får vi overensstemmelse med strøm/orienteringsreglen. Hvis spændingen  $e$  måles i N og strømmen  $f$  i  $m/sec$ , vil produktet  $e \cdot f$  give energistrømmen i orienteringens retning, målt i watt.

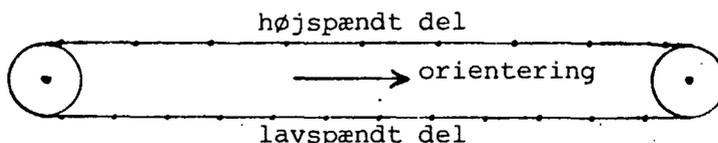


Fig. 16. Drivrem-energiebånd (longitudinalt-mekanisk).

Disse to eksempler viser bl.a. at man ikke skal tage fig.13 og den verbale formulering, at strømme er gennemvariable og spændinger er tværvariable, alt for bogstaveligt. Både Eks.5a og Eks.5b er rent longitudinale medier, hvor både strøm og spænding går på langs af energibåndet. Pointen er imidlertid, at strøm/orienteringsreglen holder alligevel. I det næste eksempel er både strøm og spænding tværvariable.

Eks.5c). Et transversalt mekanisk energibånd kan realiseres ved en torsionsfri, roterende aksel med tandhjul i enderne. Vi vælger en orientering, og får så defineret den positive omløbsretning som den, der sammen med orienteringen danner en højreskrue.

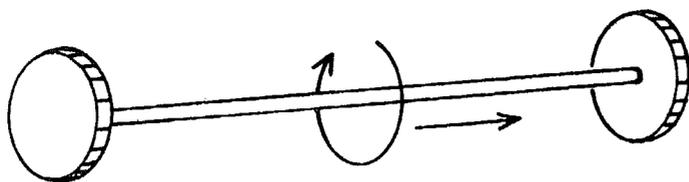


Fig. 17. Roterende-aksel-energiebånd (transversalt-mekanisk).

I princippet kunne vi lige så godt have brugt en venstreskrue som forbillede, men vi er nødt til at vælge én af disse muligheder og så holde os til den i fremtiden. Den fysiske tradition har lige siden H.C. Ørsteds "tommelfingerregel" foretrukket det højrevendte. Når vi således har fastsat den positive omløbsretning, kan vi definere strømvariablen som akslens vinkelhastighed den pågældende vej rundt. Strøm/orienteringsreglen vil så være opfyldt. Spændingsvariablen defineres som det kraftmoment (drejningsmoment, eng. torque), som akslen udfører på det system, orienteringsspil peger på, i henhold til den positive omløbsretning. Ved første øjekast kunne det se ud som om denne definition af spændingen er afhængig af den valgte orientering. Det overlades til læseren at finde ud af, at dette faktisk ikke er tilfældet. Et orienteringsskift medfører fortegnsskift af strømmen, men ikke af spændingen, når den fysiske situation er uændret. I dette tilfælde måles strømmen i  $\text{sec}^{-1}$  (radianer/sec), spændingen i  $\text{N}\cdot\text{m}$ , og energi-strømmen atter i watt.

### 3. Pragmatisme og reticulations-filosofi.

Jeg har i det foregående kapitel argumenteret for, at de tegn, som bygges op omkring begrebet "et energibånd" har et bredt fysisk betydningsindhold. I den fortsatte udbygning af tegnsystemet må vi hele tiden have for øje, at tegnenes betydning er givet ved deres relation til den eksperimentalfysiske praksis. På denne måde kan vi undgå, at falske ideologier kommer til at dominere vores fysiske teorier, og vi kan opnå, at de abstraktioner, som bygges op via tegnsystemet, bliver virkelige.

Ovenstående programerklæring for energibåndsteknikken er en form for pragmatisk begrebsrealisme, en filosofisk holdning, som er grundlagt af den førnævnte C.S. Peirce. [Biografi og udvalgte skrifter (på norsk): I. Gullvåg: "Charles Sanders Peirce", Pax Forlag, Oslo 1972.] Peirce's pragmatisme (i modsætning til den udvandede "her og nu" vulgærpragmatisme) bygger på en opfattelse af videnskabelig aktivitet som en uendelig følge af tegn, der udvikler og afløser hinanden. Der er ingen ende på denne aktivitet, og heller ingen absolut, endegyldig sandhed. Det eneste kriterium på sandheden af en teori er den praksis, de "vaner" og handlingsmønstre den afføder; men praksis er i stadig udvikling, og kan vurderes ud fra formål og hensigt. De begreber og "almene objekter", som indgår i den teoretiske aktivitet er virkelige i den udstrækning, de faktisk virker på andet eksisterende. (Den samme semantiske forbindelse, som vi på dansk finder mellem adjektivet "virkelig" og verbet "at virke" har vi på engelsk mellem adjektivet "actual" og verbet "to act").

Om den pragmatiske måde at forstå visse fysiske begreber på udtaler Peirce sig i følgende citat, som er polemisk vendt mod fysikeren Kirchhoff:

"I hvor mange dybsindige afhandlinger omtales ikke kraft

som en "mystisk størrelse", hvilket blot virker som en tilståelse af, at forfatteren har opgivet håbet om nogen-  
sinde at få en klar forestilling om, hvad ordet betyder. I et nylig udkommet, beundret arbejde om *Analytisk Mekanik* siges det, at vi klart forstår kraftens virkninger, men hvad kraft i sig selv er, forstår vi ikke! Dette er simpelt-  
hen en selvmodsigelse. Idéen som ordet kraft vækker i vor forstand har ingen anden funktion end at påvirke vore handlinger, og disse handlinger kan ikke have nogen reference til kraft på anden måde end gennem dens virkninger. Hvis vi ved hvad kraftens virkninger er, kender vi ethvert faktum som impliceres når det siges at en kraft eksisterer, og der er ikke noget mere at vide".

(Fra artiklen "How to Make Our Ideas Clear", *Popular Science Monthly*, 1878).

Energibåndsteknikken har til formål at sikre den pragmatiske gyldighed af fysiske teorier, ved at opbygge teorierne over et "byggesæt" af virkelige, generelle objekter. At de indførte abstraktioner eller generelle objekter er virkelige må begrundes med henvisning til eksperimentel naturvidenskabelig eller teknologisk praksis, ligesom vi i foregående afsnit diskuterede byggesættets grundlæggende element, energibåndet, med henvisning til måleforskrifter vedrørende drivremme og elektriske ledninger m.m.

Antallet af "brikker" eller standardkomponenter i et sådant byggesæt afhænger naturligvis af, hvor stor en klasse af systemer, vi vil beskrive. Hvis vi holder os til en bestemt disciplin, f.ex. hydraulik eller rheologi, kan vi klare os med ganske få brikker. Kombination af nogle flere discipliner kræver naturligvis nogle flere brikker. Hvis vi gradvist udvider synsvinklen i et forsøg på at dække hele den kendte fysik, ser det ud til, at antallet af nødvendige brikker ikke vokser i takt med udvidelsen af området, men konvergerer mod et ganske nøje bestemt sæt af brikker. Specielt kan det vises matematisk (ved kompleks funktionsteori), at et hvilket som helst lineært system (fysisk, kemisk eller biologisk) kan beskrives med vilkårlig stor nøjagtighed ved

hjælp af 12 veldefinerede standardkomponenter, incl. energibåndet. Disse 12 komponenter udgør det såkaldte basale byggesæt. Hvis vi kan beskrive en given lineær "black box" ved at konstruere en "white box", sammensat af elementer fra det basale byggesæt, som optræder identisk med den oprindelige black box i de samme fysiske sammenhænge, siger vi, at vi har gennemført en fuldstændig reticulation af objektet. Herom siger Paynter:

"The Latin form reti, meaning (fish)net, is the stem from which the word reticulation is derived. The verb, to reticulate means literally to make into or like a network. Hence, for our use, reticulation is a particularly vivid term to impart the idea of a conscious act of structuring in the form of a network. How better can a system be characterized than as a group of elements tenaciously bonded to one another as are the meshpoints of a net?"

Vi kan ikke forvente, at et vilkårligt system skal kunne reticuleres "fuldstændigt" ned til ikonerne for de tolv elementer i det basale byggesæt. Det er som sagt kun for lineære systemer, at det med sikkerhed kan lade sig gøre (beviset herfor er først formuleret af Jesper Gundermann). Energibåndsteknikkens store force ligger imidlertid i beskrivelsen af ikke-lineære systemer. Reticulation af sådanne systemer vil i reglen ende op med at indeholde "højere" ikoner, som umuligt eller kun vanskeligt lader sig reticulere "til bunds". Disse højere elementer kan imidlertid uden vanskelighed sammenbygges med det grundlæggende sæt, som indgår i alle modeller af en vis kompleksitet. Hvis de højere elementer vælges med omtanke, kan hvert nyt element afstedkomme en enorm udvidelse af energibåndsteknikkens anvendelsesområde. F.ex. ved tilføjelsen af ét nyt element, multi-port lageret, til det basale byggesæt, bliver teknikken i stand til at dække termodynamikken, den analytiske mekanik og hydrodynamikken. Endnu ét element, den såkaldte work-gate, åbner op for elektronikken, den kemiske reaktionskinetik og store dele af økologien. Så selv om opfindelsen

af nye energibåndselementer nok i princippet er en proces, der kan fortsætte i det uendelige, så har man i hvert tilfælde på nuværende tidspunkt mulighed for at dække naturvidenskabens mange discipliner med et endeligt og overskueligt antal energibåndselementer.

I nedenstående skema har jeg forsøgt at klassificere nogle naturvidenskabelige og teknologiske områder efter det antal energibåndselementer, som skal bruges i dem. Tallene har kun relativ betydning, bl.a. fordi visse elementer er meget nært beslægtede og i nogle sammenhænge regnes for identiske. De højere naturvidenskaber (langt nede i skemaet) indeholder i princippet alle de lavere, f.ex. er mekanikken indeholdt i økologien, og derfor må man forvente, at alle mekanikkens energibåndselementer kan indgå i økologiske modeller. Noget andet er, at de som regel ikke gør det; bl.a. optræder x-levels kom sjældent i en økologisk sammenhæng. Skemaet er opdelt med en vandret streg, således at de discipliner, som kun benytter det basale byggesæt, er over strengen, mens disciplinerne under strengen må benytte ét eller flere højere elementer.

hydraulik	7	}	kun basale elementer
lineære jævnstrøms netværk	8		
rheologi	9		
longitudinal mekanik	9		
lineære vekselstrøms netværk	10		
transversal mekanik	12		
lineær response teori	12		
<hr/>			
nytilkommende:			
analytisk mekanik	13	}	multiport lager
termodynamik	13		
hydrodynamik	13		
elektronik	14	}	work gate
enzymkinetik	14		
økologi	flere end 14		

Inden for de fleste discipliner er der i forvejen udviklet mere eller mindre standardiserede diagramsprog, som f.ex. elektriske diagrammer med ikoner for kondensatorer, transformatorer og modstande; rheologiske med ikoner for fjedre og stempler; økologiske energy-flow diagrammer, hvor energistrømme til forskellige "nicher" afbildes som kanaler, hvis bredde er proportional med energistrømmen. Energibåndsteknikkens semiotiske system kan opfattes som et metasprog for sådanne diagramteknikker, som gør det muligt at fremhæve analoge træk ved systemer inden for de forskellige discipliner. Sagt på en anden måde: energibåndsteknikken er et referencesprog for analog programmering. (Her tænkes ikke specielt på analogregnemaskiner, men på simulation ved analoge systemer i almindelighed).

Et andet væsentligt træk ved teknikken kan så formuleres ved at sige, at den også er et referencesprog for digital programmering. Angivelsen af kausalitet ved rækkefølgen af energibåndenes signaltegn ( $\rightarrow$  eller  $\leftarrow$ ) tjener til ordning af de dynamiske variable i et beregningssskema. En energibandsmodel fører i sidste instans ikke til et sæt ligninger i sædvanlig forstand, men til en algoritme, d.v.s. et ordnet sæt af beregningsforskrifter, som evt. kan udføres af en datamat.

Sædvanligvis formuleres fysiske modeller ved hjælp af ligninger " $a = b$ ", som er statiske identiteter uden kausalitet. F.ex. siger Newton's anden lov: " $m \, dv/dt = F$ " uden at angive, om vi først skal kende hastigheden som funktion af tiden og derefter beregne kraften ved differentiation, eller om vi først skal kende kraften og derefter beregne hastigheden ved integration. I dynamisk systemteori incl. energibåndsteknik er det som bekendt den sidste beregningsforskrift "integral kausalitet", der betragtes som "den rigtige", sml. skemaet på fig.5. Energibandsformalismen tillader dog i visse tilfælde den første forskrift, som kaldes "differentiel kausalitet". At det er den integrale kausalitet, som er "den mest rigtige", kan begrundes på to væsensforskellige måder:

a. Datalogisk argument: Numerisk differentiation er vanskelig at udføre præcist. Størrelsen  $dv/dt$  må beregnes som en differenskvotient  $\Delta v/\Delta t$ , hvor  $\Delta t \rightarrow 0$ , men i den teoretiske grænse er det i praksis umuligt at beregne differenskvotienten p.g.a. ciffertab i maskinen. I modsætning hertil er numerisk integration i praksis let at lave med meget høj præcision. Altså et renlivet pragmatisk argument til fordel for den integrale kausalitet.

b. Fysisk argument: Hvis vi observerer hastigheden  $v(t)$  og vil beregne differentialkvotienten  $dv/dt$  lige nu, kl.  $t$ , skal vi i princippet kende  $v(t - \frac{\Delta t}{2})$  og  $v(t + \frac{\Delta t}{2})$ , men den sidste størrelse kender vi ikke, da vi ikke kan se ind i fremtiden. Desuden findes i fysikken udmærkede modeller for bevægelsen af en partikel, hvor hastigheden  $v(t)$  nok er kontinuert, men ikke differentiabel. Et eksempel herpå er Einstein's og Smoluchowski's teorier for Brownske bevægelser. I modeller af den type er differentiell kausalitet principielt udelukket, hvorimod integral kausalitet altid kan gennemføres. Altså igen et pragmatisk argument, omend knap så "hårdkogt" som det datalogiske.

Fordelen ved den pragmatiske argumentation for energibåndsteknikkens kausalitetsbegreb er, at man slipper for en masse filosofisk sludder. F.ex. har Bertrand Russell argumenteret (meget skarpsindigt) for, at kausalitetsbegrebet forlængst er afgået ved døden i fysikken og ikke bør genoplives; der findes kun ligninger, siger han, og når to fysiske størrelser er identiske, ifølge en eller anden ligning, som udtrykker en naturlov (eller en konstitutiv relation), så har det ingen mening at spørge om, hvilken størrelse, der er årsag, og hvilken, der er virkning. Det er selvfølgelig rigtigt argumenteret, og ville være helt rigtigt, hvis fysikken ikke var andet end at stille ligninger op; men praksis (eksperimentel og teoretisk) er langt mere omfattende og kræver bl. a. nogle idéer om styring og kontrol i en given fysisk situation. Det er nødvendigt med både et fysisk kausalitetsbegreb til beskrivelse af kontrolforhold i laboratoriet og en

datalogisk kausalitet til angivelse af beregningsgangen i en numerisk model. Det ideelle må være, at et modelsprog er i stand til at udtrykke den fysiske og den datalogiske kausalitet, således at den sidste underordnes den første.

I princippet må det derfor være muligt for nogle (omend ikke for alle) energibånd i en model at angive fysiske målefor-skrifter til bestemmelse af kausaliteten. Som eksempel på dette ser vi på en jævnstrømsgenerator  $G$ , som kan forbindes med en belastning  $B$  (f.ex. en modstandskasse) via et energi-bånd med strømvariabel  $f$  og spændingsvariabel  $e$ . Oriente-ringen af båndet vælges, så den peger fra  $G$  mod  $B$ . Vi kan nu først måle de stationære strøm/spændingskarakterstikker ( $e$  som funktion af  $f$ ) for  $G$  og  $B$  hver for sig, inden vi kobler dem sammen. Vi vil da finde, at  $e(f)$  for  $G$  er en af-tagende funktion, og af  $e(0)$  har en endelig værdi. Værdien  $e(0)=V$  for  $G$  udtrykker styrken af en spændingskilde, der gemmer sig inden i  $G$ . Vi kan tænke os, at der sidder en knap på generatorkassen, hvormed vi kan ændre værdien  $V$ . Hvis vi drejer knappen, så  $V$  får en større værdi, og derefter må-ler dc-karakteristikken  $e(f)$  for  $G$  igen, finder vi en kurve, der som helhed ligger højere end den første. For belast-ningen  $B$  finder vi en dc-karakteristik  $e(f)$ , som er en vok-sende funktion. Indtegnes de to karakteristikker i samme  $f$ - $e$  diagram, vil de have et skæringspunkt  $P$ , som giver os de stationære værdier af  $e$  og  $f$  i energibåndet, når  $G$  og  $B$  er sammenkoblede.

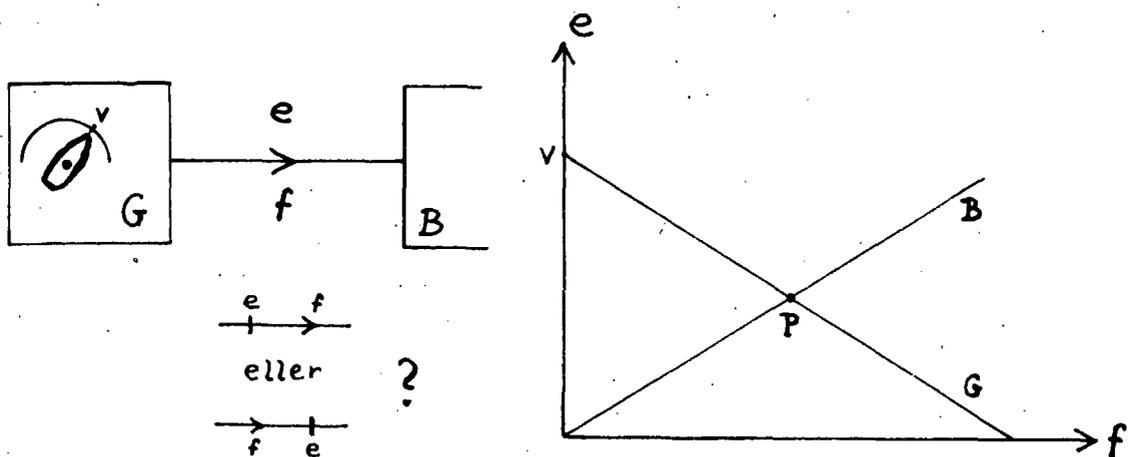


Fig.18. Dc karakteristikker og stationært arbejds punkt for generator ( $G$ ) og belastning ( $B$ ).

Når vi nu har sikret os, at energibåndet er stationært i punktet P, stiller vi lynhurtigt kildespændingen op på en højere værdi  $V+\Delta V$ . Vi kan så f.ex. på et oscilloskop følge det transiente (d.v.s. forbigående) forløb af punktet (f,e), til det ender i det nye stationære arbejds punkt. Vi vil da i reglen kunne se, at punktet ikke bevæger sig direkte mod den nye ligevægt, men udfører en drejende bevægelse, i mange tilfælde endda en spiral, som gradvist snævrer sig sammen (fig. 19). Hvis den drejende bevægelse går mod uret (fig 19.a), er det tegn på, at strømsignalet kommer først i det energisignal, som løber fra G til B, og vi skal da have strøminput til B. Omvendt, hvis drejningen går med uret, som på fig 19.b, skal vi vælge kausaliteten med spændingsinput til B.

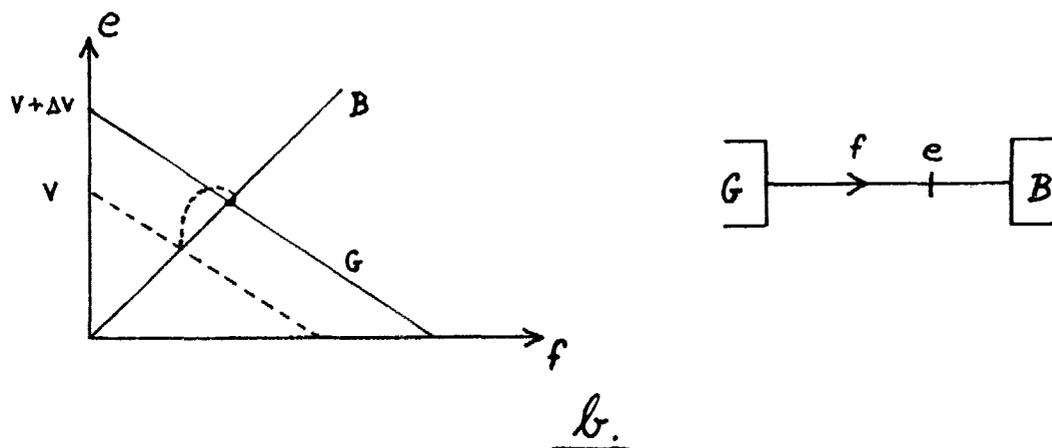
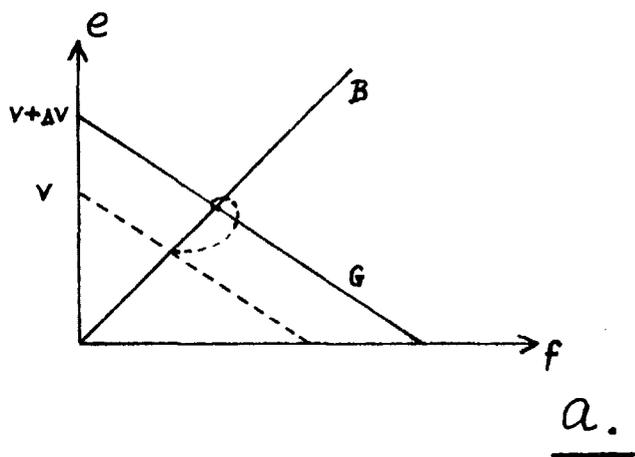


Fig.19. Fastsættelse af energibåndskausalitet ved måling af transienter.

Man kan måske få det indtryk af denne diskussion, at energibånds-kausalteten kun eksisterer og har mening for transienter og ikke for en stationær situation. Det er på en måde også rigtigt, men på den anden side kan man hævde, at en helt stationær situation aldrig kan opnås i fysiske systemer på grund af de allestedsnærværende termiske fluktuationer. Hvis vi kigger nøje på et "stationært" arbejds punkt, vil vi altid finde "Brownske bevægelser" eller støj. En fornuftig dynamisk teori må være i stand til at behandle tilfældige input til systemerne og de deraf følgende transienter, og heraf udspringer nødvendigheden af et fysisk kausalitetsbegreb.

#### 4. Basale toporte.

Som det første af de basale elementer ser vi på den ideelle transformator, bl.a. fordi dette element er velegnet til at illustrere brugen af de semiotiske kategorier (ikoner, indices, symboler) i matematisk-fysiske definitioner.

En elektromagnetisk transformator, som udnytter gensidig induktion, er formodentlig velkendt, og vi skal ikke her diskutere i detaljer, hvordan den virker, men kun dens ideelle funktion. Vi har en primær port og en sekundær port, og forholdet mellem spændingerne i de to porte har en konstant værdi. En ideel transformator vil hverken oplagre eller dissipere energi, d.v.s. energistrømmen ind til primærporten skal være det samme som energistrømmen ud af sekundærporten. Det følger heraf, at forholdet primærstrøm/sekundærstrøm må være det samme som forholdet sekundærspænding/primærspænding, hvis vi vælger orienteringerne ind mod primærporten og væk fra sekundærporten. Vi vil betegne dette omsætningsforhold med symbolet  $T$ , og tegne transformatoren som en ligebenet trekant, hvor primærporten sidder på grundlinjen og sekundærporten i spidsen overfor:

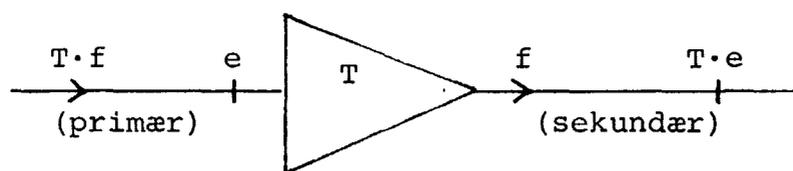


Fig. 20. Ideel transformator med omsætningsforholdet  $T$ .

På fig. 20 er indiceret spændingsinput  $e$  til transformatoren på primærsiden. Sekundærspændingen er da givet som  $T \cdot e$ , d.v.s. spændingen er output på sekundærsiden. Det følger heraf, at sekundærporten har strøminput, så hvis sekundærstrømmen kaldes  $f$ , må vi have strømmen  $T \cdot f$  som output på primærsiden.

Læg mærke til flg. system i brug af semiotikken, som går igen i alle definitionerne:

a. Vi starter med at tegne et ikon med tilsluttede energi-bånd, som med sin form udtrykker symmetrien eller asymmetrien af den operation, vi vil beskrive. (Transformatoren har en primærside og en sekundærside, som må kunne skelnes fra hinanden, og derfor kan vi f.ex. ikke afbilde den med en cirkel).

b. Hvis elementet har en parameter (omsætningsforholdet for transformatoren), vælger vi et symbol for denne (T) og skriver symbolet tæt ved elementets ikon. Herved kommer ikonet til at levere den konvention, som skal til for at forstå symbolets betydning. (Hvis vi bruger S i stedet for T i transformatorikonet, så har dette S nøjagtigt samme betydning som T'et havde). Et element kan godt have flere parametre, som så får hver sit symbol.

c. Orientering og kausalitet indiceres med signaltegn ( $|$  og  $\rangle$ ).

d. Vi vælger symboler (og evt. indices) for input-variablene i de forskellige porte og skriver disse symboler tæt ved de signalindices, som repræsenterer de pågældende variable, d.v.s. de indices ( $|$  og  $\rangle$ ), som er nærmest ved elementets ikon. Sædvanligvis benyttes 'e' for spændingsvariable (evt.  $e_1, e_2, \dots$ ) og 'f' for strømvariable (evt.  $f_1, f_2, \dots$ ), men i princippet kunne vi lige så godt benytte f.ex. V'er for spændinger og I'er for strømme, eller noget helt tredje. Det vigtige er blot, at symbolerne kan skelnes fra hinanden, så vi ikke kommer til at forveksle to forskellige fysiske variable. Strengt taget burde vi nok kalde disse tegn for "symbolske indices" idet de først og fremmest tjener til at skelne mellem variablene. Signaltegnene  $|$  og  $\rangle$ , som repræsenterer de samme størrelser, kan så kaldes "ikoniske indices" på grund af deres billedmæssige karakter, jfr. fig. 13.

e. Output-variablene, som repræsenteres ved de signaltegn, der er fjernest fra elementets ikon, kan nu udtrykkes ved hjælp af symbolerne for forskellige matematiske operationer (f.ex. +,  $\cdot$ , sin), samt de symbolske indices for input-variablene og symbolerne for elementets parametre. Herved fås symbolske udtryk for output variablene, som så skrives tæt ved signaltegnene for de pågældende variable. Det færdige diagram vil nu give en definition af elementets funktion. (For trans-

formatoren på fig. 20 har vi brugt symbolet  $T$  for omsætningsforholdet, og for input variablene har vi brugt de symbolske indices  $e$  for primærspændingen og  $f$  for sekundærstrømmen. De symbolske udtryk for output variablene er så  $T \cdot e$  for sekundær spændingen og  $T \cdot f$  for primærstrømmen).

På fig. 21 vises nogle andre måder at tegne transformatordefinitionen på. Iflg. ovenstående diskussion er det nøjagtig den samme definition som på fig. 20, der går igen i alle billederne.

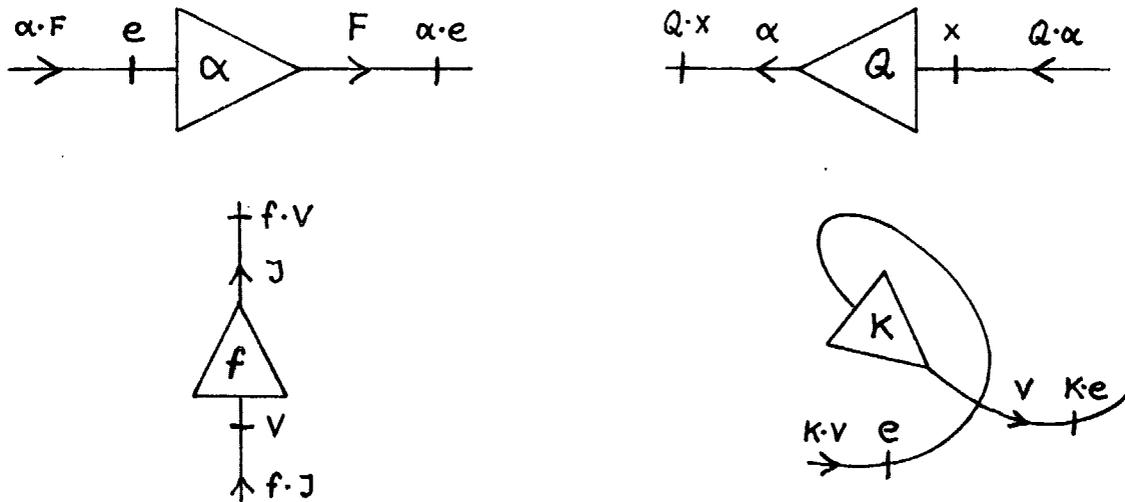


Fig. 21. Fire forskellige tegninger af den samme transformatordefinition som på fig.20.

Fælles for de forskellige fremstillinger af transformatordefinitionen på fig. 20 og 21 er valget af orientering og kausalitet (pkt. c i diskussionen ovenfor). Vi har overalt valgt orientering i retningen fra primærsiden til sekundærsiden, og vi har valgt kausalitet med spændingsinput på primærsiden. Vi har tidligere været inde på, at orienteringen er en konvention, som kan vælges frit i hvert enkelt bånd i en model, men når vi skifter orientering, skal vi samtidig skifte fortegn på strømsymbolet, hvis det er den samme fysiske situation, vi vil beskrive. Altså kan vi omforme fig. 20 på flg. måder:

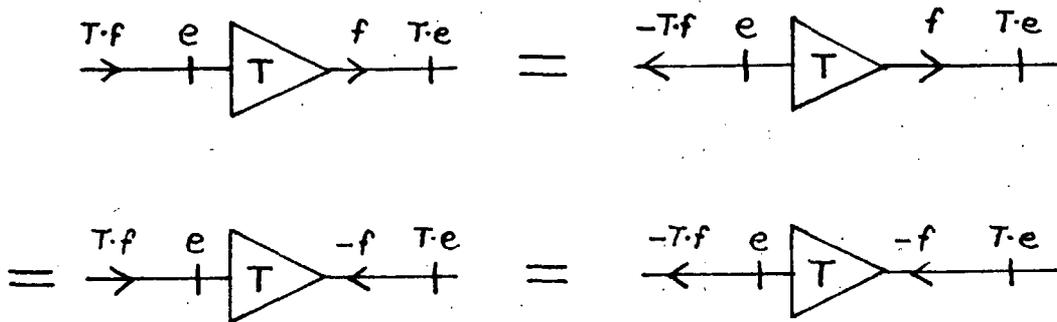


Fig. 22. Ændringer af orienteringen i transformatordefinition.

Hvis vi nu i det sidste af diagrammerne på fig. 22 ændrer symbolet for sekundærstrømmen fra '-f' til 'f' uden at ændre orienteringen, så bliver det en anden fysisk situation, vi beskriver, men det er stadigvæk den samme transformator! Flg. transformatordefinition (fig. 23) siger derfor det samme (om transformatoren) som fig. 20, selv om den beskrevne fysiske situation er en anden.

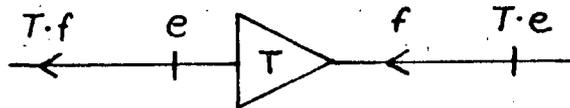


Fig. 23. Samme definition som på fig 20, selv om energistrømmen er vendt.

Efter nu at have klaret orienteringsspørgsmålet vender vi os til kausaliteten. Hidtil har vi haft spændingsinput på primærsiden, men der er ikke spor i vejen for at vælge strøm-input. Der er jo ikke nogen principiel forskel på primærsiden og sekundærsiden. Ordene "primær" og "sekundær" fungerer blot som indices, der hjælper os til at skelne to forskellige sider af objektet fra hinanden. Vi har lov til at bytte om på betegnelserne, så når vi før havde strøm-input på sekundærsiden, har vi nu strøm-input på primærsiden, selv om den fysiske situation kan være nøjagtig den samme. Transformatorens omsætningsforhold er jo defineret som forholdet

sekundærspænding/primærspænding (eller primærstrøm/sekundærstrøm), så når vi bytter om på betegnelserne "primær" og "sekundær", må vi samtidig omdefinere omsætningsforholdet, så det får den reciprokke værdi af det, det havde før. Vi sammenfatter denne diskussion på fig. 24, som så, sammen med fig. 20 giver den fuldstændige definition af grundelementet "den ideelle transformator".

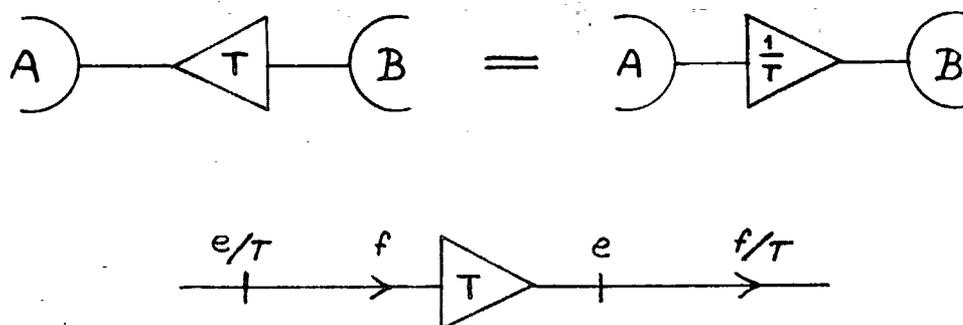


Fig. 24. Transformatordefinition. Supplerer fig. 20.

Et energibånd kan også kaldes en "ideel transmitter" for energi, og ordet "ideel" betyder her, ligesom for transformatoren, at der hverken oplagres eller dissiperes energi. Sådanne ideelle elementer kan kun med tilnærmelse realiseres med fysiske genstande i et laboratorium, men de er nyttige abstraktioner, som har betydning for konstruktionen af fysiske komponenter, og som sådanne kan man hævde, at de er virkelige (i samme forstand som begrebet "en ret linie", der jo heller ikke er det samme som en streg på et stykke papir, men alligevel kan være bestemmende for den praksis at tegne en streg). Hvis vi vil lave en mere nøjagtig beskrivelse af en forelagt reel transformator eller reel transmitter kan vi gøre det med en energibandsmodel, hvor det tilsvarende ideelle element optræder "påklædt" med andre elementer fra det basale byggesæt, bl.a. lagre og lække, der skildrer hhv. oplagring og dissipation af energi.

Inden vi går videre med grundelementerne skal vi se på et specialtilfælde af den ideelle transformator. Jeg startede

med at begrunde valget af det trekantede ikon ved at sige, at vi må kunne skelne mellem primærsiden og sekundærsiden ved hjælp af ikonets form. Et blik på fig. 24 viser, at asymmetrien kun er berettiget, hvis omsætningsforholdet  $T$  er forskelligt fra den reciproke værdi  $1/T$ . Ligningen  $T = 1/T$  har de to løsninger  $T = 1$  og  $T = -1$ . Hvis  $T = 1$  er der slet ingen grund til at tegne transformatoren, for dens virkning vil ikke kunne skelnes fra en ideel transmitter, altså et enkelt energibånd, der går lige igennem. Tilfældet  $T = -1$  kræver imidlertid et specielt ikon, som kaldes den symmetriske transformator og er defineret på fig. 25.

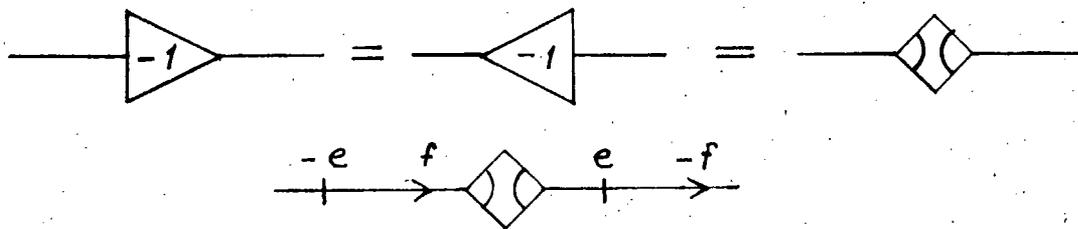


Fig. 25. Den symmetriske transformator.

Transformatoren er et forholdsvis eksklusivt element, som ikke kan realiseres inden for alle medier. I et elektrisk byggesæt, hvor energibåndene f.ex. kan være coaxialkabler, kan man godt nok lave en transformator ved at udnytte den gensidige induktans mellem to spoler med jernkerne, men en sådan transformator virker som bekendt kun for vekselstrømme (hvilket netop er grunden til at jævnstrøms energiforsyning er gået af mode). En induktiv jævnstrømstransformator kan laves, men er et meget avanceret produkt, som kræver supraledere med dertil hørende kompliceret afkølingsteknologi. I et longitudinalt mekanisk "drivrem-byggesæt" (fig. 16) kan man godt nok lave en jævnstrømstransformator (med en drivrem over to hjul med forskellig radius), men kun med positivt omsætningsforhold, fordi spændingsvariablene jo altid er positive. Den symmetriske transformator kan altså ikke realiseres i et drivrem-byggesæt og af samme grund heller ikke i et hydraulisk byggesæt. I et transversalt mekanisk byggesæt med roterende-aksel-energiebånd (fig. 17)

er det derimod let at lave jævnstrømstransformatorer med vilkårlige omsætningsforhold, også negative (hvilket bl.a. kan demonstreres ved, at en bil kan sættes i back-gear).

Den ideelle transducer er et grundelement, som er nært beslægtet med transformatoren. Den tegnes og defineres på samme måde, men i modsætning til transformatoren kan den ikke realiseres inden for noget specifikt byggesæt. Transduceren beskriver nemlig en omsætning fra én energiform til en anden og er altså en "interface" enhed, der tjener til sammenkobling af forskellige byggesæt. F.ex. kan vi have en transversalt mekanisk primærport og en longitudinalt mekanisk sekundærport som i styretøjet på en bil. Eller vi kan have en dampstrøm på primærsiden og en roterende aksel på sekundærsiden som for en damp turbine. Eller et æsel, der går i ring på primærsiden og en vandstrøm i en overrislingskanal på sekundærsiden. Transducerens omsætningsforhold er en størrelse med dimension, idet strømme og spændinger i de to forskellige medier måles i forskellige fysiske enheder. (En transformator kan evt. karakteriseres som en dimensionsløs transducer).

En helt anden type transducer, som blev "opdaget" af den store netværksteoretiker B.D.H.Tellegen, er den såkaldte gyratoriske transducer, eller gyratoren. I modsætning til transformatorer og transducere er omsætningsforholdet for en gyrator et forhold mellem energibåndsvariable af forskellig type, altså enten sekundærspænding/primærstrøm eller sekundærstrøm/primærspænding. Hvis en gyrator har strøminput på primærsiden, har den altså spændingsoutput på sekundærsiden, og omvendt. D.v.s. en gyrator har enten strøminput i begge porte, eller spændingsinput i begge porte. Hvis vi holder fast ved den semiotiske regel, at ikonet for et element tjener til at definere betydningen af symbolet for elementets parameter (omsætningsforholdet), får vi brug for to forskellige ikoner. (Tellegen og Paynter regner kun med én slags gyrator) Her skelnes mellem en strømgyrator (eller x-gyrator) som har strøminput i begge porte, og en spændingsgyrator (eller o-gyrator), som har spændingsinput i begge porte.

Definitionerne er givet på fig. 26.

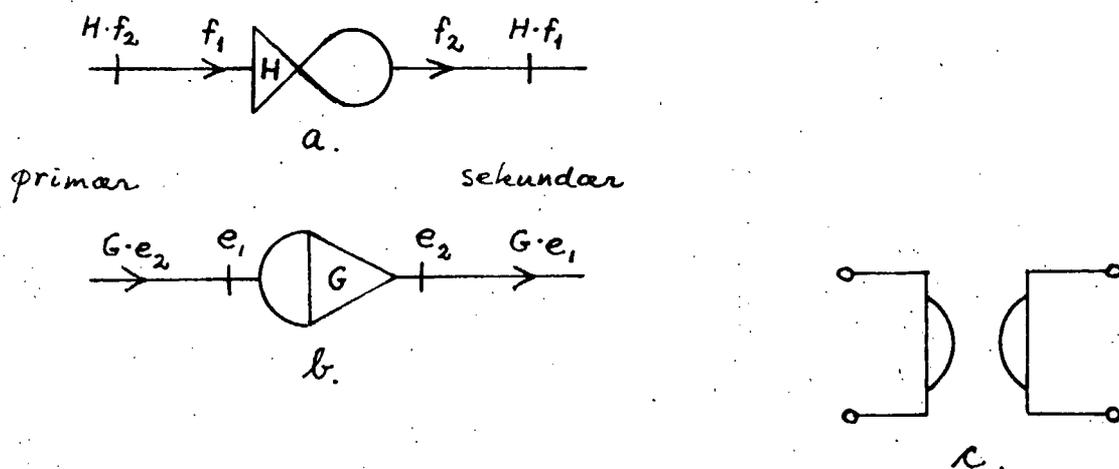


Fig. 26. Gyrotorer. a: strømgyrator (x-gyrator)  
 b: spændingsgyrator (o-gyrator)  
 c: gyratorikon for elektriske netværksdiagrammer  
 (Tellegen).

Gyrotorer er yderst eksklusive elementer, som er umulige at lave i de fleste simple byggesæt, undtagen transversalt mekaniske (gyroskoper) og elektromagnetiske (Hall effekt). I naturlovene optræder x-gyratoren i forbindelse med ladede partiklers bevægelse i et magnetfelt (Lorentz kraften), ved bevægelse i et roterende koordinatsystem (Coriolis kraften) og i de stive legemers mekanik (Euler ligningerne). Den anden gyratorfunktion, o-gyratoren, optræder slet ikke i de grundlæggende klassiske naturlove, men dukker frem et godt stykke oppe i termodynamikken (Leduc-Righi effekten, som beskriver "varmepræcession" i et magnetfelt). En spændingsgyrator kan simuleres med en påklædt strømgyrator i en lavfrekvent grænse. Således beskrives den langsomme præcession af en hurtigt roterende snurretop ved en o-gyrator, hvor primærporten beskriver snurreaksens bevægelser i en lodret plan og sekundærporten de vandrette bevægelser.

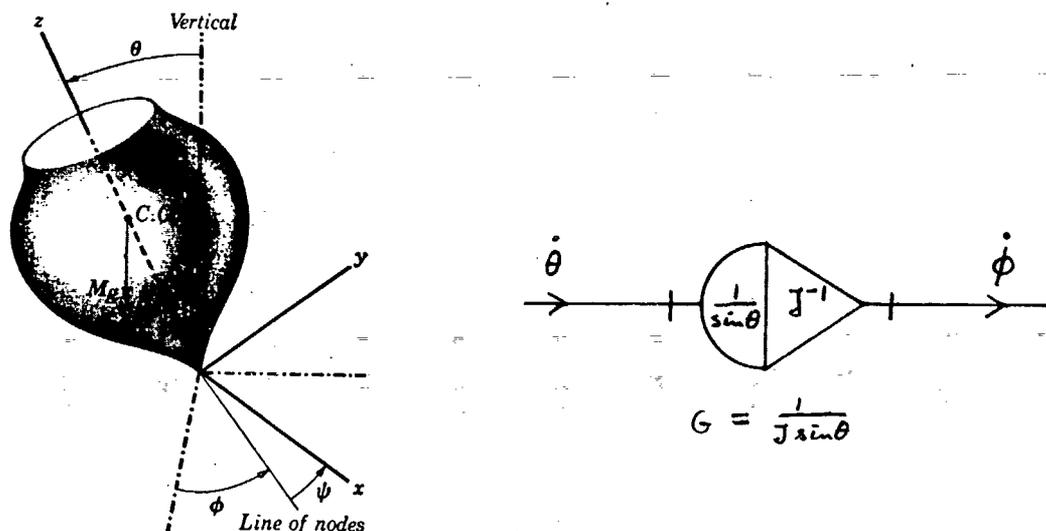


Fig. 27. Idealiseret gyratorfunktion af en snurretop.  
 $J$  er snurrens impulsmoment. (ref.9).

Fælles for transformatorer, transducere og gyratorer er, at de har to porte, og at elementet definerer to såkaldt dyadiske relationer mellem energibandsvariable i to forskellige porte. En dyadisk relation (Peirce's terminologi) sammenknytter to variable; vi skal senere se eksempler på triadiske (tre variable) og monadiske (én variabel) relationer, som kan formuleres for energibandsvariable ved hjælp af elementerne i det basale byggesæt.

Alle de relationer som byggesættet (undtagen kilderne) frembærer kan formuleres akausalt, ved hjælp af ligninger, eller de kan formuleres kausalt, som input-output relationer. En fysisk model fremtræder som oftest i lærebøgerne i en akausal formulering, f.ex. i form af et sæt differentiallyigninger. Den numeriske behandling kræver så et sæt begyndelses- eller randværdier, og herved fremtvinges en bestemt orden i beregningsgangen, således at de oprindelige akausale ligninger ender med at blive formuleret som kausale input-output relationer. Det er altså uundgåeligt at ligningssystemer gøres kausale (i datalogisk forstand), hvis de skal løses numerisk, men det er desværre ganske normalt, at den datalogiske "kausalisering" betragtes som noget helt løsrevet fra fysisk

praksis (jvf. diskussionen i kapitel 3). Forskellige diagramteknikker, bl.a. energibåndsformalismen, bygger på den opfattelse, at kausaliseringen bør ske i en tidlig fase af modelarbejdet og så vidt muligt bør begrundes ved fysiske betragtninger (kontrolforhold i laboratoriet o.l.). Herved kan man bl.a. gøre sig håb om at opnå, at den numeriske stabilitet af modellen kommer til at afspejle den fysiske stabilitet af systemet.

Som eksempel ser vi på den dyadiske ligning  $y = 5 \cdot x$ . Når denne ligning kausaliseres, er der to muligheder: Enten betragter vi  $x$  som input og skal så udføre operationen "at gange med 5", hvorved vi får bestemt output variabelen  $y$ ; eller også har vi  $y$  som input og finder  $x$  som output ved at dividere med 5. De to forskellige situationer fremstilles ved hjælp af orienterede signalrute diagrammer som vist på fig. 28.

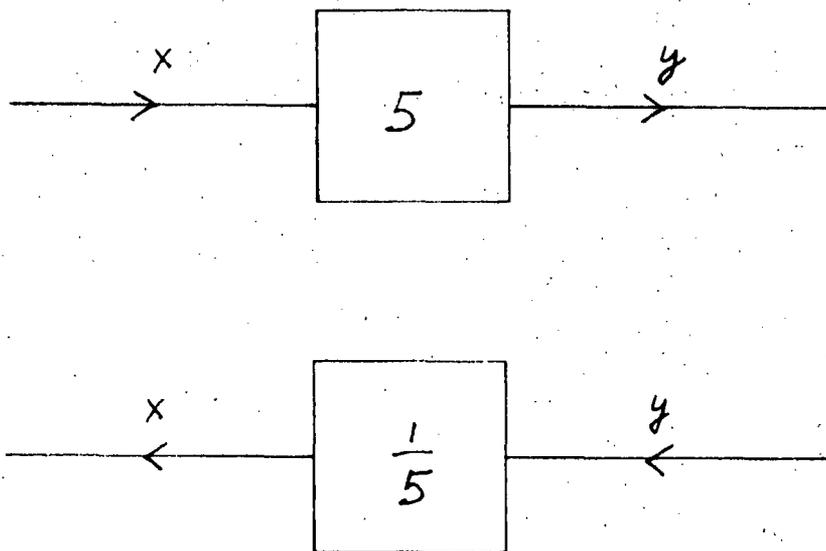


Fig. 28. De to signalrute diagrammer for ligningen  $y = 5x$ .

Vi kan nu på tilsvarende måde lave signalrute diagrammer for en ideel transducer (eller transformator) med omsætningsforholdet  $T$ . Der bliver i alt fire muligheder, fordi vi kan have enten spændingsinput eller strøminput på primærsiden, og vi kan have samme orientering eller modsat orientering i de to bånd:

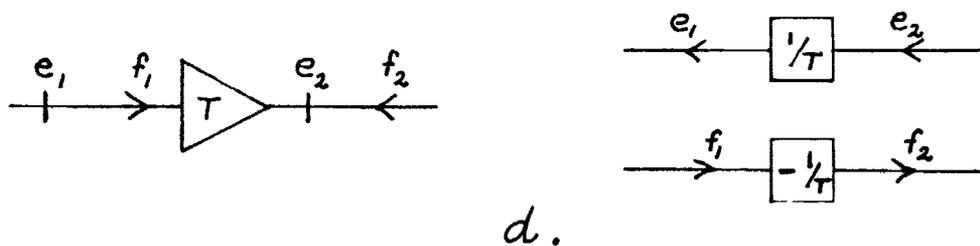
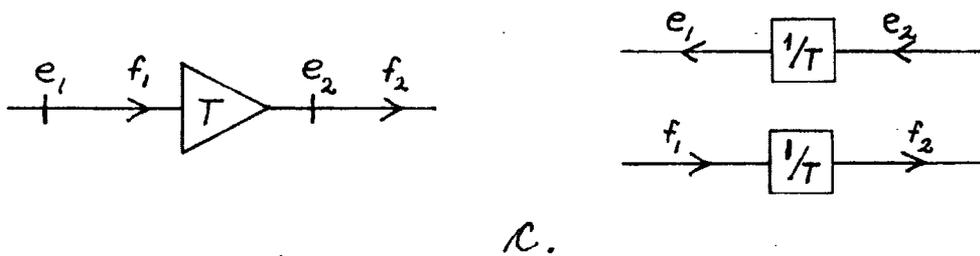
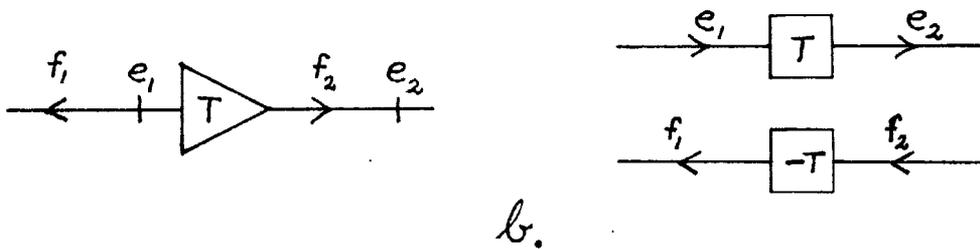
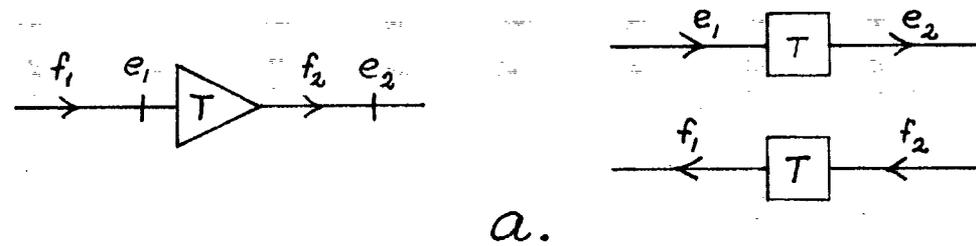


Fig. 29. Den ideelle transducerfunktion oversat til signalrute diagrammer.

På den næste figur vises x-gyrotorfunktionens signalrute-  
diagrammer. Skrivemåden er simplificeret en smule, idet  
vi nøjes med at angive båndnumre og ikoniske signalindices  
( | og > ) på energibandsgraferne, medens vi bruger symbol-  
ske indices,  $e_1$  og  $e_2$  for spændinger,  $f_1$  og  $f_2$  for strømme,  
til at betegne de samme størrelser i signalrutediagrammerne.

Prøv selv at gennemføre diskussionen for o-gyrotoren.

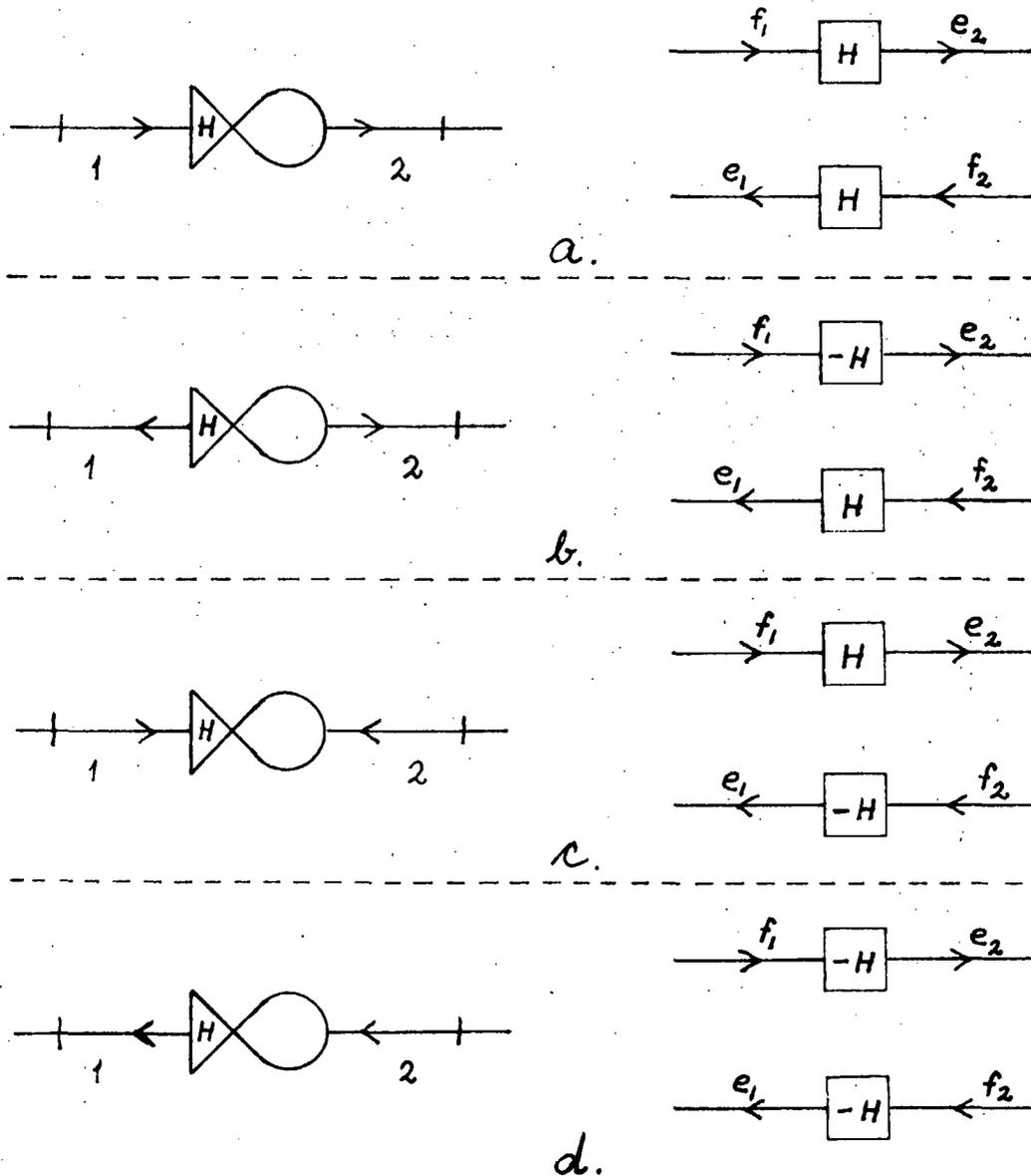


Fig. 30. x-gyrotor med signalrute diagrammer.

Læg mærke til, at et energibånd i signalrute fremstillingen altid beskrives ved to signaler, som bevæger sig i modsatte retninger. Signalretningerne har ikke noget at gøre med orienteringen af energibåndet, men med rækkefølgen af signaltegnene: Det signal, som indiceres længst til højre, har retning mod højre, og omvendt.

Da transducere og gyratorer er to-porte, vil vi ved sammensætning af flere af dem (kaskadekobling) altid få en ny to-port. Vi kan også udtrykke det i Peirce's relationslogiske sprog: Sammensætning af dyadiske relationer fører til en ny dyadisk relation. Samlingen af transducere og gyratorer med operationen kaskadekobling udgør i matematisk forstand en gruppe. Samlingen af transducere alene er en kommutativ undergruppe. På fig. 31 vises nogle regneregler:

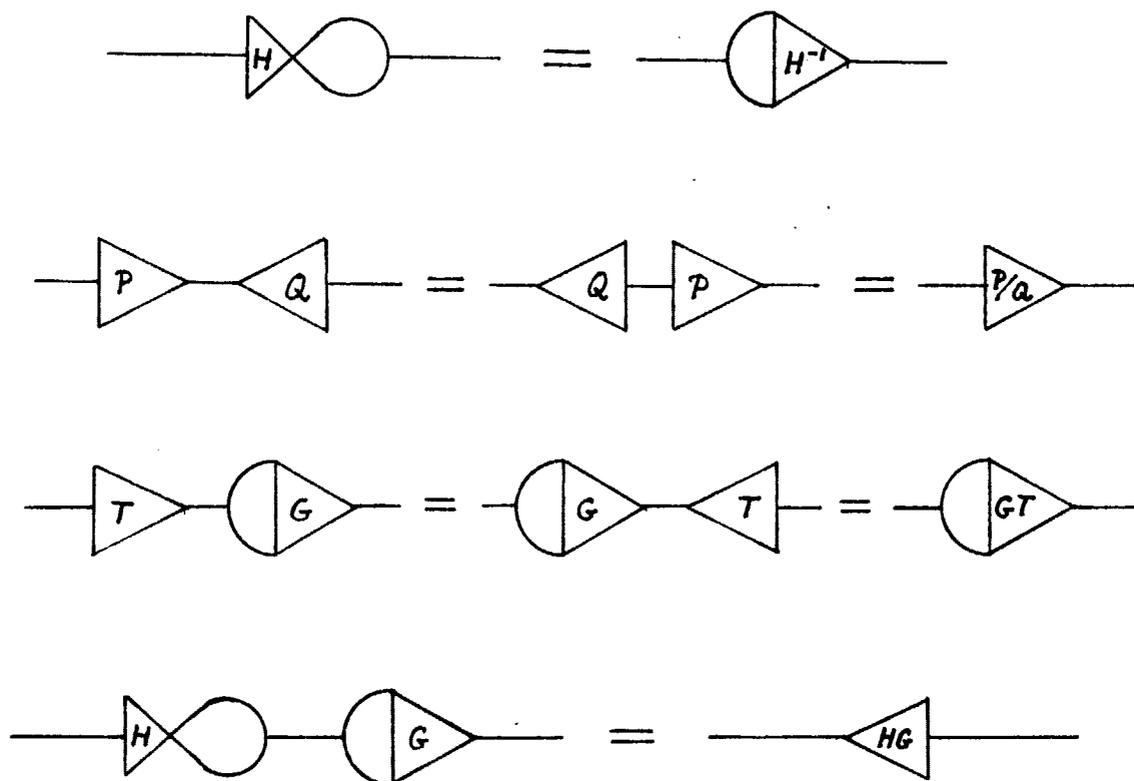


Fig. 31. Regneregler for kaskadekobling af transducere og gyratorer. Disse akasale formler tillader samtidigt kausalskift i begge porte.

### 5. Skeletdiagrammet.

Vi har set, at de basale toporte danner en gruppe, og at vi aldrig ved hjælp af dem kan opbygge andet end de samme to slags dyadiske relationer, som defineres af hhv. transducere (incl. transformatorer) og gyratorer. Til gengæld viser det sig, at to simple triadiske relationer sammen med dyadiske og monadiske relationer kan klare resten af jobbet og sætte os i stand til at opbygge vilkårligt indviklede relationer. (Faktisk alle de relationer, vi kan få brug for i lineær systemteori).

En 3-port samler defineres som et samlings- og forgreningspunkt for 3 energibånd, hvor der hverken sker oplagring eller dissipation af energi. Vi vil i første omgang interessere os for symmetriske 3-port samlere, d.v.s. vi antager, at der ikke er nogen fysisk forskel på samlerens 3 porte. Noget andet er så, at de tre porte vil optræde forskelligt i en kausal sammenhæng, men vi må forestille os, at kausaliteten "vælges" af de omgivende systemkomponenter og ikke af samleren selv.

En symmetrisk samler er på fig. 32 tegnet som et lille kvadrat. Det må så forstås, at portene er identiske, ligemeget hvor på kvadratets sider, de angives. (Et cirkelformet ikon ville strengt taget være det bedste til at afbilde samlerens fuldstændige symmetri, men cirklen bruges til så mange andre ting i forbindelse med x-o klassifikationen).

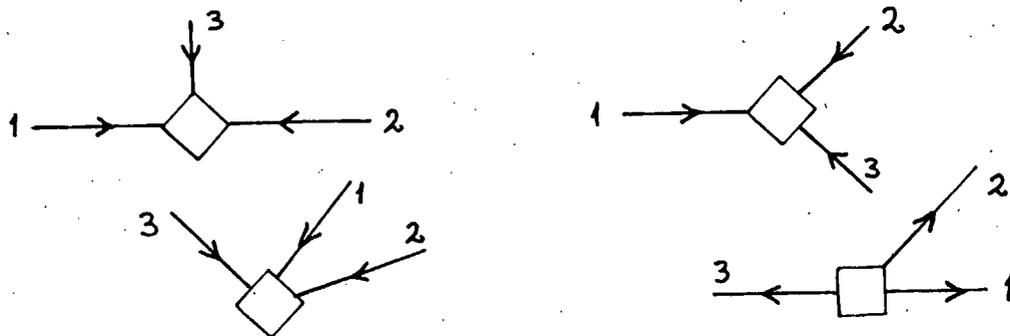


Fig. 32. Uspecificerede symmetriske samlere med symmetrisk orientering.

På fig.32 er indiceret båndnumre og orientering, men ingen kausalitet. Orienteringerne er valgt symmetrisk, alle ind mod eller alle væk fra samleren. Betingelsen, at samleren hverken må oplagre eller dissipere energi kan så udtrykkes ved, at summen af de tre energistrømme skal være nul:

$$e_1 f_1 + e_2 f_2 + e_3 f_3 = 0 \quad (9)$$

hvor  $e_i$  er spændingen og  $f_i$  er strømmen (symbolske indices) i bånd nr.  $i$ .

Når samleren pålægges kausalitet, vil den få tre input variable  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  og tre output variable  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ; hvis  $\phi_i$  er en spænding ( $\phi_i = e_i$ ), så vil  $\gamma_i$  være en strøm ( $\gamma_i = f_i$ ) og omvendt. En fuldstændig definition af samleren vil betyde, at vi kan angive 3 input-output relationer:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= F_1(\phi_1, \phi_2, \phi_3) \\ \gamma_2 &= F_2(\phi_1, \phi_2, \phi_3) \\ \gamma_3 &= F_3(\phi_1, \phi_2, \phi_3) \end{aligned} \quad (10)$$

Herved udtrykkes, at samleren skal opfattes som en passiv systemkomponent, idet output variablene til en bestemt tid  $t$  skal være bestemt alene af input variablenes værdier til samme tid  $t$  (altså ligesom for de ideelle transformatorer, transducere og gyatorer). Vi antager endvidere, at relationerne (10) er lineære.

Da samleren er symmetrisk, er der kun fire muligheder for pålæggelse af kausalitet, svarende til, at antallet af spændingsinput kan være 0, 1, 2 eller 3. De fire kausalformer er opstillet i nedenstående skema: alle former kan føres over i én af de fire ved en passende permutation af båndnumre.

kausalform nr.	$\phi_1$	$\phi_2$	$\phi_3$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$
0	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$e_1$	$e_2$	$e_3$
1	$e_1$	$f_2$	$f_3$	$f_1$	$e_2$	$e_3$
2	$f_1$	$e_2$	$e_3$	$e_1$	$f_2$	$f_3$
3	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$f_1$	$f_2$	$f_3$

Ser vi f.ex. på kausalform nr.0, så vil relationerne (10) angive spændingerne som funktioner af strømmene. Da spændinger og strømme i reglen har forskellig dimension, må der i disse relationer optræde mindst én parameter med dimension, som karakteriserer samleren. Parameteren må være af x-typen, idet den ligesom omsætningsforholdet for en gyrator knytter strømme og spændinger sammen i en lineær relation. Det virker lidt umotiveret, at en samler skulle have en indbygget "retning i tid", og vi vil derfor se bort fra kausalformen nr.0 og af samme grund også fra kausalformen nr.3. I virkeligheden betyder dette ikke nogen indskrænkning, for vi kan altid senere koble samleren med én eller flere gyratorer.

Tilbage bliver så kausalformerne 1 og 2, og vi har fået indskrænket klassen af mulige relationer yderligere ved den betragtning, at vi ikke vil tillade indbyggede "tidspile" i form af relationer, der sammenknytter strømme og spændinger i et lineært udtryk. For kausalformen nr.1 skal outputspændingerne  $e_2$  og  $e_3$  så kunne udtrykkes alene ved inputspændingen  $e_1$ . Da samleren skal være symmetrisk, er der kun én mulighed for sådanne udtryk, nemlig

$$e_2 = e_1 \quad \text{og} \quad e_3 = e_1 \quad (11)$$

Vi kan så i ligning (9) sætte  $e_1$  uden for en parentes og dividere den bort, hvorved vi finder output strømmen  $f_1$  udtrykt ved input strømmene  $f_2$  og  $f_3$ :

$$f_1 = - f_2 - f_3 \quad (12)$$

Ligningerne (11) og (12) skal opfattes som kausale input-output relationer med outputvariablene på venstre side af lighedstegnet. Selve samleren må som nævnt opfattes som kausalt indifferent i den forstand, at det er de tilsluttede systemkomponenter som afgør, at det netop er port nr.1 der skal have spændingsinput og ikke port nr.2 eller 3. Situationen kunne f.ex. opstå ved at der var koblet en spændingskilde til port nr.1. Det, som er karakteristisk for samleren udtrykkes bedst ved de akausale, symmetriske formler af (11) og (12)

$$\begin{aligned}
 e_1 &= e_2 = e_3 \\
 f_1 + f_2 + f_3 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Ligningssættet (13) kaldes Kirchhoff's knudelov, idet det beskriver forholdene ved en "knode" eller en parallelforbindelse i et elektrisk netværk. Vi må så forestille os de tre energibånd som tre elektriske luftledninger, der mødes i en knode; e'erne er spændingerne af de tre ledninger, målt i forhold til en fælles referenceknode (jord- eller stelforbindelse) og f'erne er strømme, målt efter orienteringer, der er symmetriske i forhold til knuden. Det tilsvarende element i det basale byggesæt kaldes en o-samler eller en spændingssamler ("samme spænding") og tegnes med en o inden i den kvadratiske samler-ikon.

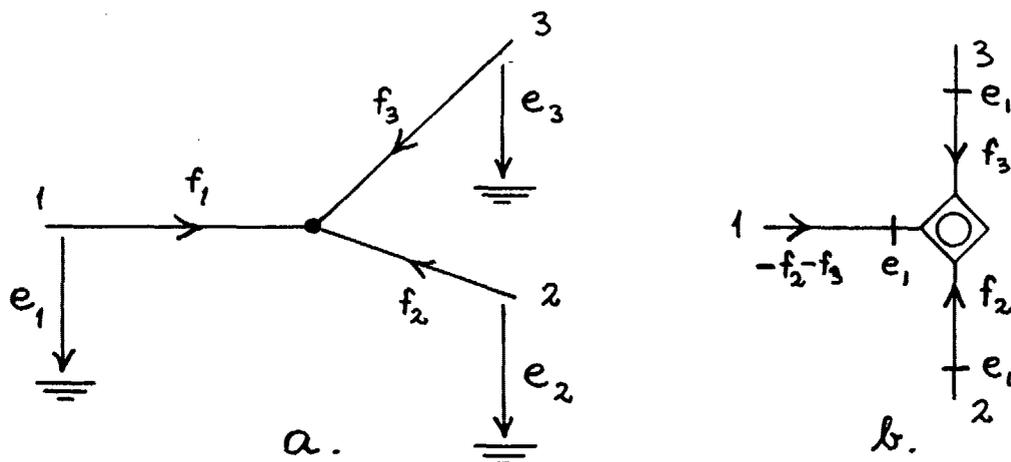


Fig. 33. Kirchhoff's knudelov, lign. (13).

- a. parallelforbindelse til knode i elektrisk netværk
- b. o-samleren med angivet kausalitet. (kausalform nr.1)

For kausalform nr.2, hvor vi har ét strøminput og to spændingsinput finder vi på fuldkommen samme måde frem til ligningssættet

$$\begin{aligned} f_1 &= f_2 = f_3 \\ e_1 + e_2 + e_3 &= 0 \end{aligned} \tag{14}$$

som kaldes Kirchhoff's maskelov. Vi skal her tænke på tre serieforbundne komponenter, som indgår i en fælles maske i et elektrisk netværk. I energibåndsbyggesættet repræsenteres relationerne (14) ved den symmetriske x-samler eller strømsamler ("samme strøm").

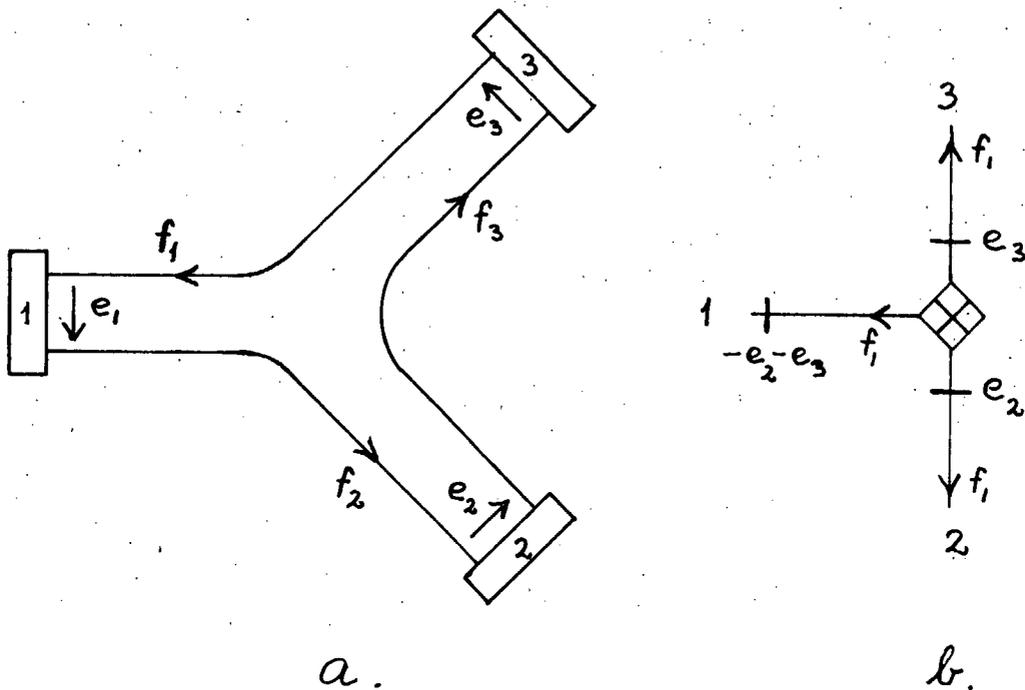


Fig. 34. Kirchhoff's maskelov, lign. (14).

- a. Serieforbindelse i maske i elektrisk netværk.
- b. x-samleren med angivet kausalitet. (kausalform nr.2)

Ligesom en maske og en knude (serie- og parallelforbindelse) i elektriske netværk er fysisk forskellige måder af forbinde komponenter på, således må vi regne med at x-samleren og

o-samleren er forskellige elementer i det basale byggesæt. D.v.s. hvis en samler har ét spændingsinput og to strøm-input (kausalform 1, o-samleren) på ét tidspunkt, så vil den have samme kausalform på ethvert andet tidspunkt, selv om det ikke nødvendigvis er det samme bånd, som har spændingsinput hele tiden. Hvis vi prøver at fremtvinge en overgang fra kausalform 1 til kausalform 2, f.ex. ved at koble to spændingskilder til en o-samler, så opstår der en kausalfø konflikt, fordi begge spændingskilder vil bestemme den ene spænding, der "hersker" over o-samleren. En sådan konflikt kan løses ved, at der dukker et lager, eller en læk op i modellen som "stødpude" mellem de to kilder, men den kan ikke løses ved at lave o-samleren om til en x-samler.

Selv om samlerne er kausalt indifferente i den forstand, at det er de omgivende systemer, der fastsætter kausaliteten, så er de alligevel yderst "stædige" i deres fastholdelse af én af de to mulige kausalfø

En samler vil have netop ét såkaldt stærkt eller dominerende bånd, d.v.s. for o-samleren båndet med spændingsinput, og for x-samleren båndet med strøminput. På tilsvarende måde så vi i kapitel 4, at transducere og gyratorer er kausalt indifferente m.h.t. spændingsinput på primærsiden eller sekundærsiden, men når først kausaliteten er fastsat på den ene side, så "fanger bordet" på den anden side, og en kausal konflikt kan ikke løses ved, at en transducer laves om til en gyrator, eller omvendt.

Mængden af transducere, transformatorer, gyratorer og samlere i en energibåndsmodel udgør tilsammen det såkaldte skeletdiagram. Denne del af modellen er så karakteriseret ved

- a) Skeletdiagrammet kan hverken oplagre eller dissipere energi.
- b) Skeletdiagrammet er kausalt indifferent, men definerer alligevel bestemte begrænsninger på kausaliteten af de tilsluttede systemkomponenter.
- c) En kausal konflikt kan ikke løses ved ændringer i

skeletdiagrammet alene, men må "gå ud over" evt. nyopdukkende lagre og lække.

Samlerdefinitionerne kan let generaliseres til n-port samlere med  $n \geq 1$ . En n-port o-samler har ét stærkt bånd med spændingsinput og n-1 svage bånd med strøminput. Hvis det stærke bånd har nummer 1, og hvis orienteringerne i alle bånd vælges symmetrisk i forhold til samleren, har vi

$$\begin{aligned} e_i &= e_1 && \text{for } 1 < i \leq n \\ f_1 &= - \sum_{i=2}^n f_i \end{aligned} \quad (15)$$

som er n-port generalisationen af Kirchhoff's knudelov (13). Tilsvarende får vi for n-port x-samleren, hvor bånd nr. 1 er det stærke, og orienteringerne er symmetriske:

$$\begin{aligned} f_i &= f_1 && \text{for } 1 < i \leq n \\ e_1 &= - \sum_{i=2}^n e_i \end{aligned} \quad (16)$$

som er n-port generalisationen af Kirchhoff's maskelov (14).

Hvis  $n = 1$ , må det ene bånd være stærkt og have outputtet nul. D.v.s. en én port x-samler er en spændingskilde med nulspænding og en én port o-samler er en strømkilde med nulstrøm. Sådanne elementer kan være nyttige til at beskrive grænsebetingelser eller "sygelige" situationer. I et elektrisk netværk opstår 1-port x-samlere, hvis der laves kortslutning, og 1-port o-samlere, hvis man begynder at klippe ledninger over.

For  $n = 2$  bliver samlerne til symmetriske transformatorer: 2-port o-samleren er "den identiske transformator" med omsætningsforholdet 1, medens 2-port x-samleren er "den rigtige symmetriske transformator" med omsætningsforholdet -1.

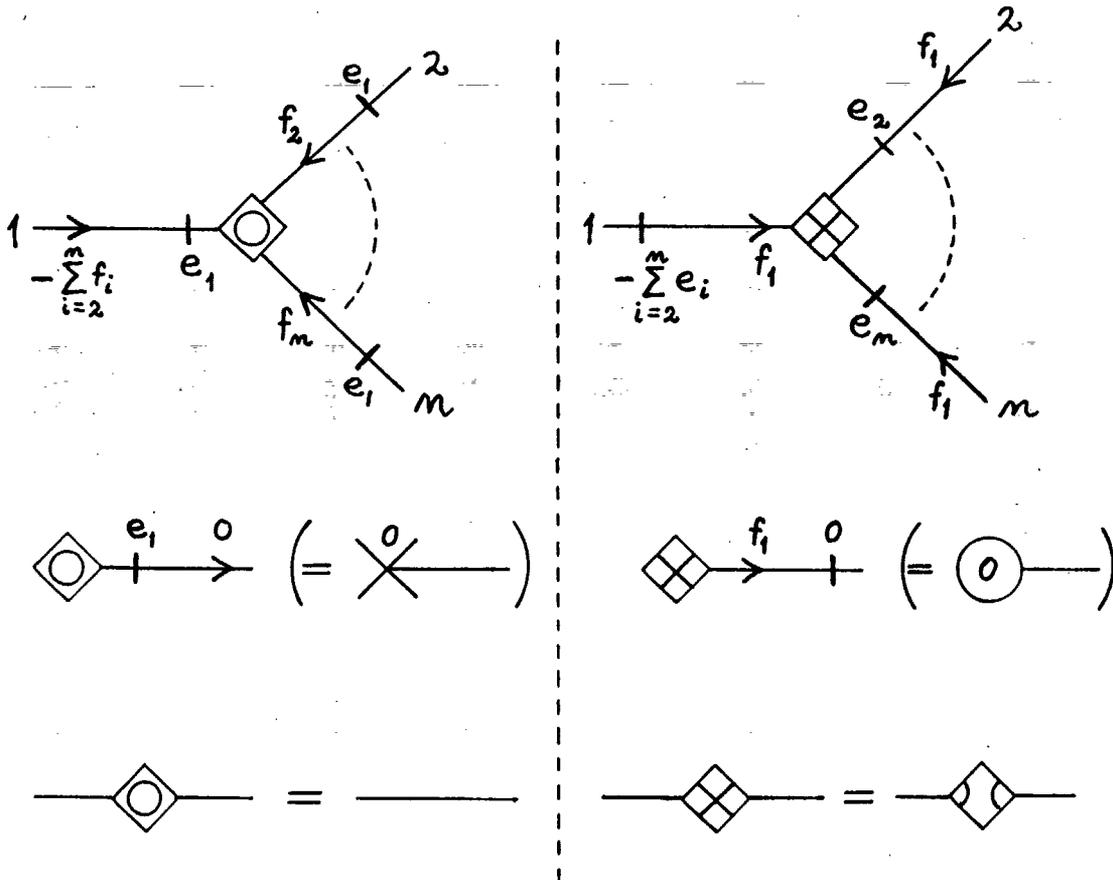


Fig. 35. n-port samlere med specialtilfældene  $n=1$  og  $n=2$ .

Definitionen af de symmetriske samlere giver indtryk af en fuldstændig dualistisk symmetri i forholdet mellem strømme og spændinger. Hvis vi i definitionen af o-samlere (15) bytter om på  $e$ 'er og  $f$ 'er, får vi definitionen af x-samlere (16). Alligevel er der en afgørende forskel, som viser sig for 2-port samlerne. Vi kan i en energibandsmodel indsætte lige så mange 2-port o-samlere i energibåndene, som vi har lyst til; det vil ikke ændre modellen det mindste. Hvis vi derimod indsætter bare én 2-port x-samler i et energibånd, vil det i almindelighed betyde en ændring af systemet. Det, som bryder den duale symmetri mellem strømme og spændinger er naturligvis strøm/orienteringsreglen (påstand nr.5, side 17). Hvis vi ikke havde denne regel, ville vi ikke kunne identificere 2-port samlerne med transformatorer.

Bruddet på den duale symmetri mellem o-samlere og x-samlere

viser sig først, når vi ikke længere bruger symmetriske orienteringer. Hvis vi vender én af orienteringerne for en samler, skal der skiftes fortegn på den tilsvarende strøm, hvor den optræder i samlerrelationen (15) eller (16). For en o-samler, som med symmetriske orienteringer er beskrevet ved ligningssættet (13), kan vi ved at ændre orienteringerne få strømmene i sumformlen til at optræde med alle mulige fortegnskombinationer, medens vi altid har samme spænding i portene:

$$e_1 = e_2 = e_3 \quad (17a)$$

$$\pm f_1 \pm f_2 \pm f_3 = 0 \quad (17b)$$

For en x-samler, derimod, får vi med skiftende orienteringer ligningssættet (14) omformet til:

$$\pm f_1 = \pm f_2 = \pm f_3 \quad (18a)$$

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0 \quad (18b)$$

Ligninger af typen (17a) og (18a) kaldes distributive betingelser, medens sumrelationen af typen (17b) og (18b) kaldes konservative betingelser. Det er langt mere praktisk at have "flydende fortegn" i de konservative betingelser end i de distributive betingelser, så derfor er den symmetriske o-samler, beskrevet ved (17), nemmere at have med at gøre end den symmetriske x-samler. Vi kunne have god brug for en alternativ x-samler, med betingelser på formen

$$f_1 = f_2 = f_3 \quad (19a)$$

$$\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 = 0 \quad (19b)$$

En sådan x-samler (som altså ikke kan være symmetrisk) kan laves på følgende måde. I ligning (19b) vil der være én spænding, som har det modsatte fortegn af de to andre. Lad

det være  $e_1$ , d.v.s. den relation vi vil lade samleren udtrykke er

$$e_1 = e_2 + e_3 \quad (19c)$$

Dette kan opnås ved at vi kobler en symmetrisk transformator til den symmetriske x-samler i bånd nr.1. Strømrelationerne (19a) vil så også være opfyldt, når vi vælger orienteringen i bånd nr.1 modsat orienteringerne i de to andre bånd. I reglen vil vi nøjes med at antyde den indsatte symmetriske transformator med en prik ud for den port, som adskiller sig fra de to andre (her port nr.1), som vist på fig 36.

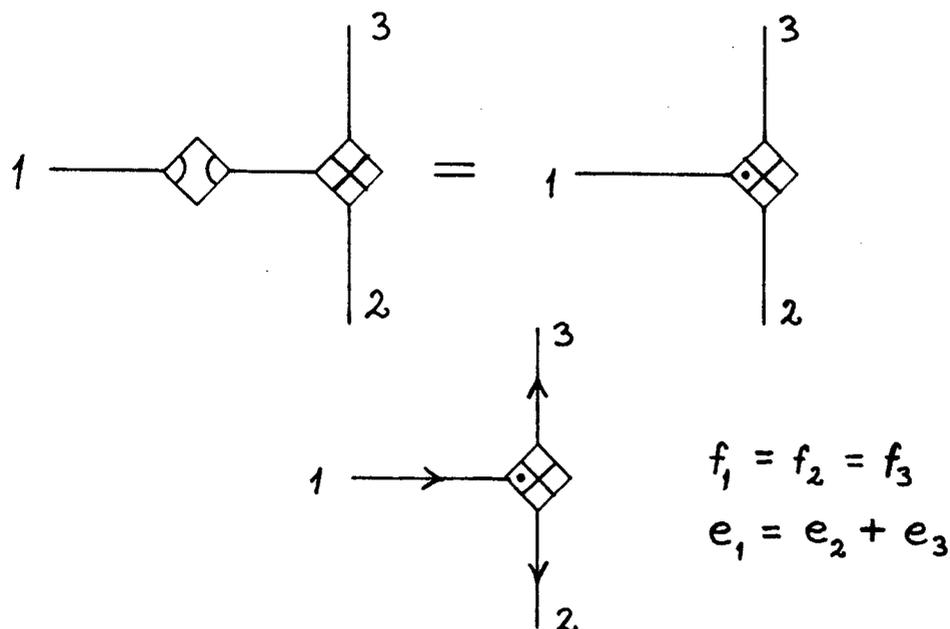


Fig 36. Definition af den asymmetriske x-samler (.x-samleren).

Bemærk i øvrigt, at hvis vi i stedet anbragte prikker ved portene 2 og 3 i stedet for én prik ved port 1, ville vi fremstille nøjagtigt den samme sag. Hvis vi vil lave en asymmetrisk n-port samler, deler vi portene op i to klasser, svarende til de to fortegn på spændingerne i den konservative spændingsrelation, og alle portene i én af klasserne skal så forsynes med prikker. Yderligere skal energibåndenes orientering i forhold til samleren være modsat for de to klasser, hvis vi vil have et fast fortegn i de distributive

strømrelationer.

En af fordelene ved det faste fortegn i distributive relationer er, at det bliver simpelt at fremstille i signalrute diagrammer. Distributive relationer fremstilles ved en "distributionsbølge" med ét indgående signal og et vist antal udgående signaler (som alle er lig med det indgående). En konservativ relation fremstilles ved en "summationsbølge", hvor vi har et vist antal indgående signaler med fortegnsmarkering og ét udgående signal, som er summen (med fortegn) af de indgående signaler. På fig. 37 vises nogle signalrute diagrammer for samlere med påtrykt kausalitet og orientering.

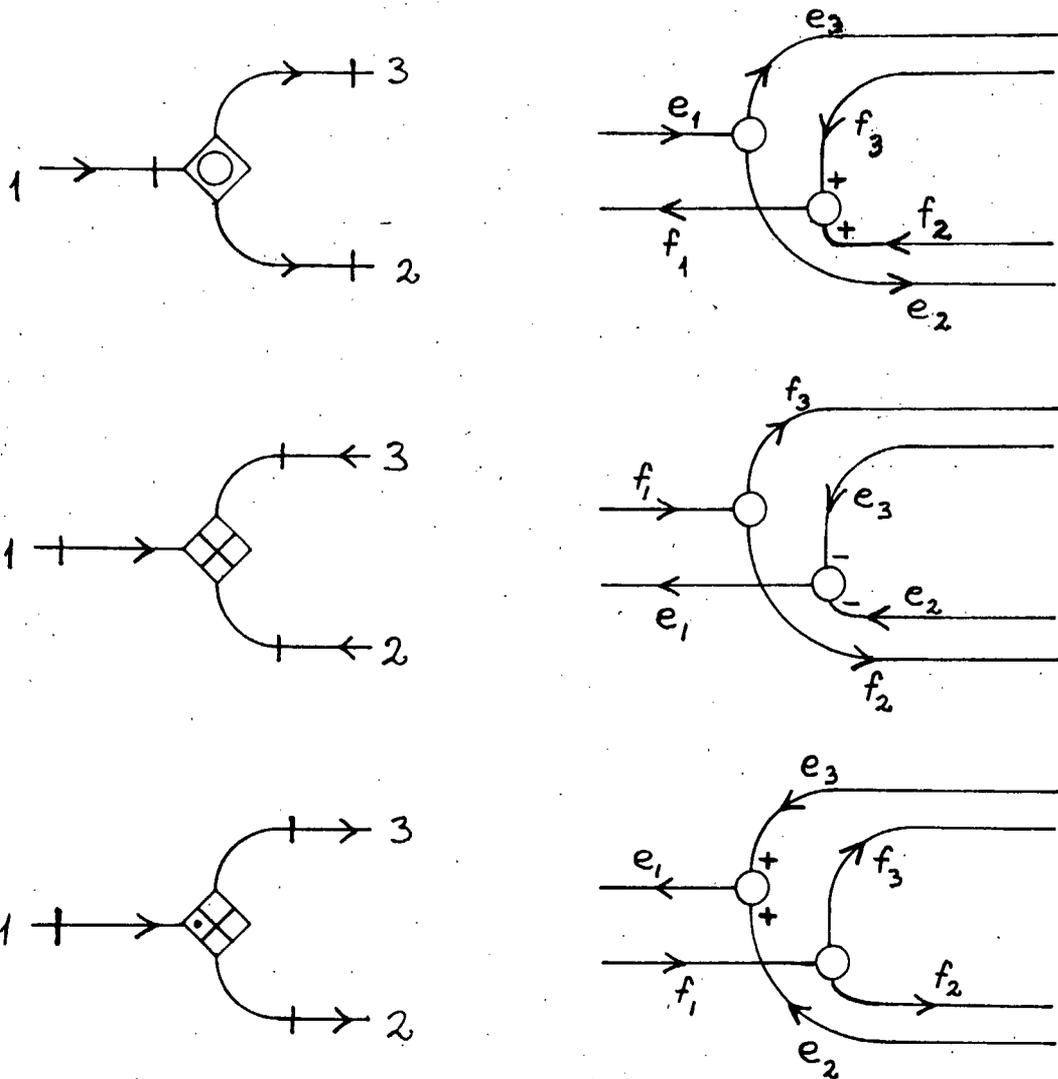


Fig. 37. Signalrute diagrammer for samlere.

Det vigtigste at lægge mærke til ved samlernes signalruter er, at et signal altid går fra et stærkt bånd (nr.1 i fig. 37) til et svagt bånd (nr.2 eller 3) eller omvendt, fra et svagt bånd til det stærke. Der er ingen signalvej fra et svagt bånd til et andet svagt bånd.

Signalruterne for et energibånd minder om et jernbanespor, og den særlige struktur omkring en samler minder om et skiftespor. Det er bekvemt at samle de dobbelte signalruter til et enkelt signalspor, som tegnes uden retningspile, fordi signalerne kan gå begge veje på sporet (strømsignaler den ene vej, spændingssignaler den anden vej). Samleren optræder så som skiftespor, som vist på fig.38

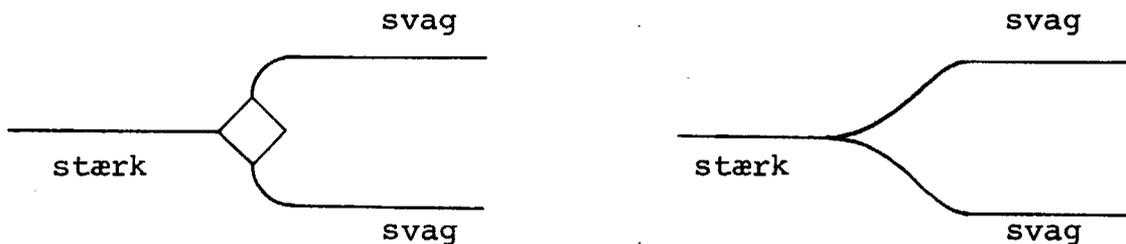


Fig. 38. Signalspor omkring en samler.

Tegning af signalspor er en yderst nyttig metode til at få et hurtigt overblik over de kausale forhold i en energibandsstruktur, og vi skal benytte den i det følgende som et supplement til den ortodokse metode, der bygger på rækkefølgen af signalindices.

Selv om samlerne frembærer en yderst speciel kausal struktur, er det alligevel vigtigt at forstå, at samlerrelationerne i sig selv er akausale netværksligninger. Hvis vi regner løs på en bestemt struktur i skeletdiagrammet med en given kausalitet og finder frem til en relation mellem visse strømme og spændinger, så kan vi være sikre på, at den samme relation vil holde med enhver anden kausalitet på den samme struktur. Ydermere, hvis vi med en given kausalitet kan vise, at en struktur er ækvivalent med en anden struktur

så vil den samme ækvivalens gælde med enhver anden kausalitet. Som eksempel på dette ser vi på strukturen på fig.39, som er dannet af en o-samler og en x-samler med to ydre porte. Hvis vi har stærk kausalitet i de ydre porte, er det nemt at vise, at strukturen er ækvivalent med en transformator med omsætningsforholdet 2. Med svag kausalitet i de ydre porte bliver regningerne lidt mere indviklede, men vi behøver sådan set heller ikke at gennemføre dem, for de vil uvægerligt lede til samme resultat.

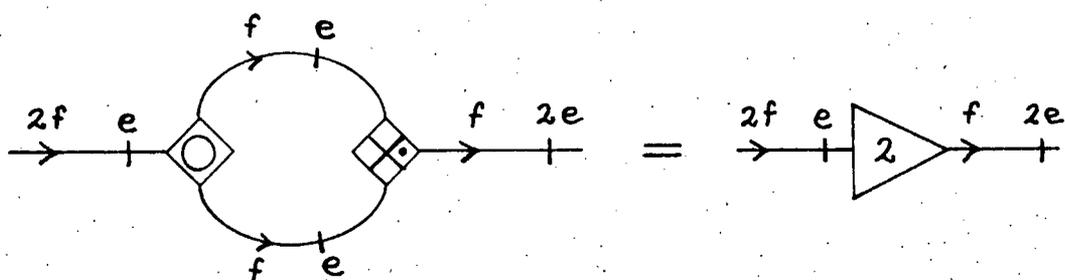
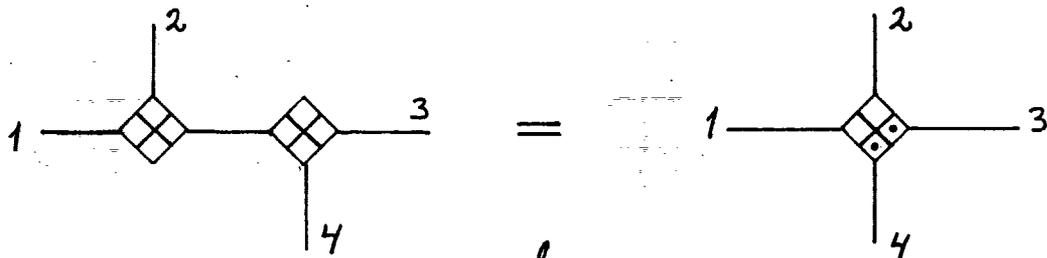


Fig. 39. Opskrift på en transformator.

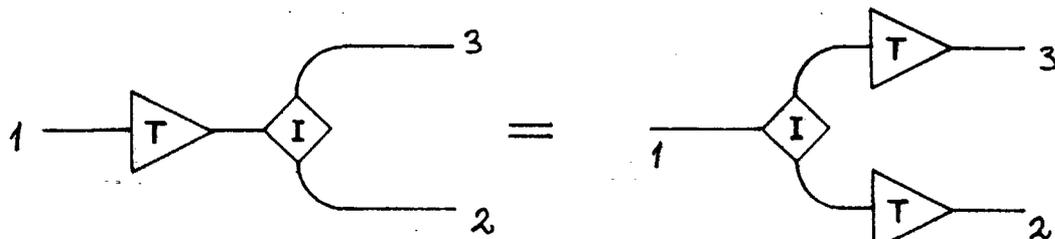
Vi kan derfor formulere regneregler for strukturer i skeletdiagrammet uden at angive kausalitet (og orientering). Når man skal eftervise sådanne regneregler, kan man gøre det ved at vælge den mest bekvemme form for kausalitet. I akausale formler kan man ikke skelne skarpt mellem en o-gyrator og en x-gyrator, fordi en ændring af kausaliteten vil medføre, at gyratoren skifter type; men det er nødvendigt at angive enten en x- eller en o-gyrator (og ikke blot en uspecificeret gyrator) for at definere betydningen af symbolet for omsætningsforholdet (sml. fig.31). I visse formler kan man derimod tillade sig at angive uspecificerede symmetriske samlere, når formlen gælder for både x- og o-samlere. Således er i fig.40c en uspecificeret samler med symbolsk index I og den samme type (I, enten x eller o) på den anden side af lighedstegnet, hvorimod fig.40d med indices I og II fremviser to samlere af modsatte typer.



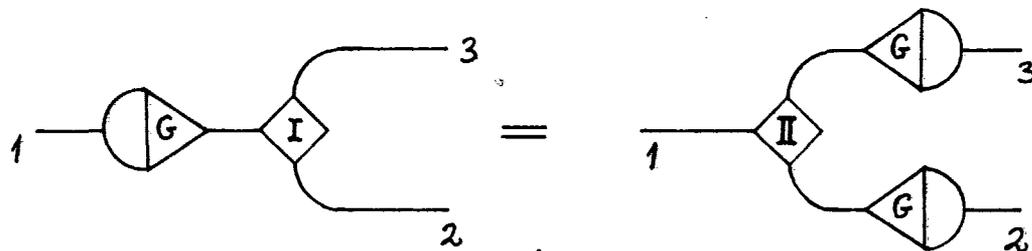
a.



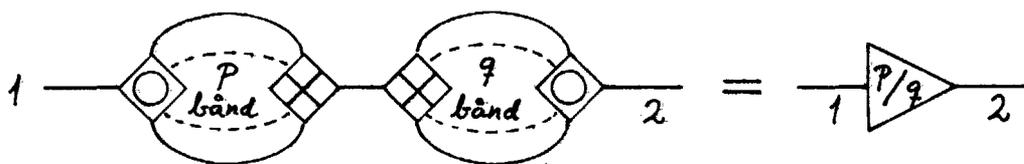
b.



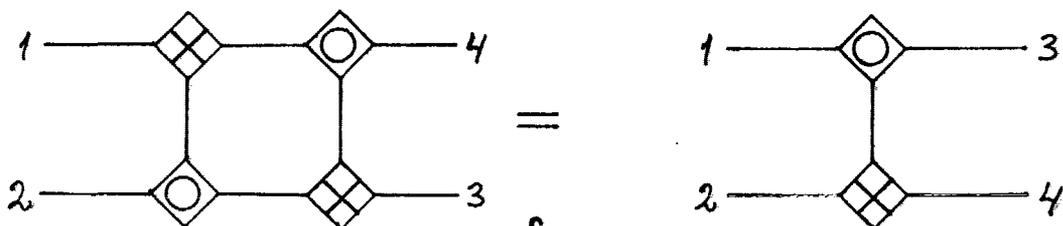
c.



d.



e.



f.

Fig. 40. Regneregler for skelettdiagrammer.

Formlerne a og b på fig.40 antyder, hvordan n-port samlere ( $n > 3$ ) kan reduceres til koblede 3-port samlere. Bemærk i b, at når to x-samlere mødes og smelter sammen, overlever det forsvundne energibånd i form af en prik, som så deler sig i to, idet den bevæger sig ud gennem samleren. Formel c viser, hvordan en transformator "trækkes igennem" en samler, samtidig med, at den deler sig i to. Denne vigtige formel er faktisk en energibånds version af den distributive regel for multiplikation af en sum:  $T \cdot (f_2 + f_3) = T \cdot f_2 + T \cdot f_3$ . Formel d er knap så vigtig, da gyratorer er sjældne. Formel e er en videreudvikling af transformatoropskriften på fig. 39. Denne formel er bemærkelsesværdig af flere grunde. Først og fremmest fordi den viser, hvorledes operationerne multiplikation og division med en konstant (transformatoren) kan reduceres til operationerne addition og subtraktion (samlerne). Dernæst, fordi det fremgår, at transformatorer med et konstant omsætningsforhold kan opfattes som rent topologiske elementer i stil med samlerne. Formel f er specielt interessant, fordi den kan bruges til at belyse en særlig type af kausal konflikt, som vi nu skal se på.

Hvis vi i diagrammet til venstre for lighedstegnet på fig.40f lader alle de 4 porte have stærk kausalitet, d.v.s. strøm-input i port 1 og 3 og spændingsinput i port 2 og 4, så vil de samme porte i diagrammet til højre have svag kausalitet. Der er ingen problemer, og vi kan nemt indse, at de to diagrammer er ækvivalente. Signalsporene for denne kausalitet er vist på fig.41a. Hvis vi derimod lader alle portene til venstre have svag kausalitet, så kan det tilsyneladende gennemføres, men for diagrammet til højre bliver der problemer, fordi hver samler skal have to dominerende bånd, hvilket er forbudt. Den kausale konflikt er skjult i diagrammet til venstre. Der kan altså godt gemme sig en kausal konflikt i et diagram, selv om det er muligt at sætte signaltegn i overensstemmelse med reglerne. Et blik på signalspordiagrammet fig.41b afslører imidlertid et loop med "forstærkningsfaktoren" 1. Dette er et patologisk træk, hvorved den kausale konflikt afsløres.

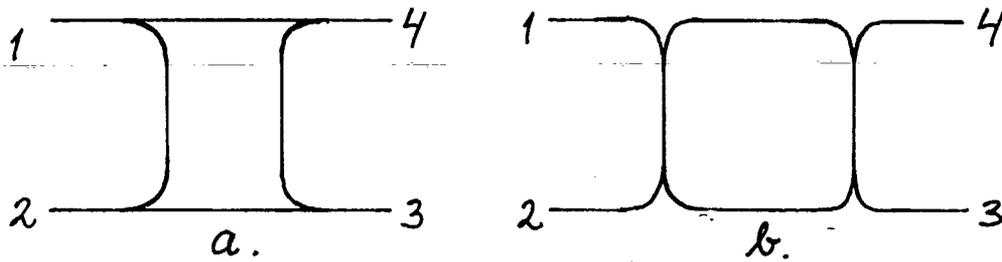


Fig. 41. Signalspor for diagrammet til venstre på fig.40f.  
a. Stærk kausalitet. b. Svag kausalitet (konflikt).

Hvis vi indsætter en prik i en af de indre porte i diagrammet (fig.42a) og benytter svag kausalitet, får vi samme signalsporstruktur som på fig.41b, men nu har loop'et forstærkningsfaktoren  $-1$ , og der er ingen konflikt. Det følger heraf, at diagrammet på fig.42a ikke kan oversættes til et diagram med to samlere, som fig.40f, (for så ville der jo være en åbenlys kausal konflikt). Hvis vi i stedet for prikken indsætter en transformator med variabelt omsætningsforhold  $T$ , som kan styres udefra (fig.42b), og benytter svag kausalitet, har vi et loop med forstærkningsfaktoren  $T$ . Det vil gå godt, indtil  $T$  passerer værdien  $1$ . I det øjeblik vil der ske en "mild energibåndskatastrofe", som fører til en diskontinuert omlejring af signalsporene, uden at der sker ændringer af energibands-ikonerne (bortset fra, hvad der muligvis kan ske i de omgivende systemer).

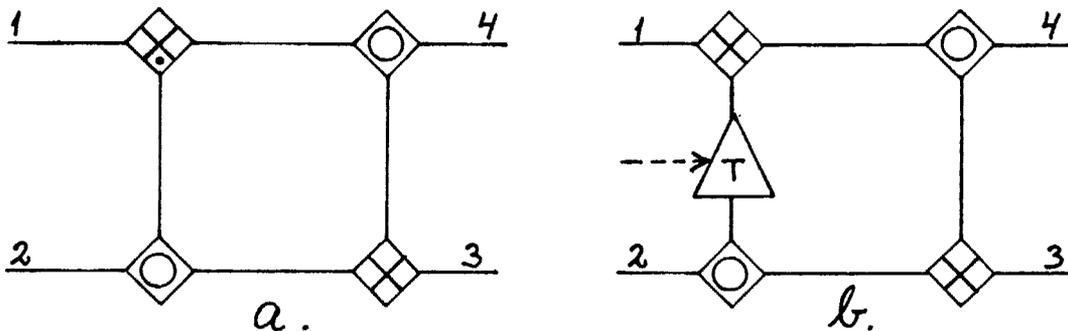


Fig. 42. a. Struktur, som ikke kan oversættes i stil med fig.40f. Svag kausalitet tilladt.  
b. Struktur med parametrisk transformator. Svag kausalitet kun for  $T \neq 1$ .

## 6. Fysikkens ikoner.

Bagved de fleste teoribygninger ligger, mere eller mindre implicit, en stak forestillingsbilleder, som i forskernes bevidsthed kan kombineres til mentale analoge modeller (eller "havregrynscomputere") i den indledende matematificering af et problem. F.ex. ved man nu, at Arkimedes blev ledt frem til sine rumfangsformler for kugle og kegle m.m. ved hjælp af forestillinger om massive fysiske legemer, der kunne snittes ud i tynde skiver og flyttes frem og tilbage på vægtstænger o.l. Arkimedes regnede selv disse billeder for mindreværdige i forhold til den stringente matematiske formulering, der til sidst udkrystalliseredes, men han fandt dem dog alligevel værdige til omtale i nogle breve. I en vis forstand er Arkimedes' analoge modeller noget af det mest spændende, han har lavet, fordi de viser, at han var på nippet til at opdage integral og differentialregningen næsten 2000 år før tiden. Hvad har ikke hin ulyksalige romerske soldat på samvittigheden, han som så brat forstyrrede Arkimedes' cirkler; måske hele den mørke middelalder?

Efter den klassiske mekaniks gennembrud begyndte fysikernes forestillingsbilleder mest at bestå af partikler, forbundet med stive stænger, masseløse fjedre, svinghjul, lodder, snore og gnidningsløse trisser. Så virkningsfulde var disse billeder, at fysikerne af al magt søgte at overføre dem til ikke mekaniske discipliner. Fysikeren Helmholtz, som gjorde sig stærkt gældende inden for fysiologien, fremhævede over for biologer, at sand forståelse inden for biologien måtte være ensbetydende med reduktion af begrebsrammen til den Newton'ske mekanik. En sådan holdning, som i dag kaldes reduktionisme, har givet store resultater inden for bestemte områder, men der kan heller ikke være tvivl om, at den har virket stærkt hæmmende på udviklingen af andre discipliner.

Jævnsides med kulminationen af den klassiske mekanik udvik-

ledes termodynamikken efterhånden som et ligeså stringent axiomatisk system på grundlag af et helt andet sæt forestillingsbilleder, såsom varmereservoarer og beholdere med stempler, ideelle Carnot-maskiner, semipermeable membraner, kalorimetre og termometre. Som et forsøg på at kombinere to sæt af forestillingsbilleder opstod den kinetiske molekylteori gennem arbejder af bl.a. Kronig, Clausius, Maxwell og Boltzmann. Dette projekt stødte på svære vanskeligheder, inden det takket være Boltzmann, Gibbs og Einstein kulminerede i den statistiske mekanik. Boltzmann arbejdede sådan set ud fra en mekanisk-reduktionistisk holdning, men var i stand til at overskride mekanikkens begrænsninger. I 1872 opstillede han i det såkaldte "H-teorem" et tilsyneladende mekanisk bevis for termodynamikkens anden hovedsætning: at der findes en tilstandsfunktion, entropien, som for isolerede systemer er en voksende (evt. konstant) funktion af tiden. H-teoremet affødte en storm af indvendinger fra den ortodokse mekaniske reduktionismes tilhængere, og der rejstes en debat, som aldrig siden er stilnet helt af.

En af de klareste indvendinger mod H-teoremet blev fremført af Loschmidt, som henviste til de mekaniske grundloves fuldstændige symmetri med hensyn til tidsvending. Hvis et givet autonomt partikelsystem kl.0 har stedvektorer  $\vec{r}_i = \vec{r}_{i0}$  og impulsvektorer  $\vec{p}_i = \vec{p}_{i0}$ , så vil "det tidsvendte system" have de samme stedvektorer, men impulsvektorerne  $\vec{p}_i = -\vec{p}_{i0}$ . Lad nu det tidsvendte system udvikle sig frem i tiden i overensstemmelse med mekanikkens love. Vi kan så være sikre på, at en hvilken-somhelst tilstandsfunktion  $A(\{\vec{r}_i\}, \{\vec{p}_i\})$  for det tidsvendte system kl.t vil have samme værdi som den samme tilstandsfunktion for det oprindelige system havde kl.-t. Det kan derfor ikke være rigtigt, at der findes en tilstandsfunktion som entropien, der godt kan vokse, men aldrig aftage.

Loschmidts indvending er helt korrekt, men beviser naturligvis ikke, at termodynamikkens axiomssystem er forkert, men kun, at det mekaniske reduktionistiske program er utilstrækkeligt. Der må være ikke-mekaniske forhold, som er bestem-

mende for, at det i praksis er umuligt at præparere de "tidsvendte tilstande", som ville føre til en nedsættelse af entropien. (F.ex. er det umuligt at "urøre" et røræg, men mekanikken kan ikke forklare hvorfor).

Boltzmann var kun delvist i stand til at imødegå mekanisternes indvendinger mod H-teoremet og måtte iøvrigt opbruge sin energi på at bekæmpe den stik modsatte fløj, de termodynamiske reduktionister i de såkaldte energetikeres kreds, anført af kemikeren Ostwald. Disse folk ville afskaffe mekanikkens partikelforestillinger i forbindelse med termodynamiske problemstillinger og forsøgte således reaktionært at forhindre udviklingen af atom- og molekylteorier. Som bekendt var det molekylforestillingerne, der sejrede, men den Newton'ske mekanik havde vist sig utilstrækkelig, og diskussionerne omkring entropibegrebet fik afgørende betydning for kvantemekanikkens fødsel i Planck's studium af hulrumsstrålingen.

Et andet område, hvor de mekaniske reduktionister fik en hård nød at knække, var elektrodynamikken. Da eksistensen af elektromagnetiske bølger havde fået sin teoretiske begrundelse gennem Maxwell's ligninger, måtte mekanisterne forstille sig et mekanisk partikelsystem "æteren" som et nødvendigt medium for disse bølger. Jo mere man spekulerede over æterens mekaniske egenskaber, jo mere besynderlige blev de: Æteren måtte gennemtrænge alt stof, og den måtte være fuldstændig usammentrykkelig, fordi kun transversale bølger kunne forplante sig i den. Sit afgørende grundskud fik æterteorien ved Michelson-Morley forsøget, som påviste ikke-eksistensen af en "ætervind". Relativitetsteorien udsprang ikke direkte af Michelson-Morley forsøget, men snarere af Einsteins intuitive forståelse af, at de elektromagnetiske feltbegreber var mere virkelige end de mekaniske æterforestillinger. De klassiske forestillinger om partikler med tilhørende statiske kraftlove kunne endnu dårligere forenes med relativitetsteorien end med den ikke-relativistiske kvantemekanik, og samtidigt måtte forestillingerne om det absolutte rum og

den absolutte tid vige pladsen til fordel for det langt mere uhåndgribelige firedimensionale rum-tids-kontinuum.

I den relativistiske kvantemekanik er partikelforestillingerne blevet radikalt ændret og erstattet af feltligninger med tilhørende kvantiseringebetingelser. Inden for kvantefeltteorien har de klassiske partikel-ikoner mistet deres betydning som teoriskabende forestillingsbilleder. Antallet af elementarpartikler, som er påvist eksperimentelt, ser ud til at være en konstant voksende funktion af størrelsen (energien, prisen) af de anvendte acceleratorer. For at hitte rede i dette virvar, må man udvikle nye ikoner, og gradvist begynder man at anskue de elementære partikler som svingningsmønstre i en eller anden "grød", der gennemtrænger det hele. Æterforestillingen er ved at vende tilbage i en ændret skikkelse, for når man før brugte partikelforestillingen til at forklare æterens egenskaber, så indfører man nu æteren til at forklare partiklernes egenskaber.

Hvordan skal man så forestille sig æteren opbygget? Til dette spørgsmål vil en del "hårde" teoretikere nok svare, at man skal ikke forestille sig noget. Æterens egenskaber (eller nogle af dem) kan passende beskrives ved en eller anden ikke-lineær partiel differentiaalligning, og når man kender den ligning, er det bare med at løse den, så behøver man ikke at pjatte rundt med mentale forestillingsbilleder. Andre vil hævde, at ikoniske forestillinger, som kan bruges til opbygning af analoge modeller, er et nødvendigt led i udviklingen af nye teorier og eksperimentelle metoder. Man skal ikke være bange for at lade fantasien lege med billeder af fjedre, stempler og trisser m.m., men tværtimod opsøge sådanne billeder i de discipliner, hvor de har vist sig konsistente og virkningsfulde. Blot skal man være klar over, at disse forestillinger er tegn og intet andet end tegn. Gyldigheden eller sandheden af disse tegn må vurderes ud fra deres evne til at frembringe andre tegn i et konsistent system, samt ved deres virkning på den eksperimentalfysiske praksis.

## 7. Kilder, lagre og lække m.m.

De grundlæggende fysiske teorier i dag bygger på kontinuumsforestillinger. I discipliner som hydrodynamik og elektrodynamik har vi et sæt partielle differentialligninger, hvori stofegenskaber, der har med oplagring og dissipation af energi af gøre, tænkes kontinuert spredt ud over rummet, eventuelt med diskontinuiteter langs grænseflader og andre former for singular opførsel ved hvirvellinjer, dislokationer og punkt-defekter. Udover det kontinuerte rum har vi altid en kontinuert tid, som dynamiske teorier udspiller sig i. Også i det tidslige forløb kan der optræde singulariteter, såkaldte katastrofer, som imidlertid sjældent kan beskrives inden for rammerne af én dynamisk teori, men kræver et specielt begrebsapparat.

Energibåndsteknikken er en begrebsramme, som har mange træk fælles med teorien for elektriske netværk. Sådanne netværks beskrivelser opererer også med et kontinuert tidsbegreb, men er diskrete i rummet. Hvis vi med en netværksmodel skal beskrive en bestemt type af energioplagring i et område af rummet, vil vi "sammenklumpe" lagringsegenskaberne for dette område til et ideelt lagringselement, f.ex. en elektrisk kondensator, som så optræder et bestemt sted i netværket. Hvis der i det samme rumlige område foregår dissipation af energi vil vi på lignende måde foretage en sammenklumpning af disse egenskaber til et læk-element, f.ex. en ohmsk modstand, som så optræder et andet sted i netværket. På denne måde erstattes det kontinuerte fysiske rum af en diskret topologisk struktur, som skal angive, hvordan de forskellige idealiserede elementer, lagre, lække, kilder, transformatorer, transducere og gyratorer, er hægtet sammen.

Brugen af diskrete modeltyper er især velegnet, når man skal beskrive komplicerede, heterogene systemer, hvor tensorregning og lignende teknikker, der bygger på symmetribetragninger, kommer til kort. Sådanne systemer findes i rigt

mål i bl.a. ingeniørvidenskab, cellebiologi og økologi. Den første beskrivelse af energibåndsteknikken findes i H.M. Paynter's forelæsningsnoter "Analysis and Design of Engineering Systems" (M.I.T., 1961). I en senere, stor artikel om biofysiske anvendelser af Paynter's idéer skriver Oster, Perelson og Katchalsky bl.a.

"The problem of analysing biological systems using the classical field equations is analogous to attempting to describe a television set by integrating Maxwell's equations. It is certainly possible 'in principle', - but in practice, too much irrelevant information is required to integrate over such a heterogeneous object. Clearly, network theory is the correct analytical tool for the study of such a system. The complexity of, say, a mitochondrion is more of the order of a television set than of an anisotropic continuum!"

Længere nede skriver de:

". . . this graphical notation will reveal the role of system topology in dynamic behaviour. It is clear that the organizational structure of biological systems is one of their characteristic features. How a television set or a biological system is 'hooked up' is as vital an ingredient to its proper functioning as the energetics of the thermodynamic processes. This aspect of thermodynamic systems has only recently been considered explicitly. We will see that many characteristics of thermodynamic systems previously ascribed to energetic restrictions are more properly classified as 'topological constraints', and as such, are consequences of the system structure rather than the laws of thermodynamics."

(Fra "Quarterly Review of Biophysics", 6, 1973).

Bortset fra, at energibåndsteknikken har de fremhævede store fordele i de heterogene systemers energetik, er der gode grunde til også at bruge den, hvor de partielle differentiaalligninger er et velegnet redskab. Dels kan man opnå en dybere forståelse af velkendte fysiske teorier på den måde,

og endelig skal selv kontinuumslikningerne jo også, hvis de skal løses numerisk, til syvende og sidst gøres diskrete. Energibåndsteknikken er et bud på, hvordan en diskretisering kan foretages på en fysisk meningsfuld måde.

Studiet af forskellige former for forbundethed i diskrete netværk kaldes kombinatorisk topologi, eller *analysis situs* efter disciplinens opfinder Henri Poincaré. I elektriske netværk afbildes forbundetheden ved hjælp af lineære grafer, en samling matematiske objekter, der beskrives med begreber som knuder, grene og masker. I energibandsmodeller redegøres for de samme topologiske egenskaber ved hjælp af samlere og symmetriske transformatorer (prikker). Vi skal i næste kapitel se, hvorledes man altid kan oversætte en lineær graf til et samler-diagram, hvorimod den omvendte proces ikke altid kan gennemføres. Med andre ord: Samler-diagrammerne kan beskrive flere former for forbundethed end de lineære grafer for elektriske netværk.

Den almindelige struktur af en energibandsmodel kan fremstilles som vist på fig.43. Skeletdiagrammet indeholder det topologiske felt, som består af samlere og transformatorer med konstant omsætningsforhold. De konstante transformatorer medregnes til det topologiske felt, fordi de kan reduceres til samlere og symmetriske transformatorer, jfr. fig.40e. Vi kan også medregne transducere, hvis omsætningsforhold har konstant dimension og størrelse, til det topologiske felt. Hvis to forskellige systemer kan beskrives med identiske topologiske felter, siger vi, at de to systemer er topologisk ækvivalente. Det topologiske felt sammenfatter alle de systemegenskaber, som er uændrede ved kontinuerte ændringer af systemets størrelse og form. Vi kalder det topologiske felt passivt, fordi dets output variable i de forskellige porte er entydigt bestemt ved input værdierne til samme tidspunkt. Passivitetsegenskaben vil i øvrigt gælde for hele skeletdiagrammet, som også omfatter gyratorer og parametriske transducere, hvis blot parametrene kan betragtes som "fastfrosne" eller bestemt alene af input energibandsvariablene.

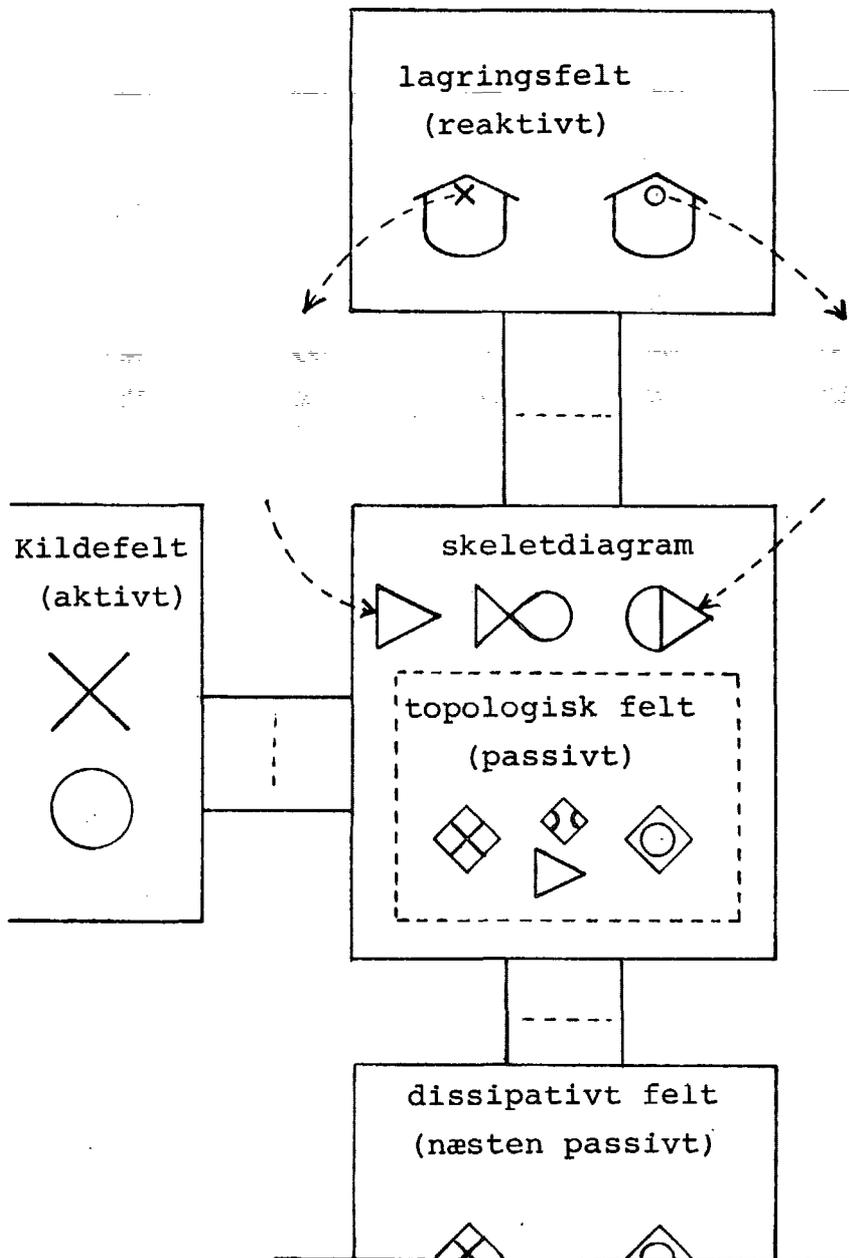


Fig.43. Den almindelige struktur af en energibandsmodel.

Skelettdiagrammet er koblet til et aktivt kildefelt, et (næsten) passivt dissipativt felt, eller lækfelt og et reaktivt lagringsfelt. At kildefeltet er aktivt betyder, at dets output variable er uafhængige af input variablene, og at lagringsfeltet er reaktivt betyder, at dets output variable er udelukkende bestemt af de fortidige (og nutidige) værdier af input variablene (i energibåndene). Lagringsfeltet indeholder alle systemets level-variable, som kan påvirke f.ex.

lække, gyratorer og transducere via såkaldte informationsstyringer (eller informationsbånd) som antydte ved de udgående punkterede pile. Det dissipative felt er kun næsten passivt, fordi dets output variable vil indeholde en aktiv støjkomponent, der dog i mange sammenhænge kan negligeres. Vi skal senere se, hvorledes støjen fra lækkene kan beskrives statistisk, således at level variablene kommer til at udvise netop de fluktuationer, som beskrives i den statistiske termodynamik.

Inden vi går over til en nøjere beskrivelse af de topologiske egenskaber, skal vi lige se på definitionerne af kilder, lagre, og lække for at fuldstændiggøre beskrivelsen af det basale byggesæt.

Kilderne er de simpleste elementer. Vi har en spændingskilde, som fastsætter spændingen, og en strømkilde, som fastsætter strømmen i ét bånd. Den af kilden fastsatte variabel er en output-energibandsvariabel, som er fuldstændig uafhængig af inputtet; d.v.s. kilden er en aktiv komponent. Selv om kilderne er én-porte, er det tilladt at tegne dem med flere porte, idet man så blot underforstår en tilsluttet samler jvf. fig.44.

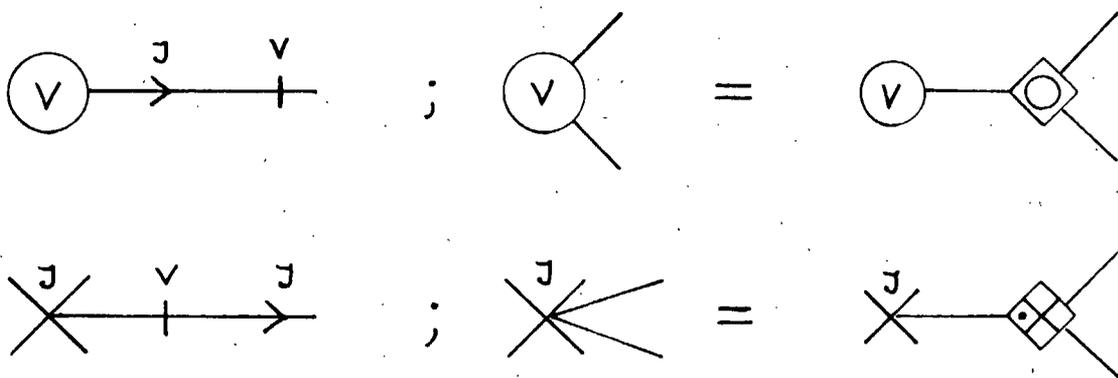


Fig. 44. Definition af spændingskilde (V) og strømkilde (J).

Kilderne er især nyttige til at beskrive omgivelserne af et system. Afgrænsningen af det, man kalder "systemet", fra det man kalder "omgivelserne", er til en vis grad subjektivt og afhænger af formålet med undersøgelsen. Det er imidlertid

altid en fornuftig strategi at lægge systemgrænsen således at omgivelserne kan beskrives som aktive, d.v.s. upåvirkede af systemets output variable i de energibånd, der fører ud over systemgrænsen. F.ex. kan man i beskrivelsen af et termodynamisk system karakterisere omgivelserne som et varme-reservoir med konstant temperatur (spændingskilde), et volumenreservoir med konstant tryk (spændingskilde) og et udefra pålagt magnetfelt, som er homogent i store afstande fra systemet (strømkilde).

Level variablene i energibåndsmodeller optræder i forbindelse med lagrene, der tegnes med et "fuglehus"ikon, lånt fra økologen H.T.Odum. Et lager beskriver dels oplagring af level variablen på samme måde som cisterneikonet i Forrester's systemdynamiske diagramteknik (fig.14), men beskriver nu desuden oplagring af energi. Da der er to slags level variable, er der også to slags lagre, et x-lager for kinetisk energi og et o-lager for potentiel energi. Lagerets type angives med et ikonisk index, x eller o, i toppen af fuglehuset (fig.45).

Den oplagrede energi som funktion af level variabelen L angives ved et symbolsk udtryk  $E(L)$ , som skrives i en kantet parentes uden for lager ikonet. Hvis vi vælger orientering ind mod lageret i et tilsluttet energibånd og kalder input variabelen  $\phi$ , output variabelen  $\gamma$ , har vi:

$$\frac{dL}{dt} = \phi \quad ; \quad \frac{dE}{dt} = \phi \cdot \gamma \quad (20)$$

Da lagerenergien er en funktion af L alene, har vi også

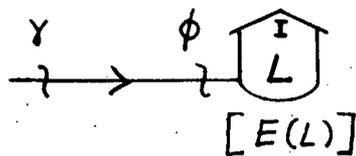
$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dL} \cdot \frac{dL}{dt}$$

d.v.s. output variabelen  $\gamma$  må være givet ved

$$\gamma = \frac{dE}{dL} \quad (21)$$

Da formlerne (20) og (21) er fælles for x- og o-lagre, er

de på fig.45 angivet i forbindelse med et uspecificeret lager med symbolsk index I. Rate variablene i det tilsluttede bånd er så også uspecificerede og må indiceres som på fig.10. De således definerede lagre er én-porte, men kan, i lighed med kilderne godt tegnes med flere porte, idet man så blot skal tænke sig de ekstra porte tilsluttet via en samler af samme type som lageret. På samme måde kan man jo i Forrester's diagramteknik have flere haner tilsluttet samme cisterne, idet differentialkvotienten af level variabelen  $dL/dt$  så skal beregnes som summen af de tilsluttede rate variable, sml. fig.4.



$$\frac{dL}{dt} = \phi ; \quad \gamma = \frac{dE}{dL}$$

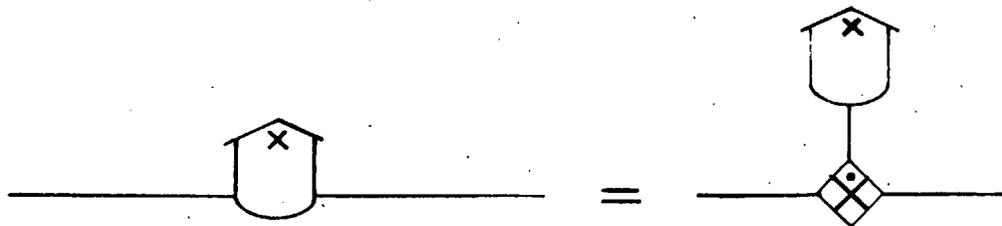
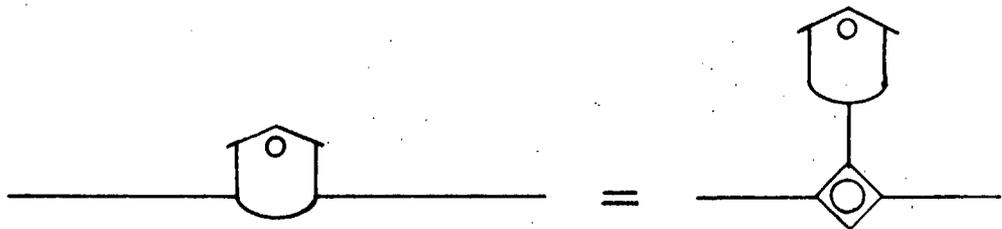
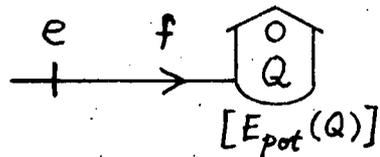
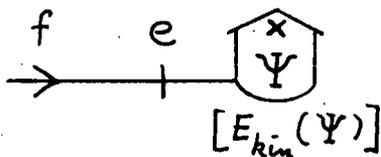


Fig.45. Definition af simple lagre.

De simple lagre med flere tilsluttede bånd skal ikke forveksles med ægte multiport lagre. Et multiport lager har flere level variable og en energifunktion, som afhænger af alle level variablene. På fig.46 er vist et ægte toport lager med en x-level p, og en o-level q og en energifunktion  $H(p,q)$ . I en port, som leder ind til level variabelen L, har vi som før:  $dL/dt = \phi$ , hvor  $\phi$  er input rate-variablen, medens output rate-variablen nu er givet ved en partiel differentialkvotient  $\gamma = \partial H/\partial L$ . For et vilkårligt multiport lager vil flg. krydsdifferentiationsregel være opfyldt:

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial L_j} = \frac{\partial \gamma_j}{\partial L_i} \quad (22)$$

På fig.46 er også vist, hvorledes en simpel forbindelse af p- og q-porten for det angivne toport lager gennem en symmetrisk transformator resulterer i de såkaldte Hamilton-ligninger, som spiller en stor rolle i den analytiske mekanik.

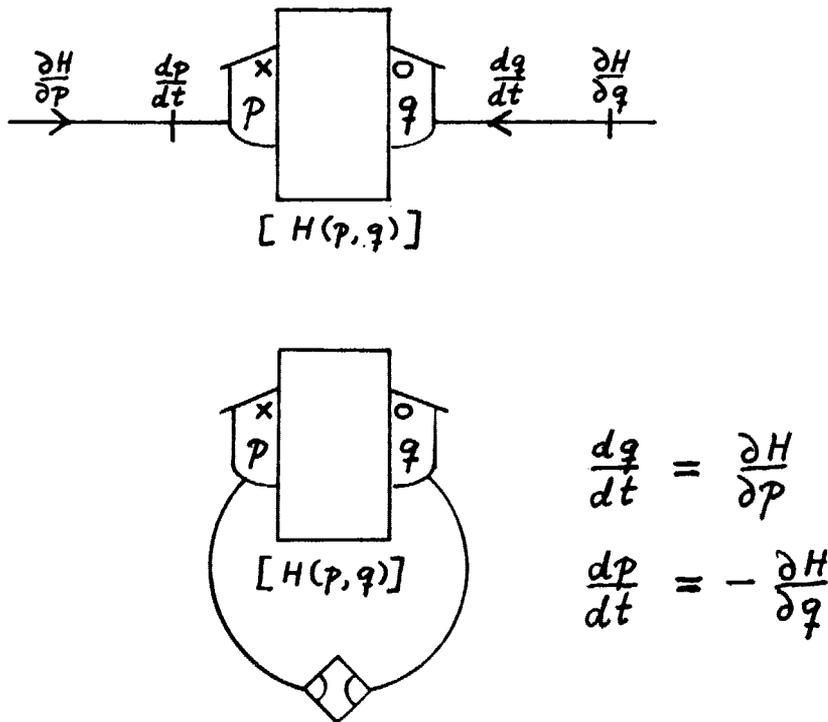


Fig. 46. Multiport lager og Hamilton's ligninger.

For lineære systemer er output energibandsvariablen  $\gamma$  for et simpelt lager en lineær funktion af level variablen  $L$ . Det følger så af ligning (21), at energifunktionen må være kvadratisk:

$$E(L) = \frac{L^2}{2K} \quad , \quad \gamma = \frac{L}{K} \quad (23)$$

hvor  $K$  er en konstant, som kaldes lagerkapaciteten. For et lineært lager angives lagerkapaciteten uden kantet parentes i stedet for energifunktionen.

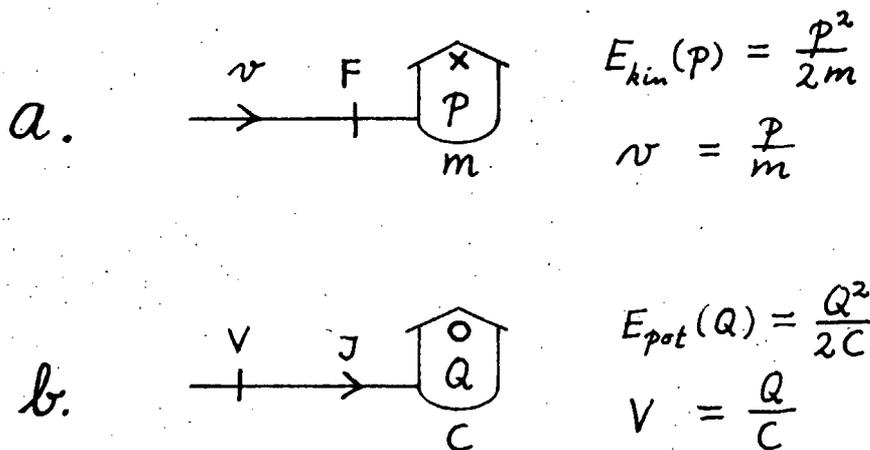


Fig. 47. Eksempler på lineære lagre.

- a) En partikel med massen  $m$ .
- b) en kondensator med kapaciteten  $C$ .

Andre eksempler på lineære lagre, foruden de to på fig.47.:

- c) En drosselspole med selvinduktionskoefficienten  $L$  er et  $x$ -lager med lagerkapaciteten  $L$ .  $x$ -level variablen er den samlede magnetiske flux gennem spolens viklinger.
- d) En elastisk tråd med Young's modul  $E$  er et  $o$ -lager med kapaciteten  $1/E$ .  $o$ -level variablen er trådens strækning.

De såkaldte cykliske lagre, hvis energifunktion er identisk nul, kan angives som lineære lagre med uendelig kapacitet ( $K = \infty$ ). Endelig kan der være grund til at fremhæve de aktive lagre, for hvilke output energibandsvariablen er uaf-

hængig af level variabelen. Et cyklisk lager er et specialtilfælde af et aktivt lager. Et aktivt lager optræder på samme måde som en kilde, men det er ofte en fordel at tegne det som et rigtigt lager med en lineær energifunktion (ikke at forveksle med et lineært lager, som jo har en kvadratisk energifunktion).

Som eksempel på brug af lager-begrebet ser vi på en klassisk termodynamisk problemstilling. Vi har givet et system med faste, stofugennemtrængelige vægge, og et varmereservoir med temperaturen  $T_r$ . Desuden er der givet et arbejdsreservoir, som består af et hejseværk, en masseløs, ustrækkelig snor og et lod med massen  $m$ , som hænger i snoren og er hævet højden  $h$  over underlaget. Arbejdsreservoiret beskrives som et aktivt  $o$ -lager med level variabelen  $h$  og energifunktionen  $mgh$ , hvor  $g$  er tyngdeaccelerationen. Vi ønsker nu at overføre energi fra arbejdsreservoiret til systemet via en ideel Carnot-maskine, der virker som varmepumpe, således at systemet får en temperatur  $T$ , der er højere end reservoir-temperaturen  $T_r$ .

En varmetilførsel til systemet kan beskrives som en forøgelse af systemets indre energi  $U$  med et vist beløb  $\delta U$ . Vi ved så, iflg. Carnot's diskussion, at det arbejde, som skal tilføres den ideelle varmepumpe fra arbejdsreservoiret er givet ved

$$\delta A = \left(1 - \frac{T_r}{T}\right) \cdot \delta U \quad (24)$$

Hvor  $T$  er systemets øjeblikkelige temperatur ( $T > T_r$ ). Når processen er tabsfri, må vi have den samme forøgelse  $\delta A$  af energifunktionen for det lager, der beskriver systemet. Når vi som level-variabel for systemet benytter den indre energi  $U$ , har vi altså

$$\delta E(U) = \left(1 - \frac{T_r}{T}\right) \cdot \delta U \quad (25)$$

d.v.s det må gælde for energifunktionen, at

$$\frac{dE(U)}{dU} = 1 - \frac{T_r}{T} \quad (26)$$

Nu ved vi imidlertid, at det for systemets entropi  $S$ , som funktion af den indre energi, gælder

$$\frac{dS(U)}{dU} = \frac{1}{T} \quad (27)$$

d.v.s energifunktionen  $E(U)$  må være givet ved

$$E(U) = U - T_r \cdot S(U) \quad (28)$$

Denne funktion minder om Helmholtz' "fri energi"  $F = U - T \cdot S$ , men er ikke helt det samme, fordi det er reservoirets temperatur  $T_r$ , og ikke systemets egen temperatur  $T$ , der optræder i ligning (28). Udtrykket (28) fortjener i højere grad end Helmholtz' udtryk betegnelsen "fri energi", men desværre er denne betegnelse blevet forvansket og misbrugt af diverse termodynamikere i tidens løb. I stedet vil vi sige, at udtrykket (28) er en exergi-funktion. Exergi betyder "extra energi", d.v.s. energi, som kan overføres reversibelt til et arbejdsreservoir, og det er jo netop, hvad der er tale om her.

Selve den ideelle Carnot-maskine, som sørger for den reversible energitransport, skildres simplest som en basal toport med spændingsinput i begge porte, d.v.s. en o-gyrator. Det er selvfølgelig en rent fænomenologisk beskrivelse, som slet intet siger om maskinens indretning. Modellen på fig. 48 udtaler sig kun om de rent energimæssige forhold.

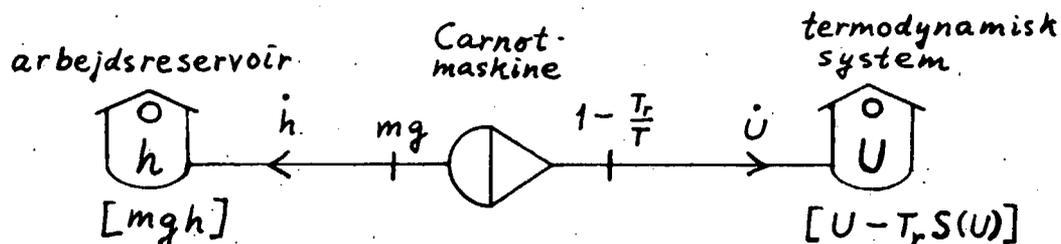


Fig. 48. Model for funktionen af en ideel varmepumpe eller Carnot maskine.

Carnot modellen skildrer en varmepumpe, hvis  $T > T_r$ , og hvis gyrotoren vender som vist og har et positivt omsætningsforhold  $G$ . Hvis gyrotoren vendes om (stadig med  $T > T_r$  og  $G > 0$ ) skildres en ideel varmekraftmaskine, som reversibelt udnytter temperaturforskellen mellem systemet og varmereservoiret og overfører energi til arbejdsreservoiret.

Hvis temperaturforskellen  $\delta T = T - T_r$  er meget lille, kan vi sætte

$$1 - \frac{T_r}{T} \approx \frac{\delta T}{T_r} \quad (29)$$

Denne output spænding er så en lineær funktion af  $\delta U = U - U_0$ , hvor  $U_0$  er den indre energi af systemet, når det er i termisk ligevægt med varmereservoiret, d.v.s. når  $T = T_r$  :

$$\frac{\delta T}{T_r} = \frac{\delta U}{C_v \cdot T_r} \quad (30)$$

hvor  $C_v$  er systemets varmekapacitet.

D.v.s. i nærheden af ligevægten kan det ikke-lineære  $U$ -lager i fig.48 erstattes af et lineært lager med level variabelen  $\delta U$  og kapaciteten  $C_v \cdot T_r$ . Dette er iøvrigt et almindeligt træk, selv for ikke-lineære multiport lagre. I nærheden af termodynamisk ligevægt, hvor lagerets energifunktion har et minimum, kan vi ved rækkeudvikling skrive energifunktionen som et kvadratisk polynomium i level-variablene. Det vil så altid være muligt ved en lineær transformation af level-variablene at "diagonalisere" energifunktionen, så den kan skrives som en sum af kvadratiske led, der hver kun afhænger af én af de nye level variable. På denne måde kan multiport lageret omformes til et sæt simple, lineære lagre, forbundet gennem et skeletdiagram, der udtrykker den lineære transformation fra de gamle level variable til de nye. På denne måde kommer energibåndsteknikken bedst til sin ret: en god energibandsmodel har så vidt muligt krænget den strukturelle information ud af de symbolske lagringsfunktioner og ind i de ikoniske skeletdiagrammer. Specielt

er reticulationen af de Hamilton'ske ligninger på fig.46 et mønstereksempel på en dårlig energibandsmodel. Det kan selvfølgelig være meget sjovt at se velkendte ligninger reproduceret på energibandsfacon, men man bør så vidt muligt reticulere til bunds og ikke stille sig tilfreds med indviklede symbolske relationer, før man har undersøgt, om de kan reduceres til standardrelationerne i det basale byggesæt.

Med hensyn til Carnot-modellen på fig.48 kan vi gå et skridt videre ved at simplificere lagringsfunktionerne og udbygge skeletdiagrammet. Man kan synes, det er en skam, at varmereservoiret ikke optræder på fig.48. Det kan vi imidlertid nemt få med i form af et entropireservoir med level-variablen  $S_r$ , reservoires entropi. I stedet for et enkelt ikke-lineært exergilager med lagringsfunktionen  $E(U) = U - T_r S(U)$  optræder der så to indre-energilagere, som begge er aktive. Det ene lager beskriver systemets indre energi  $E_s(U) = U$  og det andet beskriver reservoires varmeenergi  $E_r(S_r) = T_r \cdot S_r$ . Koblingen af de to lagre sker gennem en styret transducer med omsætningsforholdet  $T(U)$ , systemets temperatur.

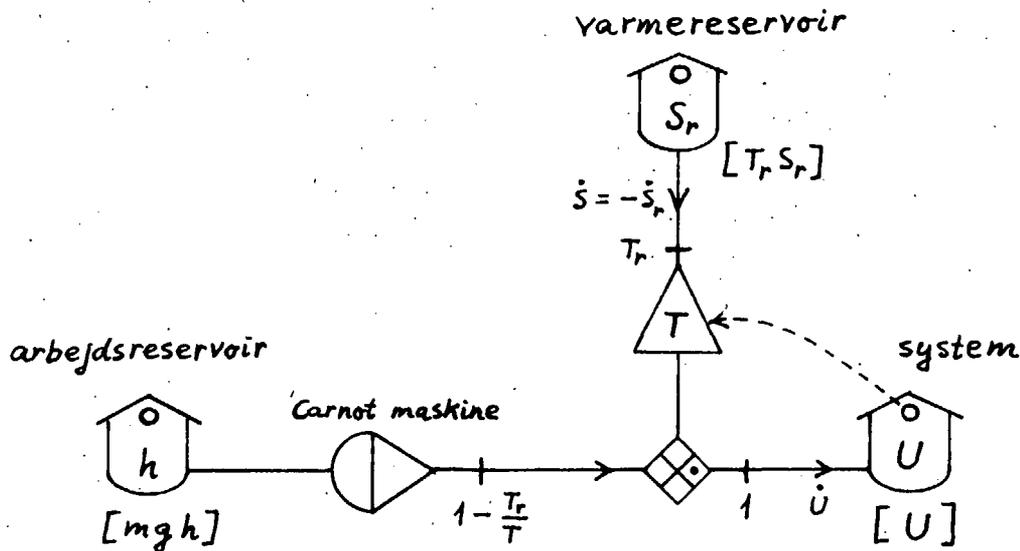


Fig. 49. Alternativ formulering af Carnot-modellen på fig.48.

De to formuleringer af Carnot-modellen skal bl.a. illustrere, at det ikke er muligt at fremhæve et bestemt energibegreb som "det rigtige" i energibandsmodeller. Ganske vist er der forskel på indre energi og exergi eller fri energi, men grunden til, at det kun er en del af systemets indre energi, som kan udveksles med et arbejdsreservoir er bl.a., at entropien "slæbes med" når energien flyttes ved en varmetransport. Energibåndsteknikken kan ved hjælp af skeletdiagrammerne på en klar måde gøre rede for sådanne "sammenlåste transportkomplekser" og derfor kan man sagtens anskueliggøre, at det kun er en del af energien, som er "fri", selv når man benytter den indre energi som lagringsfunktion.

Som de sidste af elementerne fra det basale byggesæt ser vi på lækkene. En læk er et (næsten) passivt én-port system, som ikke kan levere, men kun modtage energi. Hvad der bliver af energien, vil vi som regel ikke tage stilling til, men vi kan i mange tilfælde forestille os, at systemet er i kontakt med et varmereservoir og at energien, som siver ud i lækkene, forsvinder ud til omgivelserne i form af varme. I andre tilfælde behøver vi ikke at bekymre os om, hvor energien går hen, fordi der er tale om fri energi eller exergi, som jo ikke er en bevaret størrelse. Lækkene tegnes med et trekantet ikon, som ligner en samler, der er halvt begravet i "jorden". Grunden til, at dette billede er velegnet er, at man må forestille sig, at energien fra den makroskopiske model spredes ud på myriader af mikroskopiske frihedsgrader, hvorfra den kun med meget ringe sandsynlighed kan vende tilbage. Vi skal i et senere kapitel "grave ned i jorden" og se, hvordan mikrofrihedsgraderne kan beskrives fænomenologisk, og hvordan de, trods alt, må give sig til kende i form af støj på output variabelen fra en læk.

Vi skal især interessere os for lineære lække, hvor output variabelen (bortset fra støjen) er en lineær funktion af input variabelen. D.v.s. hvis lækken har spændingsinput ( $e$ ), er strømmen givet ved

$$f = K \cdot e + \text{strømsstøj} \quad (31)$$

hvor lækparameteren  $K$  kaldes ledningsevnen. Hvis der er strøminput, har vi

$$e = R \cdot f + \text{spændingsstøj} \quad (32)$$

hvor  $R$  er lækens modstand. Afhængig af inputtets type skelner vi mellem en spændingslæk, eller en o-læk, lign.(31), og en strømlæk, eller en x-læk, lign.(32). Det er nødvendigt at angive et ikonisk index,  $x$  eller  $o$  inden i læk-ikonet for at klargøre betydningen af læksymbolet, om det er en ledningsevne eller en modstand. Imidlertid skal man ikke forestille sig, at lækken selv har en foretrukket kausalitet. F.ex. kan en ohmsk modstand ( $R$ ) forbindes til en strømkilde, og man kan så beregne spændingen ved Ohm's lov, ligning (32). Den samme modstand kan også forbindes med en spændingskilde, og man kan beregne strømmen ved ligning (31). Det vil så vise sig, at  $K = 1/R$ . D.v.s. Ohm's lov må opfattes som en akausal ligning, og kausaliteten på en læk er noget, der påtrykkes af andre systemkomponenter, såsom kilder og lagre. Der er derfor ikke noget principielt i vejen for at man i en energibandsmodel angiver en strømlæk, selv om en kausal analyse viser, at lækken må have spændingsinput.

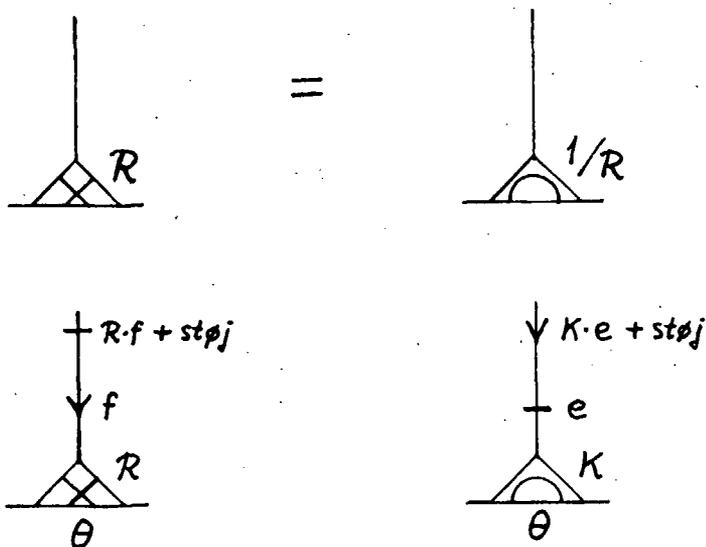


Fig. 50. Definition af lække.

Definitionerne på fig.50 viser endnu en parameter, foruden de omtalte R og K. Det er  $\theta = kT$ , den såkaldte støjtemperatur, som sammen med den "overjordiske" lækparameter (R eller K) er bestemmende for støjens statistiske egenskaber. Når støjen tages med i en model, må man naturligvis være på det rene med kausaliteten, for ellers ved man ikke, om den aktive støjkomponent blander sig i strømsignalerne eller i spændingssignalerne. Vi vil derfor underforstå, når vi f.ex. taler om støjen fra en x-læk, at der virkelig er tale om en læk med strøminput. Støjens egenskaber beskrives i Nyqvist's formel, som vi senere skal udlede.

Dissipationshastigheden  $w$ , som en lineær læk giver anledning til, er jo produktet af strøm og spænding i det tilsluttede energibånd, når orienteringen er valgt indmod lækken. D.v.s. iflg. (31) og (32) eller definitionerne på fig.50 har vi

$$w = \begin{cases} K \cdot e^2 & \text{for o-læk} \\ R \cdot f^2 & \text{for x-læk} \end{cases} \quad (33)$$

idet støjens bidrag i middel er nul og derfor uinteressant i denne forbindelse. Vi ser, at hvis der virkelig er tale om en læk, må parameteren, R eller K, være positiv.

Parameteren, R eller K, kaldet lækstørrelsen, er af x-typen, fordi den sammenknytter en strøm og en spænding i en lineær relation. Andre parametre af x-typen er gyratorforhold og kildestrømme, hvorimod kilde-spændinger, transducerforhold og lagerkapaciteter (for både x- og o-lagre!) er af o-typen. Når vi har opskrevet de dynamiske ligninger på formen (1) for en energibandsmodel, kan vi foretage en tidsvendings-transformation ved at skifte fortegn på alle x-parametre og x-variable (incl. tiden  $t$ , der betragtes som en x-level) og bevare alle o-parametre og o-variable. Tilsvarende kan vi tegne en energibandsmodel for det tidsvendte system, hvor, vel at mærke, orienteringerne skal være de samme som i den oprindelige model. Den tidsvendte model er så beskrevet ved de samme ligninger som den oprindelige model. Hvis

(og kun hvis) der forekommer lække i systemet, er den tidsvendte model ufysisk, fordi den kommer til at indeholde negative lække, og det må betragtes som et grundlæggende axiom i energibåndsteknikken, at lækstørrelser altid er positive. På denne måde introduceres "tidens pil", som kendt fra termodynamikkens anden hovedsætning.

Vi sammenfatter diskussionen af de lineære lække i flg. påstand, som er det (foreløbig) sidste axiom i udviklingen af energibåndsteknikken:

Påstand nr. 6. *En lineær læk beskrives ved to positive parametre, lækstørrelsen (modstand eller ledningsevne) og støjtemperaturen. En strømlæk er en spændingskilde for Nyqvist-støj, og en spændingslæk er en strømkilde for Nyqvist-støj.*

Jeg foretrækker at udsætte støjdiskussionen til et senere kapitel og vil derfor i de følgende eksempler undlade at angive støjtemperaturen.

Som en ikke helt triviell anvendelse af lækbegrebet ser vi på fænomenet varmeledning. Vi ser på to klumper stof, som kan udveksle varme med hinanden. Begge klumper antages at have temperaturer, som ligger tæt ved et varmereservoirs temperatur  $T_r$ . Vi kan så beskrive de to klumper med lineære exergi-lagre, hvis level variable er forskydninger af den indre energi, hhv.  $\delta U_1$  og  $\delta U_2$ , og hvis kapaciteter er hhv.  $c_{v1} \cdot T_r$  og  $c_{v2} \cdot T_r$  (sml. diskussionen under lign. (30)). Varmeledningen fra den ene klump til den anden kommer så i stand ved, at forskellen i spænding fra de to lagre, som skyldes temperaturforskellen, fungerer som input til en spændingslæk, der så afstedkommer en strøm af indre energi mellem lagrene. Lækparameteren er  $K \cdot T_r$ , hvor  $K$  er varmeledningsevnen.

En bemærkelsesværdig ting ved varmeledningsmodellen er, at den på én gang gør rede for, at den indre energi er bevaret (der flyder lige så meget indre energi ud fra det ene lager, som der flyder ind i det andet), og at exergien går tabt ned.

i lækken. På denne måde får vi en illustration af begge termodynamikkens hovedsætninger i en meget simpel model.

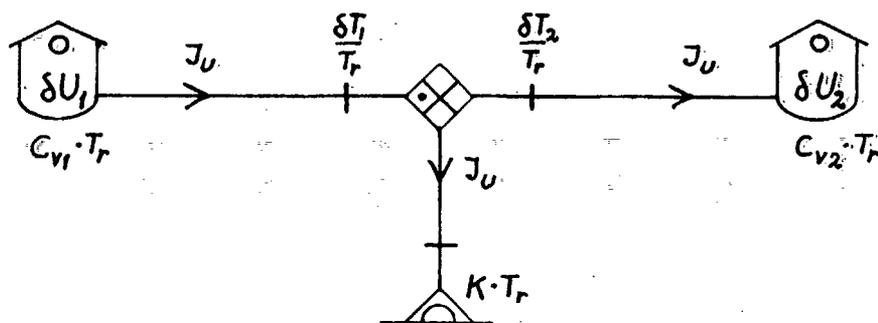


Fig. 51. Model for varmeledning.

Til slut i dette kapitel skal vi lige se på et par modeller, som blev gennemgået ved hjælp af Forrester-diagrammer i kapitel 1. På fig.52 ses modellen "hest og vogn" fra fig.4. Der er anvendt en mere kortfattet navngivning af de forskellige variable, f.ex. betyder SS "seletøjets strækning" og sådan er det hele vejen igennem. Det er en god øvelse at sammenligne de to forskellige diagramversioner af modellen punkt for punkt og at nedskrive bevægelsesligningerne på samme form som lign. (1). Bemærk hvordan loven om aktion og reaktion så at sige automatisk følger af diagramteknikkens spilleregler.

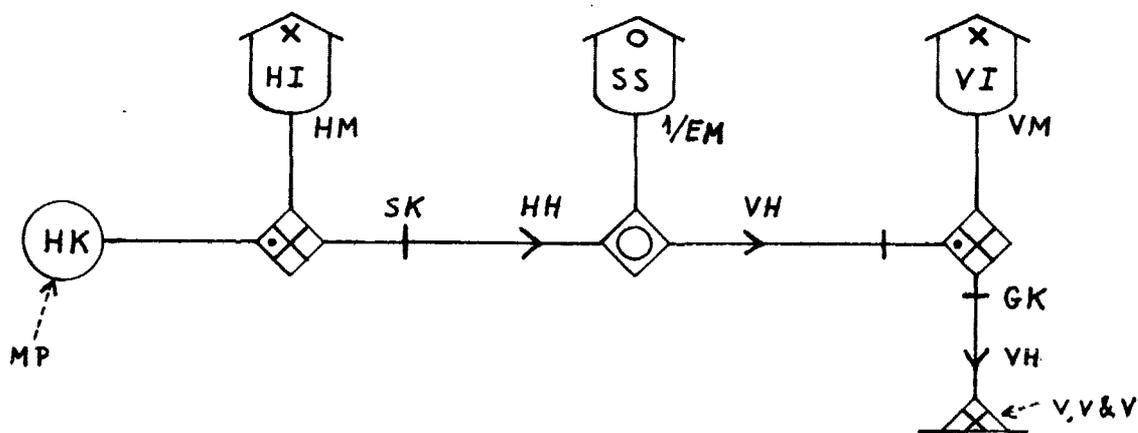


Fig. 52. Hest og vogn. Sammenlign med fig.4.

På fig.53 vises ad hoc modellen "Cykelturen fra København til Roskilde" fra fig.3. Der er her lagt noget mere struktur ind i modellen, bl.a. er der gjort rede for to forskellige slags gnidningsmodstand: GV, som er gnidning fra vejbanen (erstatte variabelen "luft i ringene"), og GL som er gnidning fra luften. De to afstands-o-lagre er beskrevet som cykliske, hvilket svarer til, at man ser bort fra bakker på strækningen. (Betegnelsen "cyklisk" skyldes dog ikke, at sådanne lagre forekommer i denne "cykelmodel"!)

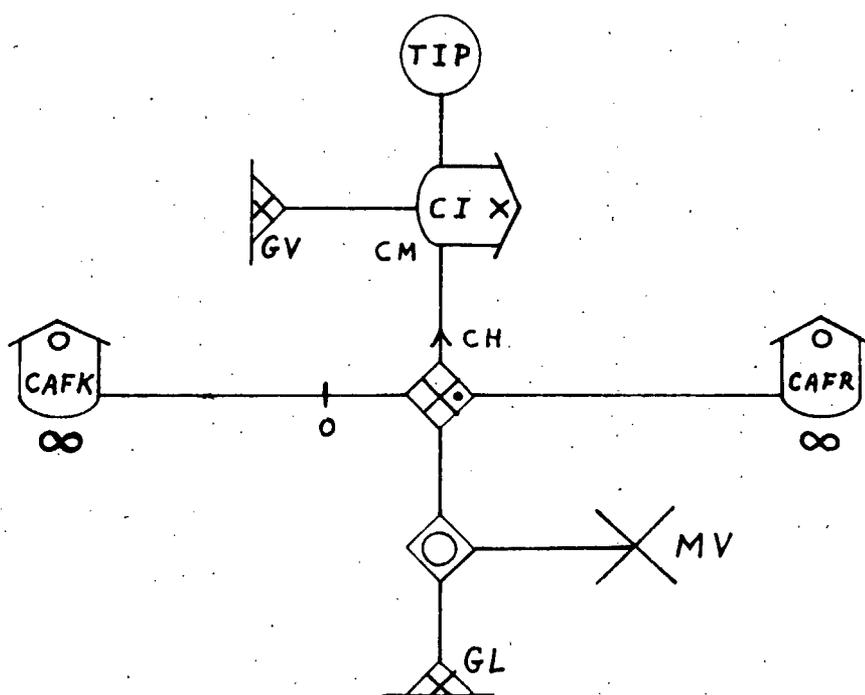


Fig. 53. Cykeltur fra København til Roskilde. Sml. fig.3.

Prøv f.ex. at overveje, hvordan man med bevarelse af alle symboler og indices i fig. 53 kan lave en simpel ikonisk ændring, således at modellen kommer til at forestille en cykeltur fra Roskilde til København.

## 8. Netværksmodeller og naturlove.

Når man skal lave en dynamisk model af et forelagt objekt er det ofte en fordel at betragte modelbygningsprocessen som opdelt i flere faser. Som regel vil man starte med en stærkt ikonisk model, en skitse eller evt. et fotografi, som klart fremhæver væsentlige træk ved objektet. I næste fase kan der ske en idealisering og "sammenklumpning" af de væsentlige funktionelle træk ved systemet til specielle diskrete ikoner, f.ex. partikler, fjedre og stive stænger i et mekanisk system, eller modstande, ledninger og kondensatorer i et elektrisk system. Modellen er så klar til en topologisk behandling, hvor man kan udnytte topologisk ækvivalens til at frembringe et klart og overskueligt netværksdiagram. F.ex. er det i elektriske diagrammer tilladt at strække, forkorte og bøje lednings-ikonerne, sålænge man respekterer forbundetheden i netværkets knuder.

En energibåndsmodel optræder som sidste fase i den ikoniske del af modelopstillingen og danner bindeleddet til de symbolske dynamiske ligninger. Når energibåndsmodellens generelle ikoner er stillet rigtigt op, frembringes den symbolske udgave af modellen rutinemæssigt ved hjælp af teknikens spilleregler. Ganske vist kan der ud fra en ikonisk energibåndsmodel laves mere end ét ligningssystem, fordi man har frihed til at vælge orienteringen i hvert enkelt energibånd; men alle disse ligningssystemer vil være ækvivalente, idet de beskriver det samme objekt. Oversættelsen af en energibåndsmodel til ligninger har været hovedemnet for de foregående kapitler, og jeg vil gå ud fra, at læseren på dette sted har tilegnet sig denne teknik ved at opskrive ligninger for de præsenterede diagrammer.

Det egentlig svære punkt i modelbygningsprocessen er oversættelsen fra en specielt-ikonisk model til den generelt-ikoniske energibåndsmodel. Regler for en sådan oversættelse kan naturligvis ikke formuleres i det generelle sprog alene,

man bliver nødt til at gå ind i de specielle discipliner og se, hvordan de basale standardfunktioner fremtræder dér.

Et specielt netværk, f.ex. et elektrisk eller et rheologisk, består af egentlige komponenter og forbindelseselementer. I et elektrisk netværk kan de egentlige komponenter være kondensatorer, spoler, modstande, strømkilder og spændingskilder, medens forbindelseselementerne er ledninger, knuder og evt. transformatorer. I et rheologisk netværk er de egentlige komponenter fjedre og "stempler", medens forbindelseselementerne er stive stænger og gaffel-forgreninger.

I mange tilfælde, specielt for lineære systemer, er det yderst simpelt at oversætte de egentlige komponenter til elementer fra det basale byggesæt, nemlig kilder, lagre og lække. Den svære og interessante del af oversættelsen består altså i at oversætte den topologiske information i forbindelseselementerne til et samlerdiagram (evt. med transformatorer).

Som fremhævet i citatet af Oster, Perelson og Katchalsky i foregående kapitel (s.64) viser det sig, at mange såkaldte "naturlove" kan føres tilbage til topologiske lovmæssigheder for netværk. Denne "afskaffelse af naturlove" fremtræder først helt klart, når topologien udtrykkes ved et samlerdiagram, som jo er et fælles sprog for alle energetiske medier. Det er ikke strengt nødvendigt at kende sådanne love for at anvende energibåndsteknikken i en konkret sammenhæng, for de er nedlagt i teknikkens spilleregler og vil derfor automatisk være opfyldt, når reglerne bruges korrekt. Fra et teoretisk-fysisk eller matematisk synspunkt er sådanne love, som kan vises deduktivt ud fra et simpelt sæt af aksiomer, imidlertid meget spændende, fordi de afslører en indre logik i naturbeskrivelsen, som har været ukendt for lovenes ophavsmand (m/k). Vi skal derfor kort se på et par love for samlerdiagrammer, nemlig Tellegen's teorem og reciprocitetssætningen, der begge kan bruges til at frembringe stribevis af "naturlove" inden for specielle discipliner, såsom analytisk mekanik og irreversibel termodynamik.

På fig.54 ses et skeletdiagram, der kan karakteriseres som et topologisk felt. Feltet består af samlere og symmetriske transformatorer, som er de rene topologiske elementer i byggesættet. Gyldigheden af de følgende betragtninger vil dog ikke anfægtes af, at vi også tillader transformatorer og transducere med konstant omsætningsforhold at indgå i det topologiske felt. Feltets porte må tænkes forbundet til egentlige komponenter, kilder, lagre, lække og gyratorer, som imidlertid her lades ude af betragtning. Vi vil blot tænke os, at de ydre systemkomponenter fastlægger en bestemt kausalitet. Lad der være  $p$  porte med strøminput og  $q$  porte med spændingsinput. Vi nummererer strømportene med et index  $\alpha$  ( $1 \leq \alpha \leq p$ ) og spændingsportene med et index  $\beta$  ( $1 \leq \beta \leq q$ ). På fig.54 er strømportene samlet til venstre og spændingsportene til højre. Orienteringerne er valgt efter den såkaldte D-konvention, d.v.s. pilene peger væk fra stregerne. Herved bliver strømportene orienteret ind mod feltet og spændingsportene væk fra feltet, eller, sagt på en anden måde: De ydre komponenter, som har strømoutput (d.v.s. strøminput til feltet) får generatororientering, medens de ydre komponenter med spændingsoutput får forbrugerorientering. En anden konvention, som vi lige så godt kunne have brugt, er den såkaldte K-konvention, som går ud på, at pilene overalt skal pege ind mod stregen (ligesom i bogstavet K).

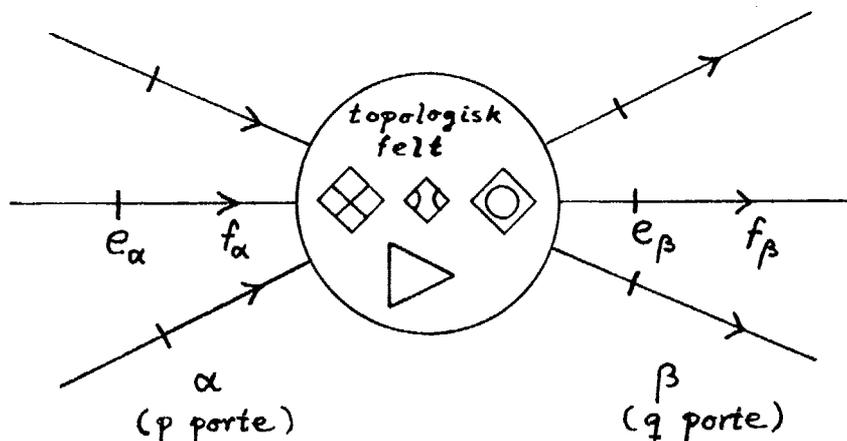


Fig. 54. Topologisk felt, som har  $p$  " $\alpha$ -porte" med strøminput og  $q$  " $\beta$ -porte" med spændingsinput. Orientering efter D-konventionen.

De relationer, som karakteriserer de topologiske elementer er allesammen rene strømrelationer eller rene spændingsrelationer. Der findes ingen ligninger for det topologiske felt, hvor strømme og spændinger blandes. D.v.s. output strømmene i  $\beta$ -portene må være bestemt alene af input strømmene i  $\alpha$ -portene, og output spændingerne i  $\alpha$ -portene må være bestemt alene af inputspændingerne i  $\beta$ -portene. Vi kan derfor opskrive input-output relationerne på følgende måde:

$$\begin{pmatrix} e_{\alpha} \\ f_{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & T_{\alpha\beta} \\ \tilde{T}_{\beta\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{\alpha} \\ e_{\beta} \end{pmatrix} \quad (34)$$

Her må man så opfatte  $e_{\alpha}$  og  $f_{\alpha}$  som vektorer med  $p$  komponenter,  $e_{\beta}$  og  $f_{\beta}$  som vektorer med  $q$  komponenter,  $T_{\alpha\beta}$  som en matrix med  $p$  rækker og  $q$  søjler og  $\tilde{T}_{\beta\alpha}$  som en matrix med  $q$  rækker og  $p$  søjler. De to nuller er hhv.  $p \times p$  og  $q \times q$  nulmatrixer.

Den anden egenskab, vi skal benytte, er, at skeletdiagrammer hverken kan oplagre eller dissipere energi. D.v.s. den samlede energistrøm, som går ind i  $\alpha$ -portene må til en hver tid være det samme som energistrømmen ud af  $\beta$ -portene:

$$\sum_{\alpha=1}^p e_{\alpha} f_{\alpha} = \sum_{\beta=1}^q e_{\beta} f_{\beta} \quad (35)$$

Udtrykker vi nu  $e_{\alpha}$ 'erne ved  $e_{\beta}$ 'erne og  $f_{\beta}$ 'erne ved  $f_{\alpha}$ 'erne ved hjælp af ligning (34) og indsætter i ligning (35), får vi følgende relation:

$$\sum_{\alpha, \beta} f_{\alpha} T_{\alpha\beta} e_{\beta} = \sum_{\alpha, \beta} e_{\beta} \tilde{T}_{\beta\alpha} f_{\alpha} \quad (36)$$

hvor  $T_{\alpha\beta}$  og  $\tilde{T}_{\beta\alpha}$  nu står for en enkelt komponent af hhv.  $T$  og  $\tilde{T}$ -matricen. Energibalancen er nu udtrykt ved de uafhængige input-variable  $f_{\alpha}$  og  $e_{\beta}$ . At disse variable er uafhængige, betyder jo, at vi frit kan tilordne vilkårlige værdier til dem. Vi kan f.ex. bestemme, at alle  $f_{\alpha}$ 'erne, undtagen ét, og alle  $e_{\beta}$ 'erne, undtagen ét skal være nul. Det er så klart, at vi for hvert index-par  $(\alpha, \beta)$  må have:

$$T_{\alpha\beta} = \tilde{T}_{\beta\alpha} \quad (37)$$

Dette er den såkaldte reciprocitets-sætning for netværk. Læst som en matrix-ligning siger den, at  $\tilde{T}$ -matricen er den transponerede af  $T$ -matricen, eller at den totale response-matrix i ligning (34) er symmetrisk.

Denne simple formulering af reciprocitetssætningen gælder kun for D- og K-orienteringen. Vælger vi i stedet X-orienteringen (alle pile ind mod feltet) eller O-orientering (alle pile væk fra feltet), skal vi iflg. strøm/orienteringsreglen erstatte ligning (34) med flg. response-ligning:

$$\begin{pmatrix} e_\alpha \\ f_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & T_{\alpha\beta} \\ -\tilde{T}_{\beta\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_\alpha \\ e_\beta \end{pmatrix} \quad (38)$$

Reciprocitetssætningen siger så, at responsematricen i (38) er antisymmetrisk.

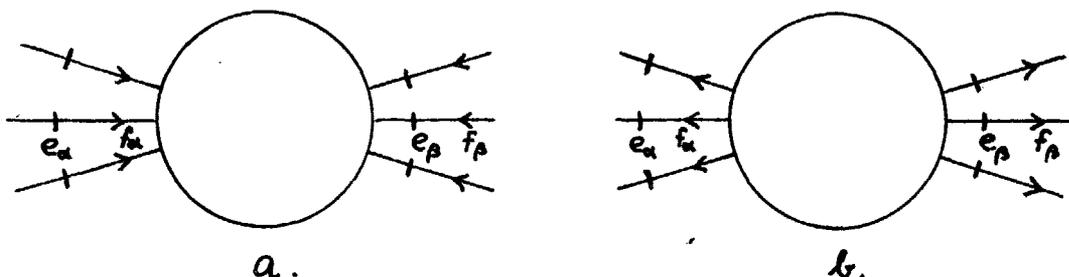


Fig. 55. Symmetriske orienteringskonventioner svarende til ligning (38).  
a. X-konvention. b. O-konvention.

Med en af de symmetriske orienteringskonventioner (X- eller O) kan energibalancen for skeletdiagrammet udtrykkes på formen

$$\sum_{i=1}^n e_i f_i = 0 \quad ; \quad (n = p+q) \quad (39)$$

hvor summationen går over alle skeletdiagrammets porte,

uafhængigt af kausaliteten. Denne sætning udtrykker det såkaldte arbejdsprincip, som af den danske kemiker J.N. Brønsted er benyttet til opbygning af termodynamikken ud fra et procesorienteret synspunkt, der meget minder om energibåndsteknikkens. Arbejdsprincippet gælder ikke blot for topologiske felter, men for vilkårlige skeletdiagrammer, som godt må indeholde gyratorer og styrede transducere.

For et rent topologisk felt, hvor vi har rene strømrelationer og rene spændingsrelationer (altså ingen gyratorer) som i ligning (38) (incl.(37)), behøver strømvektoren  $f_i$  og spændingsvektoren  $e_i$  ( $1 \leq i \leq p+q$ ) ikke en gang at høre til samme tidspunkt  $t$ . Ligning (38) vil stadig gælde, hvis vi lader spændingerne være til tiden  $t_1$  og strømmene til et vilkårligt andet tidspunkt  $t_2$ . Strømvektoren behøver endda ikke en gang at høre til samme system, men kan tilhøre et andet system, som er topologisk ækvivalent med det første. Vi kan så udtrykke arbejdsprincippet (39) på den langt stærkere form

$$\sum_{i=1}^n e_i^{(1)} \cdot f_i^{(2)} = 0 \quad (40)$$

hvor index (1) refererer til system 1, kl.  $t_1$  og (2) til system 2, kl.  $t_2$ . Dette er Tellegen's teorem.

For et skeletdiagram, der indeholder styrede transducere, men ingen gyratorer, kan man i reglen ikke lade  $t_2$  være forskellig fra  $t_1$  i ligning (40), fordi systemets "topologi", udtrykt ved T-matricen vil være forskellig til forskellige tider. Man kan imidlertid stadig udnytte Tellegen's teorem ved at lade mærkerne (1) og (2) hentyde til ækvivalente systemer (samme tid) med lidt forskellige værdier af strømmene eller spændingerne. Hvis system (2) har spændingerne  $e_i$  og system (1) spændingerne  $e_i + \delta e_i$  og begge systemer har strømmene  $f_i$ , får vi af (40):

$$\sum_{i=1}^n (e_i + \delta e_i) f_i = 0$$

Nu gælder (40) også for system (2) alene:

$$\sum_{i=1}^n e_i f_i = 0 ,$$

og vi får da ved subtraktion:

$$\sum_{i=1}^n f_i \delta e_i = 0 \quad (41)$$

På lignende måde kan vi udlede

$$\sum_{i=1}^n e_i \delta f_i = 0 \quad (42)$$

og

$$\sum_{i=1}^n \delta e_i \cdot \delta f_i = 0 \quad (43)$$

De lidt mystiske småændringer i (41), (42) og (43), som sker med "fastfrossen tid" (d.v.s fastholdelse af skeletdiagrammet, som jo i almindelighed er tidsafhængigt) kaldes virtuelle, d.v.s. tænkte, ændringer. I stedet for at benytte virtuelle ændringer af rate variablene  $e_i$  og  $f_i$  kan vi indføre level variable  $p_i$  og  $q_i$  ved definitionerne

$$e_i = \frac{dp_i}{dt} = \dot{p}_i \quad \text{og} \quad f_i = \frac{dq_i}{dt} = \dot{q}_i \quad (44)$$

Da virtuelle ændringer  $\delta p_i$  og  $\delta q_i$  kan tænkes opbygget "momentant" af virtuelle  $\delta e_i$ 'er og  $\delta f_i$ 'er, kan vi formulere "integrerede versioner" af ligningerne (41), (42) og (43) for vilkårlige skeletdiagrammer uden gyраторer

$$\sum_{i=1}^n f_i \delta p_i = 0 \quad (45)$$

$$\sum_{i=1}^n e_i \delta q_i = 0 \quad (46)$$

$$\sum_{i=1}^n \delta p_i \delta q_i = 0 \quad (47)$$

Som eksempel på anvendeligheden af disse relationer ser vi

på et autonomt system med x-levels  $p_\alpha$  ( $1 \leq \alpha \leq p$ ) og o-levels  $q_\beta$  ( $1 \leq \beta \leq q$ ). Systemet beskrives ved et multiport lager med energifunktion  $E(p_\alpha, q_\beta)$  og et skeletdiagram uden gyrotorer, som vist på fig.56. Level variablene  $p_\beta$  og  $q_\alpha$ , som kan defineres ved ligningerne (44) indgår ikke i energifunktionen og er derfor beskrevet ved cykliske lagre.

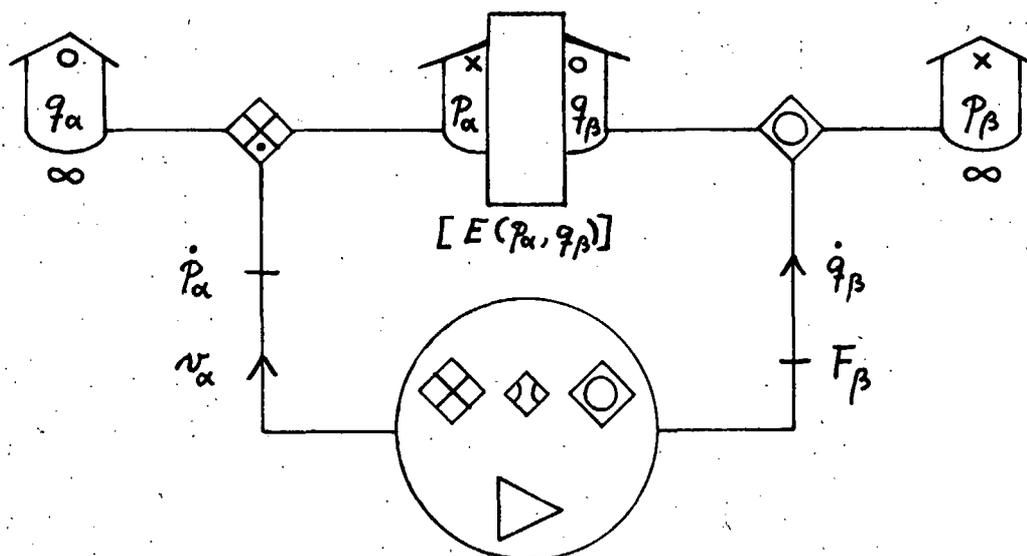


Fig. 56. Autonomt mekanisk system (uden gnidning).

Vi bruger nu Tellegen's teorem på formen (46) og får med de på fig.56 benyttede symboler:

$$\sum_{\alpha=1}^p \dot{p}_\alpha \delta q_\alpha + \sum_{\beta=1}^q F_\beta \delta q_\beta = 0 \quad (48)$$

Lad nu de virtuelle ændringer starte kl.  $t_1$  og slutte kl.  $t_2$ , således at  $\delta q$ 'erne er nul for  $t=t_1$  og  $t=t_2$ . Vi har så

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_\alpha \delta q_\alpha dt = - \int_{t_1}^{t_2} p_\alpha \delta v_\alpha dt \quad (49)$$

og det følger derfor af (48) og (49), at

$$\int_{t_1}^{t_2} [\sum_{\alpha} p_\alpha \delta v_\alpha - \sum_{\beta} F_\beta \delta q_\beta] dt = 0 \quad (50)$$

Størrelsen i den kantede parentes kan udtrykkes ved den vir-

tuelle ændring af den såkaldte Lagrange-funktion for systemet, som er defineret ved:

$$L = \sum_{\alpha} p_{\alpha} v_{\alpha} - E(p_{\alpha}, q_{\beta}) \quad (51)$$

Vi har nemlig

$$\delta E = \sum_{\alpha} v_{\alpha} \delta p_{\alpha} + \sum_{\beta} F_{\beta} \delta q_{\beta}$$

og 
$$\delta \left( \sum_{\alpha} p_{\alpha} v_{\alpha} \right) = \sum_{\alpha} (v_{\alpha} \delta p_{\alpha} + p_{\alpha} \delta v_{\alpha})$$

d.v.s.

$$\delta L = \sum_{\alpha} p_{\alpha} \delta v_{\alpha} - \sum_{\beta} F_{\beta} \delta q_{\beta} \quad (52)$$

Ligning (50) kan så udtrykkes på formen

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad (53)$$

Dette variationsprincip, der betragtes som grundlæggende for den analytiske mekanik er kendt som Hamilton's princip eller mindste virknings princip. Når L kan udtrykkes som funktion af  $q_{\beta}$ 'erne og  $\dot{q}_{\beta}$ 'erne, fører (53) til Euler-Lagrange ligningerne

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\beta}} - \frac{\partial L}{\partial q_{\beta}} = 0 \quad (54)$$

Variationsprincippet (48) er kendt som d'Alembert's princip. Hvis systemet er i ligevægt (statisk) er  $\dot{p}_{\alpha} = 0$ , og vi får af (48):

$$\sum_{\beta} F_{\beta} \delta q_{\beta} = 0 \quad (55)$$

hvilket er de virtuelle arbejders princip.

Efter disse eksempler på, hvordan meget almene principper i naturbeskrivelsen manifesterer sig i energibåndsformalismen, går vi over til den mere konkrete diskussion: Hvordan oversætter vi en given netværksstruktur til et samlerdiagram?

På fig.57 ses et typisk elektrisk netværk. Komponenterne har alle to terminaler og kan umiddelbart oversættes til de basale byggesæt: Vi har en spændingskilde ( $\ominus$ ), en strømkilde ( $\ominus$ ), to modstande ( $\text{---}$ ), to selvinduktioner ( $\text{---}$ ) og to kondensatorer ( $\text{---}$ ), og vi har jo allerede været inde på, at en modstand er en (x- eller o-)læk, en selvinduktion er et x-lager og en kondensator er et o-lager. På fig.57 er strømorienteringerne angivet med pile og spændingsorienteringerne med fortegn, + og -. I overensstemmelse med almindelig praksis er sammenknytningen af de to slags orientering valgt således, at de aktive komponenter ( $\ominus$  og  $\ominus$ ) har generatorfortegn ( $\text{---}$ ), medens de passive ( $\text{---}$ ) og reaktive ( $\text{---}$ ,  $\text{---}$ ) komponenter har forbrugerfortegn ( $\text{---}$ ). I energibåndsoversættelsen skal vi så tilsvarende vælge orienteringerne væk fra kilderne og ind mod lækkene og lagrene, hvis vi vil holde os til de samme orienteringskonventioner som i fig.57.

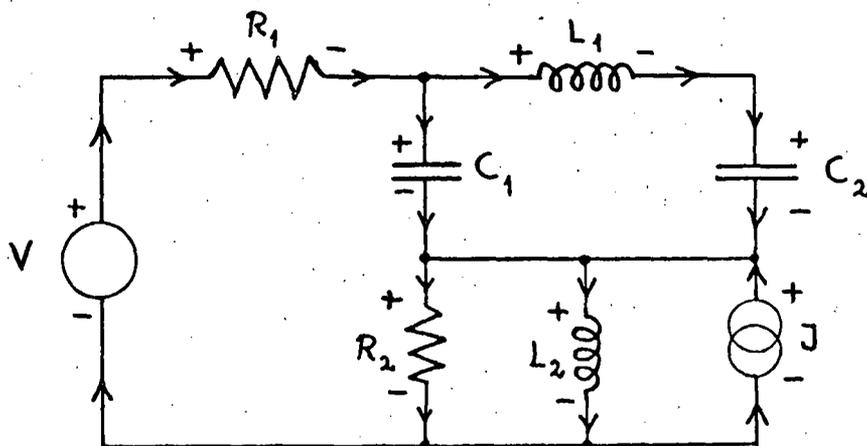


Fig. 57. Elektrisk ledningsdiagram med strøm- og spændingsorienteringer.

Vi omformer nu fig.57, således at den kommer til at fremtræde som en lineær graf, d.v.s. en diskret topologisk struktur, bestående af knuder, forbundet med grene, med én komponent siddende i hver gren. På fig.58 har vi navngivet grenene med symbolet for den indsatte komponent, medens knuderne er navngivet med et tal.

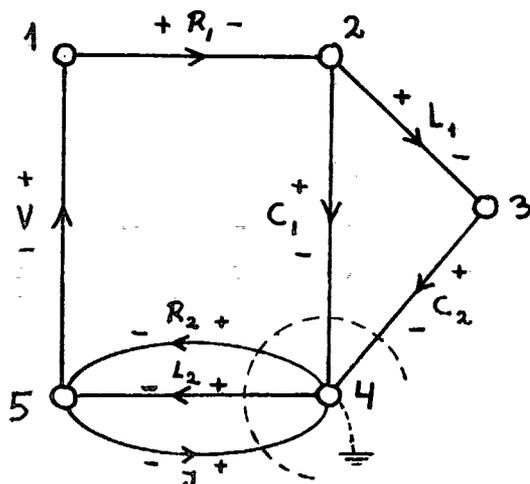


Fig. 58. Orienteret lineær graf, svarende til systemet på fig.57. Knude 4 er den "jordforbundne" referenceknude.

Energibandsvariablene, strøm og spænding, for de enkelte énport komponenter er i den lineære graf knyttet til grenene. Imidlertid kan grenspændingerne udtrykkes som differenser mellem knudespændinger, f.ex.  $V_{C_1} = V_2 - V_4$  for kondensatoren  $C_1$ . Der vil så altid være en overflødig knudespænding, d.v.s. vi kan frit vælge én af knuderne som referenceknude og sætte dens spænding til nul. Det vil fremgå af den følgende diskussion, at man bør vælge en referenceknude med flest mulig tilsluttede grene. På fig.58 er det knude 4, som med en jordforbindelse er udnævnt til referenceknude. I de fleste elektroniske apparater er der en særdeles fremtrædende referenceknude i form af et "chassis", som kan være en aluminiumsramme, der ud over at definere spændingsnulpunktet også tjener til fastholdelse af de enkelte komponenter. I en bil er den ene akkumulatorpol altid forbundet til stellet.

Når referenceknuden er valgt, vil det som regel være praktisk

at omdefinere visse af spændingsfortegnene. Når vi taler om spændingen i en gren mellem f.ex. knude 5 og referenceknuden 4, vil det være mest praktisk at definere denne spænding som  $V_5 - V_4 = V_5$  og ikke som  $V_4 - V_5 = -V_5$ . Vi må derfor lave om på nogle spændingsfortegn, og hvis vi vil opretholde distinktionen mellem generator- og forbrugerelementer må vi samtidigt vende strømpilen i de pågældende grene. Endelig må vi så for strømkildens vedkommende skifte fortegn på strøm-symbolet  $J$ . Alle disse ændringer er foretaget på fig. 59.

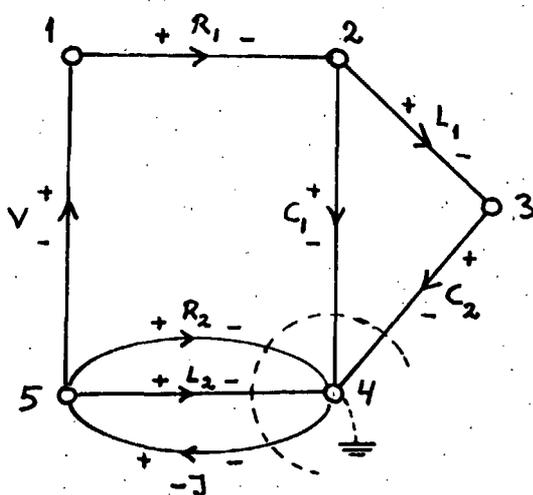


Fig. 59. Samme graf som på fig.58 med orienteringerne justeret efter den valgte referenceknude.

Vi betragter nu først en af de knuder, som er direkte forbundet til referenceknuden gennem én eller flere grene, f.ex. knude 5 med grenene  $R_2, L_2$  og  $-J$ . Da disse komponenter alle har samme spænding som knude 5, kan vi lade knude 5 være repræsenteret ved en spændingssamler, som har de tre komponenter tilsluttet og desuden en forbindelse til knude 1:

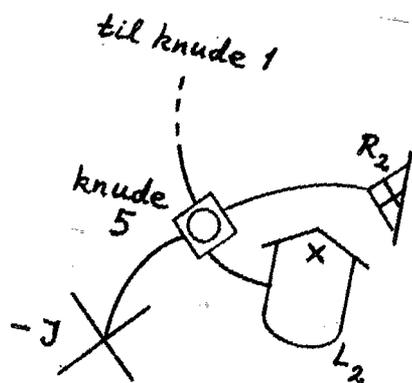


Fig. 60. Knode med forbindelse til referenceknuden.

På lignende måde kan vi lade de øvrige knuder i grafen, undtagen referenceknuden, oversætte til spændingsvariable, således at den distributive spændingsvariabel for samleren er lig med knudens spænding. Ser vi nu på en gren mellem to ikke-referenceknuder, f.ex. grenen  $R_1$  mellem knude 1 og knude 2, så er grenspændingen givet ved differensen mellem knudespændingerne:  $V_{R_1} = V_1 - V_2$ , medens strømmen er den samme for hele grenen. Vi ser altså, at grenspændingen indgår i en konservativ spændingsrelation med de to knudespændinger, hvilket betyder, at grenen må indeholde en x-samler med prik. Prikken skyldes, at de tre spændinger ikke har samme fortegn i den konservative relation (jfr. diskussionen på side 51-52). Den distributive strømvariabel for x-samleren er grenstrømmen. Prikken placering afgøres ved hjælp af orienteringerne. Vi lader energibåndene mellem de to o-samlere (knuderne) og x-samleren have samme orientering som grenen i grafen. Komponenten i grenen indsættes i den tredje port på x-samleren, og orienteringen i denne port vælges væk fra samleren, hvis komponenten har forbrugerforteegn, ind mod samleren, hvis komponenten har generatorforteegn. Der vil så være én af de indre porte (forbundet til o-samler), som har orientering modsat de to andre porte (i forhold til x-samleren), og ved denne port

skal prikken sidde. På fig.61 er vist, hvordan det gøres.

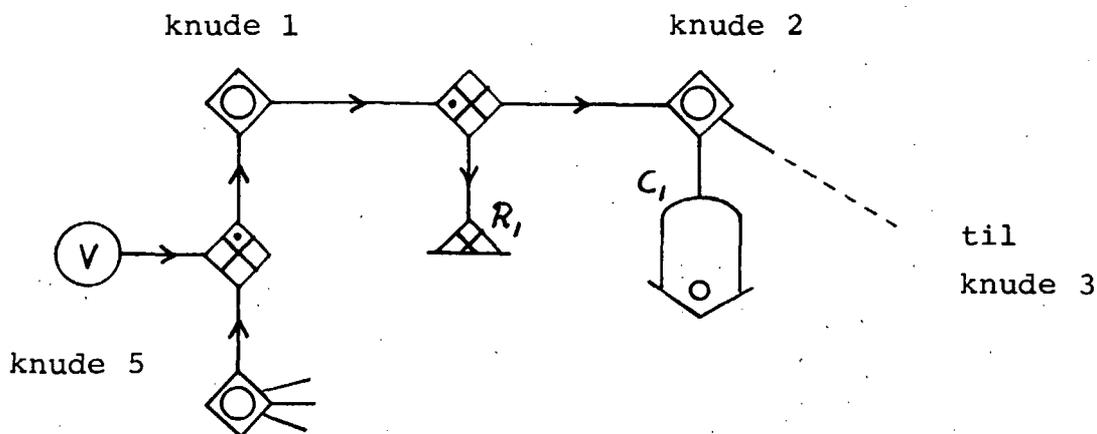


Fig. 61. Grene mellem ikke-referenceknuder.

Vi kan nu se, hvordan topologien af en vilkårlig graf kan oversættes til et samlerdiagram efter følgende forskrift:

- a) Der vælges en referenceknude, som skæres bort.
- b) De øvrige knuder repræsenteres ved o-samlere.
- c) En gren, som forbinder en knude A med referenceknuden repræsenteres ved en port til o-samlern A.
- d) En gren, som forbinder to ikke-referenceknuder A og B repræsenteres ved en treport x-samler, indsat i et energibånd mellem o-samlerne A og B.
- e) Hver x-samler forsynes med en prik ved en af de indre porte (d.v.s. en af de porte, som er forbundet til en o-samler) i overensstemmelse med konventioner for orientering og spændingsfortegn.
- f) Overflødige samlere (f.ex. toport o-samlere) fjernes, og det resulterende samler diagram rettes ud og tegnes pænt op.

Herefter kan man, efter smag og behag arbejde videre med energibandsgrafen ved brug af de ikoniske regneregler. F.ex. kan man flytte rundt med prikkerne og få nogle af dem til at ophæve hinanden. Man skal dog være opmærksom på, at det så kan være svært for en anden, som ikke kender netværksoriginalen at tilbageoversætte til et elektrisk netværk. Betingelsen for, at en tilbageoversættelse kan udføres let og smertefrit er, at samlerdiagrammet først er bragt på standardform, hvor der kun forekommer 3-port x-samlere, indsat mellem o-samlere med en prik i én af de indre porte. På fig.62 er oversættelsen af det hidtil betragtede system vist som tegneserie.

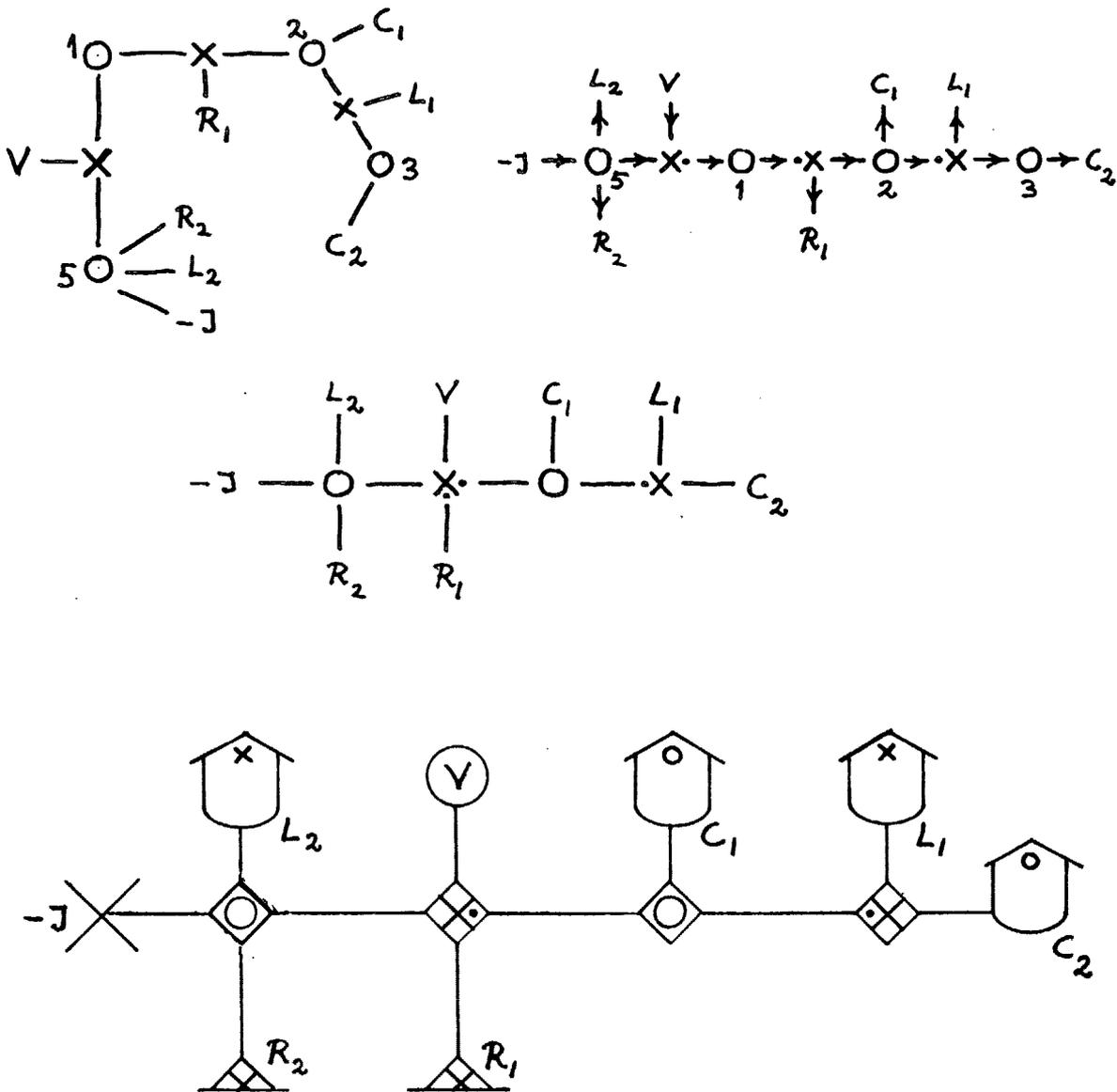


Fig. 62. Oversættelse af netværket på fig.57.

På fig.63 vises oversættelsen af en Wheatstonebro-opstilling. Rent topologisk kan denne struktur karakteriseres som en tetraeder-graf. Der er her set bort fra orienteringerne, som jo ikke vedrører topologien, men kun de indsatte komponenter. Når vi oversætter en ikke-orienteret graf, er det ligemeget i hvilken af de indre porte for  $\cdot x$ -samlerne, prikken anbringes, men der skal være én prik. Tetraedergrafen bliver til en seksleddet ring med tre samlere af hver type. To af prikkerne kan bringes til at opheve hinanden, men så vil der stadig være én prik tilbage. En seksleddet ring uden prikker, eller med to prikker kan ikke oversættes til et elektrisk netværk!

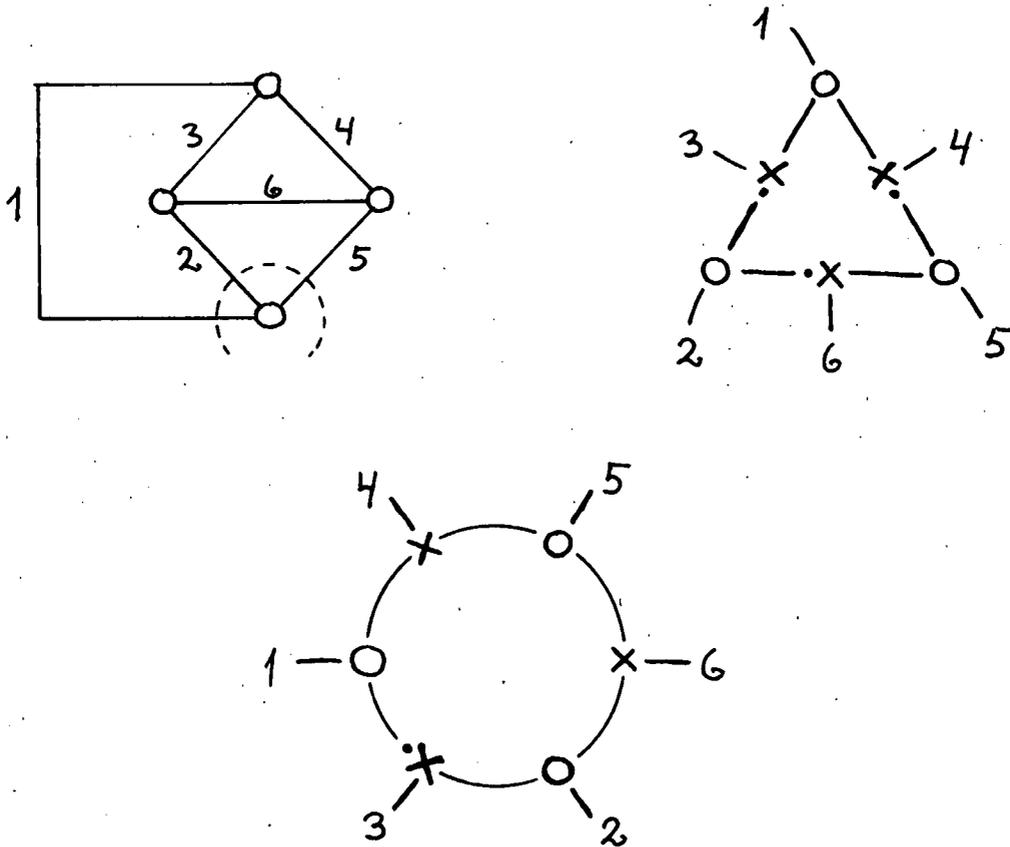


Fig. 63. Oversættelse af tetraedergraf (Wheatstonebro).

Den her gennemgæede oversættelsesmetode kaldes knudemethoden, fordi den bygger på knudespændinger (o-samlerne) og grenstrømme ( $\cdot x$ -samlerne). En anden måde at oversætte på er maskemetoden, som bygger på maskestrømme (x-samlere) og

grenspændinger (•samlere). For plane grafer svarer x-o dualiteten til den duale symmetri mellem masker og knuder. For ikke-plane grafer kan man ved x-o ombytning frembringe systemer, der ikke kan reticuleres med grafer.

Vi vender os nu fra de elektriske til de rheologiske netværk. Et rheologisk netværk er et longitudinalt mekanisk system, hvor al bevægelse foregår i én dimension (vandret på de følgende figurer). De egentlige komponenter er fjedre (o-lagre) og stempler (lække), medens forbindelseselementerne er stive stænger, der fremtræder som ledningerne i elektriske netværk, og gaffel-forgreninger, der svarer til knuder. På fig.64 vises et typisk rheologisk netværk, som vi i det følgende skal oversætte.

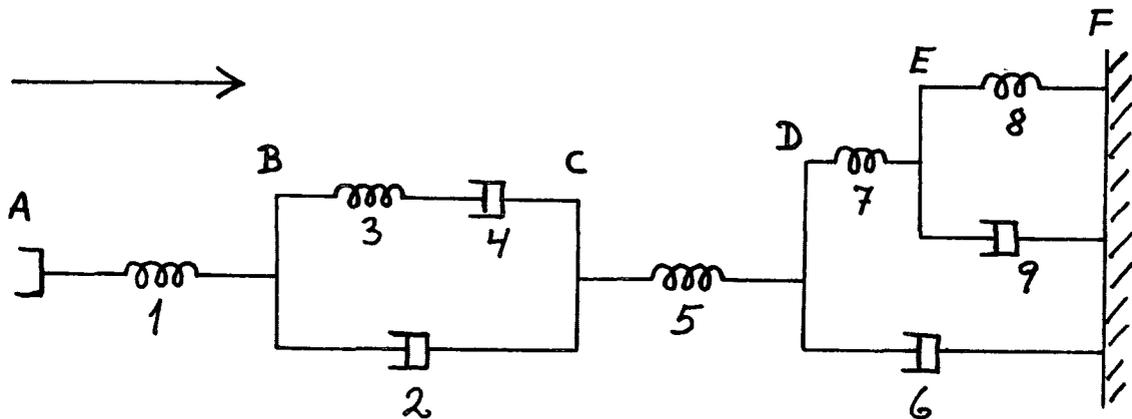


Fig. 64. Typisk rheologisk netværk.

Stængerne i det rheologiske byggesæt er longitudinale energibånd, hvor strømmen er stangens hastighed i retning af den givne orientering og spændingen er den kraft, hvormed stangen skubber til det system, orienteringspilen peger på. Hvis stangen trækker i systemet, er spændingen altså negativ. Hvis orienteringen vendes, og vi beskriver den samme fysiske situation, skal der skiftes fortegn på strømmen, men ikke på spændingen (aktion og reaktion!), d.v.s. strøm/orienteringsreglen er opfyldt. Da hele bevægelsen foregår i én dimension, er det naturligt at vælge én fælles orientering for alle grenene i netværket. På fig.64 er orienteringen valgt fra venstre mod højre.

For en bestemt gren i netværket er sammentrykningshastigheden af det indsatte element givet ved differensen mellem hastigheden til venstre og hastigheden til højre for elementet (her refereres til den valgte orientering). D.v.s. her er tale om en konservativ strømrelation, som må skildres med en o-samler. Hvis der er flere serieforbundne elementer skal disse blot forbindes til samme o-samler. En fjeder skildres med et o-lager, hvor kapaciteten er den reciprokke værdi af fjederens elastiske modul, og hvor level variabelen er fjederens sammentrykning. Et stempel skildres som en o-læk, hvis parameter er stemplets bevægelighed. På fig.65 er vist oversættelsen af grenen 3-4 mellem gaflerne B og C på fig.64.

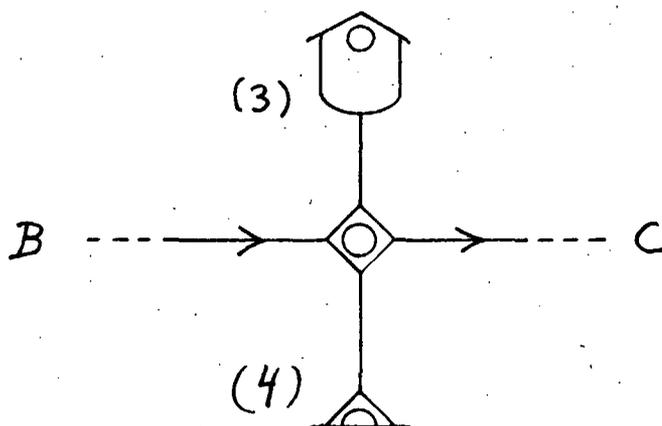


Fig. 65. Oversættelse af en gren med serieforbindelse af fjeder og stempel.

En typisk gaffel i netværket vil have to grene, der vender den ene vej og én gren, der vender den anden vej i forhold til orienteringen. Da alle grenene har samme hastighed, udtrykker gafflen en distributiv strømrelation, svarende til en x-samler med prikken siddende ved den ene gren, som vist på fig.66.

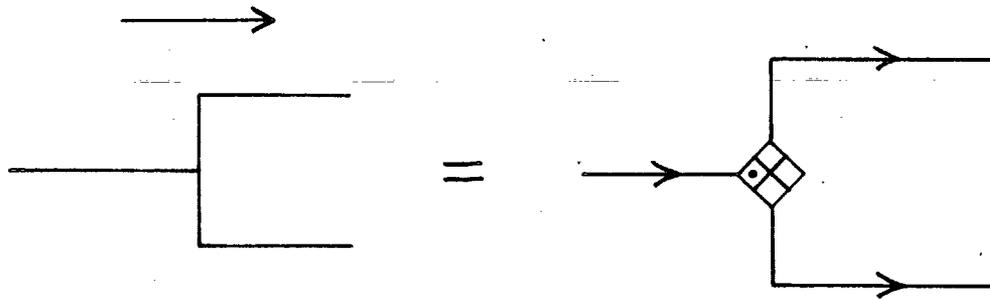


Fig. 66. Oversættelse af en gaffel.

I reglen vil der være en "referencegaffel", hvis hastighed sættes til nul (F på fig.64). Referencegafflen "skæres bort" ligesom referenceknuden i elektriske netværk og kommer altså ikke til at figurere i det færdige energibandsdiagram.

Vi har nu en færdig opskrift på oversættelse af rheologiske diagrammer, og på fig.67 serveres energibands-versionen af fig.64 uden yderligere kommentarer.

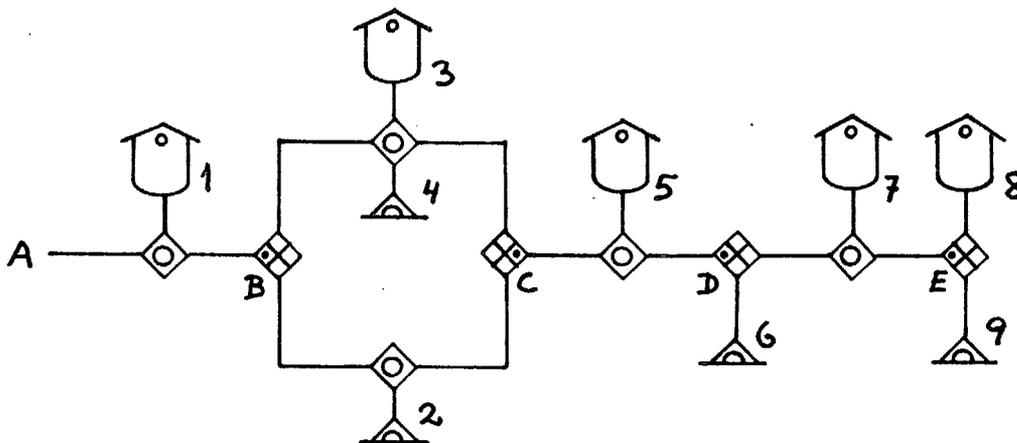


Fig. 67. Energibandsversion af fig.64.

Når man sammenligner elektriske og rheologiske diagrammer er det påfaldende, at knude- (gaffel-) hastighederne i de rheologiske diagrammer optræder på samme måde (distributivt) som knudespændingerne i de elektriske diagrammer. Man bliver fristet til at sige, at mekaniske hastigheder er analoge til elektriske spændinger, og at mekaniske kræfter er analoge

til elektriske strømme, og det er der da også mange forfattere, der har hævdet i tidens løb (faktisk nok de fleste, som har beskæftiget sig med analogispørgsmålet). I energibandsformalismen, som den her er fremstillet, er det ikke en rumlig, men en tidslig betragtning (tidsvendingskriteriet), som er lagt til grund for klassifikationen af variable, og det fører til den modsatte slutning: Hastigheder er analoge til strømme, og kræfter er analoge til spændinger. Prisen for denne måde at klassificere på er så bl.a., at en serieforbindelse i et rheologisk netværk skildres som en parallelforbindelse i et elektrisk netværk (med en o-samler), og omvendt; men den vanskelighed mener jeg er til at overse. Det, man vinder, er så meget mere værd, nemlig strøm-orienteringsreglens almene gyldighed og den deraf følgende frihed til at betragte orienteringen af energibånd som en konvention, der kan vælges frit af modelbyggeren, men ikke betragtes som noget systemet iboende. Brugen af tidsvendingskriteriet i stedet for strøm-orienteringsreglen som klassifikationsgrundlag (hvorved strøm-orienteringsreglen bliver til et axiom) må foretrakkes af grunde, som først kan ses klart, når vi diskuterer almene reciprocitets-sætninger vedrørende energioverførsel fra ét medium til et andet, f.ex. et opladet rheologisk system i et elektrisk felt fra en kondensator. Jeg må imidlertid udsætte reciprocitetsdiskussionen, indtil vi har haft noget teori for lineært response.

## 9. Responsefunktioner for 1-port systemer.

Teorien for lineært response finder anvendelse inden for stort set alle discipliner i den moderne fysik. Den største pionér inden for feltet er den engelske fysiker Oliver Heaviside (1850-1925), som udviklede sine ideer ved studiet af telegrafisk signaltransmission. Teorien kan nok tages som et skoleeksempel på pragmatisk begrebsudvikling. I mange år har dens væsentligste anvendelsesområde været vekselstrøms-teknologien, og kendskabet til den har hovedsageligt været forbeholdt elektroingeniører. I de sidste 20-30 år er responseteorien bl.a. i form af de såkaldte S-matrix- og Greens-funktion-teorier blevet et af de væsentligste matematiske hjælpemidler inden for kvantefeltteori og statistisk mekanik.

Nomenklaturen inden for responseteorien bærer tydeligt præg af at være udviklet inden for vidt forskellige fysiske discipliner. Der findes ingen systematisk navngivning af de forskellige response-funktioner med et lige så bredt anvendelsesområde som den bagved liggende matematiske teori. Jeg vil i det store og hele benytte navne og symboler fra teorien for visco-elasticitet (rheologi) iblandet elektrisk terminologi og nogle enkelte mere eller mindre hjemmelavede ord i en fri blanding af engelsk og dansk, som jeg håber, at læseren kan bære over med. Generaliteten af de anvendte termer må så fremgå af deres tilknytning til energibåndsteknikken, som jo er en generelt systemteoretisk begrebsramme i lighed med responseteorien.

Begrebet lineært response finder anvendelse på lineære, passive eller reaktive systemer. At systemerne skal være passive eller reaktive hænger sammen med, at vi i det hele taget kan tale om et response, d.v.s. outputtet skal have karakter af et svar på input, som systemet har været udsat for til tidligere tider og/eller til samme tid. At systemerne skal være lineære betyder ikke, at teorien ikke kan finde anvendelse i beskrivelsen af ikke-lineære systemer. Tværtimod, er den for sådanne et yderst vigtigt redskab til studiet af små

afvigelser fra stationære tilstande. Hvis sådanne afvigelser er tilstrækkeligt små, kan de altid beskrives med en lineær teori, som så bl.a. kan benyttes til at afgøre, om den stationære tilstand er stabil.

I responseteorien opfattes det lineære, passive eller reaktive system som en black box, som kun kan studeres via ét eller flere energibånd. Vi skal i dette kapitel nøjes med at betragte ét port systemer, som vist på fig.68. Vi kan "kilde" systemet med en tidsafhængig input funktion  $\phi(t)$ , som kaldes stimulus, og vi antager så, at det eneste, vi kan observere, er det tidsafhængige output  $\gamma(t)$ , som vi i reglen vil kunne karakterisere som et response på den anvendte stimulus. Ved at studere relationen mellem response og stimulus kan vi så bl.a. håbe at blive i stand til at reticulere en white box med elementerne fra det basale byggesæt, som kan simulere responseegenskaberne af den givne black box.

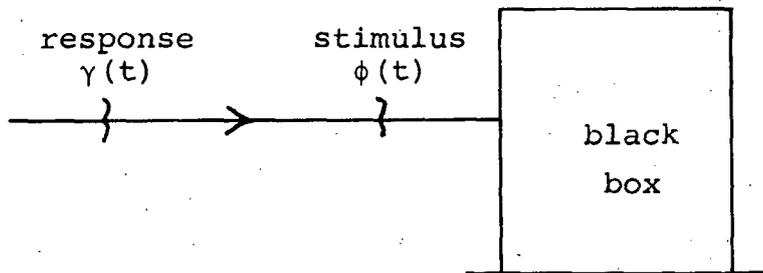


Fig. 68. Enport response-system.

I almindelighed kan vi ikke regne med, at output signalet  $\gamma(t)$  er et blot og bart response. Vi har jo allerede været inde på, at selv en simpel læk giver et output med en lille aktiv komponent i form af støj. Vi vil derfor skrive  $\gamma(t)$  på formen

$$\gamma(t) = \gamma_r(t) + \gamma_i(t) \quad (56)$$

hvor  $\gamma_r$  er det egentlige response og  $\gamma_i$  er "støj". Bidraget  $\gamma_i$  kan forklares ved interne frihedsgrader i systemet, som

ikke kan kontrolleres fuldstændigt via det tilgængelige energibånd. Forudsætningen for, at man overhovedet kan anvende responseteori er så, at man på en eller anden måde kan skille de to bidrag ud fra hinanden og derved komme til at studere den egentlige response-term  $\gamma_r$ .

Vi må derfor forestille os, at systemet engang i den fjerne fortid,  $t \rightarrow -\infty$ , har været helt og aldeles overladt til sig selv og aldrig udsat for stimuli. Når vi i denne begyndelsessituation studerer systemets output  $\gamma$ , kan vi være sikre på, at det vi iagttager, ikke indeholder nogen response-term og alene repræsenterer den interne bevægelse i leddet  $\gamma_i$ . Vi kan så ved en statistisk analyse af  $\gamma_i$  over tilstrækkelig lang tid foretage en yderligere separation:

$$\gamma_i(t) = \gamma_{i0} + \gamma_{ip}(t) + \gamma_{in}(t) \quad (57)$$

hvor  $\gamma_{i0}$  er et konstant bidrag,  $\gamma_{ip}(t)$  et periodisk eller næsten-periodisk bidrag, og  $\gamma_{in}(t)$  er et egentligt støjbidrag med middelværdien 0 og en konstant spredning og andre statistiske egenskaber (autokorrelation) som også er konstante. Opspaltningen (57) kan kun gennemføres, hvis systemets egenskaber er tidsuafhængige, når det ikke er udsat for stimuli. Med andre ord: Vi vil antage, at systemet kun kan mærke tidens gang i det omgivende univers via den stimulus, som kan sendes ind gennem energibåndet.

Fælles for de to led  $\gamma_{i0}$  og  $\gamma_{ip}(t)$  i (57) er, at de er forudsigelige. For et lineært system vil de fortsætte ganske uanfægtet, når vi begynder at "kilde" systemet med en stimulus funktion  $\phi(t)$ , og derfor kan de skilles ud fra responset  $\gamma_r(t)$ . Støjleddet  $\gamma_n(t)$  er ganske vist ikke forudsigeligt, men for et lineært system kan vi regne med, at dets statistiske egenskaber, specielt middelværdien og spredningen, vedbliver at være konstante, når vi lægger stimulus på. Vi kan derfor skille støjleddet fra ved at anvende en tilpas stor stimulus, således at støjen kan negligeres. For mange systemer mangler leddene  $\gamma_{i0}$  og  $\gamma_{ip}(t)$ . Sådanne systemer kaldes ergodiske. Hvis leddet  $\gamma_n(t)$  mangler, siger vi blot, at systemet er støjfrit. Et af

response-teoriens væsentligste resultater er, at systemer, som dissiperer energi, aldrig kan være støjfri.

Antagelsen om linearitet betyder, at det egentlige response kan skrives på formen

$$\gamma_r(t) = \int_{-\infty}^t \phi(t')R(t,t')dt' \quad (58)$$

Heri udtrykkes også, at responset kun kan afhænge af de fortidige og nutidige stimuli, altså at systemet er reaktivt eller passivt. Antagelsen, at systemet er tidsuafhængigt, medfører, at funktionen  $R(t,t')$  kun kan afhænge af tidsforskellen  $\tau = t-t'$ . Vi kan så skrive ligning (58) på de to ækvivalente måder:

$$\begin{aligned} \gamma_r(t) &= \int_{-\infty}^t \phi(t')R(t-t')dt' \\ &= \int_0^{\infty} \phi(t-\tau)R(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (59)$$

Funktionen  $R(\tau)$  kaldes her standardresponsefunktionen for systemet. Iflg. ligning (59) er den kun defineret for  $\tau \geq 0$ , men vi kan udvide definitionen ved at lade den være identisk nul for  $\tau < 0$  og så udvide integrationsområdet til hele tidsaksen i (59).

For et rent passivt system, f.ex. en læk, er responset jo givet ved den øjeblikkelige værdi af stimulus

$$\gamma_r(t) = R_0 \cdot \phi(t) \quad (60)$$

For at få den slags adfærd med i teorien må man tillade såkaldte delta-funktioner at indgå i  $R(\tau)$ . Svarende til (60) skriver vi

$$R(\tau) = 2R_0 \cdot \delta(\tau) \quad (61)$$

Dirac's deltafunktion  $\delta(x)$  er defineret ved ligningerne

$$\delta(x) = 0 \quad \text{for} \quad x \neq 0$$

(62)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

Der er altså ikke tale om en egentlig funktion, men om en såkaldt distribution. Delta-funktionen kan også defineres som grænsen af en funktionsfølge, f.ex. de såkaldte Lorentz-funktioner:

$$\delta(x) = \lim_{\Gamma \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma}{x^2 + \Gamma^2} \quad (63).$$

Funktionerne i (63) er valgt således, at de allesammen tilfredsstiller integralbetingelsen i (62). Ydermere er de lige funktioner, så hvis vi nøjes med at integrere dem fra 0 til  $\infty$ , får vi værdien  $\frac{1}{2}$ . Jeg vil derfor påstå, at det også for delta-funktionen gælder, at

$$\int_0^{\infty} \delta(x) dx = \frac{1}{2} \quad (64)$$

Herfra stammer faktoren 2 i ligning (61).

I almindelighed må vi forvente, at standard-responsefunktionen kan indeholde adskillige deltafunktions-bidrag

$$R(\tau) = \sum_{\tau_i \geq 0} R_{i0} \delta(\tau - \tau_i) + R_c(\tau) \quad (65)$$

hvor  $R_c(\tau)$  er "den pæne del" af  $R(\tau)$ , som dog ikke nødvendigvis er kontinuert. Ligning (59) får så formen

$$\gamma_r(t) = \sum_{\tau_i \geq 0} R_{i0} \phi(t - \tau_i) + \int_0^{\infty} \phi(t - \tau) R_c(\tau) d\tau \quad (66)$$

hvor integralet er et sædvanligt Riemann'sk integral. Vi kan imidlertid også udtrykke responset ved et såkaldt Stieltjes-integral

$$\gamma_r(t) = \int_0^{\infty} \phi(t - \tau) d\Lambda(\tau) \quad (67)$$

hvor  $\Lambda(\tau)$  er en stamfunktion til  $R(\tau)$ , altså

$$\begin{aligned}\Lambda(\tau) &= \int_0^{\tau} R(\tau') d\tau' \\ &= \sum_{\tau_i > 0} R_{i0} \cdot E(\tau - \tau_i) + \Lambda_c(\tau)\end{aligned}\tag{68}$$

Her har vi indført den såkaldte enheds-step-funktion, eller Heaviside-funktionen,  $E(x)$ , som er en egentlig funktion, defineret ved

$$E(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{for } x = 0 \\ 1 & \text{for } x > 0 \end{cases}\tag{69}$$

Ved hjælp af Heaviside funktionen har vi i (68) udskilt alle diskontinuiteterne i  $\Lambda(\tau)$ ; Det resterende bidrag  $\Lambda_c(\tau)$  er kontinuert. Heaviside funktionen er altså en stamfunktion til Dirac's deltafunktion, eller omvendt: Deltafunktionen er den afledede af Heaviside funktionen. Hvis man ikke er så glad for de singulære deltafunktioner, kan man stort set klare sig ved at bruge Heaviside funktioner i forbindelse med Stieltjes integraler, men i praksis bruges deltafunktioner enormt meget i fysikken, bl.a. fordi de mere avancerede integralbegreber (Stieltjes og Lebesque) aldrig rigtig er trængt ind. Jeg vil endda ikke være bleg for at indføre en uegentlig funktion, som er endnu barskere, nemlig den afledede af deltafunktionen (sml. (63)):

$$\delta'(x) = \lim_{\Gamma \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \frac{(-2\Gamma x)}{(x^2 + \Gamma^2)^2}\tag{70}$$

Den integrerede responsefunktion  $\Lambda(\tau)$  er på en måde en mere naturlig måde at karakterisere responseegenskaberne på end standard-responsefunktionen  $R(\tau)$ . Dels fordi den er ikke-singulær, og dels fordi den har samme dimension som forholdet mellem output- og input-variablen i energibåndet.

$$\dim \Lambda = \frac{\dim y}{\dim \phi} \quad ; \quad \dim R = \frac{\dim y}{\dim \phi \cdot \text{tid}}\tag{71}$$

D.v.s. hvis systemet har strøminput kan vi karakterisere  $\Lambda$  dimensionsmæssigt som en impedans, og med spændingsinput bliver  $\Lambda$  en admittans (sml. skemaet fig.5)

For at generalisere denne dimensionsbetragtning til navngivning af andre responsefunktioner, indfører vi level-variablene  $p$  og  $q$  (impuls og forskydning) for energibåndet, som defineres ud fra spændingsvariablen  $e$  og strømvariablen  $f$  ved simpel integration over tid:

$$p(t) = \int_{-\infty}^t e(t') dt' \quad (72)$$

$$q(t) = \int_{-\infty}^t f(t') dt'$$

Disse level variable kan knyttes til cykliske lagre, indsat på energibåndet som vist på fig.69. Lagrenes tilstedeværelse vil ikke have nogen indflydelse på response-egenskaberne, da der ikke er noget response fra et cyklisk lager.

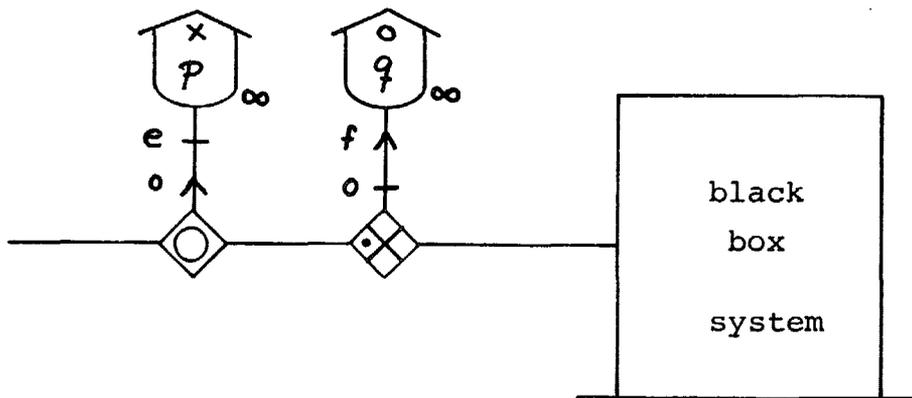


Fig. 69. Indførelse af impulsen  $p$  og forskydningen  $q$  som stimulus-response-variable.

Lad os nu først antage, at vi har strøminput til systemet, altså  $\phi = f$ ,  $\gamma = e$ . I dette tilfælde er  $\Lambda(\tau)$  en impedans, som vi betegner med symbolet  $Z$ . For standard-responsefunktionen  $R$  bruges symbolet  $G$ . Vi har så iflg. (59) og (72)

$$\begin{aligned} e(t) &= \int_0^{\infty} G(\tau) f(t-\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^t G(t-t') dq(t') \end{aligned} \quad (73)$$

Specielt hvis  $q$  er en step-funktion (f en deltafunktion)

$$q(t') = q_0 E(t') \quad ; \quad f(t') = q_0 \delta(t') \quad (74)$$

finder vi, at spændings-responset er givet ved

$$e(t) = q_0 G(t) \quad (75)$$

D.v.s.  $G(t)$  er det tidsafhængige svar på en enheds-step forskydning (deformation), som finder sted kl.0, og vi kalder derfor  $G$  for systemets relaxation modulus. Ordet "modulus" eller "modul", som ikke er særlig beskrivende, anvendes i rheologisk litteratur til at betegne den elastiske "stivhed" af et stof, d.v.s. forholdet mellem en komponent af spændingstensoren og den tilsvarende komponent af deformationstensoren, som f.ex. Young's modul, der er forholdet mellem trækraft og forlængelse af en elastisk tråd.

Impedansfunktionen  $Z(\tau)$ , som er givet ved

$$Z(\tau) = \int_0^{\tau} G(\tau') d\tau' \quad (76)$$

kan på tilsvarende måde karakteriseres som det tidsafhængige spændings-response på en enheds-step strøm, der sætter ind kl.0. Hvis vi integrerer  $Z(\tau)$  en ekstra gang, får vi det tidsafhængige impuls-response på den samme step-strøm (hastighed). Den således definerede response-funktion benævnes "masse" eller inertans-responset  $M(\tau)$ :

$$M(\tau) = \int_0^{\tau} Z(\tau') d\tau' \quad (77)$$

Hvis systemet har spændingsinput  $\phi = e$ ,  $\gamma = f$ , benyttes

symbolet  $F(\tau)$  for standard responsefunktionen. Vi har så:

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^{\infty} F(\tau) e^{-(t-\tau)} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^t F(t-t') dp(t') \end{aligned} \tag{78}$$

D.v.s.  $F(t)$  er strøm- (hastigheds-) responset på en delta funktions spænding (kraft), eller en enheds-step impuls, som tilføres systemet kl.0. Hvis vi skal finde et passende ord for  $F(\tau)$ , må det blive noget i retning af "letheds-responset", idet den dimensionsmæssigt er det reciproke af "masse"-funktionen  $M$ . Jeg har ikke kendskab til noget almindeligt vedtaget ord for denne funktion, hverken på engelsk eller dansk.

Ved integration af "letheds"-funktionen  $F(\tau)$  fås admittans-funktionen  $Y(\tau)$ , også kaldet "bevægelighed" eller "mobilitet", som er strøm- eller hastigheds-responset på en enheds-step spænding, der sættes ind kl.0:

$$Y(\tau) = \int_0^{\tau} F(\tau') d\tau' \tag{79}$$

Dimensionsmæssigt er admittansen  $Y(\tau)$  det reciproke af en impedansfunktion. En ekstra integration må så give forskydnings- eller deformations-responset på en step-spænding. Denne funktion

$$J(\tau) = \int_0^{\tau} Y(\tau') d\tau' \tag{80}$$

som er yderst vigtig i rheologien, kaldes creep-funktionen, idet den angiver, hvor meget materialet "kryber" som funktion af tiden for en konstant enhedsspænding, der pålægges kl.0. Dimensionsmæssigt er  $J(\tau)$  det reciproke af den elastiske modulfunktion eller "stivhed"  $G$ , og vi kalder derfor også  $J(\tau)$  for en compliance-, d.v.s. "eftergivenheds"-funktion.

Vi har nu i alt fået indført 6 tidsafhængige response-funktioner, hvilken hverken er for meget eller for lidt. I en

bestemt kausal sammenhæng har vi kun 3 egentlige response-funktioner, men vi skal senere se, hvordan vi ad omveje kan indføre de 3 andre, som så kan kaldes uegentlige eller akau-sale responsefunktioner. Hvis vi har strøminput  $f(t)$ , kan vi også sige, at vi har forskydningsinput  $q(t)$ , og vi har så spændingsoutput  $e(t)$  eller impulsoutput  $p(t)$ . I denne situation er  $G$ ,  $Z$  og  $M$  de egentlige og  $F$ ,  $Y$  og  $J$  de uegentlige responsefunktioner. Den modsatte kausale situation er, at vi har spændings- eller impuls-input og strøm- eller forskydnings-output, og vi vil så have  $F, Y$  og  $J$  som de egentlige response-funktioner, medens  $G, Z$  og  $M$  er uegentlige. I nedenstående skema, fig.70, gives en oversigt over symbolerne og benævnelserne for de indførte funktioner. Bemærk de hvide pletter i skemaet. To af dem, nemlig  $p$ - $q$  felterne, kunne i og for sig godt udfyldes, og der er da også forfattere, som har argumenteret for, at man skulle indføre såkaldte "memristans"-funktioner på disse pladser. Vi får imidlertid ikke brug for sådanne funktioner og vil ikke bekymre os mere over dem.

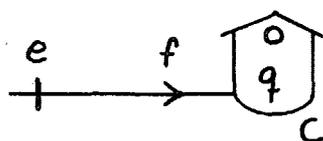
output input	forskydning, deformation q	strøm hastighed f	spænding kraft e	impuls p
forskydning deformation q			modulus "stivhed" G	
strøm hastighed f			impedans modstand Z	inertans "masse" M
spænding kraft e	creep compliance J	admittans bevægelighed Y		
impuls p		"lethed" F		

Fig. 70. Skema over response-funktioner.

Pilene angiver integration m.h.t. tiden.

Jeg vil nu gennemgå nogle simple lineære energibandsmodeller og vise, hvordan de egentlige tidsafhængige response-funktioner beregnes.

Vi ser først på et o-lager (fig.71), som jo har strøminput. Level-variablen kan benævnes  $q$ , fordi den er integralet af strømmen  $f$  og derfor identisk med den cykliske input-level  $q$ , indført i lign.(72) og fig.69. Kapaciteten af lageret benævnes  $C$ , så output spændingen er givet ved  $q/C$ .



$$q(t) = \int_{-\infty}^t f(t') dt'$$

$$e(t) = q(t)/C$$

Fig. 71. Lineært o-lager.

Vi har altså:

$$e(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t f(t') dt' \quad (80)$$

Ved sammenligning med ligning (73) ser vi umiddelbart, at modulus funktionen  $G(\tau)$  er givet ved

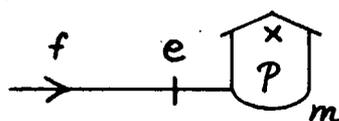
$$G(\tau) = \frac{1}{C} \quad (81)$$

Ligningerne (76) og (77) giver så:

$$Z(\tau) = \frac{\tau}{C} ; \quad M(\tau) = \frac{\tau^2}{2C} \quad (82)$$

Spændingen, som er givet ved ligning (80) er den egentlige response-term  $\gamma_r$ . Den faktiske output spænding kan godt indeholde et konstant bidrag  $e_0$ , svarende til leddet  $\gamma_{i0}$  i ligning (57), fordi level-variablen  $q$  kun er bestemt ved strøm-integralet på nær en arbitrær konstant. Systemet er altså ikke-ergodisk (og støjfrit).

På fuldkommen tilsvarende måde kan vi finde  $F, Y$  og  $J$  for et  $x$ -lager med kapaciteten  $m$  (f.ex. en fri partikel med massen  $m$ )



$$p(t) = \int_{-\infty}^t e(t') dt'$$

$$f(t) = p(t)/m$$

Fig. 72. Lineært x-lager.

Vi får af lign.(78), (79) og (80):

$$F(\tau) = \frac{1}{m} ; \quad Y(\tau) = \frac{\tau}{m} ; \quad J(\tau) = \frac{\tau^2}{2m} \quad (83)$$

Som specialtilfælde af den sidste ligning i (83) har vi bl.a. Galilei's lov  $s = \frac{1}{2}gt^2$  for det frie fald af en partikel, idet tyngdeaccelerationen  $g$  jo er lig med tyngdekraften divideret med partiklens masse. Også x-lageret kan beskrives som ikke-ergodisk og støjfrit.

Vi kan nu prøve at snyde lidt for at finde de uegentlige response-funktioner for de to lagre, idet vi bytter om på kausaliteten. For o-lageret skal vi så have spændingsinput og strømoutput, så vi får

$$q(t) = C \cdot e(t) , \quad f(t) = \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{de}{dt} \quad (84)$$

På grund af den sidste relation siger vi, at lageret har fået pålagt differentiel kausalitet (sml. diskussionen i kapitel 3). Af den første relation i (84) kan vi umiddelbart finde creep-funktionen  $J(\tau)$ , der jo er defineret som  $q$ -responsen på en enheds-step spænding  $e = E(\tau)$ . D.v.s.

$$J(\tau) = C \cdot E(\tau) \quad (85)$$

Strengt taget burde Heaviside funktionen  $E(\tau)$  også have optrådt som faktor i udtrykket for  $G(\tau)$ , ligning (81). Der var den imidlertid ikke så vigtig, fordi funktionerne  $Z$  og  $M$  findes ved integration af  $G(\tau)$ , og diskontinuiteten af  $E(\tau)$  for  $\tau=0$  vil ikke give sig til kende, når den integreres.

I (85) er det imidlertid vigtigt at huske  $E(\tau)$ , for når vi skal bestemme de andre uegentlige response-funktioner  $Y(\tau)$  og  $F(\tau)$  skal vi differentiere, og diskontinuiteten i (85) bliver til en deltafunktion-singularitet i  $Y(\tau)$ :

$$Y(\tau) = \frac{dJ(\tau)}{d\tau} = 2C \cdot \delta(\tau) \quad (86)$$
$$F(\tau) = \frac{dY(\tau)}{d\tau} = 2C \cdot \delta'(\tau)$$

Faktoren 2 skyldes, at integralet fra nul af en deltafunktion kun giver  $\frac{1}{2}$  (sml. (64)).

For x-lageret fås tilsvarende de uegentlige response-funktioner

$$M(\tau) = m \cdot E(\tau); \quad Z(\tau) = 2m \cdot \delta(\tau); \quad G(\tau) = 2m \cdot \delta'(\tau) \quad (87)$$

De to slags lække kan behandles under ét, når vi ser bort fra støjen, fordi en x-læk med modstanden  $R$  er det samme som en o-læk med ledningsevnen  $1/R$  (sml. fig.50). For x-lækken har vi spændingsoutput givet ved

$$e(t) = R \cdot f(t)$$

Vi får da af (73) og (64):

$$G(\tau) = 2R \cdot \delta(\tau) \quad (88)$$

(sml. lign.(61). Ved integration fås så:

$$Z(\tau) = R \cdot E(\tau); \quad M(\tau) = R \cdot \tau \quad (89)$$

Tilsvarende finder vi for o-lækken (som altså er identisk med x-lækken):

$$F(\tau) = \frac{2}{R} \delta(\tau); \quad Y(\tau) = \frac{1}{R} \cdot E(\tau); \quad J(\tau) = \frac{\tau}{R} \quad (90)$$

For lækkene er der ingen grund til at skelne mellem egent-

lige og uegentlige response-funktioner, hvilket hænger sammen med, at lækkene er passive.

På fig. 73 gives for overskuelighedens skyld et skema over de fundne funktioner. De tilhørende ikoner fra det basale byggesæt er anbragt på samme side af skemaet som de egentlige response-funktioner.

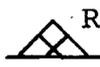
	modulus $G(\tau)$	impedans $Z(\tau)$	inertans $M(\tau)$	lethed $F(\tau)$	admittans $Y(\tau)$	compliance $J(\tau)$	
	$\frac{1}{C} \cdot E(\tau)$	$\frac{\tau}{C}$	$\frac{\tau^2}{2C}$	$2C\delta'(\tau)$	$2C\delta(\tau)$	$C \cdot E(\tau)$	
	$2m\delta'(\tau)$	$2m\delta(\tau)$	$m \cdot E(\tau)$	$\frac{1}{m} \cdot E(\tau)$	$\frac{\tau}{m}$	$\frac{\tau^2}{2m}$	
	$2R\delta(\tau)$	$R \cdot E(\tau)$	$R \cdot \tau$	$\frac{2}{R} \delta(\tau)$	$\frac{1}{R} \cdot E(\tau)$	$\frac{\tau}{R}$	

Fig. 73. Skema over de tidsafhængige response-funktioner for simple komponenter.  $\tau \geq 0$ .

Når det gælder om at finde de tidsafhængige responsefunktioner af sammensatte energibandsmodeller, kan man i mange tilfælde klare sig ved at sammensætte de elementære funktioner i fig.73 efter nogle simple regneregler. Lad os starte med at betragte systemet på fig.74, hvor to systemer 1 og 2 er koblet til en fælles ydre port via en o-samler. Hvis vi har stærk kausalitet, d.v.s. spændingsinput i den ydre port, vil begge delsystemerne også få spændingsinput, og strøm-responset i den ydre port er summen af delsystemernes strøm-response. Det følger heraf, at de egentlige responsefunktioner for spændingsinput,  $F, Y$  og  $J$  kan findes ved simpel addition af de tilsvarende funktioner for delsystemerne.

$$\text{o-samler} \quad \left\{ \begin{array}{l} F = F_1 + F_2 \\ Y = Y_1 + Y_2 \\ J = J_1 + J_2 \end{array} \right\} \quad (91)$$

Tilsvarende finder vi, når de to delsystemer er koblet til den ydre port via en x-samler, additionsregler for funktionerne  $G, Z$  og  $M$ :

$$\text{x-samler: } \left\{ \begin{array}{l} G = G_1 + G_2 \\ Z = Z_1 + Z_2 \\ M = M_1 + M_2 \end{array} \right\} \quad (92)$$

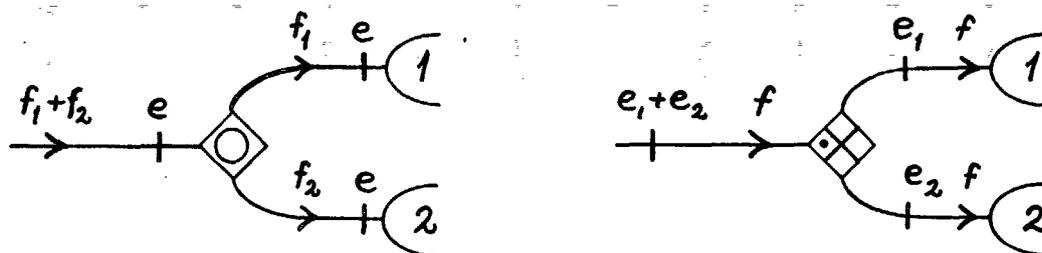


Fig. 74. Kobling af to delsystemer til fælles ydre port.

Regnereglerne (91) og (92) har ikke noget at gøre med den faktiske kausalitet i en given situation, men afspejler blot samler-relationerne, som jo også er akausale. Hvis vi har svag kausalitet i den ydre port, f.ex. strøminput til o-samleren i fig.74, vil reglerne (91) stadig gælde, men funktionen på venstre side af lighedstegnet og én af funktionerne på højre side vil så være uegentlige response-funktioner.

I de tilfælde, hvor systemerne 1 og 2 er simple og af samme type, d.v.s. to o-lagre, to x-lagre eller to lække, kan vi formulere en ekstra regneregul. Vi har jo (se fig.73)

$$\begin{array}{ll} \text{for o-lagre:} & J = \frac{1}{G} \\ \text{for x-lagre:} & M = \frac{1}{F} \\ \text{for lække:} & Z = \frac{1}{Y} \end{array} \quad (93)$$

Nogle af de heraf udledte regler vises på fig.75.

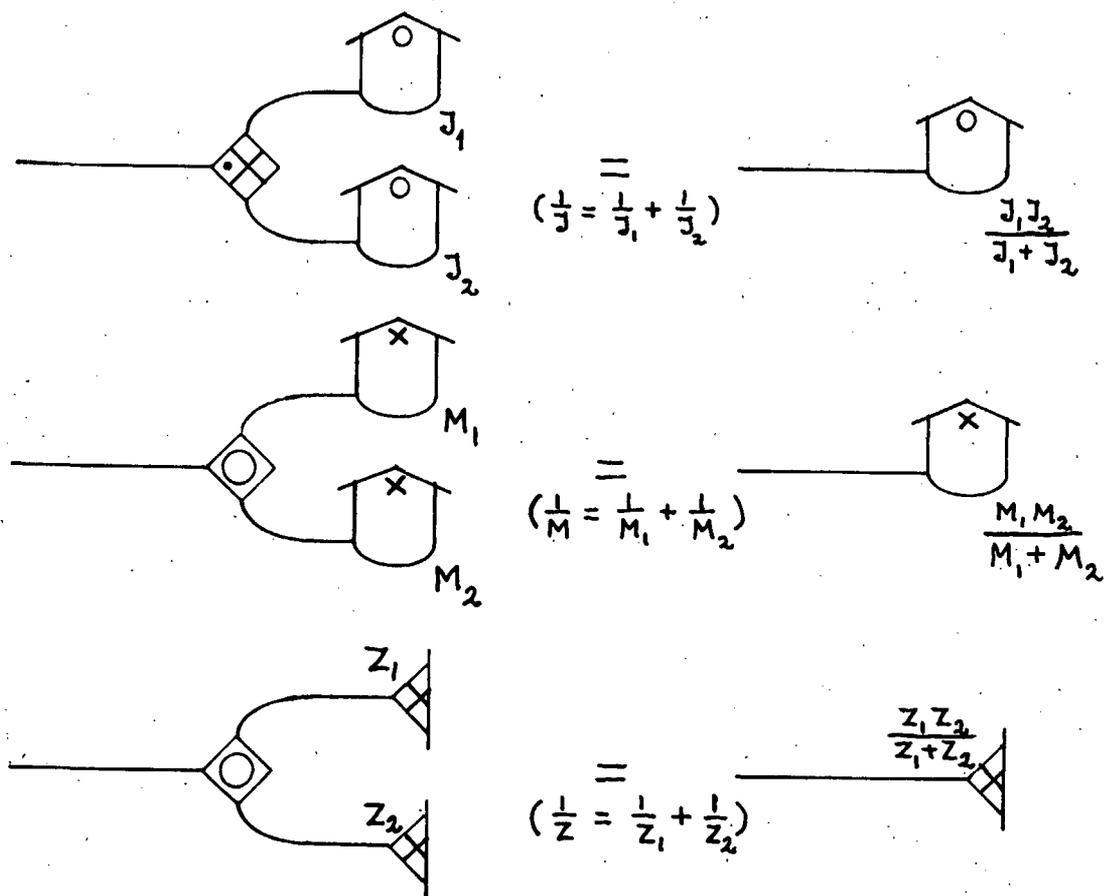


Fig. 75. Regler for sammensætning af to ens komponenter.

Vi skal illustrere regnereglerne (91) og (92) ved at se på to simpelt sammensatte rheologiske elementer. Fig. 76 viser Maxwell-elementet, som er en serieforbindelse af en fjeder med modulus  $G_\infty$  ( $\sim$  shear modulus) og et stempel med modstanden  $\eta$  ( $\sim$  shear viscosity).

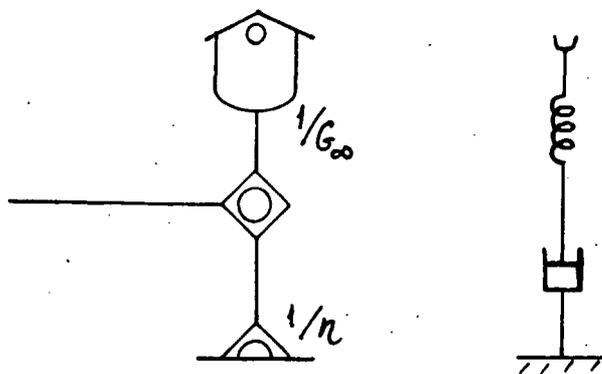


Fig. 76. Maxwell-elementet.

Ved brug af skemaet på fig.73 og regnereglerne (91) får vi for Maxwell-elementet:

$$\begin{aligned}
 F(t) &= \frac{2}{G_{\infty}} \delta'(\tau) + \frac{2}{\eta} \delta(\tau) \\
 Y(\tau) &= \frac{2}{G_{\infty}} \delta(\tau) + \frac{1}{\eta} \\
 J(\tau) &= \frac{1}{G_{\infty}} + \frac{\tau}{\eta}
 \end{aligned}
 \tag{94}$$

Dernæst ser vi på Voigt-elementet, som er en parallellforbindelse af en fjeder med modulus  $K$  (bulk modulus) og et stempel med modstanden  $\xi$  (bulk viscosity) som vist på fig.77.

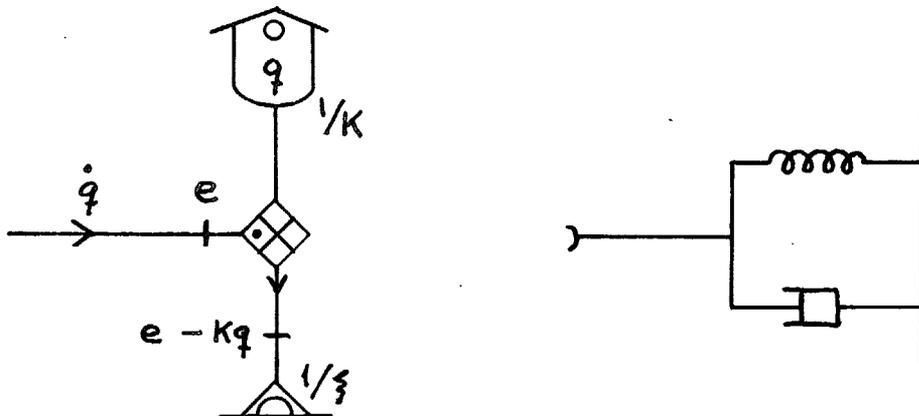


Fig. 77. Voigt elementet.

For Voigt elementet får vi af fig.73 og regnereglerne (92):

$$\begin{aligned}
 G(\tau) &= K + 2\xi\delta(\tau) \\
 Z(\tau) &= K \cdot \tau + \xi \\
 M(\tau) &= \frac{1}{2}K\tau^2 + \xi \cdot \tau
 \end{aligned}
 \tag{95}$$

Det er især creep-funktionen  $J(\tau)$ , som har interesse i reologien, og den kan vi ikke få af de simple additionsregler for Voigt elementet. Vi skal i næste kapitel se, hvordan additionsreglerne kan udvides til de resterende response-funktioner, når vi bruger frekvensen som variabel i stedet

for tiden.

Der er imidlertid ikke noget i vejen for, at vi kan finde  $J(\tau)$  for Voigt-elementet allerede nu, for vi har jo de tidsafhængige differentiaalligninger for energibandsmodellen at falde tilbage på. På fig.77 er indiceret spændingsinput  $e$  til Voigt-elementet. Spændingsinputtet til lækken er så  $e - kq$ , hvor  $q$  er o-level variabelen (fjederens sammentrykning). Vi får så følgende differentiaalligning:

$$\frac{dq}{d\tau} (= \dot{q}) = \frac{1}{\xi} (e - Kq) \quad (96)$$

For at finde creep-funktionen  $J(\tau)$  skal vi lade  $e$  være 0 for  $\tau < 0$  og en konstant  $e_0$  for  $\tau > 0$ . Vi løser differentiaalligningen for  $q(\tau)$ , og dividerer løsningen med  $e_0$ , hvorved vi får creep-funktionen  $J(\tau)$  for Voigt elementet:

$$J(\tau) = \frac{1}{K} (1 - e^{-\frac{K}{\xi}\tau}) \quad (97)$$

I modsætning til Maxwell-elementet har vi altså her en creep-funktion med en asymptotisk mætningsværdi for  $\tau \rightarrow \infty$ . Da kausalitets-tilordningen i fig.77 er i overensstemmelse med spillereglerne, er  $J(\tau)$  en egentlig response-funktion for Voigt-elementet. For Maxwell-elementet er  $J(\tau)$  uegentlig, fordi spændingsinput på fig.76 vil påtvinge lageret differential kausalitet. Den uegentlige karakter afspejler sig i, at  $J(\tau)$  for Maxwell elementet ikke går mod 0 for  $\tau \rightarrow 0$ .

Opgaver.

1. (til kap.1). Diskuter på grundlag af Maxwell's ligninger, hvorledes de fire elektromagnetiske feltbegreber  $E, D, B$  og  $H$  skal indplaceres i skemaet på fig.5. Diskuter ud fra samme skema de konstitutive relationer hørende til begreberne elektrisk modstand, magnetisk permeabilitet og dielektricitetskonstant.
2. (til kap.2). Definer strøm og spænding, angiv måleforskrifter for disse, og vis, at strøm-orienteringsreglen er opfyldt for flg. typer af energibånd:

  - a) En snor.
  - b) Et benzinrør.
  - c) En tryklufte slange.
3. (kap.3). Et akkumulatorbatteri med den elektromotoriske kraft  $E$  (volt) og indre modstand  $R$  (ohm) forbindes til en kondensator med kapaciteten  $C$  (farad). Angiv den fysiske karakter af det energibånd, som forbinder akkumulatoren med kondensatoren, samt måleforskrifter for strøm og spænding, når orienteringen peger fra akkumulatoren til kondensatoren. Find spænding og strøm i energibåndet som funktion af tiden, når sammenkoblingen sker kl.0 og kondensatoren på dette tidspunkt er ladningsfri. Bestem kausaliteten i energibåndet ud fra det fundne transiente forløb.
4. (kap.4). En gruppe  $G$  er en mængde af elementer  $g_i$  o.s.v. for hvilke der er defineret en sammensætningsoperation  $g_i \cdot g_j$  således at følgende aksiomer er opfyldt:

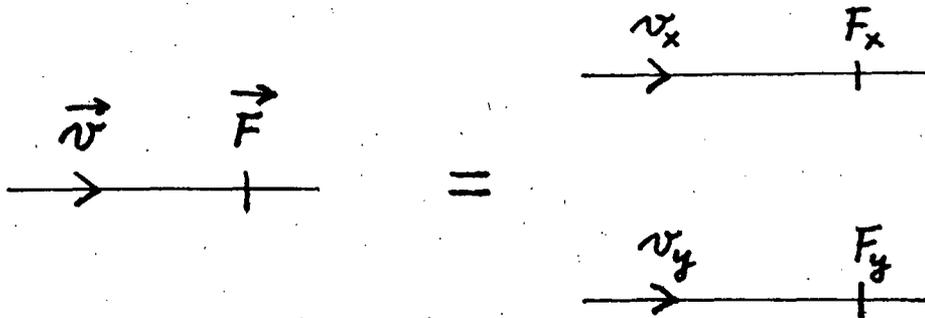
  - a. Lukkethed:  $g_i \in G \wedge g_j \in G \Rightarrow g_i \cdot g_j \in G$
  - b. Associativitet:  $g_i \cdot (g_j \cdot g_k) = (g_i \cdot g_j) \cdot g_k$
  - c. Enhedselement: Der findes ét element  $g_1 \in G$  således at  $g_1 \cdot g_i = g_i = g_i \cdot g_1$  for alle  $g_i \in G$ .
  - d. Inverst element: For hvert element  $g_k \in G$  findes ét og kun ét element  $g_\ell \in G$ , således at  $g_k \cdot g_\ell = g_\ell \cdot g_k = g_1$ .

Vis, at de basale toporte med sammensætningsoperationen "kaskadekobling", som vist på fig. 31, udgør en gruppe. (Vis herunder, at en gyrator er sin egen inverse).

Vis, at mængden af transducere og transformatorer udgør en gruppe, for hvilken den kommutative lov  $g_i \cdot g_j = g_j \cdot g_i$  er opfyldt.

Vis, at en x-gyrator h sammen med den spejlvendte gyrator  $h'$ , den symmetriske transformator og enhedselementet udgør en kommutativ gruppe (Klein's V-gruppe).

5. (kap.5). En partikel bevæger sig i xy-planen med hastigheden  $\vec{v} = (v_x, v_y)$  under indflydelse af kraften  $\vec{F} = (F_x, F_y)$ . Energioverførsel ( $w$ ) fra kraftfeltet til partiklen kan skildres med et "vektorbånd", som kan opløses i to simple energibånd:

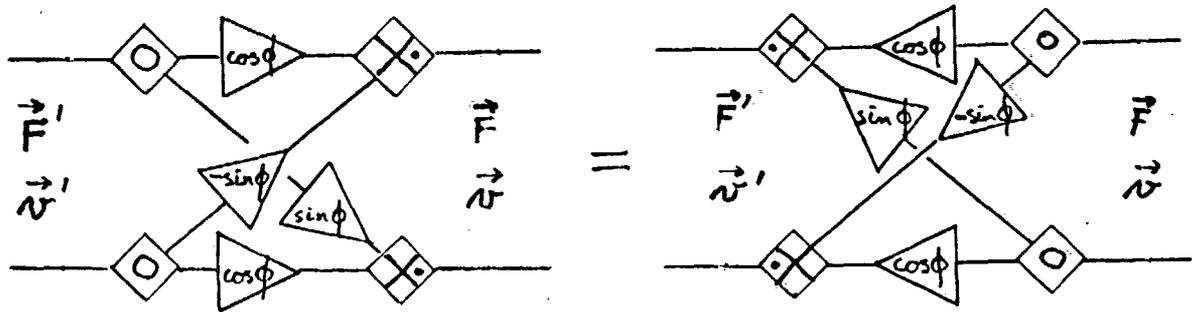


Vi indfører nu en koordinattransformation  $(x,y) \rightarrow (x', y')$  svarende til, at det mærkede koordinatsystem er drejet vinklen  $\phi$  i forhold til det umærkede system.

Vis, at uafhængigt af kausaliteten i de ydre porte, kan overgangen fra det ene koordinatsystem til det andet skildres ved et af de to omstående identiske skeletdiagrammer,

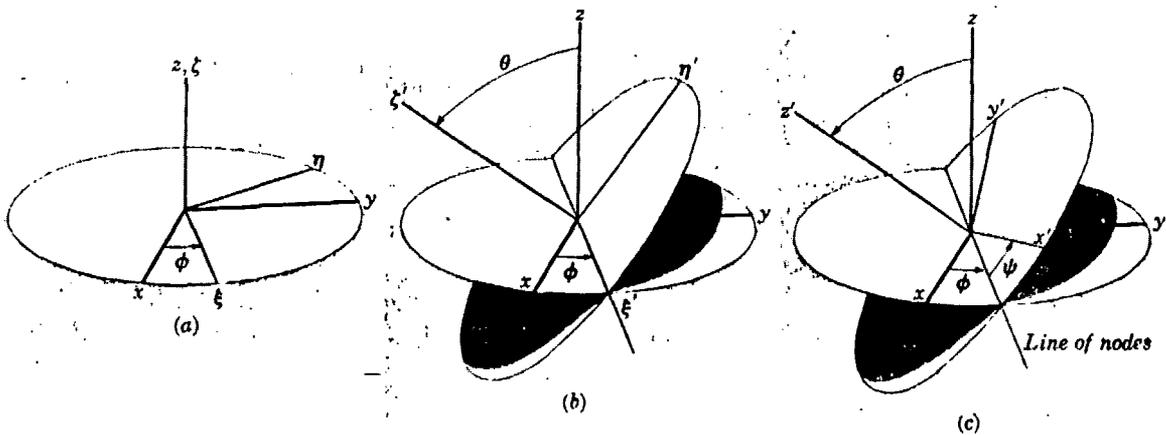
./..

som kaldes unitære 4-port transformatorer.



6. (kap.5). Drejning af et koordinatsystem i 3 dimensioner skildres ofte ved de såkaldte Eulervinkler  $\phi$ ,  $\theta$  og  $\psi$ . Overgangen fra  $(x, y, z)$  -systemet til  $(x', y', z')$ -systemet udføres i tre tempi:

- Drejning vinklen  $\phi$  om  $z$  akse:  $(x, y, z) \xrightarrow{\phi} (\xi, \eta, z)$
- Drejning vinklen  $\theta$  om  $\xi$  akse:  $(\xi, \eta, z) \xrightarrow{\theta} (\xi, \eta', z')$
- Drejning vinklen  $\psi$  om  $z'$  akse:  $(\xi, \eta', z') \xrightarrow{\psi} (x', y', z')$



Fra Goldstein (ref.9).

Lav ved hjælp af resultatet fra opgave 5 en 6-port  
unitær transformator, som udfører koordinatskiftet.

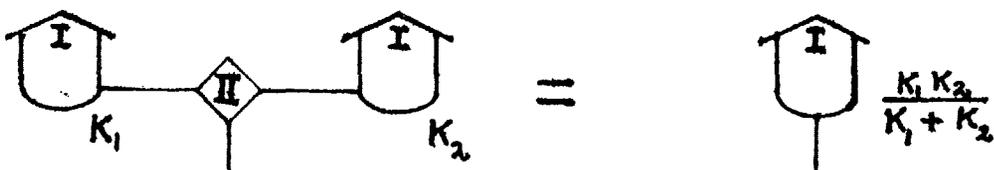
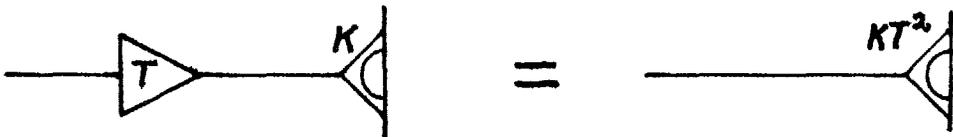
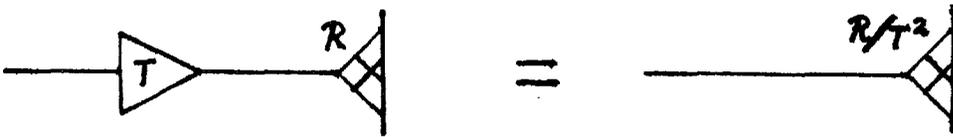
7. (kap.7). En elektrisk generator består af en spændingskilde  $V_0 \sin \omega t$  i serie med en indre modstand  $R_1$ . Generatoren forbindes med en belastning, som er en modstandsløs spole med selvinduktionen  $L$ .

Tegn en energibandsmodel af det sammensatte system og angiv kausaliteten i det forbindende energibånd.

Bestem strømmen  $I$  og spændingen  $V$  i det forbindende energibånd som funktion af tiden.

I hvilken grænse for frekvensen ( $\omega \rightarrow 0$  eller  $\omega \rightarrow \infty$ ) kan man med rimelighed beskrive generatoren som en strømkilde.

8. (kap.7). Vis regnereglerne

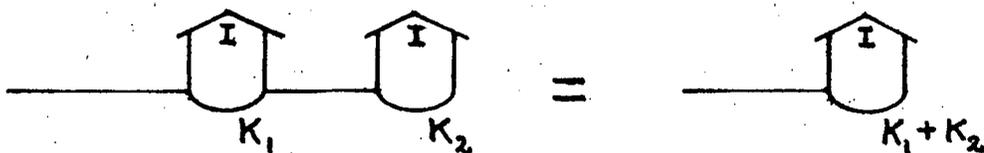


9. (kap.7). En kausal konflikt mellem en kilde og et lager løses ved, at lageret påtrykkes differentiell kausalitet

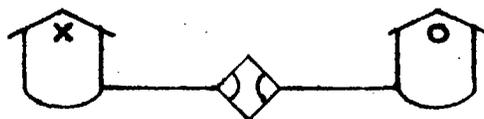


Tilsvarende må en kausal konflikt mellem to lineære lagre løses ved, at det ene af lagrene (helst det med den mindste kapacitet) påtrykkes differentiell kausalitet.

Vis herved regnereglen



10. (kap.7). En harmonisk oscillator beskrives ved nedenstående ikondiagram (lineære lagre)



Udfyld diagrammet med indices og symboler for følgende to tilfælde:

- En partikel med massen  $m$  fastgjort til en fjeder med kraftkonstant  $k$ .
- En spole med selvinduktionen  $L$  forbundet med en kondensator med kapaciteten  $C$ .

Opskriv bevægelsesligningerne for begge tilfælde.

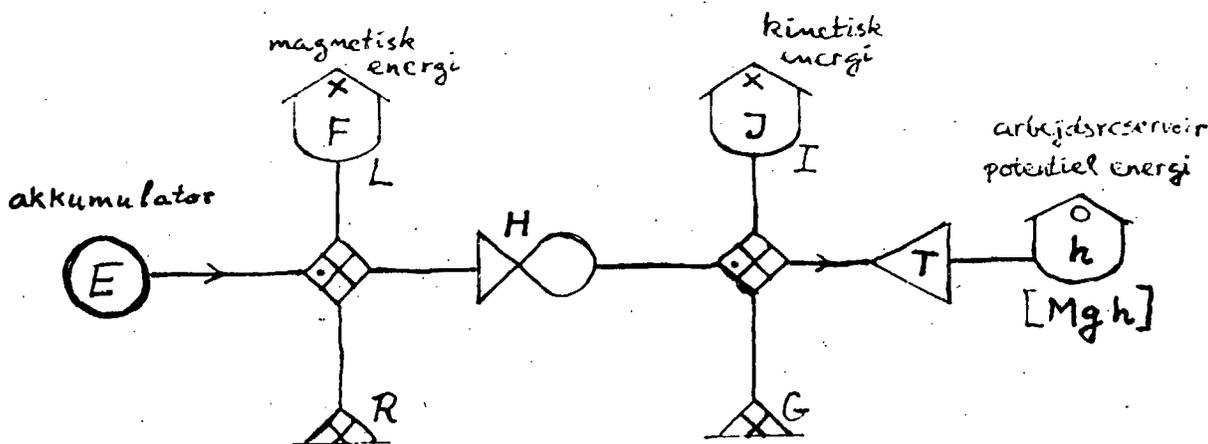
Diskuter, hvad modellen forestiller, hvis den symmetriske transformator mellem lagrene fjernes.

11. (kap.7). Opskriv bevægelsesligningerne for modellen "hest og vogn" fig.52. (Antag hastighedsproportional gnidning).

Find vognens hastighed som funktion af tiden, når systemet er i hvile indtil kl.0, og hesten på dette tidspunkt begynder at trække med en konstant kraft.

12. (kap.7). Nedenstående energibandsmodel forestiller en elektromotor (en dynamo) med permanent magnet, som er tilsluttet et akkumulatorbatteri og et arbejdsreservoir. Symbolerne har følgende betydning [enheder i kantet parentes]:

- E: Den konstante elektromotoriske kraft (spænding) af akkumulatorbatteriet [volt]
- F: magnetflux hidrørende fra ankerets strømkreds [weber]
- L: selvinduktion [henry]
- R: elektrisk modstand [ohm]
- J: impulsmoment af roterende dele  $\left[ \text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{sec}} \right]$
- H: permanent magnetflux [weber]
- I: inertimoment af roterende dele  $[\text{kg} \cdot \text{m}^2]$
- G: mekanisk gnidningskonstant (hastighedsproportional gnidning)  $\left[ \text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{sec}} \right]$
- h: højden af et lod i arbejdsreservoirret [m]
- M: loddets masse [kg]
- g: tyngdeaccelerationen  $[\text{m}/\text{sec}^2]$
- T: radius af drivhjul ganget med et variabelt transmissionsforhold [m]



- Angiv kausaliteten ved hjælp af signaltegn.
- Opskriv bevægelsesligninger for levelvariablene.

I det følgende antages, at  $E$ ,  $L$ ,  $R$ ,  $H$ ,  $I$ ,  $G$ ,  $M$  og  $g$  har konstante, positive værdier, og at det variable transducerforhold  $T$  kun kan ændres yderst langsomt i forhold til modellens karakteristiske indsvingningstider.

- Vis, at for fastholdt  $T$  har systemet en stationær tilstand, i hvilken  $F$  og  $J$  har konstante værdier  $F_{stat}$  og  $J_{stat}$ , medens  $h$  ændrer sig med konstant hastighed  $v_h$ . Bestem  $F_{stat}$ ,  $J_{stat}$  og  $v_h$  som funktioner af de fastholdte parametre.
- Lad  $w_{ind}$  betegne energioverførselshastigheden [watt] fra akkumulatorbatteriet til elektromotoren, og lad  $w_{ud}$  betegne arbejdshastigheden d.v.s. energioverførselshastigheden fra elektromotoren til arbejdsreservoiret.

Bestem to værdier af  $T_1$  og  $T_2$  af transducerforholdet  $T$ , således at

$$w_{ind} < 0, \quad w_{ud} < 0, \quad \text{for } T < T_1 \text{ (dynamovirkning)}$$

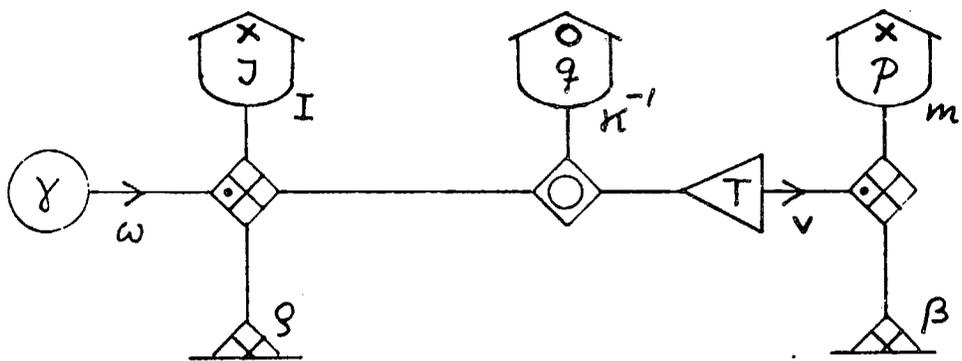
$$w_{ind} > 0, \quad w_{ud} < 0, \quad \text{for } T_1 < T < 0 \text{ og } T > T_2$$

$$w_{ind} > 0, \quad w_{ud} > 0, \quad \text{for } 0 < T < T_2 \text{ (motorvirkning)}$$

e) Bestem en optimal T-værdi  $T_{opt}$ , således at arbejds hastigheden  $w_{ud}$  bliver så stor som muligt.

f) Angiv for  $T = T_{opt}$  effektiviteten  $\epsilon = w_{ud}/w_{ind}$  og vis, at denne altid er mindre end 0,5.

13. (kap.7). Nedenstående energibandsmodel forestiller en bil med kontinuert variabelt transmissionsforhold:



$\gamma$  er motorens drejningsmoment [ $\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{sec}^2$ ]

$\omega$  er motorens vinkelhastighed [ $\text{sec}^{-1}$ ].

$J$  er et impulsmoment [ $\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{sec}$ ]

$I$  er et inertimoment [ $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ ].

$q$  er en elastisk deformation (torsion af drivaksler) [ubenævnt].

$\kappa$  er en elastisk konstant [ $\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{sec}^2$ ].

$T$  er det kontinuert variable transmissionsforhold [m].

$v$  er bilens hastighed [m/sec]

$p$  er bilens impuls [ $\text{kg}\cdot\text{m}/\text{sec}$ ].

$m$  er bilens masse [kg].

$\rho$  [ $\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{sec}$ ] og  $\beta$  [kg/sec] er gnidningskoefficienter.

a) Angiv kausaliteten ved hjælp af signaltegn.

b) Opskriv bevægelsesligningerne for levelvariablene.

- c) Angiv for en stationær situation sammenhængen mellem  $\gamma$  og  $T$ , idet  $\omega$  ønskes fastholdt på en konstant værdi  $\omega_0$ . (Motoren arbejder bedst ved et bestemt omdrejningstal, som ønskes fastholdt, uanset bilens hastighed i en stationær tilstand).
- d) Vis, at der for den givne stationære vinkelhastighed  $\omega_0$  findes en optimal værdi af  $T$ ,  $T_{opt}$ , for hvilken forbruget af fri energi pr. tilbagelagt meter er minimalt.
- e) Udregn den tilsvarende optimale hastighed  $v_{opt}$ , når  $\omega_0 = 300 \text{ sec}^{-1}$ ,  $\rho = 0.005 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{sec}$  og  $\beta = 2 \text{ kg}/\text{sec}$ .

14. (kap.8). I alle grenene i en Wheatstonebro anbringes aktive komponenter, enten strømkilder eller spændingskilder.

Vis, at der må være tre strømkilder og tre spændingskilder, hvis kausale konflikter skal undgås.

Diskuter, hvordan kilderne må anbringes i grafen, og vis, at man ved passende valg af referenceknode kan opnå, at alle kilderne bliver forbundet til samlerdiagrammet med stærk kausalitet.

Hvis man nu ombytter spændingskilderne med strømkilder, og omvendt, fås en situation, hvor alle kilderne har svag kausalitet. Vis, at der i signalspordiagrammet optræder et loop med forstærkningsfaktoren 1, altså en kausal konflikt. Hvordan kan man, udfra kildernes placering i den lineære graf, se, at der må være en konflikt?

15. (kap.8). En lineær graf har form som en terning. Vis, at grafen er plan, d.v.s. den kan deformeres kontinuert til en plan figur uden overkrydsende grene. Oversæt terning-grafen til et samlerdiagram ved knudemethoden. Vis, at antallet af prikker i samlerdiagrammet kan reduceres til nul.

16. (kap.8). Vi ser på en plan graf med  $k$  knuder og  $g$  grene. Hver knude er forbundet med mindst tre grene. Maskerne i grafen kan defineres ved de sammenhængende områder, som grafen opdeler planen i, eller ved antallet af sideflader på det tilsvarende rumlige polyeder. Antallet af sådanne masker kaldes  $m$ .

Angiv  $k$ ,  $g$  og  $m$  for graferne svarende til de fem regulære polyedre (tetraeder, oktaeder, terning, dodekaeder, ikosaeder).

Maskestrømme defineres i henhold til en bestemt omløbsretning i planen, f.ex. mod uret.

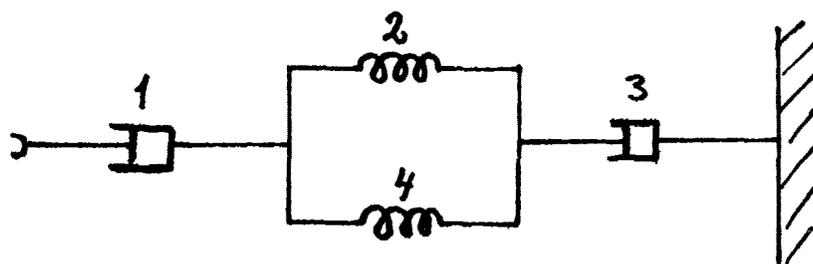
Vis, at hver grenstrøm kan udtrykkes som en differens af to maskestrømme, og at antallet af uafhængige maskestrømme er  $m-1$ .

Vis Euler's relation  $m+k = g+2$ .

Angiv en metode (maskemetoden) til oversættelse fra en plan graf til et samlerdiagram, hvorved de uafhængige masker bliver til symmetriske  $x$ -samlere og grenene til  $o$ -samlere med prik.

Oversæt terninggrafen ved maskemetoden og oktaedergrafen ved knudemetoden og diskuter den duale symmetri af de to grafer.

17. (kap.8). Vi ser på følgende rheologiske netværk

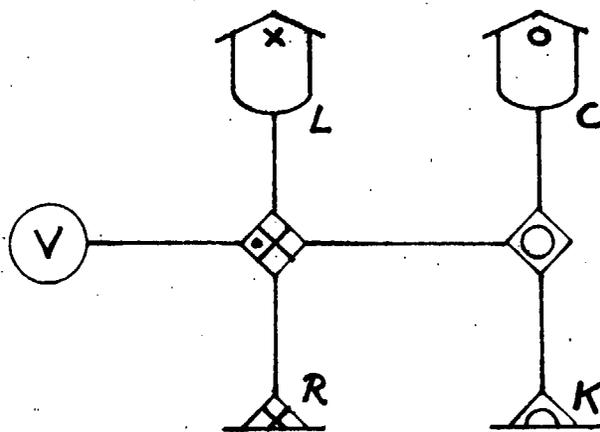


Vis, ved oversættelse til energibandsdiagram og brug af regneregler (fig.40 og opgave 8), at systemet kan reduceres til et Maxwell-element, d.v.s. en serieforbindelse af en fjeder og et stempel (fig.76). Udtryk Maxwell-elementets parametre, d.v.s. fjederens stivhed (kraftkonstant)  $G$  og stemplets bevægelighed  $B$  ved stivhederne  $G_2$  og  $G_4$  og bevægelighederne  $B_1$  og  $B_3$  for fjedrene og stemplerne i det oprindelige system.

18. (kap.8). To partikler med masserne  $m_1$  og  $m_2$  er forbundet med en fjeder med ligevægtslængden  $\ell$  og kraftkonstanten  $G$ . Partiklerne kan bevæge sig rundt i  $x$ - $y$  planen. Angiv relationer mellem komponenterne af hastighederne  $\vec{v}_1$  og  $\vec{v}_2$ , de generaliserede koordinater  $q$  (fjederens sammentrykning) og  $\theta$  (fjederens vinkel med  $x$ -aksen) og de generaliserede hastigheder  $\dot{q}$  og  $\dot{\theta}$ .

Lav et energibandsdiagram, som udtrykker disse relationer.

19. (kap.9). Angiv et elektrisk netværk og opskriv bevægelsesligningerne for den spændingsstyrede, dæmpede harmoniske oscillator, som vises på nedenstående diagram.

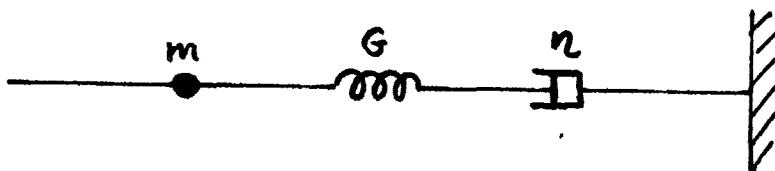


Bestem funktionerne  $F(\tau)$ ,  $Y(\tau)$  og  $J(\tau)$  for dette system.

Vi fjerner nu spændingskilden og tilkobler en strømkilde i stedet, således at der ikke opstår kausale konflikter. Tegn et energibandsdiagram og et elektrisk netværk for den strømstyrede oscillator, opskriv bevægelsesligningerne og bestem funktionerne  $G(\tau)$ ,  $Z(\tau)$  og  $M(\tau)$  for den.

20. (kap.9). Bestem de egentlige responsefunktioner for Maxwell-elementet.

21. Et Maxwell-element udbygges med en partikel med massen  $m$ :



Tegn et energibandsdiagram for dette system og vis, at  $F$ ,  $Y$  og  $J$  er de egentlige responsefunktioner. Vis, at  $J(\tau)$  for  $m \rightarrow 0$  går over i den uegentlige creep funktion  $\frac{1}{G} + \frac{\tau}{\eta}$  for det rene Maxwell-element. (Benyt eventuelt resultatet fra opgave 19).

Referencer.

1. Økofysik forelæsningsnoter.

af Peder Voetmann Christiansen, Erland Brun Hansen, Jesper Gundermann og Lars Josephsen.  
Fysisk Laboratorium I, Københavns Universitet, sidste udgave 1976 - 77.

a. "Energy and Information" (LJ, EBH, PVC).

Disse engelske noter indeholder en grundig diskussion af begreberne fri energi og entropi i termodynamikken, samt anvendelse af bond-graf teknikken i statistik og informationsteori. Leksikalsk stikordsregister.

b. "Grundlæggende energibåndsteknik" (JG).

Kortfattet introduktion til systemdynamik og energibåndsteknik med udførlig diskussion af komplekse response-funktioner, reciprocitet, støj og dissipation.

c. "Topologi og kausalitet" (PVC).

Oversættelse af elektriske netværk til energibandsgrafer. Dualitet af plane grafer. Spidskatastrofer og kausale konflikter.

d. "Produktion og vækst" (PVC).

Anvendelser af energibåndsteknik til optimering. Økologiske og temodynamiske udviklingskriterier. Termostatik, elektronik og kemisk reaktionskinetik.

2. Torben Smith Sørensen: "Almen Energetik", D.T.H. 1978.

Termodynamik, som bygger på Brønsted's energetik, med en grundig diskussion af begrebet exergi, d.v.s. fri energi, "essergi" eller "available work".

3. J.W. Forrester: "Principles of Systems". Wright-Allen Press, 1968.

Introduktion til systemdynamisk diagram- og beregningsteknik.

Samme forfatter: "World Dynamics". Wright-Allen Press 1971.

Anvendelse af de systemdynamiske kategorier (levels, rates m.m.) og diagrammer til modellering af et kompliceret system.

4. H.T. Odum: "Environment, Power and Society", Wiley-Interscience, 1971.

Anvendelse af økologiske energy-flow diagrammer. Den grafiske udformning af Odum's diagrammer har været et forbillede for den i økofysik noterne (og her) fremstillede version af energibåndsteknikken.

5. H.M. Paynter: "Analysis and Design of Engineering Systems". M.I.T. 1961.

Disse forelæsningsnoter er den originale afhandling om energibåndsteknikken i den "tegne-økonomiske" form, som benyttes i de fleste engelsk-sprogede artikler om emnet. Bortset fra grafikken, afviger axiomatikken fra den her benyttede; bl.a. mangler strøm-orienteringsreglen.

6. D. Karnopp and R.C. Rosenberg: "Analysis and Simulation of Multiport Systems". M.I.T. 1968.

Samme forfattere: "System Dynamics: A Unified Approach". Michigan State University, 1971.

Lærebog i Paynter's teknik med fysiske og ingeniørmæssige anvendelser.

7. G.F. Oster, A.S. Perelson and A. Katchalsky: "Network Thermodynamics: Dynamic Modelling of Biophysical Systems".

Quarterly Review of Biophysics, 6, 1973.

En lang artikel om anvendelser af energibåndsteknikken bl.a. til membranprocesser og kemiske reaktioner i cellebiologi.

8. Karin Beyer: Prisopgave i fysik, Københavns Universitet 1972.

Indeholder teori for nytteenergi (essergi ~ exergi), termodynamiske og mekaniske udviklingskriterier, samt disses forbindelse med kombinatorisk topologi og energibåndsteknik.

9. H. Goldstein: "Classical Mechanics". Addison-Wesley, 1959.

Moderne indføring i den analytiske mekanik med stor vægt på Hamilton's princip, Lagrange's og Hamilton's bevægelsesligninger.

Stikordsregister.

Tegnene x og o (kryds og bolle) er indført i alfabetet som bogstaverne x og o.

Abstraktion 11, 22, 34  
Actual 21  
Admittans 7, 108 f  
Akausale formler 42, 55 f  
Aksel 20  
Aktion og reaktion 4, 98  
Aktivt lager 71 f  
Aktivt system 66  
Algoritme 25  
Amperemeter 15  
Analog 13, 25  
Analysis situs 65  
Analytisk mekanik 22, 70, 83, 90  
Arbejde 19, 72  
Arbejdsprincip 87  
Arbejdspunkt 27 f  
Arbejdsreservoir 72 f  
Arkimedes 59  
Associativ 120  
Asymmetri 31  
Asymmetrisk x-samler 52  
Autonomt system 1, 89  
Axiom 1, 79, 101

Basale byggesæt, det 23 f, 76  
Begrebsrealisme 21  
Belastning 27  
Bevarelsessætninger 3  
Bevægelighed 7, 110 f  
Billedmæssig 10 f  
Biofysik 64  
Black box 23, 103, 108  
Boltzmann 60  
Bond 8  
Brownske bevægelser 29  
Brønsted 87  
Bulk modulus 118  
Bulk viscosity 118

Carnot-maskine 73  
Cause 8  
Compliance 110 f  
Coriolis kraft 37  
Creep funktion 110 f  
Cykeltur 4, 81  
Cyklisk lager 71, 81, 108

D-konvention 84  
D'Alembert's princip 90  
Datalogisk kausalitet 27  
Deltafunktion 105 f  
Dielektricitetskonstant 120  
Differentialligninger 38, 63  
Differential kausalitet 25, 113, 125  
Dimension 36, 107  
Diskrete modeller 63  
Diskretisering 65  
Dissipation 43, 63  
Dissipativt felt 66  
Distributiv 51, 57, 94, 99  
Dominerende bånd 48  
Drejning 122  
Drejningsmoment 20  
Drivrem 19  
Dualitet 98  
Dyadisk relation 38, 42, 43  
Dynamik 1

Effect 8  
Efforts 14  
Egentlige responsefunktioner 111 f  
Ekstensive variable 3  
Elastisk modul 7, 109  
Elektrodynamik 63  
Elektromotorisk kraft 120  
Elektronik 24  
Energetik 61  
Energi 9 f  
Energibånd 10 f  
Energifunktion 80 f  
Energy-bond 10  
Enport samlere 49  
Entropi 60, 73, 75  
Enzymkinetik 24  
Ergodisk 104  
Euler ligningerne 37  
Exergi 73 f

Fjeder 98 f  
Flows 14  
Flux 3, 71  
Forbruger-fortegn 91  
Forbruger-orientering 84  
Forrester-diagrammer 2, 69  
Forstærkningsfaktor 57  
Fri energi 73

Gaffel 98 f  
Generator 27  
Genator-fortegn 91  
Generator-orientering 84

Generelle objekter 22  
Gennem-variable 15 f  
Graf 65, 91 f, 129 f  
Gren 65, 91 f  
Grenspændinger 92  
Grenstrømme 94, 130  
Gruppe 42, 43, 120 f  
Grænsebetingelser 49  
Gullvåg, I. 21  
Gundermann, J. 23  
Gyrator 36 f

H-teorem 60 f  
Hamilton's ligninger 70, 75  
Hamilton's princip 90  
Hastighed 1, 4, 5, 9, 98 f  
Heaviside, O. 102  
Heaviside-funktion 107 f  
Helmholtz 59  
Helmholtz' fri energi 73  
Hest og vogn 4 f, 80  
Hydraulik 24  
Hydraulisk energibånd 18  
Hydrodynamik 13, 63

Ikon 11  
Ikoniske indices 31  
Impedans 7, 108 f  
Impuls 2, 5, 108 f  
Index 12,  
Indre energi 72, 75 f  
Induktionsloven 7  
Inertans 109 f  
Informations-styring 67  
Input 8, 10, 28, 30, 33, 36, 44, 103  
Input-Output relationer 38, 44  
Integral kausalitet 25  
Interaction 8  
Interaction bond 8  
Interface 36

Jordforbindelse 92  
Jævnstrøm 35

K-konvention 84  
Kapacitet 7, 71  
Kaskadekobling 42  
Katastrofer 58, 63  
Katchalsky 64, 83  
Kausalitet 25 f, 31, 44  
Kildefelt 66  
Kilder 63, 67 f

Kinetisk energi 68  
Kirchhoff 21  
Kirchhoff's love 46 f  
Knode 46, 91 f  
Knudelov 46  
Knudemetode 97, 129  
Knudespænding 92  
Kommutativ 42, 121  
Konflikt 48, 125  
Konservativ 51, 94, 99  
Konstitutive relationer 7, 26  
Kontinuum 63  
Kontrol 26 f  
Konvention 12, 101  
Kortslutning 49  
Kraft 2, 5, 19, 98  
Kraftmoment 20

Lagerkapacitet 71  
Lagre 63, 68 f  
Lagringsfunktion 75  
Ledningsevne 7, 77  
Leduc-Righi effekten 37  
Lethed 110 f  
Level-variable 1 f  
Lineært response 102 f  
Lineære lagre 71  
Lineært system 22, 102 f  
Longitudinal 19, 98  
Lorentz-funktion 106  
Lorentz-kraften 37  
Loschmidt 60

Magnetisk flux 3, 71  
Magnetiske monopoler 17  
Maske 47  
Maskelov 47  
Maskemetode 97, 130  
Maskestrømme 97, 130  
Masse 2, 71, 109, 132  
Maxwell-element 117 f, 131 f  
Maxwell's ligninger 61, 120  
Mindste virknings princip 90  
Mobilitet 110  
Modelektromotorisk kraft 2  
Modstand 7, 63, 77 f  
Modulus 109  
Monadisk relation 38  
Multiport lager 23, 24, 70  
Måleforskrifter 15 f, 27

Naturlove 82, 83  
Netværk 63, 82, 91 f  
Newton's 2.lov 1, 7  
Nyqvist-støj 78, 79

o-gyrator 36 f, 73  
o-levels 5 f, 70  
o-kilde 67  
O-konvention 86  
o-lager 68 f  
o-læk 77 f  
o-rates 6 f  
o-samler 46 f  
Odum, H.T. 68  
Ohm's lov 77  
Omgivelser 67  
Oplagring af energi 68 f  
Orientering 13 f, 84 f, 91 f, 101  
Oster 64, 83  
Ostwald 61  
Output 8, 30, 32, 36, 44, 103

Parallelforbindelse 46, 101  
Parametriske transducere 65  
Partielle differentiallyigninger 63  
Partikel 1, 62, 71, 113  
Passivt system 44, 65, 67, 76, 102, 105  
Paynter, H.M. 10 f, 23, 64  
Peirce, C. S. 11 f, 21  
Perelson 64, 83  
Periodisk 104  
Planck, M. 61  
Poincaré, H. 65  
Polarisabilitet 7  
Porte 11  
Potentiel energi 68  
Power bond 10  
Pragmatisme 21 f  
Praksis 21 f  
Prik 52, 94 f

Rate-variable 1 f  
Reaktivt system 66, 102 f  
Reciprocitet 83, 86, 101  
Reduktionisme 59  
Referenceknode 92 f  
Relation 38, 42, 43 f  
Relationslogik 11  
Response 102 f  
Reticulation 23  
Rheologi 22, 23, 98, 102, 117  
Russell, B. 26

Samler 43 f  
Selvinduktion 3, 71  
Semiotik 11 f  
Serieforbindelse 47, 101, 117  
Shear modulus 117  
Shear viscosity 117  
Signal-indices 10  
Signalrute 39 f, 53  
Signalspor 54, 57 f  
Skeletdiagram 43, 48 f, 65 f, 84 f  
Skib 10  
Spredning 104  
Spænding 4, 5, 6 f, 14 f  
Spændingsgyrator 36 f  
Spændingskilde 27, 67  
Spændingslæk 77 f  
Spændingssamler 46  
Stempel 83, 98 f, 117 f  
Stimulus 103  
Stivhed 109 f  
Strøm 2 f, 7, 14 f  
Strømgyrator 36  
Strømkilde 67  
Strømlæk 77 f  
Strøm/orienteringsregel 17 f, 50, 101  
Strømsamler 47  
Stænger 59, 83, 98  
Stærkt bånd 48 f  
Stærk kausalitet 57, 115  
Støj 29, 103 f  
Svag kausalitet 57  
Svage bånd 49  
Symbol 12 f  
Symbolske indices 31, 44, 55, 69  
Symmetri 31, 43  
Symmetrisk samler 43 f  
Symmetrisk transformator 35, 52

Tegn 11 f  
Tellegen, B.D.H. 36  
Tellegen's teorem 83, 87 f  
Temperatur 68, 72 f  
Tensorregning 63  
Terminaler 11, 91  
Termodynamik 60, 72, 87  
Tidsvending 5 f, 60, 78  
Topologi 65,  
Topologisk felt 65 f, 84 f  
Toporte 30, 38, 42, 50  
Transducer 36, 40, 42, 75  
Transformator 30 f, 55 f  
Transienter 28, 29  
Transmitter 34  
Transversal 20  
Triadisk relation 38, 43  
Tråd, elastisk 71, 109  
Tværvariable 15 f

Uegentlige responsefunktioner 111 f  
Unitær transformator 122, 123  
Uspecificeret lager 69  
Uspecificeret samler 55

Valuta 9  
Varmeenergi 75  
Varmekapacitet 74  
Varmekraftmaskine 74  
Varmeledningsevne 79  
Varmepumpe 72  
Varmereservoir 72, 75  
Vekselstrøm 24, 35  
Vekselvirkning 8 f  
Virkning 8, 90  
Virtuel 88  
Virtuelle arbejders princip, de 90  
Voigt-element 118 f  
Volt 3  
Voltmeter 15

Weber 3, 126  
White box 23, 103  
Work-gate 23, 24

x-gyrator 36 f  
x-levels 5 f  
x-kilde 67  
X-konvention 86  
x-lager 68 f  
x-læk 77 f  
x-o dualiteten 98  
x-o klassifikationen 6  
x-rates 6 f  
x-samler 47 f

Young's modul 71, 109

Æter 61 f

Økologi 24, 64

Årsag 3, 8