IMFUFAtekst

- I, OM OG MED MATEMATIK OG FYSIK

Opgavesamling til *Termodynamik og Statistisk mekanik*

Eksamensopgaver stillet i perioden
januar 1977 til februar 2017

Redigeret af Bo Jakobsen
marts 2017

nr. 495a - 2017 (2. udgave)

Roskilde University
Department of Science and Environment, IMFUFA
P.O. Box 260, DK - 4000 Roskilde
Tel: 4674 2263

Opgavesamling til Termodynamik og Statistisk mekanik

1. udgave, august 2013, Redigeret af Lyt Baden & Bo Jakobsen
2. udgave, marts 2017, Redigeret af Bo Jakobsen

IMFUFA tekst nr. 495a / 2017 (2. udgave) – 156 sider – ISSN: 0106-6242

Denne tekst indeholder eksamensopgaver i termodynamik og statistisk mekanik stillet i perioden januar 1977 til februar 2017.

Tekst nr. 495 består af tre dele:

Nr. 495a: Opgavesamling til Termodynamik og Statistisk mekanik

Nr. 495b: Opgavesamling til Elektrodynamik og Relativitetsteori

Nr. 495c: Opgavesamling til Kvantemekanik

Tilsammen indeholder de opgaverne fra tekst nr. 429/2004, 406/2001 og 25/1980 og erstatter dermed disse.

I en længere periode bestod eksamenssættene til de såkaldte *dybdekurser* af opgaver i flere teoribygninger. I denne tekstserie (495 a–c) er disse opgaver fordelt i de relevante tekster. Ønsker man at studere de originale, samlede eksamenssæt, henvises til tekst nr. 429/2004.

En del af eksamenssættene findes på engelsk, dels fra eksamener, som blev givet på engelsk, og dels fra senere oversættelser.

Indhold

Januar 1977: Termodynamik og statistisk mekanik (Dansk) . . . 5
Januar 1979: Termodynamik og generel dynamik (Dansk) . . . 9
Juni 1981: Termodynamik (Dansk) . . . 13
Januar 1988: Termodynamik (Dansk) . . . 17
Juni 1988: Termodynamik (Dansk) . . . 19
Juni 1989: Statistisk mekanik (Dansk) . . . 21
Januar 1992: Termodynamik (Dansk) . . . 23
Juni 1992: Termodynamik (Dansk) . . . 25
Januar 1993: Termodynamik (Dansk) . . . 27
January 1993: Thermodynamics (English translation) . . . 29
Januar 1994: Termodynamik og statistisk mekanik (Dansk) . . . 31
Juni 1994: Termodynamik og statistisk mekanik (Dansk) . . . 33
Januar 1996: Termodynamik og statistisk mekanik (Dansk) . . . 35
Januar 1998: Termodynamik og statistisk mekanik (Dansk) . . . 37
Juni 1998: Termodynamik og statistisk mekanik (Dansk) . . . 39
Januar 2000: Termodynamik og statistisk mekanik (Dansk) . . . 43
Januar 2002: Termodynamik og statistisk mekanik (Dansk) . . . 45
Januar 2004: Termodynamik og statistisk mekanik (Dansk) . . . 47
January 2004: Thermodynamics and statistical mechanics (English translation) . . . 49
Januar 2006: Termodynamik og statistisk mekanik (Dansk) . . . 51
January 2006: Thermodynamics and statistical mechanics (English translation) . . . 53
Juni 2006: Termodynamik og statistisk mekanik (Dansk) . . . 55
June 2006: Thermodynamics and statistical mechanics (English translation) . . . 57
Januar 2008: Golden Sheet (Dansk) . . . 59
Januar 2008: Termodynamik og statistisk mekanik (Dansk) . . . 61
January 2008: Thermodynamics and statistical mechanics (English translation) . . . 63
Januar 2009: Termodynamik og statistisk mekanik (Dansk) . . . 65
January 2009: Thermodynamics and statistical mechanics (English translation) . . . 67
Efterår 2009: Golden Sheet (Dansk) . . . 69
Januar 2010: Termodynamik og statistisk mekanik (Dansk) . . . 71
January 2010: Thermodynamics and statistical mechanics (English translation) . . . 73
Autumn 2010: Golden Sheet (English) . . . 75
Januar 2011: Termodynamik og statistisk mekanik (Dansk) . . . 77

January 2011: Thermodynamics and statistical mechanics (English) 79
Juni 2011: Termodynamik og statistisk mekanik (Dansk) 81
June 2011: Thermodynamics and statistical mechanics (English translation) 83
Autumn 2011: Golden Sheet (English) 85
Januar 2012: Termodynamik og statistisk mekanik (Dansk) 87
January 2012: Thermodynamics and statistical mechanics (English) 89
Juni 2012: Termodynamik og statistisk mekanik (Dansk) 91
June 2012: Thermodynamics and statistical mechanics (English translation) 95
Autumn 2012: Golden Sheet (English) 99
Januar 2013: Termodynamik og statistisk mekanik (Dansk) 101
January 2013: Thermodynamics and statistical mechanics (English) 105
Januar 2014: Termodynamik og statistisk mekanik (Dansk) 109
January 2014: Thermodynamics and statistical mechanics (English) 111
Maj 2014: Termodynamik og statistisk mekanik (Dansk) 113
May 2014: Thermodynamics and statistical mechanics (English) 115
Januar 2015: Termodynamik og statistisk mekanik (7.5 ECTS) (Dansk) 117
January 2015: Thermodynamics and statistical mechanics (7.5 ECTS) (English) 119
Januar 2015: Termodynamik og statistisk mekanik (5 ECTS) (Dansk) 121
January 2015: Thermodynamics and statistical mechanics (5 ECTS) (English) 123
Februar 2015: Termodynamik og statistisk mekanik (5 og 7.5 ECTS) (Dansk) 125
February 2015: Thermodynamics and statistical mechanics (5 and 7.5 ECTS) (English) 129
Januar 2016: Termodynamik og statistisk mekanik (5 ECTS) (Dansk) 133
January 2016: Thermodynamics and statistical mechanics (5 ECTS) (English) 135
Februar 2016: Termodynamik og statistisk mekanik (5 ECTS) (Dansk) 137
February 2016: Thermodynamics and statistical mechanics (5 ECTS) (English) 139
June 2016: Thermodynamics and statistical mechanics (5 ECTS) (English) 141
Autumn 2016: Golden Sheet (English) 143
Januar 2017: Termodynamik og statistisk mekanik (5 ECTS) (Dansk) 145
January 2017: Thermodynamics and statistical mechanics (5 ECTS) (English) 149
Februar 2017: Termodynamik og statistisk mekanik (5 ECTS) (Dansk) 153
February 2017: Thermodynamics and statistical mechanics (5 ECTS) (English) 155

ROSKILDE UNIVERSITETS CENTER

Skriftlig prøve i TERMODYNAMIK & STATISTISK MEKANIK, dybdemoduleksamen i fysik, den 12. januar 1977 kl. 09^{30} - 13^{30} (alle sædvanlige hjælpemidler tilladt).

I

Et mol af en given luftart opfylder i et tilstandsområde tilstandsligningen

$$P \cdot V = R \cdot T + \frac{B(T-\theta)}{V}$$

hvor R er gaskonstanten, B og θ er to positive konstanter. I samme område findes, at c_V, den molære varmefylde, er konstant.

(1) Find den indre energi U som funktion af T og V, idet energien sættes til nul i tilstanden T_o, V_o.

(2) Angiv sammenhængen mellem T og V ved reversible adiabatiske tilstandsændringer udgående fra tilstanden T_o, V_o.

(3) Angiv, f.eks. ved skravering i et T,V-diagram eller på anden måde, det tilstandsområde, der kan nås fra tilstanden givet ved T_o, V_o ved adiabatiske (reversible eller irreversible) processer.

Opgavesættet fortsættes næste side.

II

Ved statistisk mekaniske beregninger af gassers termodynamiske egenskaber kan man i reglen se væk fra ekcitationer af gasmolekylernes elektronsystemer, når temperaturen ikke er meget høj.

I O_2-molekylet ligger første ekciterede niveau af elektronsystemet $1{,}6\cdot 10^{-19}$J over grundtilstanden. Udartningsgraden af dette niveau er 2, mens grundtilstanden er 3 gange udartet (d.v.s. der er 2 tilstande med energi $E_1=1{,}6\cdot 10^{-19}$J og 3 med energi $E_o=0$). Næste niveau ligger omkring dobbelt så højt ($E_2\approx 2E_1$).

(1) Beregn for temperaturerne T=300 K og T=2000 K hvor stor en brøkdel af O_2-molekylerne, der har deres elektronsystemer anslået til første niveau E_1.

III

De termodynamiske egenskaber af et krystallinsk stof er hovedsageligt bestemt af gittersvingningerne. Disse kan repræsenteres ved et antal harmoniske oscillatorer, én for hver normalsvingning af krystallen. Idet normalfrekvenserne betegnes ω_i ,i = 1,2,..., 3N og den potentielle energi af krystallen, når alle N atomer befinder sig i deres ligevægtsstilling,kaldes U_o, finder man, at Helmholtz fri energi F(T,V) har formen

$$F(T,V) = U_o + kT \sum_{i=1}^{3N} g\left(\frac{\omega_i}{T}\right).$$

(1) Udfør den angivne beregning af F og bestem derved funktionen g.

Størrelsen U_o, såvel som frekvenserne ω_i afhænger af volumi-net V af krystallen.

$$U_o = U_o(V) \ , \ \omega_i = \omega_i(V)$$

Vi følger nu Grüneisen ved at gøre følgende antagelse

$$\frac{V}{\omega_i}\frac{d\omega_i}{dV} = \frac{d(\ln\omega_i)}{d(\ln V)} = -\gamma \ , \ i=1,\ldots,3N$$

hvor γ er en fælles konstant (d.v.s. uafhængig af både V og i).

(2) Vis, ved at anvende Grüneisen's antagelse samt ovenstående udtryk for F(T,V) (hvor formen af funktionen g er underordnet), at systemet adlyder den såkaldte Mie-Grüneisen tilstandsligning:

$$P = -\frac{dU_o}{dV} + \gamma\frac{(U-U_o)}{V}$$

hvor U er den indre energi, og P er trykket.

(3) Vis, udfra dette, at der gælder følgende relation:

$$\alpha = \gamma\frac{\kappa c_V}{V}$$

mellem $\alpha \equiv (\frac{\partial \ln V}{\partial T})_P$ volumenudvidelseskoefficienten, $\kappa \equiv -(\frac{\partial \ln V}{\partial P})_T$ kompressibiliteten, $c_V = (\frac{\partial U}{\partial T})_V$ varmefylden, og V voluminet.

(Opgavesættet SLUT)

Roskilde Universitetscenter.

Skriftlig prøve i Termodynamik og Generel Dynamik.
Dybdemoduleksamen i fysik den 8. januar 1979,
kl. 9:00 - 13:00.
(Benyttelse af medbragt litteratur, tabeller og lommeregner er tilladt).

OPGAVE I.

For en stor gruppe af rene, kondenserede stoffer kan man ved meget lave temperaturer udtrykke den molære varmekapacitet ved fastholdt volumen på formen

$$c_V = \xi \cdot R \cdot \left(\frac{T}{\theta}\right)^{\nu} \qquad (1)$$

hvor ξ og ν er positive dimensionsløse konstanter, R er gaskonstanten og θ en for stoffet karakteristisk temperatur, som kun afhænger af stofkoncentrationen N/V, hvor N er antallet af molekyler i stofprøven, og V er prøvens volumen. Formel (1) gælder kun for $T \ll \theta$. I det følgende betragtes 1 mol af stoffet (dvs. $N = N_A$, Avogadros tal), og T og V holdes inden for gyldighedsområdet af formel (1).

a) Angiv entropien som funktion af temperaturen.

b) Ved det absolutte nulpunkt er den indre energi $U_o(V)$. Angiv den indre energi U(T,V) og Helmholtz-potentialet F(T,V).

Vi antager nu, at følgende relation gælder:

$$\frac{d\theta}{dV} = -\gamma \cdot \frac{\theta}{V} \qquad (2)$$

hvor γ er en positiv konstant, den såkaldte Grüneisen-konstant.

c) Vis, at

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{\gamma c_v}{V}\ , \quad \text{hvor P er trykket}$$

d) Vis, at

$$\left[P + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T\right] \cdot V = \gamma c_v T$$

e) Vis, at varmekapaciteten ved konstant tryk er givet ved

$$c_p = c_v \cdot \left(1 + \frac{\gamma^2 c_v \kappa T}{V}\right)$$

hvor κ er den isoterme kompressibilitet,

$$\kappa = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$$

OPGAVE II.

For monovalente metaller ved meget lave temperaturer er den molære varmekapacitet givet ved formlen:

$$c_v = \frac{\pi^2}{2} \cdot R \cdot \frac{T}{\theta} \qquad \text{med } \theta = \frac{h^2}{8mk}\left(\frac{3n}{\pi}\right)^{2/3}$$

hvor n er antallet af ledningselektroner pr. volumenenhed, $h = 6.62 \cdot 10^{-27}$ erg·sec er Planck's konstant, $k = 1.38 \cdot 10^{-16}$ erg/K er Boltzmann's konstant, og $m = 9.11 \cdot 10^{-28}$ g er elektronmassen.

a) For et bestemt metal, A, er $n = 4.07 \cdot 10^{22}\,\mathrm{cm}^{-3}$. Beregn θ.

b) Beregn c_v for metallet A ved temperaturen 1K. (Gaskonstanten $R = 8.31$ J/K).

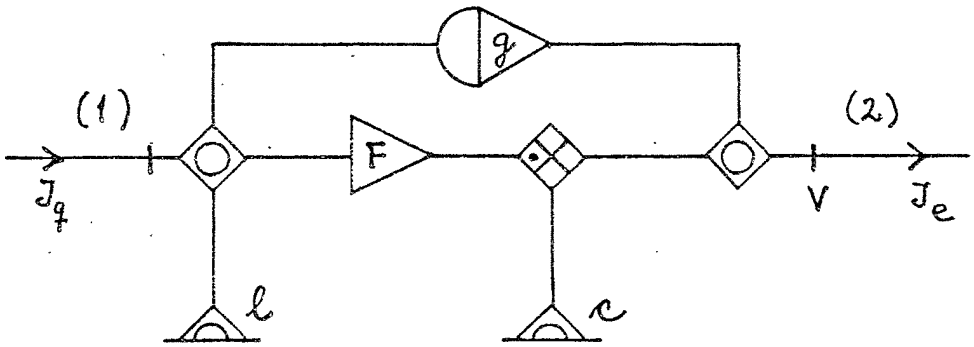
c) To ens klumper på hver 1 mol af metallet A har til at begynde med temperaturerne T_1 og T_2. Vi lader en reversibel Carnot-maskine arbejde mellem de to klumper, således at der overføres mekanisk potentiel energi til et arbejdsreservoir. Hvad er den fælles sluttemperatur T_o, når Carnot-maskinen ikke kan udføre mere arbejde?

d) Hvor meget energi kan overføres til arbejdsreservoiret, når $T_1 = 0.5$ K og $T_2 = 1.5$ K ?

e) Hvad bliver sluttemperaturen (T_s), hvis temperaturudligningen sker ved spontan varmeledning, uden at der udføres arbejde?

OPGAVE III.

For visse metaller og halvledere er den termoelektriske spænding lineært afhængig af størrelsen af et udefra pålagt magnetfelt B. Vi vil forsøge at beskrive et sådant termoelement med nedenstående energibåndsdiagram, hvor gyratorparameteren g antages at være proportional med B.



De øvrige parametre, ℓ, c og F antages uafhængige af magnetfeltet. Strømmene J_q og J_e er henholdsvis varmestrømmen og den elektriske strøm.

Vi antager, at elementets kolde loddested er i kontakt med et varmereservoir med temperaturen T_r, og at det varme loddested har temperaturen $T_r+\delta T$, hvor $\delta T \ll T_r$. Vis, at spændingen i den termiske port (1) kan udtrykkes som $\delta T/T_r$.

Angiv strømmene J_q og J_e som funktioner af δT og den elektriske spænding V i port 2.

Find varmeledningsevnen, når den elektriske port er kortsluttet (V=0).

Bestem for fastholdt g og δT den optimale elektriske spænding V_{opt}, således at produktionshastigheden af elektrisk energi bliver så stor som muligt (maksimal produktivitet).

Vis, at effektiviteten ε_{opt} svarende til maksimal produktivitet har et maksimum som funktion af g.

(opgavesættet slut)

Skriftlig eksamen i fysikuddannelsens dybdemodul,

torsdag den 4. juni 1981

Hjælpemidler er tilladt

Opgave 1

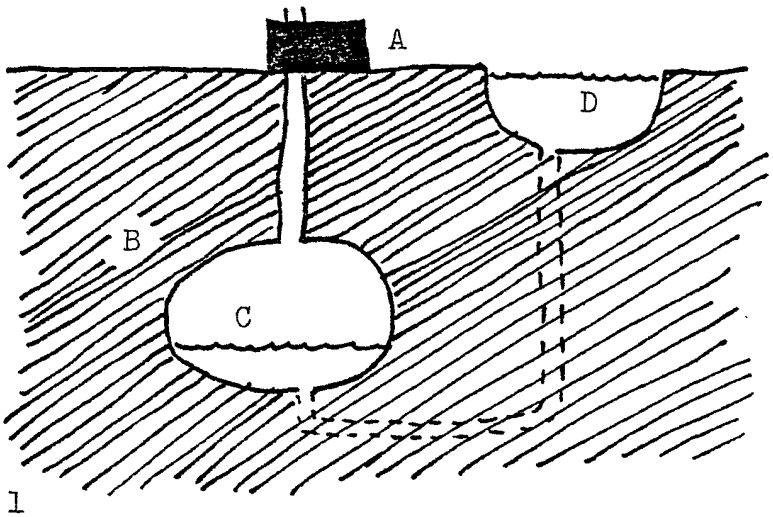


Fig. 1

Et trykluft-energilager kan bestå af et hulrum C i en tæt geologisk formation B, hvortil luft kan pumpes ved hjælp af en kompressor og evt. igen udlades gennem en turbine (A på Figur 1).

Idet luften behandles som en ideal luftart, beregnes den oplagrede energi i følgende tre tilfælde:

1). Luften sammentrykkes fra et oprindeligt volumen V_o til volumenet V ved en isoterm proces, idet den omgivende geologiske formation B opfattes som et stort varmereservoir, som påtvinger luften en konstant temperatur T_o.

2). Luft presses ned i hulrummet C under konstant tryk P_o, idet det fx. antages, at C er delvist vandfyldt og i forbindelse med en sø D ved jordoverfladen, således at en vandmængde forskubbes fra C til D. Den oplagrede lufts volumen i C betegnes V og volumenet før luften blev presset ned i hulrummet betegnes V_o.

Opgaven fortsættes næste side.

Opgave 2 fortsat

3). Luften sammentrykkes adiabatisk fra et oprindeligt volumen V_0 og tryk P_0 til volumenet V og trykket P, idet processen antages at ske så hurtigt, at der ikke er tid til udveksling af varme med reservoiret B. Den adiabatiske betingelse kan skrives

(*) $$P\,V^{\gamma} = \text{konstant},$$

hvor $\gamma = c_P/c_V$ antages konstant.

4). Udled (*).

5). Skitsér i et (T,S)-diagram den adiabatiske sammentrykning beskrevet i 3), efterfulgt af et varmetab til det omgivende reservoir B, og endelig fulgt af en proces, hvor luften ved adiabatisk udvidelse driver en turbine og derved frigiver en del af den oplagrede energi. (T er temperatur, S entropi).

6). Et trykluft-energilager kan bestå af et hulrum i en salthorst. Der er intet vandreservoir (D på Fig. 1) til trykudligning. Temperaturen af det omgivende salt sættes til $30^{\circ}C$. Da saltet ikke kan tåle de høje temperaturer, som luften vil have efter én adiabatisk kompression fra atmosfæretryk (10^5 Nm^{-2}) til et maksimalt lagertryk på 70×10^5 Nm^{-2}, køles luften ned til saltets temperatur inden den sendes ned i salthorsten. Når luften skal hentes op for at drive turbinekraftværket, opvarmes den igen, ideelt med varmen fra den foregående afkøling. Idet det antages, at afkøling og opvarmning sker ved konstant tryk, og at varmeoplagringen er tabsfri, skal processen skitseres i et (T,S)-diagram.

7). Hvor høj er luftens temperatur umiddelbart efter komprimeringen til 70×10^5 Nm^{-2} (sæt $\gamma = 1.5$ og indtagsluftens tem-

Opgaven fortsættes næste side.

Opgave 2 fortsat

peratur lig $10^{o}C$).

8). Hvis afkølingen af den komprimerede luft sker ved hjælp af havvand, og genopvarmningen til den i 7) beregnede temperatur sker ved at afbrænde et brændsel, så er lagerets effektivitet, dvs. den udgående energi (mekanisk) divideret med den indgående energi (dels mekanisk dels varme), ikke længere 100% i idealtilfældet. Find lagereffektiviteten når al den anvendte brændselsenergi antages at blive nyttiggjort under luftopvarmningen, og med de i 6) og 7) gjorte øvrige antagelser.
(luftens massefylde kan sættes til 1.25 kgm^{-3} ved atmosfærens tryk og temperatur. Luftens varmefylde afhænger af temperatur og tryk. Antag for de isobare afkølings- og opvarmningsprocesser betragtet her, at $c_p = 10^3$ J/kg/K).

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i fysikuddannelsens
dybdemodul (termodynamik og elektrodynamik)
torsdag, den 7. januar 1988 kl. $10^{\underline{00}}$ - $14^{\underline{00}}$.

HJÆLPEMIDLER TILLADT

Opgave I.

En metaltråd kan strækkes elastisk med en trækkraft K til en længde L. Trækkraften er nul, når tråden har længden

$$L_1(T) = L_0 + a \cdot (T-T_0)$$

hvor a er en konstant. Endvidere antages, at trådens isoterme elastiske modul

$$g_T = \left(\frac{\partial K}{\partial L}\right)_T$$

kan betragtes som en konstant, når T er i nærheden af T_0 og L i nærheden af L_0, og når K er lille i forhold til grænsen for plastisk deformation og brud. Disse forudsætninger antages opfyldt i det følgende. Der ses bort fra rumfangsændringer ved trådens strækning.

1) Opskriv en tilstandsligning for K som funktion af L og T.

2) Vis, at $\left(\frac{\partial S}{\partial L}\right)_T = ag_T$, hvor S er entropien.

3) Bestem $\left(\frac{\partial U}{\partial L}\right)_T$, hvor U er den indre energi.

4) Vis, at varmekapaciteten for fastholdt L, (C_L) er uafhængig af L.

(opgavesættet fortsættes)

Vis, at varmekapaciteten for fastholdt K er givet ved:

$$C_K = C_L + Tg_T a^2$$

Find et udtryk for trådens adiabatiske elastiske modul

$$g_S = \left(\frac{\partial K}{\partial L}\right)_S$$

Vis, at $\left(\frac{\partial T}{\partial L}\right)_S = -\frac{Tg_T a}{C_L}$

Aluminium har for temperaturer omkring 0° C længdeudvidelseskoefficienten $\alpha = 3 \cdot 10^{-5}\ K^{-1}$, massefylden $\rho = 2{,}7\ g/cm^3$, den specifikke varmekapacitet $c_p = 0.2\ \frac{cal}{g \cdot K}$. Young's modul er

$E = 7 \cdot 10^{10}\ \frac{N}{m^2}$; (denne størrelse er det isoterme elastiske modul for strækning af en terning på $1\ m^3$ i retning af en af kanterne).

Udregn g_T a og C_K for en tråd af aluminium med tværsnitsareal $1\ mm^2$ og længden $L_o = 1$ m.

Vurdér den procentiske forskel på C_L og C_K og udregn temperaturændringen, når tråden strækkes adiabatisk med en kraft på 70 N.

Opgaven udleveres 3. juni 1988 kl. 10.00.
Opgaven afleveres 3. juni 1988 kl. 14.00.

Skriftlig eksamen i dybdemodulet (2. modul) fysik.
fredag, den 3. juni 1988.

Sættet består af tre opgaver i hhv. termodynamik, elektrodynamik og relativitetsteori. Eksaminanden udvælger to af opgaverne, svarende til de opgivne fagmoduler.

Hjælpemidler tilladt.

Opgave 1. Termodynamik.

Vi betragter et reservoir, som indeholder en enatomig ideal gas med temperaturen T_r og trykket P_r.
Vi danner nu et system ved at indeslutte N mol af gassen i en beholder med stoftætte, stive og adiabatiske vægge. Beholderen er forsynet med et stempel, hvorpå en trykmaskine kan udøve et ekstra tryk $P-P_r$, således at trykket i beholderen har en konstant værdi P.
Endvidere kan vi med en varmemaskine udveksle varme med reservoiret og således kontrollere temperaturen T i beholderen.

1). Beregn det minimale arbejde, som trykmaskinen skal udføre på systemet, når trykket i beholderen ændres fra P_r til P, medens temperaturen fastholdes på værdien T_r

2). Beregn det minimale arbejde, som trykmaskinen skal udføre, når temperaturen i beholderen ændres fra T_r til T, medens trykket fastholdes på værdien P.

3). Angiv systemets varmekapacitet ved fastholdt tryk (udtrykt ved N og gaskonstanten R).
Beregn dernæst det minimale arbejde, som varmemaskinen skal udføre under processen i spørgsmål 2.

(opgave 1 fortsættes på side 2)

4). Hvad er betingelsen for, at det faktiske arbejde, som maskinerne skal udføre, svarer til de beregnede minimale arbejder? Angiv systemets frie energi i forhold til reservoiret (eller exergien, d.v.s. det maximale arbejde, som kan overføres til et arbejdsreservoir), når temperaturen er T og trykket P.

5). Skitsér i et T-P diagram nogle kurver med konstant værdi af den i spørgsmål 4 udregnede frie energi E. Hvilken slags kurver er der tale om i den grænse, hvor systemets temperatur og tryk kun afviger lidt fra reservoirets?

6). Atmosfærisk luft indeholder ca. 1% argon (atomvægt 40) Vi betragter atmosfæren som et argonreservoir med T_r = 300 K og P_r = 0.01 atm. Beregn den minimale energiomkostning ved renfremstilling af 1 kg argon ved 1 atm. og -185° C. (Kogepunktet ved 1 atm. er -186° C).

(opgave 1 slut).

Opgave i statistisk mekanik.

N elektroner er indelukket i en flad kasse med kantlængderne L,L og d i henholdsvis x-, y- og z retningen. Vi ser bort fra vekselvirkningen mellem elektronerne og ser på forholdene i grænsen $N \to \infty$, $L \to \infty$, $n = N/L^2$ konstant, d konstant.

1) Angiv den laveste enkeltpartikel energi E_0 .

2) Som betingelse for, at systemet kan behandles som en todimensional elektrongas, må vi forlange, at elektrontilstandenes bølgetal i z retningen kun antager den lavest mulige værdi π/d . Angiv under denne forudsætning et udtryk for tilstandstætheden på energiskalaen, G(E).

3) Bestem Fermi-energien E_F ved det absolutte temperaturnulpunkt under samme forudsætning som i spørgsmål 2).

Er det rimeligt at forvente, at en film på et atomlags tykkelse af et monovalent metal kan behandles som et todimensional elektrongas?

(I de følgende spørgsmål regnes med, at betingelsen for todimensionalitet er opfyldt).

4) Bestem det todimensionale elektronsystems energi U_0 ved det absolutte nulpunkt. Vis, at den kraft, hvormed systemet påvirker omgivelserne i z-retningen, er givet ved

$$K_z = 2NE_0/d$$

5) Vis (gerne ved et grafisk argument), at når størrelsen $x = kT/(E_F - E_0)$ er positiv, men lille, vil E_F være uafhængig af temperaturen T til 2.orden i x.
Argumenter for, at både varmekapaciteten og entropien er givet ved αkNx, hvor α er en matematisk konstant.

(opgavesættet fortsættes)

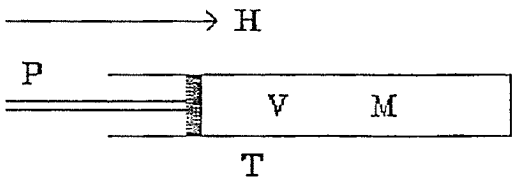
Statistisk mekanik

6) Angiv et formelt udtryk for det grandkanoniske termodynamiske potential Ω, og vis, at $\Omega = NE_0 - U$, hvor U er middelenergien. Udregn U i grænsen $x \ll 1$ og vis herved, at $\alpha = \pi^2/3$.

(opgavesættet SLUT)

Dybdemoduleksamen i termodynamik.
Tirsdag d. 7. januar 1992 kl. 10^{00} - 13^{00}.
HJÆLPEMIDLER TILLADT.

En paramagnetisk gas er indesluttet i en aflang beholder med stempel. Beholderen er anbragt i et homogent magnetfelt H parallelt med beholderens længderetning. Der ses bort fra beholderens magnetiske egenskaber og eventuelle formafhængige demagnetiseringseffekter.



Gassens samlede magnetiske moment M er givet ved udtrykket

$$M = \frac{nCH}{T - \theta \cdot \frac{nb}{V}}$$

hvor n er antallet af mol, T den absolutte temperatur, V beholderens rumfang, og hvor C, θ og b er positive konstanter. Ovenstående udtryk gælder for $T > \theta$ og $V > nb$, hvilket vi i det følgende antager er tilfældet.

Vi betragter først en magnetiseringsproces, hvor gassen har fastholdt temperatur og rumfang, medens magnetfeltet langsomt øges fra 0 til H.

1) Angiv størrelse og fortegn af det magnetiske arbejde, som udføres på gassen under processen.

2) Vis, at entropien S er en aftagende funktion af M for fastholdt T og V. Udregn dernæst den fra omgivelserne tilførte varme under processen.

3) Vis, at energien U er svagt aftagende under samme proces, og at U er uafhængig af M i det ideelt paramagnetiske tilfælde $\theta = 0$.

4) Angiv et udtryk for $\left(\frac{\partial P}{\partial H}\right)_{T,V}$ og udregn trykændringen ved processen.

I det følgende sættes $\theta = 0$, og gassen antages at have en konstant varmekapacitet for fastholdt rumfang, C_V, og at adlyde tilstandsligningen

$$P\cdot(V - nb) = nRT$$

Energien U afhænger kun af T.

5) Vis, at varmekapaciteten for fastholdt tryk og magnetfelt er

$$C_{P,H} = C_V + nR + \frac{\mu_0}{nC}M^2$$

6) Efter at gassen er kommet i termisk ligevægt med temperaturen T_i og magnetfeltet H, varmeisoleres beholderen og magnetfeltet fjernes med fastholdt tryk. Bestem gassens sluttemperatur T_f.

[Hjælp: udtryk TdS ved dT, dP og dM og find derved $\left(\frac{\partial \ln T}{\partial M}\right)_{S,P}$].

Kan man opnå en større afkøling af gassen, hvis den adiabatiske demagnetisering udføres med fastholdt rumfang i stedet for med fastholdt tryk? (Begrund svaret).

(Opgaven slut)

Dybdemoduleksamen i termodynamik.
Torsdag d. 4. juni 1992.
HJÆLPEMIDLER TILLADT.

En gas adlyder tilstandsligningen

$$Pv = RT - \frac{a}{v}$$

hvor P er trykket, v det molære rumfang, R er gaskonstanten, T den absolutte temperatur og a en positiv konstant. Tilstandsligningen antages at gælde for $v \geq \frac{3a}{RT}$.

Den molære varmekapacitet for fastholdt rumfang er givet ved

$$c_v = \frac{5}{2}R$$

1) Find den isoterme kompressibilitet κ_T og varmeudvidelseskoefficienten β.

2) Find den molære energi og enthalpi som funktioner af T og v.

3) Find varmekapaciteten for fastholdt tryk og den adiabatiske kompressibilitet.

4) I et Joule-Kelvin eksperiment presses gassen adiabatisk gennem et porøst filter ud i et område med lavere tryk. Bliver temperaturen herved højere eller lavere?

5) Find sluttemperaturen T_f i Joule-Kelvin eksperimentet, når starttemperaturen er T_i = 140 K og det molære rumfang ændres fra $v_i = \frac{4a}{RT_i}$ til $v_f = 2v_i$.

(Opgaven slut)

Dybdemoduleksamen i termodynamik.
Tirsdag d. 12. januar 1993.
HJÆLPEMIDLER TILLADT.

For en ideal gas er den molære entropi og energi givet ved udtrykkene

$$s = R \ln(\alpha v T^{\mu}) \quad ; \quad u = R \mu T$$

hvor T er den absolutte temperatur og v det molære rumfang. R er gaskonstanten, og α og μ er stofafhængige konstanter.

1) Angiv værdien af μ for en énatomig gas. Angiv endvidere for en vilkårlig værdi af μ de molære varmekapaciteter for konstant rumfang og konstant tryk.

To beholdere, som begge har rumfanget V, er forbundet med et snævert rør, hvorigennem en reversibelt arbejdende pumpe kan transportere luft fra den ene beholder til den anden. Der ses bort fra rørets rumfang.

2) Angiv den totale entropi S og energi U, når beholder 1 indeholder $n\cdot(1+\xi)$ mol og beholder 2 indeholder $n\cdot(1-\xi)$ mol af den ideale gas, og når begge beholdere er i termisk ligevægt med et varmereservoir med temperaturen T.

3) Vis, at S er maksimal for $\xi=0$, og angiv et tilnærmet udtryk for S, når $|\xi| << 1$, ved rækkeudvikling til 2. orden i ξ.

4) Når systemet er i tilstanden med temperatur T og forskydningsparameter ξ, varmeisoleres beholderne, og passagen gennem røret åbnes, så gassen kan passere frit fra den ene beholder til den anden. Angiv temperaturen T' samt entropien S' og energien U' for den nye ligevægtstilstand.

(opgaven fortsætter)

5) Hvis man i stedet for at lade gassen passere frit gennem røret, som i spørgsmål 4, udnytter trykforskellen på reversibel måde til at udføre arbejde på omgivelserne, hvad bliver så sluttilstandens temperatur T'', entropi S'' og energi U'' ?

6) Lige som i spørgsmål 5 udnyttes trykforskellen til reversibelt udført arbejde, men vi lader nu beholderne have varmeledende kontakt med varmereservoiret under hele processen, således at temperaturen fastholdes på værdien T. Vil systemet under denne proces modtage varme fra reservoiret, eller vil det afgive varme? (Begrund svaret).

(Opgaven slut)

Thermodynamics
Tuesday January 12, 1993

Translated by Bo Jakobsen (Autumn 2010)

The course was 9 ECTS points, and the exam an open book exam.

The exam consists of 6 related problems.

The molar entropy and energy is given by the following expression for an ideal gas:

$$S = R\ln(\alpha v T^{\mu}); \quad u = R\mu T \tag{1}$$

where T is the absolute temperature, and v the molar volume. R is the gas constant, and α and μ are substance dependent constants.

1) State the value for μ of an mono-atomic ideal-gas. Furthermore, state for any value of μ the molar specific heat at constant pressure and volume.

Two containers, both with volume V, are connected by a narrow tube through which a reversible working pump can transport gas from one container to the other. The volume of the tube can be neglected.

2) State the total entropy S and energy U, when container 1 contains $n \cdot (1 + \epsilon)$ mole and container 2 contains $n \cdot (1 - \epsilon)$ mole of the ideal gas, and when both containers are in thermal equilibrium with a heat reservoir at temperature T.

3) Show that S is maximal for $\epsilon = 0$, and state an approximated expression for S when $\epsilon \ll 1$, by Taylor expansion to 2. order in ϵ.

4) The system is isolated when it is in the state with temperature T and displacement parameter ϵ. The passage trough the tube is now opened, allowing the gas to flow freely from one container to the other. Give the temperature T', entropy S', and energy U' for the new equilibrium state.

5) If one now uses the pressure difference for performing reversible work on the surroundings (instead of free flow as in 4)), what is the temperature T'', entropy S'' and energy U'' of the final state.

6) The pressure difference is now (like in problem 5) used for reversible work, but we let the containers have a heat conducting contact to a heat reservoir throughout the whole process, so that the temperature is fixed at T. Will the system under this process receive or give up heat to the heat reservoir? (Justify your answer).

Dybdemoduleksamen i Termodynamik og Statistisk Mekanik
Tirsdag d. 11. januar 1994 kl. 10.00 - 13.00
HJÆLPEMIDLER TILLADT.

Opgave 1. Et system indeholder N_a atomer af type a. Hvert atom kan befinde sig i grundtilstanden, en eksiteret tilstand med energi ϵ eller en eksiteret tilstand med energi 2ϵ. Systemet er i ligevægt ved temperaturen T. I den opstillede model negligeres højereliggende energiniveauer end de ovenfor nævnte.

1.1) Angiv tilstandssummen for systemet. Hvilken brøkdel af atomerne befinder sig i tilstanden med energi ϵ?
1.2) Angiv varmekapaciteten for systemet. Hvad er højtemperatur grænsen for varmekapaciteten? Kommenter det fundne resultat.
1.3) Ovenstående system blandes med N_b atomer af typen b. Hvert atom af b-typen kan befinde sig enten i grundtilstanden eller i en eksiteret tilstand med energi ϵ. Angiv Helmholtz potentialet og middelenergien for blandingen, der er i ligevægt ved temperaturen T. Angiv hvordan et udtryk for entropien principielt kan findes (det er ikke nødvendigt at udføre regningen).

Opgave 2. Constantan er en legering af 60% Cu og 40% Ni. Smeltepunktet for Ni er 1452°C og for Cu 1083°C. Cu og Ni er fuldstændigt blandbare i både fast og flydende form. Ved opvarmning af constantan er det fundet, at legeringen begynder at smelte ved 1200°C, mens det ved afkøling af en smelte er fundet at fast stof begynder at udfældes ved 1275°C. Skitser kvalitativt et temperatur-sammensætnings fasediagram for legeringer af Cu og Ni, og brug dette til at afgøre, hvilken tilstandsform en legering af 30% Ni og 70% Cu har ved 1200°C .

Opgave 3. Visse gasser følger den mekaniske tilstandsligning:

$$P = \frac{RT}{V_m - b} - \frac{a}{(V_m)^\omega} \tag{1}$$

Eksponenten ω er ≥ 2, og a og b er positive konstanter karakteristiske for den betragtede gas. Den molære varmekapacitet ved konstant volumen er givet ved:

$$c_v = CT^\beta \tag{2}$$

hvor β og C er konstanter. R er gaskonstanten, P trykket, T temperaturen og V_m det molære volumen.
I det følgende antages relevante værdier af P og T at være indenfor gyldighedsområdet for ovenstående beskrivelse.

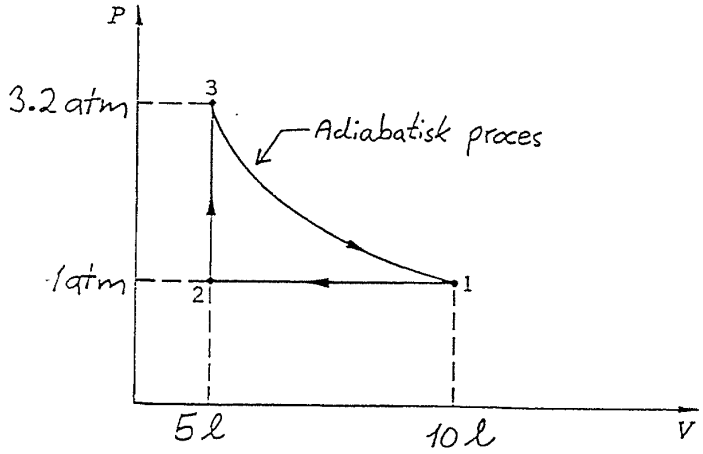
3.1) Find den molære entropi som funktion af T og V_m.
3.2) For CO (kulmonoxid) kan ovenstående beskrivelse benyttes med ω=2, a=1.485 ℓ^2atm/mol^2 og b=3.985 $10^{-2}\ell$/mol. 4 mol CO undergår en isoterm (quasi-statisk) udvidelse fra V = 0.6 ℓ til V = 0.8 ℓ ved en temperatur på 150K. Find arbejdet udført på gassen, gassens entropiændring samt ændringen i gassens indre energi.

Nogle nyttige konstanter: Gaskonstanten R = 0.08206 $\frac{\ell atm}{molK}$ = 8.3145 $\frac{J}{molK}$, Avogadros tal N_A = 6.022 10^{23} mol^{-1}, Boltzmanns konstant k_B = 1.3807 10^{-23}J/K, 1 atm = 101325 N/m^2 = 760 torr

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
Dybdemoduleksamen i Termodynamik og Statistisk Mekanik
Mandag d. 6. juni 1994 kl. 10.00 - 13.00
HJÆLPEMIDLER TILLADT.

Opgave 1. Energiniveauerne for et system med et magnetisk moment $\vec{\mu}$ i et magnetfelt $\vec{B}$ er givet ved E=-$\vec{\mu} \cdot \vec{B}$. Et atom med en uparret elektron i et magnetfelt har således to mulige tilstande med energi hhv μ_BB og -μ_BB, hvor μ_B er Bohrmagnetonen. De to tilstande svarer til at projektionen af det atomare magnetiske moment på retningen bestemt af det ydre felt er hhv. -μ_B og μ_B.
1.1) Et system består af N af hinanden uafhængige atomer som beskrevet ovenfor. Systemet er i ligevægt ved temperaturen T. Hvor stor en brøkdel af de N atomer er i hver af de mulige tilstande? Angiv et udtryk for Helmholtz fri energi for hele systemet.
1.2) Angiv et udtryk for projektionen langs feltretningen af det resulterende magnetiske moment for systemet, μ_{TOT}. Vis at den magnetiske susceptibilitet givet ved μ_{TOT}/B ved tilstrækkeligt høje temperaturer er omvendt proportional med temperaturen (Curies lov).

Opgave 2. Et mol af en enatomig ideal (perfekt) gas gennemløber den på figuren skitserede kredsproces. Beregn hvor meget arbejde der netto er udført på omgivelserne efter at gassen har gennemløbet én cyklus. Hvad er effektiviteten af en maskine baseret på denne cyklus?



Opgave 3. En blanding af to gasser beskrives med den fundamentale ligning:

$$S = AU^{1/3}V^{1/3}N^{1/3} + \frac{BN_1N_2}{N} \tag{1}$$

N_1 og N_2 angiver antal mol af de to gasser, N=N_1+N_2.
S er gasblandingens entropi, V volumenet og A samt B er konstanter.
3.1) Find et udtryk for trykket i gasblandingen som funktion af temperatur T samt V, N_1 og N_2.
3.2) En isoleret beholder deles i to med en stiv, diatermisk væg, der er gennemtrængelig for gas 1, men ikke gas 2. Hvert af de to kamre har volumenet V_0. I venstre kammer er 1 mol af gas 1 og ikke noget af gas 2. I højre kammer er 1/2 mol af gas 1 og 1/2 mol af gas 2. I udgangssituationen er temperaturen i venstre kammer 200K og i højre kammer 400K. Find ligevægtstemperaturen T_{eq}.
3.3) Opstil et ligningssystem til bestemmelse af fordelingen af gas 1 molekyler i de to kamre i ligevægt. Det er ikke nødvendigt at løse ligningssystemet, men det skal fremgå at systemet ikke er underbestemt.

Nogle nyttige konstanter: Gaskonstanten R = 0.08206 $\frac{latm}{molK}$ = 8.3145 $\frac{J}{molK}$, Avogadros tal N_A = 6.022 10^{23} mol^{-1}, Boltzmanns konstant k_B = 1.3807 10^{-23}J/K, 1 atm = 101325 N/m^2 = 760 torr

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Dybdemoduleksamen i Termodynamik og Statistisk Mekanik

Mandag d. 15. januar 1996 kl. 10.00 - 14.00

HJÆLPEMIDLER TILLADT.

Opgavesættet består af TRE opgaver på to ark

Nogle nyttige konstanter: Gaskonstanten $R = 0.08206\ \frac{latm}{molK} = 8.3145\ \frac{J}{molK}$, Avogadros tal $N_A = 6.022\ 10^{23}\ mol^{-1}$, Boltzmanns konstant $k_B = 1.3807\ 10^{-23} J/K$, 1 atm = 101325 N/m^2 = 760 torr, 1eV = $1.602\ 10^{-19}$J.

Opgave 1. I en perfekt krystal sidder alle atomer i et perfekt periodisk arrangement med ét atom pr. plads i det periodiske gitter. To muligheder for dannelse af punkt defekter betragtes:

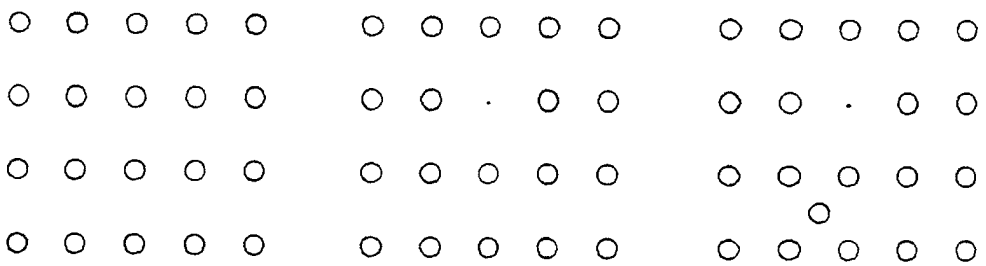
a) **Schottky defekt:** Vakance dannet ved overførsel af et atom fra en gitterplads til krystaloverfladen.

b) **Frenkel defekt:** Dannes ved overførsel af et atom fra en gitterplads til en ikke-gitter plads (interstitiel placering).

1.1) Antag at det koster energien ϵ_s at fjerne et atom fra en bulk gitterplads og dermed lave en Schottky defekt (atomet fjernes helt fra systemet). Antag desuden, at koncentrationen af defekter, n, er så lille, at defekterne kan betragtes som uafhængige. Hvad er entropien S(n) for en krystal med N gitterpladser og n vakancer? Hvad er Helmholtz potentialet, $F_s(n)$, for systemet?

1.2) Find et udtryk for n(T) og beregn den relative mængde af vakancer for et system, hvor $\epsilon_s = 0.5$ eV ved temperaturen 300 K. For små x er ln(1-x) $\approx$ -x.

1.3) Antag det koster energien ϵ_f at lave en Frenkel defekt. Find et udtryk for Helmholtz potentialet, $F_f(n)$, for et system med n Frenkel defekter og N gitterpladser, idet det antages at antallet af mulige interstitielle positioner er lig det samlede antal gitterpladser (både besatte og ubesatte).



Perfekt krystal et atom pr. gitterplads

Schottky defekt: en vakance, dvs en tom gitterplads

Frenkel defekt: et atom er flyttet fra en gitterplads til en interstitiel plads

Opgave 2. Ved et tryk på en atm. er benzens kogepunkt 353.2 K. Følgende termodynamiske data kendes:
For temperaturer mellem 320 K og 380 K er den molære varmekapacitet ved konstant tryk for flydende benzen givet ved udtrykket: c_p^{liq} $[\frac{J}{mol\ K}]$ = 0.258 T [K] + 59.2
For gasformig benzen kendes den molære varmekapacitet ved temperaturen 370 K: $c_p^{gas}(370K)$ = 106.5 $\frac{J}{mol\ K}$, denne størrelse kan antages uafhængig af temperaturen for temperaturer mellem 353.2 K og 380 K. Desuden kendes fordampningsentalpien $\Delta_{vap}H$ = 30.8 kJ/mol, der kan betragtes som en konstant.
2.1) Beregn forskellen i molær entropi mellem flydende og gasformig benzen ved 370 K.
2.2) Under et eksperiment på toppen af et bjerg er det fundet, at benzen koger ved 335.2 K. Hvad er trykket på toppen af bjerget?

Opgave 3. En paramagnetisk gas betragtes. Det magnetiske arbejde, der udføres på gassen ved en ændring af magnetiseringen M, i det ydre felt B, er givet ved:
$đW_{mag}$ = B dM.
3.1) Vis at

$$C_{B,V} = C_{M,V} - \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{B,V}\left(B - \left(\frac{\partial U}{\partial M}\right)_{T,V}\right)$$

hvor varmekapaciteten $C_{x,y}$ er givet ved $T(\frac{\partial S}{\partial T})_{x,y}$. T er temperaturen, V volumen og U energien af gassen.
3.2) For den betragtede gas gælder:

$$\begin{aligned} pV &= nRT \\ M &= nK\frac{B}{T} \\ U &= \tfrac{3}{2}\,nRT \end{aligned}$$

p er trykket i gassen, n er antal mol af gassen, K er en positiv konstant og R er gaskonstanten.
Et system bestående af to beholdere med stive, stofugennemtrængelige og adiabatiske vægge har samme volumen, V_0. Beholderne indeholder begge n_0 mol af den paramagnetiske gas. I den ene beholder har gassen temperaturen T og i den anden 2T. De to beholdere befinder sig i et konstant ydre magnetfelt B_0. Beholderne bringes i kontakt med hinanden via en diatermisk (men stiv og stofugennemtrængelig) væg på en sådan måde, at de stadig er isolerede fra omgivelserne. Beregn den totale entropiændring ved den beskrevne proces, ΔS_{tot}. Er entropiændringen større eller mindre end ændringen ved en tilsvarende proces <u>uden</u> ydre magnetfelt?

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Dybdemoduleksamen i Termodynamik og Statistisk Mekanik

Torsdag d. 29. januar 1998 kl. 10.00 - 14.00

HJÆLPEMIDLER TILLADT.

Opgavesættet består af TRE opgaver på TO ark papir

Nogle nyttige konstanter: Gaskonstanten R = 0.08206 $\frac{\ell atm}{molK}$ = 8.3145 $\frac{J}{molK}$, Avogadros tal $N_A = 6.022\ 10^{23}$ mol^{-1}, Boltzmanns konstant $k_B = 1.3807\ 10^{-23}$J/K, 1 atm = 101325 N/m^2 = 760 torr, 1eV = $1.602\ 10^{-19}$J.

Matematisk nødhjælpskasse:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

Opgave 1. En biofysiker er involveret i undersøgelsen af en bestemt biokemisk reaktion relateret til DNA. Biofysikeren opstiller en simpel statistisk mekanisk model, hvori DNA's dobbelt helix modelleres som en 'lynlås'. Hvert enkelt sammenkoblingsled (link) i lynlåsen svarer til et basepar i DNA. I modellen har lynlåsen N sammenkoblingsled. Hvis et led er åbent har det energien ϵ, hvis det er lukket har det energien 0. Lynlåsen kan KUN åbnes fra den ene af de to ender og det s'te led kan KUN åbnes hvis alle forgående led allerede er åbnet.

1.1) Beregn Helmholtz potentialet for systemet som funktion af temperaturen.
1.2) Hvordan afhænger middelantallet af åbne led af temperaturen i lavtemperatur grænsen?

Opgave 2. Ved høje temperaturer har jern to faste faser med forskellig krystalstruktur, α-jern og γ-jern. For et bestemt tryk, p_o, er α-jern stabilt for temperaturer under 900°C og over 1400°C, mens γ-jern er den stabile fase for temperaturer mellem 900°C og 1400°C.
I det givne temperaturområde kan den specifikke varmekapacitet ved konstant tryk, c_p betragtes som uafhængig af temperaturen for begge de to faser.
$c_{p,\alpha} = 43.28\ \frac{J}{molK}$ og $c_{p,\gamma} = 38.54\ \frac{J}{molK}$ ved trykket p_o.

2.1) Skitsér to kurver, der viser det KVALITATIVE forløb af den molære entropi, $S_m(T)$ og det kemiske potentiale, $\mu(T)$ for jern i det ovennævnte temperaturområde ved trykket p_o.
2.2) Beregn enthalpiændringen ved faseovergangen α-jern $\rightarrow$ γ-jern, $\Delta_{trs}H(900°C, p_o)$.

Opgave 3.

3.1) Vis at trykafhængigheden af c_p, den molære varmekapacitet for et simpelt system ved konstant tryk, kan udtrykkes ved hjælp af ekspansionskoefficienten, α:

$$\left(\frac{\partial c_p}{\partial p}\right)_T = -Tv_m\left(\alpha^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial T}\right)_p\right)$$

T er temperatur, p tryk og v_m det molære volumen.

3.2) For et bestemt simpelt system gælder tilstandsligningen:

$$pv_m + A\frac{p}{T^2} = RT$$

hvor A er en konstant og R er gaskonstanten.

I et tabelværk findes værdien af c_p for systemet ved trykket p_1 og temperaturen T_1 . Systemet gennemløber en isochor proces ved et begyndelsestryk p_2, væsentligt forskelligt fra p_1. Under processen ændres temperaturen fra T_1 til T_2 og trykket fra p_2 til p_3. Varmekapaciteten kan antages at være konstant under processen $(T_1, p_2) \rightarrow (T_2, p_3)$.

Hvor stor er ændringen i systemets molære indre energi ved processen $(T_1, p_2) \rightarrow (T_2, p_3)$?

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Dybdemoduleksamen i Termodynamik og Statistisk Mekanik

Mandag d. 22. juni 1998 kl. 10.00 - 14.00

HJÆLPEMIDLER TILLADT.

Opgavesættet består af TRE opgaver på TRE ark papir

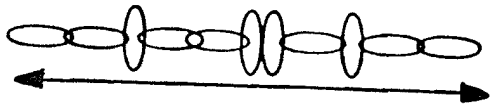
Opgavesættet består af 6 delspørgsmål, der vægtes ligeligt i vurderingen

Opgave 1. En én-dimensional kæde er sat sammen af N led, hvor N er meget stor. Det enkelte led har en længde på a og en bredde, der kan regnes for negligibel. Hvert led i kæden kan vende på to måder: Enten er leddet placeret, så det bidrager med sin fulde længde a til den samlede kædes længde (parallel position) eller også står leddet vinkelret på denne position, så leddets bidrag til den samlede kædelængde kan negligeres (tænk f.eks. på en idealiseret kæde af N sammenkoblede papirclips - se figur). Den samlede kædelængde er Nx, hvor x er defineret gennem denne tilordning.

1.1) Find et udtryk for kædens entropi S som funktion af x. Hvor lang er kæden?

Den ene kædeende fastgøres til en væg og der trækkes i den anden ende med en kraft F. Energiforskellen mellem et enkelt leds to mulige positioner er Fa, hvor parallel position svarer til størst energi.

1.2) Find et udtryk for kædelængden som funktion af kraften F og temperaturen T. Iflg. Hooke's lov er der proportionalitet mellem den kraft, hvormed der trækkes i en fjeder og deformationen af fjederen. Vis at det ovenfor beskrevne system adlyder Hooke's lov for høje temperaurer.



Nx

Opgave 2. Lipider er en bestemt type biologisk relevante molekyler, der kan danne faser med forskellig struktur ved blanding med vand. Et system bestående af n_l mol lipid og n_v mol vand betragtes.

2.1)

- Hvad er det maksimale antal faser, der kan være i ligevægt i systemet?
- Hvor mange variable skal specificeres i et fasediagram for systemet?
- To forskellige faser observeres i det ovenfor beskrevne system ved et bestemt tryk. Er systemets temperatur velbestemt?

2.2) Systemet afgrænses fra omverdenen af en semipermeabel membran, der er gennemtrængelig for vand, men ikke lipid. Systemet anbringes i et vandbad med konstant temperatur og tryk.

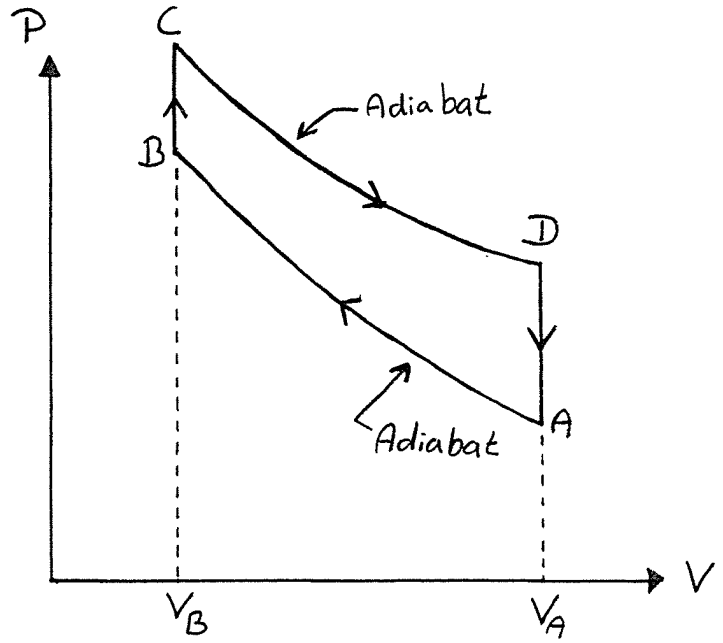
- Identificér de ekstensive variable, der indgår i fundamentalligningen for systemet i energirepræsentationen.
- Angiv det termodynamiske potentiale, der er relevant for den beskrevne eksperimentelle situation. Udtryk potentialet ved hjælp af variable, der karakteriserer lipidkomponenten af systemet.

Opgave 3. En maskine er baseret på kredsprocessen skitseret i nedenstående tryk-volumen diagram. Alle deltrin kan betragtes som foregående i en monoatomar ideal gas.

3.1) Beregn maskinens maksimale effektivitet som funktion af volumenforholdet V_A/V_B.

3.2) Maskinen bruges til at drive et køleskab. Køleskabet er placeret i et rum med temperaturen $T_R = 23°C$ og et tryk på 1 atm. Beregn det minimale arbejde maskinen skal levere for at fryse 400 g vand med en begyndelsestemperatur på 25°C.

Fysisk-kemiske data for vand: Molmasse 18.0153 g/mol, frysepunkt 273.15 K ved 1 atm, $c_{p,m}$=75.291 $\frac{J}{molK}$, $\Delta_{fus}S$=22.00$\frac{J}{molK}$



Skriftlig 4-timers prøve i

TERMODYNAMIK OG STATISTISK MEKANIK

Torsdag den 27. januar 2000, kl. 10.00-14.00.

Opgavesættet består af 2 opgaver. Vægtning er angivet på opgaverne. Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladte.

1 Opgave 1 (60%)

Et termodynamisk system er kendetegnet ved at den indre energi kan skrives $U(T,V) = \phi(T)V$, hvor T er temperatur, V volumen og $\phi(T)$ en funktion af temperaturen.

1. Redegør for at $\phi(T)$ har samme dimension som trykket P.
2. Det oplyses at P kun afhænger af temperaturen og at $P = \phi/n$, hvor $n > 1$ er en konstant. Udled følgende udtryk for entropi-differentialet (hvor $P'(T) = dP/dT$)
$$dS = n\,\frac{VP'(T)}{T}\,dT + (n+1)\,\frac{P(T)}{T}\,dV\,.$$
3. Vis at $S = \alpha V T^n$, hvor α er en positiv konstant.
4. Bestem Helmholtz fri energi A og Gibbs fri energi G.
5. Systemet tænkes nu termisk isoleret fra omgivelserne. Herefter ekspanderes systemet reversibelt. For hver størrelse T, P, S, U, A og G ønskes angivet om størrelsen stiger, falder eller er uforandret under ekspansionen.

2 Opgave 2 (40%)

Et system har $N+1$ tilstande. De N tilstande har alle energien $E \neq 0$, mens den sidste har energien 0.

1. Find Helmholtz fri energi A for systemet.
2. Vis at entropien for systemet er givet ved
$$S = k_B\left[\ln(1+X) - \frac{X}{1+X}\ln\left(\frac{X}{N}\right)\right],$$
hvor $X = N\exp(-E/k_BT)$.
3. Find entropien i grænsen $T \to 0$ og i grænsen $T \to \infty$ og giv en fysisk fortolkning af resultaterne.

Skriftlig 4-timers prøve i

TERMODYNAMIK OG STATISTISK MEKANIK

Fredag den 25. januar 2002, kl. 10.00 – 14.00.

Opgavesættet består af 2 opgaver. Vægtning er angivet på opgaverne.
Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladte.

Opgave 1 [50%]

Vi betragter en hypotetisk gas beskrevet ved tilstandsligningen

$$\left(P + a\frac{N}{V}\right)(V - Nb) = Nk_BT\,,$$

hvor P er trykket, V volumenet, T temperaturen, k_B Boltzmanns konstant, N antal molekyler, mens a og b er konstanter. Gassen opfylder $C_V = 3Nk_B$.

1. Vis at energidifferentialet er givet ved

$$dE = a\frac{N}{V}dV + 3Nk_BdT\,.$$

Vink: Vis først og udnyt dernæst at $\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P$.

2. Gassen starter ved volumenet V_0 og temperaturen T_0 (det antages at V_0 og T_0 er så store, at tilstandsligningen har mening, dvs både $V_0 - Nb$ og tryk er positive). Ved en reversibel isoterm proces fordobles volumenet. Beregn den tilførte varmemængde under processen.

3. Systemet holdes fra nu af termisk isoleret fra omgivelserne. Med start i ligevægt ved volumenet $2V_0$ og temperaturen T_0 tilføres energi via en kraftig laserpuls. Dernæst øges volumenet til $3V_0$. Når gassen herefter er kommet i ligevægt er temperaturen igen T_0. Beregn entropiændringen fra start til slut af denne proces. Er processen reversibel?

4. Hvordan ser tilstandsligningen ud ved lave molekyltætheder? Argumenter for at tilstandsligningen ikke kan beskrive en faktisk eksisterende gas.

Opgave 2 [50%]

Opgaven vedrører elektronsystemets bidrag til de termodynamiske variable af en gas af tellurium-atomer. Et tellurium-atoms elektronsystem kan befinde sig ved 4 energier, nummereret fra 0 til 3:

$$\epsilon_0 = 0;\ \epsilon_1 = 0,584\text{eV};\ \epsilon_2 = 0,589\text{eV};\ \epsilon_3 = 1,309\text{eV}.$$

Der er i alt 14 tilstande af elektronsystemet. De 5 laveste har energien ϵ_0, den næste har energien ϵ_1, så kommer der 3 tilstande med energien ϵ_2, og endelig er der 5 tilstande med energien ϵ_3.

1. Beregn sandsynligheden for at finde elektronsystemet for et tellurium-atom ved energien ϵ_1 når $T = 3000\text{K}$.
2. Beregn elektronsystemets bidrag til Helmholtz' fri energi ved $T = 298\text{K}$.
3. Hvor stor en brøkdel af tellurium-gassens entropi ved standardbetingelsen ($T = 298\text{K}$, $P = 1$ atm.) hidrører fra elektronsystemet?
4. Hvordan ændrer sidstnævnte brøkdel sig for $T \to 0$? Kommenter resultatet i lyset af varmelærens tredie hovedsætning.

Skriftlig 4-timers prøve i
TERMODYNAMIK OG STATISTISK MEKANIK
Torsdag d. 22 Januar 2004, kl. 10.00-14.00

Opgavesættet består af to opgaver. Vægtning er angivet på opgaverne. Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladte.

Opgave 1 (50%)

Et system består af tre Ising spin σ_1, σ_2 og σ_3, som hver kan antage værdierne $+1$ eller -1. Systemet har altså 8 tilstande. I en givet tilstand er energien af systemet givet ved:

$$E = -J\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3\right) + m_B B \sum_i \sigma_i \tag{1}$$

hvor er J er en positiv konstant, m_B er Bohr's magneton og B er et ydre magnetisk felt. I delspørgsmål a) til d) er $B = 0$.

a) Vis at systemet har 6 tilstande med energien $-J$ og 2 tilstande med energien $+3J$. Giv gerne en fysisk fortolkning af de to typer tilstande.

b) Beregn systemets energi og varmekapacitet som funktion af temperaturen.

c) Beregn systemets entropi som funktion af temperaturen.

d) Find entropien i grænsen $T \to 0$ og i grænsen $T \to \infty$, og giv en fysisk fortolkning af resultaterne.

e) Lad nu $B > 0$. Angiv entropien af systemet i grænsen $T \to 0$.

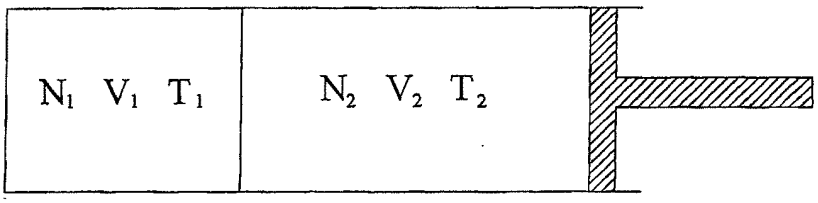
Opgave 2 (50%)

Vi ser på en mono-atomarisk ideal-gas.

a) Udled et udtryk for den isoterme kompressibilitet, κ_T.

b) Vis at den adiabatiske kompressibilitet er givet ved $\kappa_S = \frac{3}{5}P^{-1}$.

Vi ser nu på et system bestående af to kamre, hvoraf det ene kan ændre volumen via et stempel:



Hvert kammer er fyldt med en mono-atomarisk ideal-gas, og den fastsiddende væg mellem de to kamre er en god termisk leder. N_1 og N_2 er antallet af partikler i henholdsvis kammer 1 og kammer 2. V_1 og V_2 er volumet af henholdsvis kammer 1 og kammer 2. V_1 er konstant og V_2 kan ændres vha. stemplet. T_1 og T_2 er temperaturen i henholdsvis kammer 1 og kammer 2.

c) Vi lader nu det samlede system være i god termisk kontakt med omgivelserne, og definerer en isoterm kompressibilitet for kammer 2 (P_2 er trykket i kammer 2);

$$\kappa_{T,2} \equiv -\frac{1}{V_2}\left(\frac{\partial V_2}{\partial P_2}\right)_T \tag{2}$$

Beregn $\kappa_{T,2}$ og sammenlign den med κ_T for den mono-atomariske ideal-gas.

d) Det samlede system isoleres nu termisk fra omgivelserne, og vi definerer en adiabatisk kompressibilitet for kammer 2;

$$\kappa_{S,2} \equiv -\frac{1}{V_2}\left(\frac{\partial V_2}{\partial P_2}\right)_S \tag{3}$$

(Bemærk at det er entropien for det *samlede* system der holdes konstant). Udled et udtryk for $\kappa_{S,2}$

e) Angiv $\kappa_{S,2}$ i grænsen $N_1 \ll N_2$ og i grænsen $N_1 \gg N_2$, og giv en fysisk fortolkning af resultaterne.

Written 4 hour exam in Thermodynamics and statistical mechanics Thursday, January 22 2004, at 10.00 – 14.00

Translated by Bo Jakobsen (Autumn 2010)
The course was 9 ECTS points.

The exam consists of 2 problems. The weights of the problems are given. All usual helping aids are allowed.

Problem 1 (50%)

A system consists of three Ising spins σ_1, σ_2, and σ_3, which each can take the values $+1$ or -1. The system hence have 8 micro states. The energy of system is, in a given state, given by:

$$E = -J(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3) + m_B B \sum_i \sigma_i \tag{1}$$

with J a positive constant, m_B is the Bohr magneton and B is an external magnetic field. In part a) to d) we have $B = 0$.

a) Show that the system has 6 states with energy $-J$, and 2 states with energy $+3J$. Preferably give a physical interpretation of the two types of states.

b) Calculate the energy and specific heat of the system as function of temperature.

c) Calculate the entropy of the system as function of temperature.

d) Find the entropy in the limit $T \to 0$ and in the limit $T \to \infty$, and give a physical interpretation of the results.

e) Now let $B > 0$. State the entropy of the system in the limit $T \to 0$.

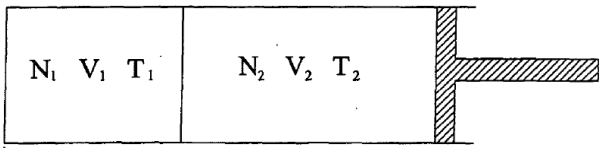
Problem 2 (50%)

We consider a mono-atomic ideal gas.

a) Derive an expression for the isothermal compressibility, κ_T.

b) Show that the adiabatic compressibility is given by $\kappa_S = \frac{3}{5}P^{-1}$.

We now consider a system consisting of two chambers, one of which can change its volume by use of a piston:



Each chamber is filled with a mono-atomic ideal-gas, and the (fixed) partition between the chambers is a good thermal conductor. N_1 and N_2 are the numbers of particles in chamber 1 and 2 respectively. V_1 and V_2 are the volumes of chamber 1 and 2 respectively. V_1 is constant and V_2 can be changed by the piston. T_1 and T_2 are the temperatures in chamber 1 and 2 respectively.

c) We now let the total system be in good thermal contact with the surroundings, and define a isothermal compressibility for chamber 2 (P_2 is the pressure in chamber 2):

$$\kappa_{T,2} \equiv -\frac{1}{V_2}\left(\frac{\partial V_2}{\partial P_2}\right)_T \tag{2}$$

Calculate $\kappa_{T,2}$ and compare it to κ_T for the mono-atomic ideal-gas.

d) The total system is now isolated from the surroundings, and we define a adiabatic compressibility for chamber 2:

$$\kappa_{S,2} \equiv -\frac{1}{V_2}\left(\frac{\partial V_2}{\partial P_2}\right)_S \tag{3}$$

(Note that it is the *total* entropy that is kept constant).
Derive an expression for $\kappa_{S,2}$.

e) Give $\kappa_{S,2}$ in the limit of $N_1 \ll N_2$ and in the limit $N_1 \gg N_2$, and give a physical interpretations of the results.

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
Skriftlig 4-timers prøve i:
TERMODYNAMIK OG STATISTISK MEKANIK
Tirsdag d. 24 Januar 2006, kl. 10.00 - 14.00

Opgavesættet består af to opgaver. Vægtning er angivet på opgaverne. Alle sædvanlige hjælpemidler tilladt.

Opgave 1 (50%)

Vi betragter en model hvor 3 identiske atomer befinder sig i et 1-dimensionalt gitter, med 5 gitter-pladser (der er højst plads til et atom på en gitter-plads):

Hvis to nabopladser i gitteret begge er besat af et atom bidrager dette med $-\epsilon$ til tilstandens samlede energi, hvor ϵ er en positiv konstant. I første del af opgaven er dette den eneste type vekselvirkning i modellen, og den samlede energi af den skitserede tilstand er således $-\epsilon$.

a) Vis at systemet har 3 tilstande med energien -2ϵ, 6 tilstande med energien $-\epsilon$ og 1 tilstand med energien 0ϵ.

b) Beregn middelenergien i termisk ligevægt som funktion af temperaturen.

c) Beregn systemets entropi i termisk ligevægt som funktion af temperaturen.

d) Find entropien i grænsen $T \to 0$ og i grænsen $T \to \infty$, og giv en fysisk fortolkning af af resultaterne.

I modellen medtages nu atomernes interaktion med væggene; Hvis et atom er nabo til en væg giver dette et bidrag på δ til tilstandens samlede energi, hvor δ er en konstant forskellig fra nul. I sidste del af opgaven er energien af tilstanden skitseret ovenfor således $-\epsilon + 2\delta$.

e) Angiv entropien af systemet i grænsen $T \to 0$ for henholdsvis $\delta > 0$ og $\delta < 0$.

Opgave 2 (50%)

a) Vis at der generelt gælder følgende sammenhæng mellem trykstigningskoefficienten, udvidelseskoefficienten og den isoterme kompressibilitet:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{\alpha_P}{\kappa_T} \tag{1}$$

Et system modelleres med følgende tilstandssum (hvor X, b og y er positive konstanter):

$$Z = \left[X\frac{(V - Nb)}{N}T^{\frac{y}{2}}\right]^N \tag{2}$$

b) Bestem systemets tilstandsligning, og eftervis at tilstandsligningen opfylder ligning (1).

c) Vis at der for modellen gælder $\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = 0$, hvor E er systemets interne energi i termisk ligevægt.

d) Bestem C_P og C_V

e) Bestem modellens adiabatiske kompressibilitet, κ_S, som funktion af P og V. Eftervis at det fundne udtryk for κ_S opfylder den generelle sammenhæng:

$$\kappa_S = \kappa_T - \frac{TV\alpha_P^2}{C_P} \tag{3}$$

f) Giv en fysisk fortolkning modellen. Hvad er fortolkningen af konstanterne b og y?

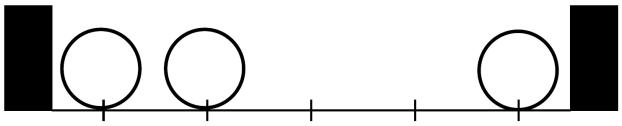
Written 4-hour exam in: Thermodynamics and Statistical mechanics Tuesday January 24, 2006, at 10.00 – 14.00

Translated by Bo Jakobsen
The course was 9 ects points

The exam consists of 2 problems. The weights of the problems are given. All usual helping aids are allowed.

Problem 1 (50%)

We consider a model where 3 identical atoms are in a one-dimensional lattice with 5 lattice-positions (there can only be one atom per lattice-position).



If two neighbor places in the lattice both are occupied by an atom this contributes $-\epsilon$ to the total energy of the state (ϵ is a positive constant).

In the first part of the problem this is the only type of interaction in the model, and the total energy of the sketched state is therefore $-\epsilon$.

a) Show that the system has 3 states with energy -2ϵ, 6 states with energy $-\epsilon$ and one state with energy 0ϵ.

b) Calculate the mean energy in thermal equilibrium as function of temperature.

c) Calculate the entropy of the system in thermal equilibrium as function of temperature.

d) Find the entropy in the limit $T \to 0$ and in the limit $T \to \infty$, give an physical interpretation of the results.

The interaction of the atoms with the wall are now included in the model; If an atom is neighbor to a wall this gives a contribution of δ to the total energy of the state (δ is a constant different from 0). The energy of the sketched states is therefore now $-\epsilon + 2\delta$.

e) State the entropy of the system in the limit $T \to 0$ for $\delta > 0$ and $\delta < 0$ respectively.

Problem 2 (50%)

a) Show that the following general relation between the pressure coefficient, the thermal expansion coefficient and the isothermal compressibility holds:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{\alpha_P}{\kappa_T} \tag{1}$$

A system is modeled by the following partition function (where X, b and y are positive constants):

$$Z = \left[X\frac{(V-Nb)}{N}T^{y/2}\right]^N \tag{2}$$

b) Determine the equation of state for this system, and show that the equation of state fulfills equation (1).

c) Show that for this model $\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = 0$, where E is the internal energy of the system in thermal equilibrium.

d) Determine C_P and C_V

e) For the model, determine the adiabatic compressibility, κ_S, as function of P and V. Show that the found expression for κ_S fulfills the general relation

$$\kappa_S = \kappa_T - \frac{TV\alpha_P^2}{C_P} \tag{3}$$

f) Give a physical interpretation of the model. What is the interpretation of the constants b and y?

Added hints in the translation:
You may use that:

$$C_P = C_V + TV\frac{\alpha_P^2}{\kappa_T} \tag{4}$$

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
Skriftlig 4-timers prøve i:
TERMODYNAMIK OG STATISTISK MEKANIK
Fredag d. 9 Juni 2006, kl. 10.00 - 14.00

Opgavesættet består af to opgaver. Vægtning er angivet på opgaverne. Alle sædvanlige hjælpemidler tilladt.

Opgave 1 (60%)

Et termodynamisk system er karakteriseret ved følgende entropi-funktion, hvor a og α er positive konstanter:

$$S(T,V) = aT^{\alpha}V. \tag{1}$$

Den isoterme kompressibilitet er gived ved (b og λ er positive konstanter):

$$\kappa_T = bV^{\lambda}, \tag{2}$$

Endvidere vides det at trykket går mod nul i grænsen $T \to 0$ og $V \to \infty$.

a) Bestem systemets tilstandsligning.

b) Udled et udtryk for systemets isobare udvidelseskoefficient, α_p.

c) Bestem systemets interne energi, $E(T,V)$.

d) Bestem systemets isochore varmekapacitet, C_V.

e) Bestem systemets isobare varmekapacitet, C_p.

f) Angiv sammenhængen mellem T og V ved en reversibel adiabatisk volumen ændring.

Opgave 2 (40%) Vi betragter en model for adsorbtion af atomer på en overflade. Der er N identiske atomer, som kan adsorberes på M forskellige punkter på overfladen ($M >> N >> 1$). Der er 3 typer af adsorbtionspunkter: 1% af typen A karakteriseret ved energien 0ϵ, 9% af typen B karakteriseret ved energien 1ϵ og 90% af typen C karakteriseret ved energien 2ϵ.

a) Find systemets tilstandssum i en tilnærmelse der udnytter $M >> N >> 1$ (denne tilnærmelse kan anvendes i resten af opgaven).

b) Angiv forholdet mellem antallet af atomer adsorberet i type A og C punkter. Kommenter grænserne $T \to 0$ og $T \to \infty$.

c) Find systemets energi i termisk ligevægt, og kommenter grænserne $T \to 0$ og $T \to \infty$.

d) Hvad er varmekapaciteten i grænsen $kT << \epsilon$?

e) Angiv systemets entropi i grænsen $T \to \infty$.

Written 4-hour exam in: Thermodynamics and Statistical mechanics Friday June 9, 2006, at 10.00 – 14.00

Translated by Bo Jakobsen
The course was 9 ects points

The exam consists of 2 problems. The weights of the problems are given. All usual helping aids are allowed.

Problem 1 (60%)

A thermodynamical system is characterized by the following entropy function, where a and α are positive constants:

$$S(T, V) = aT^{\alpha}V.$$

The isothermal compressibility is given by (b and λ are positive constants):

$$\kappa_T = bV^{\lambda},$$

Furthermore, it is known that the pressure goes to zero in the limit $T \to 0$ and $V \to \infty$.

a) Determine the equation of state for the system.

b) Derive an expression for the isobaric expansion coefficient, α_p.

c) Determine the internal energy of the system, $E(T, V)$.

d) Determine the isochoric specific heat of the system, C_V.

e) Determine the isobaric specific heat of the system, C_p.

f) State the connection between T and V in a reversible volume change.

Problem 2 (40%)

In the following we study a model for adsorption of atoms onto a surface. There are N identical atoms, which can be adsorbed at M different points on the surface ($M \gg N \gg 1$).

There are three different kinds of absorptions points: 1% of type A characterized by an energy of 0ϵ, 9% of type B characterized by an energy of 1ϵ, and 90% of type C characterized by an energy of 2ϵ.

a) Find the partition function for the system, in an approximation that utilizes $M \gg N \gg 1$ (this approximation can be used in the rest of the problem).

b) State the ratio between the number of atoms adsorbed at type A and C points. Comment on the limits $T \to 0$ and $T \to \infty$.

c) Find the energy of the system when in thermal equilibrium, and comment on the limits $T \to 0$ and $T \to \infty$.

d) What is the specific heat in the limit $k_B T \ll \epsilon$?

e) State the entropy of the system in the limit $T \to \infty$.

Roskilde 17. januar 2008

Golden sheet, ver. 1.00

1 Termodynamik

Termodynamikkens 1. lov:	$dU = q + w = q - pdV$
Termodynamikkens 2. lov (isoleret system):	$\Delta S \geq 0\,, \qquad S = k \ln \Omega$
Termodynamikkens 3. lov:	$T \to 0 \Rightarrow S \to 0, C_x \to 0$
Entropitilvækst ved tilført varme:	$dS \geq \frac{q}{T}$
	$dS = \frac{q}{T}$ (Quasistatisk, Reversibelt)
Ækvipartitionsprincippet:	$U = \frac{f}{2} N k_B T, \quad$ f = # frihedsgrader.

Termodynamiske potentialer:

Potentiale	Differentialform	Maxwell relation
U	$dU = +TdS - PdV + \mu dN$	$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_{S,N} = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_{V,N}$
$H = U + PV$	$dH = +TdS + VdP + \mu dN$	$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_{S,N} = +\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_{P,N}$
$F = U - TS$	$dF = -SdT - PdV + \mu dN$	$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{T,N} = +\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{V,N}$
$G = U + PV - TS = \mu N$	$dG = -SdT + VdP + \mu dN$	$\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_{T,N} = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{P,N}$

Linære responsefunktioner (dN=0):

Varmekapacitet	$C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$	$C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P$
Udvidelseskoefficient	$\alpha_p = +\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$	$\alpha_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_S$
Kompressibilitet	$\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$	$\kappa_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S$
Bulkmodul	$K_T = -V\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{\kappa_T}$	$K_S = -V\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S = \frac{1}{\kappa_S}$
Trykkoefficient	$\beta_V = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$	$\beta_S = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_S$

$dV = 0$: Isochor; $dP = 0$: Isobar; $dT = 0$: Isoterm; $dS = 0$: Adiabat

Z betragtes som en funktion af X og Y: $\quad Z = Z(X,Y) \Rightarrow dZ = \left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)_Y dX + \left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right)_X dY$

$\left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)_Y = \left[\left(\frac{\partial X}{\partial Z}\right)_Y\right]^{-1} = \left(\frac{\partial Z}{\partial Q}\right)_Y \left(\frac{\partial Q}{\partial X}\right)_Y = -\left(\frac{\partial Y}{\partial X}\right)_Z / \left(\frac{\partial Y}{\partial Z}\right)_X$. $\quad \left(\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right)_X\right)_Y = \left(\frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)_Y\right)_X$.

2 Statistisk mekanik

I termisk ligevægt med omgivelserne: $p(s) = \frac{e^{-\beta E(s)}}{Z}, \quad \beta \equiv \frac{1}{k_B T}$
Tilstandssummen: $Z = \sum_s e^{-\beta E(s)} \quad (\Rightarrow \sum_s p(s) = 1)$
Middelværdi af variablen A: $\langle A \rangle = \sum_s A(s)p(s) = \sum_s A(s)\frac{e^{-\beta E(s)}}{Z}$
Middelenergi: $U = \langle E \rangle = -\frac{\partial \ln(Z)}{\partial \beta} = -\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta}$
Helmholtz fri energi: $F = -k_B T \ln(Z)$
Skelnelige, uafhængige "partikler": $Z = Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \cdot Z_4 \cdot ... \quad (E = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + ...)$
Uskelnelige, uafhængige partikler: $Z = Z_1^N/N!$

Gibb's statistik, KUN FOR 9 ECTS:

I termisk og diffusiv ligevægt med omgivelserne: $p(s) = e^{-\beta(E(s)-\mu N(s))}/\mathcal{Z}$
Gibbssummen: $\mathcal{Z} = \sum_s e^{-\beta(E(s)-\mu N(s))} \quad (\Rightarrow \sum_s p(s) = 1)$

3 Matematik

Binomial-koefficienten: $\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$
Stirling: $\ln(N!) \approx N\ln(N) - N \quad (N >> 1)$
Taylor udvikling: $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + ...$
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...$
$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...$
$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ...$
$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ...$
$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, hvor $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}$

$\int_0^\infty x^n \exp(-ax^2) = I(n,a), \quad \frac{\partial I(n,a)}{\partial a} = -I(n+2,a)$

$I(0,a) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}a^{-1/2}$	$I(2,a) = \frac{1}{4}\sqrt{\pi}a^{-3/2}$	$I(4,a) = \frac{3}{8}\sqrt{\pi}a^{-5/2}$
$I(1,a) = \frac{1}{2}a^{-1}$	$I(3,a) = \frac{1}{2}a^{-2}$	$I(5,a) = a^{-3}$

4 Ideal-gas

$pV = Nk_BT = nRT, \qquad$ Adiabat: $pV^\gamma = const$, $\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{f+2}{f}$
$Z = \frac{1}{N!}\left(\frac{VZ_{int}}{v_Q}\right)^N, \quad v_Q = \left(\frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}}\right)^3$

5 Konstanter

$k_B = 1.381 \cdot 10^{-23}$ J/K $= 8.617 \cdot 10^{-5}$ eV/K $\qquad R = 8.315$ J/(mol K)
$N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$
$h = 6.626 \cdot 10^{-34}$ J s $= 4.136 \cdot 10^{-15}$ eV s
1 atm $= 1.013$ bar $= 1.013 \cdot 10^5$ N/m$^2 = 1.013 \cdot 10^5$ Pa
1 eV $= 1.602 \cdot 10^{-19}$ J
1 u $= 1.661 \cdot 10^{-27}$ kg

Skriftlig 4-timers prøve i
TERMODYNAMIK OG STATISTISK MEKANIK
Fredag d. 18 Januar 2008, kl. 10.00-14.00

Opgavesættet består af tre opgaver på to sider. Vægtning er angivet på opgaverne. Skriveredskaber og en simpel lommeregner tilladt. "Golden Sheet" vedlagt. Ingen øvrige hjælpemidler tilladt.

7.5 ECTS (Bachelorkurset)

Opgave 1 (40%)

Vi betragter et system bestående af N uafhængige magnetiske spin. Placeret i et magnetfelt af størrelsen B har hvert enkelt spin tre mulige tilstande med energierne henholdsvis $+\mu_B B$, 0 og $-\mu_B B$, hvor μ_B er Bohr's magneton.

a) Opskriv tilstandsummen Z for det samlede system bestående af N uafhængige spin.

b) Beregn Helmholtz fri energi F for systemet.

c) Beregn systemets entropi som funktion af temperaturen.

d) Find entropien i grænsen $T \to 0$ og i grænsen $T \to \infty$, og giv en fysisk fortolkning af resultaterne.

e) Vi betragter nu et system identisk med det ovenstående, bortset fra at energierne af de tre tilstande for de enkelte spin nu er givet ved henholdsvis $+\mu_B B$, $-\mu_B B$ og $-\mu_B B$. Angiv entropien af systemet i grænsen $T \to 0$.

Opgave 2 (20%)

a) Bevis formlen:

$$< E >= -\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta}$$

.

b) Bevis formlen:

$$C_v = \frac{< E^2 > - < E >^2}{k_B T^2}$$

.

Opgave 3 (40%)

a) Vis at der generelt gælder følgende sammenhæng mellem den adiabatiske udvidelseskoefficient, den isochore varmekapacitet og den isochore trykkoefficient:

$$\alpha_S = \frac{C_v}{TV\beta_V}. \tag{1}$$

Vi betragter nu en gas med følgende tilstandsligning, hvor a og b er positive konstanter:

$$p = \frac{Nk_BT}{V - Nb} - a\left(\frac{N}{V}\right)^2. \tag{2}$$

Gassens indre energi er givet ved:

$$U = \frac{f}{2}Nk_BT - N \cdot a\frac{N}{V} \tag{3}$$

b) Beregn gassens isochore trykstigningskoefficient β_V.
c) Beregn gassens adiabatiske udvidelseskoefficient α_S.
d) Gassen placeres i en beholder der er termisk isoleret fra omgivelserne. Vha. et stempel øges beholderens volumen nu langsomt med 5%. Opskriv et udtryk for den resulterende temperaturændring.
e) Vi ser nu på samme proces som i spørgsmål **d)**, men gassen er nu en diatomisk ideal-gas. Start-temperaturen er 30°C. Hvad er slut-temperaturen?

Written 4-hour exam in: Thermodynamics and Statistical mechanics Friday January 18, 2008, at 10.00 – 14.00

Translated by Bo Jakobsen

The exam consists of three problems on two pages. The weights of the problems are given. Writing aids and a simple calculator are allowed. The "Golden sheet´´ is included with this exam. No further helping aids are allowed.

7.5 ECTS (Bachelor course)

Problem 1 (40%)

Consider a system consisting of N independent magnetic spins.

They are placed in a magnetic field of size B and each spin has three possible states with energy: $+\mu_B B$, 0, and $-\mu_B B$ respectively (μ_B is the Bohr magneton).

a) State the partition function, Z, for the total system consisting of N independent spins.

b) Calculate the Helmholtz free energy, F, for the system.

c) Calculate the entropy of the system as function of temperature.

d) Find the entropy in the limit $T \to 0$ and in the limit $T \to \infty$, give a physical interpretation of the results.

e) We now consider a system identical to the one treated above, except for the energies of the three states of the individual spins, which now are given by $+\mu_B B$, $-\mu_B B$, and $-\mu_B B$ respectively. State the entropy in the limit $T \to 0$.

Problem 2 (20%)

a) Prove the formula:

$$\langle E \rangle = -\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta}. \tag{1}$$

b) Prove the formula:

$$C_V = \frac{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2}{k_B T^2}. \tag{2}$$

Problem 3 (40%)

a) Show that the following general relation holds between the adiabatic thermal expansion coefficient, the isochoric specific heat, and the isochoric pressure coefficient:

$$\alpha_S = \frac{C_V}{TV\beta_V}. \tag{3}$$

We now consider a gas with the following equation of state (a and b are positive constants):

$$P = \frac{Nk_BT}{V - Nb} - a\left(\frac{N}{V}\right)^2. \tag{4}$$

The thermal energy of the gas is given by:

$$U = \frac{f}{2}Nk_BT - Na\frac{N}{V}. \tag{5}$$

b) Calculate the isochoric pressure coefficient, β_V, of the gas.

c) Calculate the adiabatic thermal expansion coefficient, α_S, of the gas.

d) The gas is placed in a container which is thermally isolated from the surroundings. The volume of the container is now slowly increased by 5% utilizing a piston. Give an expression for the resulting temperature change.

e) We now consider the same process as in question **d)**, however the gas is now a diatomic ideal gas. Initial temperature is $30°C$. What is the end temperature?

Skriftlig 4-timers prøve i
TERMODYNAMIK OG STATISTISK MEKANIK
Onsdag d. 21 Januar 2009, kl. 10.00-14.00

Opgavesættet består af tre opgaver på to sider. Vægtning er angivet på opgaverne. Skriveredskaber og en simpel lommeregner tilladt. "Golden Sheet" vedlagt. Ingen øvrige hjælpemidler tilladt.

Opgave 1 (30%)

a) Vis at der generelt gælder følgende sammenhæng mellem den adiabatiske trykstigningskoefficient β_S, den isobare varmekapacitet og den isobare udvidelseskoefficient:

$$\beta_S = \frac{C_p}{TV\alpha_p}. \tag{1}$$

b) Vi betragter nu en diatomisk idealgas. Udled et udtryk for β_S som funktion af p og T.

c) Den diatomiske idealgas placeres i en beholder der er termisk isoleret fra omgivelserne. Begyndelses-temperaturen er 30°C. Vha. et stempel øges trykket i beholderen nu langsomt med 7%. Hvad er den resulterende temperatur? Ville den resulterende temperatur være større hvis der var tale om en monoatomisk idealgas?

Opgave 2 (30%)

a) Bevis Maxwell relationen:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_{T,N} = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{P,N} \tag{2}$$

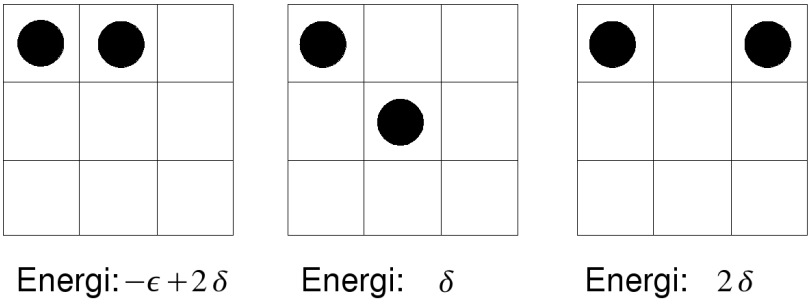
b) Bevis formlen:

$$p = \frac{k_B T}{Z}\left(\frac{\partial Z}{\partial V}\right)_T \tag{3}$$

c) Opskriv Z for en monoatomisk idealgas (se golden sheet), og eftervis at denne opfylder ovenstående formel (3).

Opgave 3 (40%)

Vi betragter et system bestående af 2 identiske atomer der befinder sig i et to dimensionelt gitter med 9 pladser. Når de to atomer er nærmeste naboer (ikke diagonalt) bidrager dette med $-\epsilon$ til tilstandens energi. Et atom der befinder sig på randen bidrager med δ til tilstandens energi. Der er ikke andre bidrag til systemets energi. ϵ er en positiv konstant. $\delta = 0$ i opgave a), b) og c).



a) Vis at systemet har 36 tilstande ialt. Vis at systemet ($\delta = 0$) har 12 tilstande med energien $-\epsilon$.

b) Beregn middelenergien i termisk ligevægt som funktion af temperaturen T. ($\delta = 0$).

c) Find middelenergien i grænserne $T \to 0$ og $T \to \infty$, og giv en fysisk fortolkning af resultaterne. ($\delta = 0$).

d) Angiv entropien i grænserne $T \to 0$ og $T \to \infty$ for $\delta = 0$. Angiv entropien i grænsen $T \to 0$ for henholdsvis $\delta > 0$ og $\delta < 0$.

Written 4-hour exam in: Thermodynamics and Statistical mechanics Friday January 21, 2009, at 10.00 – 14.00

Translated by Bo Jakobsen
The course was 7.5 ECTS.

The exam consists of three problems on two pages. The weights of the problems are given. Writing aids and a simple calculator are allowed. The "Golden sheet is included with this exam. No further helping aids are allowed.

Problem 1 (30%)

a)
Show that the following relation is true in general:

$$\beta_S = \frac{C_P}{TV\alpha_P} \tag{1}$$

with β_S the adiabatic (isentropic) pressure coefficient, C_P the isobaric specific heat and α_P the isobaric thermal expansion coefficient.

b)
Consider now a diatomic ideal gas. Derive an expression for β_S as function of P and T for this gas.

c)
The diatomic ideal gas is placed in a container which is thermally isolated from the surroundings. The initial temperature is 30°C. The pressure in the container is now raised slowly by 7%, using a piston. What is the resulting temperature? Would the resulting temperature be greater if it was a mono-atomic ideal gas?

Problem 2 (30%)

a)
Prove the Maxwell relation:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_{T,N} = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{P,N} \tag{2}$$

b)
Prove the formula:

$$P = \frac{k_B T}{Z}\left(\frac{\partial Z}{\partial V}\right)_T \tag{3}$$

(c)
The partition function, Z, is for an ideal gas given by:

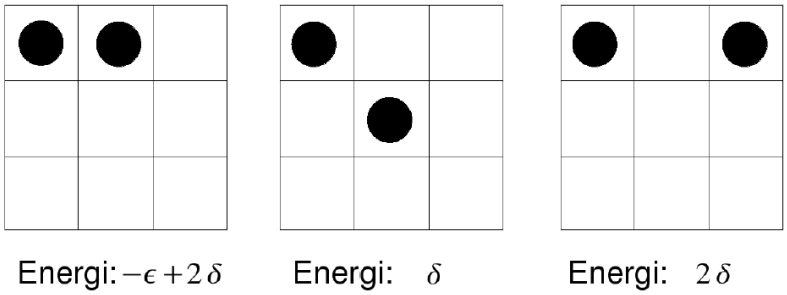
$$Z = \frac{1}{N!}\left(\frac{VZ_{int}}{v_Q}\right)^N, \quad v_Q = \left(\frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}}\right)^3 \tag{4}$$

show that it satisfies the above equation (3).

Problem 3 (40%)

Consider a system consisting of two identical atoms in a two dimensional lattice with 9 places. When the two atoms are nearest neighbors (not on a diagonal) they contribute $-\epsilon$ to the energy of the state. An atom on the edge contributes δ to the energy of the state. No other energy contributions exist.

ϵ is a positive constant. In part a), b), and c) we have $\delta = 0$



a)
Show that the system has 36 states altogether. Show that the system ($\delta = 0$) has 12 states with energy $-\epsilon$.

b)
Calculate the mean energy in thermal equilibrium as function of temperature T ($\delta = 0$).

c)
Find the mean energy in the limit $T \to 0$ and $T \to \infty$, and give a physical interpretation of the result ($\delta = 0$).

d)
Find the entropy in the limits $T \to 0$ and $T \to \infty$ for $\delta = 0$. Find the entropy in the limit $T \to 0$ for $\delta > 0$ and $\delta < 0$ respectively.

1

Golden sheet E2009, ver. 1.0

1 Termodynamik

Termodynamikkens 1. lov:	$dU = q + w = q - pdV$
Termodynamikkens 2. lov (isoleret system):	$\Delta S \geq 0\,, \qquad S = k \ln \Omega$
Termodynamikkens 3. lov:	$T \to 0 \Rightarrow S \to 0, C_x \to 0$
Entropitilvækst ved tilført varme:	$dS \geq \frac{q}{T}$
	$dS = \frac{q}{T}$ (Quasistatisk, Reversibelt)
Ækvipartitionsprincippet:	$U = \frac{f}{2} N k_B T, \quad$ f = # frihedsgrader.

Termodynamiske potentialer:

Potentiale	Differentialform	Maxwell relation
U	$dU = +TdS - PdV + \mu dN$	$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_{S,N} = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_{V,N}$
$H = U + PV$	$dH = +TdS + VdP + \mu dN$	$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_{S,N} = +\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_{P,N}$
$F = U - TS$	$dF = -SdT - PdV + \mu dN$	$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{T,N} = +\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{V,N}$
$G = U + PV - TS = \mu N$	$dG = -SdT + VdP + \mu dN$	$\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_{T,N} = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{P,N}$

Linære responsefunktioner (dN=0):

Varmekapacitet	$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$	$C_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P$
Udvidelseskoefficient	$\alpha_P = +\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$	$\alpha_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_S$
Kompressibilitet	$\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$	$\kappa_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S$
Bulkmodul	$K_T = -V\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{\kappa_T}$	$K_S = -V\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S = \frac{1}{\kappa_S}$
Trykkoefficient	$\beta_V = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$	$\beta_S = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_S$

$dV = 0$: Isochor; $dP = 0$: Isobar; $dT = 0$: Isoterm; $dS = 0$: Adiabat

2 Statistisk mekanik

I termisk ligevægt med omgivelserne: $p(s) = \frac{e^{-\beta E(s)}}{Z}, \quad \beta \equiv \frac{1}{k_B T}$
Tilstandssummen: $Z = \sum_s e^{-\beta E(s)} \quad (\Rightarrow \sum_s p(s) = 1)$
Middelværdi af variablen A: $\langle A \rangle = \sum_s A(s)p(s) = \sum_s A(s)\frac{e^{-\beta E(s)}}{Z}$
Middelenergi: $U = \langle E \rangle = -\frac{\partial \ln(Z)}{\partial \beta} = -\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta}$
Helmholtz fri energi: $F = -k_B T \ln(Z)$
Skelnelige, uafhængige "partikler": $Z = Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \cdot Z_4 \cdot ... \qquad (E = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + ...)$
Uskelnelige, uafhængige "partikler": $Z = Z_1^N / N!$

3 Ideal-gas

Tilstandsligning: $pV = N k_B T = nRT$
Adiabat: $pV^\gamma = const$, $\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{f+2}{f}$
Isoterm kompression: $W = NkT \ln \frac{V_f}{V_i}$

2

4 Matematik

Binomial-koefficienten: $\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$
Stirling: $\ln(N!) \approx N\ln(N) - N \quad (N >> 1)$
Taylor udvikling: $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + ...$
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...$
$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...$
$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ...$
$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ...$
$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, hvor $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}$

$\int_0^\infty x^n \exp(-ax^2) = I(n,a), \quad \frac{\partial I(n,a)}{\partial a} = -I(n+2,a)$

$I(0,a) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}a^{-1/2}$	$I(2,a) = \frac{1}{4}\sqrt{\pi}a^{-3/2}$	$I(4,a) = \frac{3}{8}\sqrt{\pi}a^{-5/2}$
$I(1,a) = \frac{1}{2}a^{-1}$	$I(3,a) = \frac{1}{2}a^{-2}$	$I(5,a) = a^{-3}$

Z betragtes som en funktion af X og Y ($Z = Z(X,Y)$):

$$dZ = \left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)_Y dX + \left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right)_X dY \qquad \text{[Total differential]}$$

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)_Y = \left[\left(\frac{\partial X}{\partial Z}\right)_Y\right]^{-1} \qquad \text{[Den inverse af den afledte]}$$

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)_Y = \left(\frac{\partial Z}{\partial Q}\right)_Y \left(\frac{\partial Q}{\partial X}\right)_Y \qquad \text{[Kædereglen]}$$

$$-1 = \left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)_Y \left(\frac{\partial X}{\partial Y}\right)_Z \left(\frac{\partial Y}{\partial Z}\right)_X \qquad \text{[“Den falske kæderegel”]}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right)_X\right)_Y = \left(\frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)_Y\right)_X \qquad \text{[Ombytning af diff. rækkefølge]}$$

5 Konstanter

$k_B = 1.381 \cdot 10^{-23}$ J/K $= 8.617 \cdot 10^{-5}$ eV/K $\qquad R = 8.315$ J/(mol K)
$N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$
$h = 6.626 \cdot 10^{-34}$ J s $= 4.136 \cdot 10^{-15}$ eV s
1 atm $= 1.013$ bar $= 1.013 \cdot 10^5$ N/m^2 $= 1.013 \cdot 10^5$ Pa
1 eV $= 1.602 \cdot 10^{-19}$ J
1 u $= 1.661 \cdot 10^{-27}$ kg

Skriftlig 4-timers prøve i
TERMODYNAMIK OG STATISTISK MEKANIK
Mandag 18/1-2010, kl 10.00-14.00

Opgavesættet består af tre opgaver på ialt to sider. Vægtning er angivet på opgaverne, hvert underspørgsmål indenfor en opgave har sammen vægt. Skriveredskaber og en simpel lommeregner (dvs. en, som **ikke** kan lave grafer eller symbolsk manipulation) er tilladt. "Golden Sheet" (3 sider) er vedlagt. Ingen øvrige hjælpemidler er tilladt.

Opgave 1 (35%)

a) Vis at total-differentialer for entropien, kan skrives ved den isobare varmekapacitet og den isobare udvidelseskoefficient på følgende måde:

$$dS = \frac{C_P}{T} dT - V\alpha_P dP.$$

Betragt nu en isoterm reversibel trykændring fra P_i til P_f.

b) Vis at den tilførte varme er givet ved den isobare udvidelseskoefficient som:

$$Q = -T \int_{P_i}^{P_f} V\alpha_P dP,$$

c) Vis at det udførte arbejde er givet ved den isoterme kompressibilitet som:

$$W = \int_{P_i}^{P_f} VP\kappa_T dP.$$

I det følgende antages α_P og κ_T at være trykuafhængige (dette er en god antagelse for væsker).

Betragt nu en væske med følgende karakteristika: $T = 300\text{K}$, $V = 1 \cdot 10^{-5}\text{m}^3$, $\alpha_P = 1.8 \cdot 10^{-4}\text{K}^{-1}$ og $\kappa_T = 4 \cdot 10^{-11}\text{Pa}^{-1}$

Trykket ændres isotermt og reversibelt fra atmosfærisk tryk til 1000atm.

d) Beregn den tilførte varme og det udførte arbejde ved tryk ændringen. Kommenter på det fundne resultat.
(**Hint:** Da volumen-ændringen er meget lille pga. den lille isoterme kompressibilitet, kan volumen antages at være konstant i evalueringen af integralerne.)

Opgave 2 (30%)

a) Vis at der generelt gælder følgende sammenhæng mellem den adiabatiske trykkoefficient, den isochore trykkoefficient, den isochore varmekapacitet og den isoterme kompressibilitet:

$$\beta_S = \beta_V + \frac{C_V}{TV\beta_V\kappa_T}$$

(**Hint:** Du kan *evt.* udnytte følgende sammenhæng: $C_P = C_V + TV\alpha_P\beta_V$)

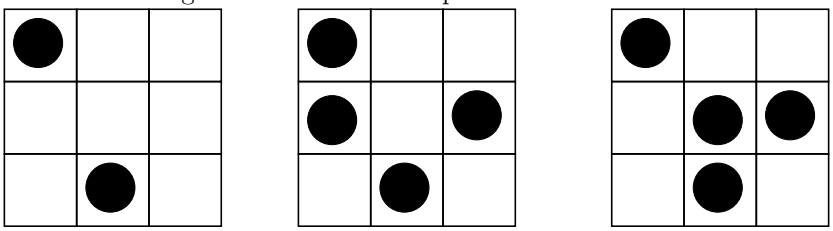
b) Beregn β_S for en diatomisk ideal-gas.

Opgave 3 (35%)

Betragt et model-system som har N pladser og n identiske partikler
(der kan maximalt være én partikkel på en given plads).

Energien af systemet afhænger kun af antallet af partikler. Hver partikkel tilføre $\epsilon > 0$ energi til systemet.

Nedenstående figur illustrerer 3 eksempler.



$N = 9,\ n = 2$ $E = 2\epsilon$ | $N = 9,\ n = 4$ $E = 4\epsilon$ | $N = 9,\ n = 4$ $E = 4\epsilon$

a) Vis at tilstandssummen generelt for et givet N og n kan skrives som:

$$Z_n = \binom{N}{n} e^{-\beta\epsilon n}$$

b) Find et generelt udtryk for Helmholtz fri energi for et givet N og n.

Vi betragter nu modellen for fastholdt størrelse (N) og temperatur, men lader antallet af partikler (n) variere.
(Du kan f.eks. tænke på det, som om modellen er i kontakt med et partikel reservoir, hvor der frit kan flyde partikler mellem reservoiret og modellen — eller at "partiklerne" repræsenterer objekter der kan opstå og forsvinde, f.eks. fejlsteder i en krystal).

c) Vis at i termisk ligevægt er antallet af partikler givet ved:

$$n = \frac{N}{e^{\beta\epsilon} + 1}$$

og beregn $\frac{n}{N}$ for $T \to 0$ og $T \to \infty$.

(**Hint:** Du må antage at $N \gg 1$, $n \gg 1$ og $(N - n) \gg 1$.)

d) Giv en fysisk forklaring på hvorfor der i termisk ligevægt generelt er partikler i modellen, selvom den tomme model ($n = 0$) ved enhver temperatur har den laveste energi (nemlig $E_{n=0} = 0$).
Kommenter desuden på de fundne grænseværdier for $\frac{n}{N}$.

Slut på opgavesættet

Exam originally in Danish, translated by Bo Jakobsen
Written 4-hour exam in
Thermodynamics and Statistical Mechanics
Monday 18/1-2010, 10.00-14.00

The exam consists of three problems on two pages altogether. The weight of the problems are given, and within a problem sub-questions have the same weight.

Writing aids and a simple calculator (that is one which can **not** do graphs or symbolic manipulations) are allowed. The "Golden sheet" (3 pages) are included with this exam. No further helping aids are allowed.

Problem 1 (35%)

a) Show that the "total differential" for the entropy can be written in terms of the isobaric specific heat and the isobaric thermal expansion coefficient, in the following way:

$$dS = \frac{C_P}{T} dT - V\alpha_P dP.$$

We now consider an isothermal reversible (quasistatic) pressure change from P_i to P_f.

b) Show that the supplied heat is given by the isobaric thermal expansion coefficient as:

$$Q = -T \int_{P_i}^{P_f} V\alpha_P dP,$$

c) Show that the work done is given by the isothermal compressibility as:

$$W = \int_{P_i}^{P_f} VP\kappa_T dP.$$

In the following it is assumed that α_P and κ_T are pressure independent (this is a good approximation for liquids).

Consider a liquid with the following characteristics: $T = 300\text{K}$, $V = 1 \cdot 10^{-5}\text{m}^3$, $\alpha_P = 1.8 \cdot 10^{-4}\text{K}^{-1}$ og $\kappa_T = 4 \cdot 10^{-11}\text{Pa}^{-1}$

The pressure is changed isothermal and reversible from atmospheric pressure to 1000atm.

d) Calculate the supplied heat and the work done during the pressure change. Comment on the result.
(**Hint:** The volume can be assumed constant in the evaluation of the integrals, as the volume change is very small (due to the small isothermal compressibility)).

Problem 2 (30%)

a) Show that the following relation holds in general, between the adiabatic pressure coefficient, the isochoric specific heat and the isothermal compressibility :

$$\beta_S = \beta_V + \frac{C_V}{TV\beta_V\kappa_T}$$

(**Hint:** You may *potentially* use the following relation: $C_P = C_V + TV\alpha_P\beta_V$)

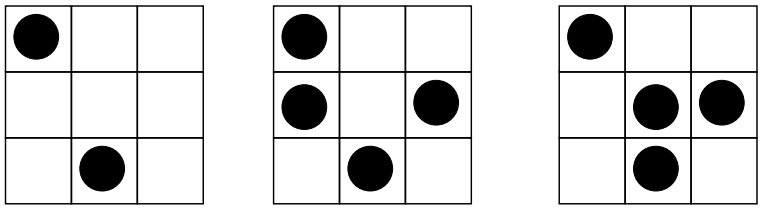
b) Calculate β_S for a diatomic ideal-gas.

Problem 3 (35%)

Consider a model-system with N positions and n identical particles
(each position can hold at most one particle).

The energy of the system depends only on the number of particles. Each particle contributes $\epsilon > 0$ energy to the system.

The figure below illustrates three examples.



$N = 9,\ n = 2$ $\quad$ $N = 9,\ n = 4$ $\quad$ $N = 9,\ n = 4$

$E = 2\epsilon$ $\quad$ $E = 4\epsilon$ $\quad$ $E = 4\epsilon$

a) Show that the partition function (for any given N and n) in general can be written as:

$$Z_n = \binom{N}{n} e^{-\beta\epsilon n}$$

b) Find a general expression for the Helmholtz free energy for a given N and n.

We now consider the model for fixed size (N) and temperature, but allows the number of particles (n) to vary.
(You may e.g. think of the this in terms of the model being in contact with a particle reservoir, with free exchange of particles between the model and the reservoir — or think of it in terms of "particles" representing objects that can emerge and disappear, e.g. point defects in a crystal).

c) Show that in thermal equilibrium the number of particles is given by:

$$n = \frac{N}{e^{\beta\epsilon} + 1}$$

and calculate $\frac{n}{N}$ for $T \to 0$ og $T \to \infty$.

(**Hint:** you may assume that $N \gg 1$, $n \gg 1$ and $(N - n) \gg 1$.)

d) Give a physical explanation of why the model in general will contain particles in thermal equilibrium, even though the empty model ($n = 0$) at any temperature has the lowest energy (that is $E_{n=0} = 0$).
Furthermore, comment on the limits found for $\frac{n}{N}$.

1

Golden sheet E2010, ver. 1.0

1 Thermodynamics

1. law of thermodynamics:	$dU = q + w = q - pdV$
2. law of thermodynamics (isolated system):	$\Delta S \geq 0\,, \qquad S = k_B \ln \Omega$
3. law of thermodynamics:	$T \to 0 \Rightarrow S \to 0, C_x \to 0$
Entropy growth by delivering heat:	$dS \geq \frac{q}{T}$
	$dS = \frac{q}{T}$ (Quasistatic , Reversible)
Equipartition theorem:	$U = \frac{f}{2} N k_B T, \quad$ f = # degrees of freedom

Thermodynamic potentials:

Potential	Differential form	Maxwell relation
U	$dU = +TdS - PdV + \mu dN$	$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_{S,N} = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_{V,N}$
$H = U + PV$	$dH = +TdS + VdP + \mu dN$	$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_{S,N} = +\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_{P,N}$
$F = U - TS$	$dF = -SdT - PdV + \mu dN$	$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{T,N} = +\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{V,N}$
$G = U + PV - TS = \mu N$	$dG = -SdT + VdP + \mu dN$	$\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_{T,N} = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{P,N}$

Linear response functions (dN=0):

Specific heat	$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$	$C_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P$
Thermal expansion coefficient	$\alpha_P = +\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$	$\alpha_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_S$
Compressibility	$\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$	$\kappa_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S$
Bulk modulus	$K_T = -V\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{\kappa_T}$	$K_S = -V\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S = \frac{1}{\kappa_S}$
Pressure coefficient	$\beta_V = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$	$\beta_S = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_S$

$dV = 0$: Isochoric; $\quad dP = 0$: Isobaric; $\quad dT = 0$: Isothermal;
$Q = 0$: Adiabatic; $\quad dS = 0$: Isentropic (Adiabatic + Quasistatic)

2 Statistical mechanics

In thermal equilibrium with the surroundings: $p(s) = \frac{e^{-\beta E(s)}}{Z}, \quad \beta \equiv \frac{1}{k_B T}$
Partition function: $Z = \sum_s e^{-\beta E(s)} \quad (\Rightarrow \sum_s p(s) = 1)$
Average value of variable A: $\langle A \rangle = \sum_s A(s)p(s) = \sum_s A(s)\frac{e^{-\beta E(s)}}{Z}$
Mean energy: $U = \langle E \rangle = -\frac{\partial \ln(Z)}{\partial \beta} = -\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta}$
Helmholtz free energy: $F = -k_B T \ln(Z)$
Distinguishable, independent "particles": $Z = Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \cdot Z_4 \cdot ... \qquad (E = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + ...)$
Indistinguishable, independent "particles": $Z = Z_1^N / N!$

3 Ideal-gas

Equation of state: $PV = Nk_B T = nRT$
Adiabat: $PV^\gamma = const$, $\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{f+2}{f}$
Isothermal compression: $W = Nk_B T \ln \frac{V_f}{V_i}$

2

4 Math

Binomial-coefficient: $\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$
Stirling's approximation: $\ln(N!) \approx N\ln(N) - N \quad (N >> 1)$
Taylor expansion: $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + ...$
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...$
$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...$
$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ...$
$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ...$
$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, hvor $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}$

$\int_0^\infty x^n \exp(-ax^2)dx = I(n,a), \quad \frac{\partial I(n,a)}{\partial a} = -I(n+2,a)$

$I(0,a) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}a^{-1/2}$	$I(2,a) = \frac{1}{4}\sqrt{\pi}a^{-3/2}$	$I(4,a) = \frac{3}{8}\sqrt{\pi}a^{-5/2}$
$I(1,a) = \frac{1}{2}a^{-1}$	$I(3,a) = \frac{1}{2}a^{-2}$	$I(5,a) = a^{-3}$

Z is a function of X og Y ($Z = Z(X,Y)$):

$$dZ = \left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)_Y dX + \left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right)_X dY \qquad \text{[Total differential]}$$

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)_Y = \left[\left(\frac{\partial X}{\partial Z}\right)_Y\right]^{-1} \qquad \text{[The inverse of the derivative]}$$

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)_Y = \left(\frac{\partial Z}{\partial Q}\right)_Y \left(\frac{\partial Q}{\partial X}\right)_Y \qquad \text{[The chain rule]}$$

$$-1 = \left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)_Y \left(\frac{\partial X}{\partial Y}\right)_Z \left(\frac{\partial Y}{\partial Z}\right)_X \qquad \text{["The fake chain rule"]}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right)_X\right)_Y = \left(\frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)_Y\right)_X \qquad \text{[Exchange of order of differentiation]}$$

5 Constants

$k_B = 1.381 \cdot 10^{-23}$ J/K $= 8.617 \cdot 10^{-5}$ eV/K $\qquad R = 8.315$ J/(mol K)
$N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$
$h = 6.626 \cdot 10^{-34}$ J s $= 4.136 \cdot 10^{-15}$ eV s
1 atm $= 1.013$ bar $= 1.013 \cdot 10^5$ N/m^2 $= 1.013 \cdot 10^5$ Pa
1 eV $= 1.602 \cdot 10^{-19}$ J
1 u $= 1.661 \cdot 10^{-27}$ kg

Skriftlig 4-timers prøve i
TERMODYNAMIK OG STATISTISK MEKANIK
Mandag 31/1-2011, kl 10.00-14.00

Opgavesættet består af tre opgaver på ialt to sider. Vægtning er angivet på opgaverne, hvert underspørgsmål indenfor en opgave har sammen vægt.

Skriveredskaber og en simpel lommeregner (dvs. en, som **ikke** kan lave grafer eller symbolsk manipulation) er tilladt. "Golden Sheet" (3 sider) er vedlagt. Ingen øvrige hjælpemidler er tilladt.

Problem 1 (30 %)

a) Vis at total differentialet af entropien kan skrives som:

$$TdS = VT\alpha_S dP + \frac{C_P}{V\alpha_P} dV. \tag{1}$$

Betragt nu en kvasistatisk volumen ændring (fra V_1 til V_2) ved konstant tryk.

b) Vis at den tilførte varme er givet som:

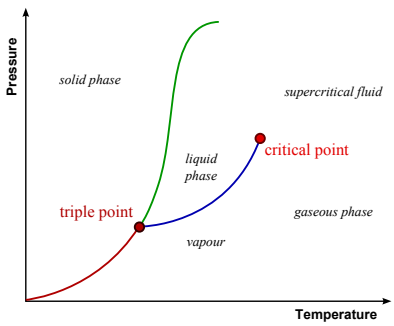
$$Q = \int_{V_1}^{V_2} \frac{C_P}{V\alpha_P} dV \tag{2}$$

og evaluer dette integral for en diatomisk idealgas.

c) Beregn arbejdet udført på denne idealgas, og ændringen i termisk energi af idealgassen.

Problem 2 (30 %)

Betragt et system med flere faser (så som væske og gas faserne). Figuren viser et eksempel på et "fasediagram" for et sådant system, som funktion af temperatur og tryk.



Eksempel på at (T,P) fasediagram. Diagrammet viser hvilke fase som er den stabile for en givet temperatur og tryk. Linerne som separerer faserne kaldes "faseseparationslinjer".

a) Hvilken fysisk størrelse bestemmer hvilken fase som er den stabile fase ved et given punkt i fasediagrammet, og hvad er kriteriet for "faseseparationslinjerne"?

b) Vis at hældningen af "faseseparationslinjen" kan findes som:

$$\left.\frac{dP}{dT}\right|_{\text{af faseseparationslinjen}} = \frac{L_{\text{total}}}{T\Delta V}. \tag{3}$$

Hvor L_{total} er den totale latente varme associeret med transformationen af en given mængde af stoffet og ΔV er ændringen i volumen associeret med transformationen af samme mængde stof.

Betragt nu vand, som har en specifik latent varme på $L_{\text{specifik}} = 2260\text{J/g}$ og en molar masse på 18g/mol.

c) Beregn et groft estimat for kogepunktet for vand på toppen af Mount Everest, hvor trykket er $\approx 1/3$ af trykket ved havniveau (som er $1 \cdot 10^5$Pa). Når du evaluere højresiden af ligning (3) må du bruge havniveau værdierne for L_{total}, T og ΔV.
(*Hint:* Du må betragte vanddamp som en idealgas.)

Problem 3 (40 %)

Betragt et "to tilstands paramagnetisk system" som består af N uafhængige dipoler. Hver dipol kan være i èn af to tilstande; en med energi 0 (som kaldes "ned tilstanden") og en med energi $\epsilon > 0$ (som kaldes "op tilstanden").

Betragt systemet som værende i termisk kontakt med et varmebad med temperatur T.

a) Find Helmholtz fri energi som funktion af T.

b) Find ligevægts entropien som funktion af temperaturen.

c) Beregn $T = 0$ og $T = \infty$ grænserne af entropien, diskuter resultaterne i relation til hvad man forventer i disse grænser.

Betragt nu et system som består af to sådanne dipol systemer som er svagt koblede men ellers *isolerede* fra omgivelserne. Hvert af de to dipol systemer har et totalt antal dipoler på henholdsvis N_1 og N_2, og et antal dipoler i op tilstanden på henholdsvis $n_{\text{op},1}$ og $n_{\text{op},2}$.

Den total energi i systemet er $E = \epsilon(n_{\text{op},1} + n_{\text{op},2})$, og du må antage at $N \gg 0$, $n_{\text{op}} \gg 0$ og $n_{\text{ned}} \gg 0$ for begge dipol systemer.

d) Vis at entropi af delsystem 1 er givet som:

$$S_1 = k_B[N_1 \ln(N_1) - n_{\text{op},1}\ln(n_{\text{op},1}) - (N_1 - n_{\text{op},1})\ln(N_1 - n_{\text{op},1})] \tag{4}$$

e) Diskuter kriteriet for at være i ligevægt, og vis ved en eksplicit beregning at følgende holder i ligevægt:

$$\frac{n_{\text{op},1}}{n_{\text{op},2}} = \frac{N_1}{N_2}. \tag{5}$$

(hint: vis først at $\frac{\partial n_{\text{op},2}}{\partial n_{\text{op},1}} = -1$)

Eksamenssættet er slut.

Written 4-hour exam in
Thermodynamics and Statistical Mechanics
Monday 31/01-11, 10.00-14.00

The exam consists of three problems on two pages altogether. The weight of the problems are given, and within a problem sub-questions have the same weight.

Writing aids and a simple calculator (that is one which can **not** do graphs or symbolic manipulations) are allowed. The "Golden sheet" (3 pages) are included with this exam. No further helping aids are allowed.

Problem 1 (30 %)

a) Show that the total differential of the entropy can be written as:

$$TdS = VT\alpha_S dP + \frac{C_P}{V\alpha_P} dV. \tag{1}$$

Consider now a quasistatic volume change (from V_1 to V_2) at constant pressure.

b) Show that the applied heat is given as:

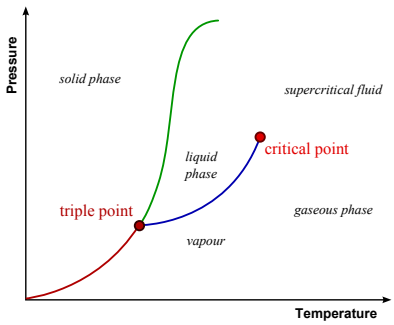
$$Q = \int_{V_1}^{V_2} \frac{C_P}{V\alpha_P} dV \tag{2}$$

and evaluate this integral for a diatomic ideal gas.

c) Calculate the work done on the ideal gas, and the change in thermal energy of the ideal gas.

Problem 2 (30 %)

Consider a system with multiple phases (such as the liquid and gas phases). The figure shows an example of a "phase diagram" for such an system, as function of temperature and pressure.



Example of a (T,P) phase diagram. The diagram shows for a given temperature and pressure which phase is the stable one. The lines which separate the phases are called "phase boundary lines".

a) Which physical quantity determine which phase is the stable one at a given point in the phase diagram, and what is the criterion for the "phase boundary lines"?

b) Show that the slope of the phase boundary lines can be found as:

$$\left.\frac{dP}{dT}\right|_{\text{of phase boundary}} = \frac{L_{\text{total}}}{T\Delta V}. \tag{3}$$

Where L_{total} is the total latent heat associated with the transformation of a given amount of substance and ΔV the change in volume associated with the transformation of the same amount of substance.

Now consider water, which has a *specific* latent heat of $L_{\text{specific}} = 2260\text{J/g}$, and a molar mass of 18g/mol.

c) Calculate a rough estimate of the boiling point of water at the top of Mount Everest, at which the pressure is $\approx 1/3$ the pressure at sea level (which is $1 \cdot 10^5$Pa). You may use the sea level values of L_{total}, T, and ΔV when evaluating the right hand side of eq. (3). (*Hint:* you may consider water vapor as an ideal gas.)

Problem 3 (40 %)

Consider a two state paramagnetic system consisting of N independent dipoles. Each dipole can be in one of two states; one with energy 0 (called the "down state") and one with energy $\epsilon > 0$ (called the "up state").

Consider the system to be in thermal contact with a heat bath with temperature T.

a) Find the Helmholtz free energy as function of T.

b) Find the equilibrium entropy as function of temperature.

c) Calculate the $T = 0$ and $T = \infty$ limits of the entropy, and discuss the results in relation to what is expected in these limits.

Consider now a system consisting of two such dipole systems which are weakly coupled but otherwise *isolated* from the surroundings. Each of the two dipole systems has a total number of dipoles N_1 and N_2 respectively, and a number of dipoles in the up state $n_{\text{up},1}$ and $n_{\text{up},2}$ respectively.

The total energy in the system is $E = \epsilon(n_{\text{up},1} + n_{\text{up},2})$, and you may assume that $N \gg 0$, $n_{\text{up}} \gg 0$ and $n_{\text{down}} \gg 0$ for both dipole systems.

d) Show that the entropy of sub-system 1 is given as:

$$S_1 = k_B[N_1 \ln(N_1) - n_{\text{up},1} \ln(n_{\text{up},1}) - (N_1 - n_{\text{up},1}) \ln(N_1 - n_{\text{up},1})] \tag{4}$$

e) Discuss the criterion for being in equilibrium, and show by explicit calculation that the following holds in equilibrium:

$$\frac{n_{\text{up},1}}{n_{\text{up},2}} = \frac{N_1}{N_2}. \tag{5}$$

(hint: show first that $\frac{\partial n_{\text{up},2}}{\partial n_{\text{up},1}} = -1$)

End of the exam

Skriftlig 4-timers prøve i
TERMODYNAMIK OG STATISTISK MEKANIK
Tirsdag 28/6-2011, kl 10.00-14.00

Opgavesættet består af 3 opgaver på ialt to sider. Vægtning er angivet på opgaverne, hvert underspørgsmål indenfor en opgave har samme vægt.

Skriveredskaber og en simpel lommeregner (dvs. en, som **ikke** kan lave grafer eller symbolsk manipulation) er tilladt. "Golden Sheet" (3 sider) er vedlagt. Ingen øvrige hjælpemidler er tilladt.

Problem 1 (35 %)

I de følgende 3 delspørgsmål betragtes gas hvor entropien er givet ved:

$$S = Nk_B \left[\ln\left(\frac{V}{NV_Q}\right) + 5/2 \right] \tag{1}$$

N er antallet af atomer, V volumen og V_Q er "kvante volumenet" som udelukkende er en funktion af temperaturen. Energien af gasser er givet ved $E = 3/2Nk_BT$.

I alle delspørgsmål betragtes gassen som værende i en ydre isolerende kasse, som er delt op på forskellige måder i de tre delspørgsmål. Figur 1 illustrerer de betragtede situationer.

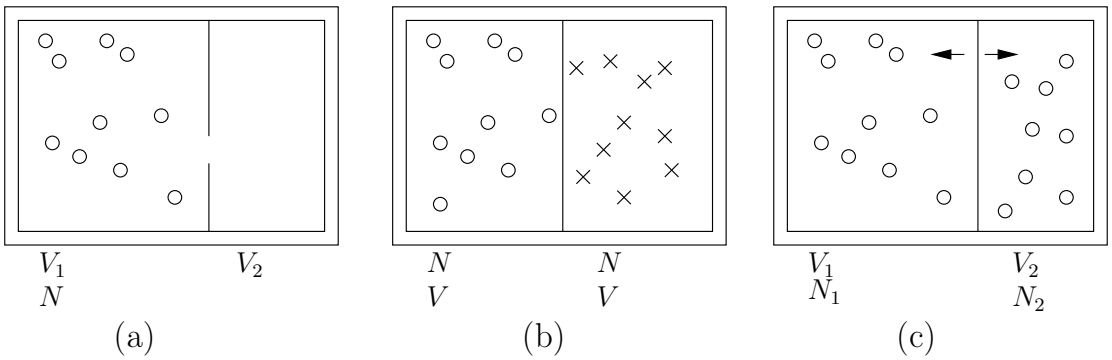


Figure 1. De 3 situationer som betragtes i spørgsmål a–c

Betragt først en situation hvor en mængde gas N er i volumen V_1 adskilt fra et tomt volumen V_2 (som skitseret på figur 1a.) Gassen tillades nu at ekspandere ind i det tomme volumen så den til sidst fylder det hele.

a) Angiv ændringen i energi og temperatur af gassen, og beregn ændringen i entropi ved ekspansionen. Kommenter på sammenhængen mellem varme og entropi i denne proces.

Antag nu at gassen består af to forskellige typer af atomer som man kan kende forskel på. Der er N atomer af hver slags. Det samlede volumen kan opdeles i to lige store dele med en varmeledende væg. Betragt nu en situation hvor vi først har de to typer atomer adskilt af væggen, og derefter en situation hvor der ikke er nogen væg.

b) Beregn entropien af det samlede system i situationen hvor der er en væg (som skitseret på figur 1b) og i situationen hvor væggen er fjernet. Kommenter på hvor entropiforskelen kommer fra.

Betragt til sidst en situation hvor gassen er delt op af en væg der kan flytte sig let og er varmeledende. Volumen af de to dele kaldes hhv. V_1 og V_2 og antallet af partikler er hhv. N_1 og N_2. Situationen er skitseret på figur 1c.

c) Beregn forholdet mellem V_1 og V_2 i termodynamisk ligevægt.

Problem 2 (30 %)

a) Vis at

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S \tag{2}$$

(**HINT:** Betragt først V(P,T) og dernæst T(S,P))

b) Vis at der generelt gælder følgende sammenhæng mellem den adiabatiske kompressibilitet (κ_S), den isoterme kompressibilitet (κ_T), den isobare udvidelseskoefficient (α_P) og den isobare varmekapacitet (C_P):

$$\kappa_T - \kappa_S = \frac{VT\alpha_P^2}{C_P}. \tag{3}$$

c) Beregn κ_S for en diatomisk ideal-gas.

Problem 3 (35 %)

Betragt et system bestående af N uafhængige atomer i et gitter. Hvert atom kan være i 6 tilstande: 2 med energi 0ϵ, 1 med energi 1ϵ og 3 med energi 3ϵ, hvor ϵ er en positiv konstant ($\epsilon > 0$).

a) Find Helmholtz fri energi som funktion af T.

b) Find ligevægtsentropien som funktion af temperaturen.

c) Beregn $T = 0$ og $T = \infty$ grænserne af entropien, diskuter resultaterne i relation til hvad man forventer i disse grænser.

Betragt nu et system bestående af et enkelt atom $N = 1$. Til hver mikrotilstand hører nu et "spin" (B) sådan at til tilstandene med energi 0ϵ er $B = -1$, til tilstandene med energi 1ϵ er $B = 0$ og til tilstandene med energi 3ϵ er $B = 1$.

d) Beregn middelværdien af B i termisk ligevægt og angiv værdien i grænserne $T = 0$ og $T = \infty$. Kommenter på grænserne.

Antag nu at det samlede spin af et system med N atomer findes som summen af spinnet for de enkelte atomer,

e) Angiv det samlede middelspin for N atomer som funktion af temperaturen.

Eksamenssættet er slut.

Exam originally in Danish, translated by Bo Jakobsen 2011
Written 4-hour exam in
Thermodynamics and Statistical Mechanics
Tuesday 28/6-2011, kl 10.00-14.00

The exam consists of three problems on two pages altogether. The weight of the problems are given, and within a problem sub-questions have the same weight.

Writing aids and a simple calculator (that is one which can **not** do graphs or symbolic manipulations) are allowed. The "Golden sheet" (3 pages) are included with this exam. No further helping aids are allowed.

Problem 1 (35 %)

In the following 3 sub-questions a gas is considered where the entropy is given as:

$$S = Nk_B \left[\ln \left(\frac{V}{NV_Q} \right) + 5/2 \right] \tag{1}$$

N is the number of atoms, V the volume, and V_Q is the "quantum volume" which is only a function of temperature. The energy of the gas is given as $E = 3/2Nk_BT$.

The gas is in all sub-questions considered as being in an outer isolated box, the box is partitioned in different ways in the three sub-questions. Figure 1 illustrates the considered situations.

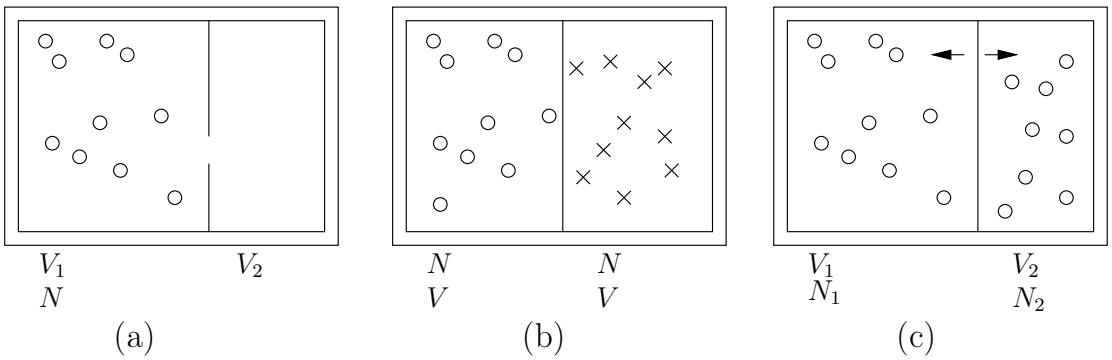


Figure 1. The 3 situations considered in sub-question a–c

Consider firstly a situation where an amount of gas N is in volume V_1 separated from an empty volume V_2 (as sketched on figure 1a.) The gas is now allowed to expand into the empty volume, so that it in the end fills everything.

a) State the change in energy and temperature of the gas, and calculated the change in entropy by the expansion. Comment on the connection between heat and entropy in the process.

Now assume that the gas consists of two different types of atoms, which can be distinguished. There are N atoms of each kind. The total volume can be separated in two equal sized parts by a heat conducting wall. Consider now a situation where we firstly have the two types of atoms separated by the wall, and thereafter a situation where no wall is inserted.

b) Calculated the total entropy in the situation with a wall (as sketched on figure 1b) and in the situation where the wall is removed. Comment on the course of the entropy difference.

Finally, consider a situation where the gas is separated by a wall which can move easily and is heat conducting. The volume of the two pars are called V_1 and V_2 respectively and the number of particles N_1 and N_2 respectively. The situation is sketched on figure 1c.

c) Calculated the ratio between V_1 and V_2 in thermodynamical equilibrium.

Problem 2 (30 %)

a) Show that

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S \tag{2}$$

(**HINT:** consider firstly V(P,T) and then T(S,P))

b) Show that the following relation between the adiabatic compressibility (κ_S), the isothermal compressibility (κ_T), the isobaric expansion coefficient (α_P), and the isobaric specific heat (C_P) holds in general:

$$\kappa_T - \kappa_S = \frac{VT\alpha_P^2}{C_P}. \tag{3}$$

c) Calculate κ_S for a diatomic ideal-gas.

Problem 3 (35 %)

Consider a system consisting of N independent atoms on a grid. Each atom can be in 6 states: 2 with energy 0ϵ, 1 with energy 1ϵ and 3 with energy 3ϵ, where ϵ is a positive constant ($\epsilon > 0$).

a) Find Helmholtz free energy as function of T.

b) Find the equilibrium entropy as function of temperature.

c) Calculate the $T = 0$ and $T = \infty$ limits of the entropy, and discuss the results in relation to what is expected in these limits.

Consider now a system consisting of a single atom $N = 1$. A spin B is now assigned to each micro state, such that to the states with energy 0ϵ we have $B = -1$, to the states with energy 1ϵ we have $B = 0$ and to the states with energy 3ϵ we have $B = 1$.

d) Calculate the mean value of B in thermal equilibrium and state the vallues in the $T = 0$ and $T = \infty$ limits. Comment on the limits.

Now assume that the total spin of a system with N atoms can be found as the sum of the spin from the individual atoms,

e) Give the total average spin for N atoms as function of temperature.

1

Golden sheet Autumn 2011, ver. 1.0

1 Thermodynamics

1. law of thermodynamics:	$dU = q + w \overset{\text{QS}}{=} q - pdV$
2. law of thermodynamics (isolated system):	$\Delta S \geq 0\,, \qquad S = k_B \ln \Omega$
3. law of thermodynamics:	$T \to 0 \Rightarrow S \to 0, C_x \to 0$
Entropy growth by delivering heat:	$dS \geq \frac{q}{T}$
	$dS = \frac{q}{T}$ (Quasistatic)
Equipartition theorem:	$U = \frac{f}{2} N k_B T, \quad$ f = # degrees of freedom

Thermodynamic potentials:

Potential	Differential form	Maxwell relation
U	$dU = +TdS - PdV + \mu dN$	$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_{S,N} = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_{V,N}$
$H = U + PV$	$dH = +TdS + VdP + \mu dN$	$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_{S,N} = +\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_{P,N}$
$F = U - TS$	$dF = -SdT - PdV + \mu dN$	$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{T,N} = +\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{V,N}$
$G = U + PV - TS = \mu N$	$dG = -SdT + VdP + \mu dN$	$\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_{T,N} = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{P,N}$

Linear response functions (dN=0):

Specific heat	$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$	$C_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P$
Thermal expansion coefficient	$\alpha_P = +\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$	$\alpha_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_S$
Compressibility	$\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$	$\kappa_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S$
Bulk modulus	$K_T = -V\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{\kappa_T}$	$K_S = -V\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S = \frac{1}{\kappa_S}$
Pressure coefficient	$\beta_V = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$	$\beta_S = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_S$

$dV = 0$: Isochoric; $\quad dP = 0$: Isobaric; $\quad dT = 0$: Isothermal;
$Q = 0$: Adiabatic; $\quad dS = 0$: Isentropic (Adiabatic + Quasistatic)

2 Statistical mechanics

In thermal equilibrium with the surroundings: $p(s) = \frac{e^{-\beta E(s)}}{Z}, \quad \beta \equiv \frac{1}{k_B T}$
Partition function: $Z = \sum_s e^{-\beta E(s)} \quad (\Rightarrow \sum_s p(s) = 1)$
Average value of variable A: $\langle A \rangle = \sum_s A(s)p(s) = \sum_s A(s)\frac{e^{-\beta E(s)}}{Z}$
Mean energy: $U = \langle E \rangle = -\frac{\partial \ln(Z)}{\partial \beta} = -\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta}$
Helmholtz free energy: $F = -k_B T \ln(Z)$
Distinguishable, independent "particles": $Z = Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \cdot Z_4 \cdot ... \qquad (E = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + ...)$
Indistinguishable, independent "particles": $Z = Z_1^N / N!$

3 Ideal-gas

Equation of state: $PV = Nk_B T = nRT$
Thermal energy: Only quadratic degrees of freedom; $U = f/2 N k_B T$.

2

4 Math

Binomial-coefficient: $\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$
Stirling's approximation: $\ln(N!) \approx N\ln(N) - N \quad (N >> 1)$
Taylor expansion: $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + ...$
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...$
$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...$
$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ...$
$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ...$
$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, hvor $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}$

$\int_0^\infty x^n \exp(-ax^2)dx = I(n,a), \quad \frac{\partial I(n,a)}{\partial a} = -I(n+2,a)$

$I(0,a) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}a^{-1/2}$	$I(2,a) = \frac{1}{4}\sqrt{\pi}a^{-3/2}$	$I(4,a) = \frac{3}{8}\sqrt{\pi}a^{-5/2}$
$I(1,a) = \frac{1}{2}a^{-1}$	$I(3,a) = \frac{1}{2}a^{-2}$	$I(5,a) = a^{-3}$

Z is a function of X and Y ($Z = Z(X,Y)$),
Y is a function of X and Q ($Y = Y(X,Q)$):

$$dZ = \left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)_Y dX + \left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right)_X dY \qquad \text{[Total differential]}$$

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)_Y = \left[\left(\frac{\partial X}{\partial Z}\right)_Y\right]^{-1} \qquad \text{[The inverse of the derivative]}$$

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)_Y = \left(\frac{\partial Z}{\partial Q}\right)_Y \left(\frac{\partial Q}{\partial X}\right)_Y \qquad \text{[The chain rule]}$$

$$-1 = \left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)_Y \left(\frac{\partial X}{\partial Y}\right)_Z \left(\frac{\partial Y}{\partial Z}\right)_X \qquad \text{[“The fake chain rule”]}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right)_X\right)_Y = \left(\frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)_Y\right)_X \qquad \text{[Exchange of order of differentiation]}$$

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)_Q = \left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)_Y + \left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right)_X \left(\frac{\partial Y}{\partial X}\right)_Q \qquad \text{[Exchange of fixed variable]}$$

5 Constants

$k_B = 1.381 \cdot 10^{-23}$ J/K $= 8.617 \cdot 10^{-5}$ eV/K $\qquad R = 8.315$ J/(mol K)
$N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$
$h = 6.626 \cdot 10^{-34}$ J s $= 4.136 \cdot 10^{-15}$ eV s
1 atm $= 1.013$ bar $= 1.013 \cdot 10^5$ N/m^2 $= 1.013 \cdot 10^5$ Pa
1 eV $= 1.602 \cdot 10^{-19}$ J
1 u $= 1.661 \cdot 10^{-27}$ kg

Skriftlig 4-timers prøve i
TERMODYNAMIK OG STATISTISK MEKANIK
Torsdag 12/1-2012, kl 10.00-14.00

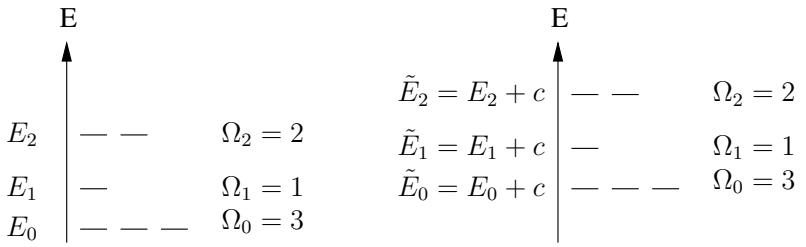
Opgavesættet består af to opgaver på ialt to sider. Vægtning er angivet på opgaverne, hvert underspørgsmål indenfor en opgave har sammen vægt.

Skriveredskaber og en simpel lommeregner (dvs. en, som **ikke** kan lave grafer eller symbolsk manipulation) er tilladt. "Golden Sheet" (3 sider) er vedlagt. Ingen øvrige hjælpemidler er tilladt.

Opgave 1 (40 %)

Betragt et system med $k+1$ diskrete energiniveauer E_n, $n = 0 \ldots k$ og lad Ω_n være degeneretheden af hvert energiniveau (dvs. antallet af mikrotilstande som har den energi).
Den venstre figur viser et eksempel på et sådan system.

I det følgende er systemet i kontakt med et varmebad med en given temperatur og er i termisk ligevægt.



Venstre: Et eksempel på et system, i dette tilfælde er $k = 2$ da der er 3 energiniveauer. Antallet af mikrotilstande for hvert energiniveau er angivet.
Højre: Et system med skiftet energi-skala, men ellers med den sammen struktur i energiniveauerne.

a) Vis at sandsynligheden for at finde systemet i et givet energiniveau er:

$$\mathcal{P}(E_n) = \frac{\Omega_n e^{-E_n\beta}}{\sum_{m=0}^{k} \Omega_m e^{-E_m\beta}} \tag{1}$$

Vi betragter nu yderligere et system hvor energi-skalaen er blevet ændret (skiftet) således at $\tilde{E}_n = E_n + c$, hvor c er en konstant (sammenlign den venstre og højre figur). I det følgende referere variable med en ˜ (en tilde) til systemet med den skiftede energi-skala, og variable uden en tilde til det originale system.

b) Vis at sandsynlighederne er uændrede ved sådan en ændring i energi-skala, det vil sige:

$$\tilde{\mathcal{P}}(\tilde{E}_n) = \mathcal{P}(E_n) \tag{2}$$

c) Vis at middelenergien af de to systemer er relateret ved:

$$\langle \tilde{E} \rangle = \langle E \rangle + c \tag{3}$$

d) Vis at den fri energi af de to systemer er relateret ved:

$$\tilde{F} = F + c \tag{4}$$

e) Vis at entropien af de to systemer er relateret ved:

$$\tilde{S} = S \tag{5}$$

og angiv et udtryk for entropien som funktion af temperaturen.

f) Beregn $T \to 0$ og $T \to \infty$ grænserne af sandsynligheden for at finde det originale system med en given energi (det vil sige, find grænserne af $\mathcal{P}(E_n)$ for alle n).
Kommenter på fortolkningen af resultatet.
(*Hint:* Brug resultaterne fra de forgående spørgsmål og vælg c fornuftigt inden du forsøger at evaluere grænserne.)

g) Beregn $T \to 0$ og $T \to \infty$ grænserne af entropien for det originale system.
Kommenter på fortolkningen af resultatet.
(*Hint:* Brug resultaterne fra de forgående spørgsmål og vælg c fornuftigt inden du forsøger at evaluere grænserne.)

Opgave 2 (60 %)

I det følgende betragter vi en kvasistatisk samt adiabatisk volumen ændring, primært med fokus på en monoatomar idealgas.

a) Vis at den følgende relation holder for volumen og temperatur af en monoatomar idealgas under kvasistatisk adiabatisk volumen ændring:

$$VT^{3/2} = \text{Konstant}. \tag{6}$$

b) Betragt en kvasistatisk adiabatisk process hvor volumen af en monoatomar idealgas reduceres til 1/3 af det oprindelige volumen.
Beregn slut temperaturen (T_f) og slut trykket (P_f) som funktion af start temperaturen (T_i) og start trykket (P_i).
Beregn yderligere slut trykket hvis temperaturen bagefter reduceres til den oprindelige start temperatur mens volumen holdes konstant.

c) Vis at den følgende relation gælder *generelt* mellem den adiabatiske termiske udvidelses koefficient (α_S), den isochore varmefylde (C_V), den isoterme kompressibilitet (κ_T) og den isobare termiske udvidelseskoefficient (α_P):

$$\alpha_S = \frac{C_V \kappa_T}{VT\alpha_P}. \tag{7}$$

d) Vis eksplicit at ligning 7 holder for en monoatomar idealgas ved at evaluere venstre og højre siden af ligningen for en sådan gas.

Entropien af en monoatomar idealgas er givet ved:

$$S = Nk_B \left[\ln\left(\frac{V}{NV_Q}\right) + 5/2 \right], \text{with } V_Q = \left(\frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}\right)^3 \tag{8}$$

hvor m er massen af atomet.

e) Vis eksplicit at entropien som givet i ligning 8 faktisk er konstant under en kvasistatisk adiabatisk volumen ændring af en monoatomar idealgas (det vil sige en process hvor ligning 6 holder).

Eksamenssættet er slut.

Written 4-hour exam in
Thermodynamics and Statistical Mechanics
Thursday 12/01-12, 10.00-14.00

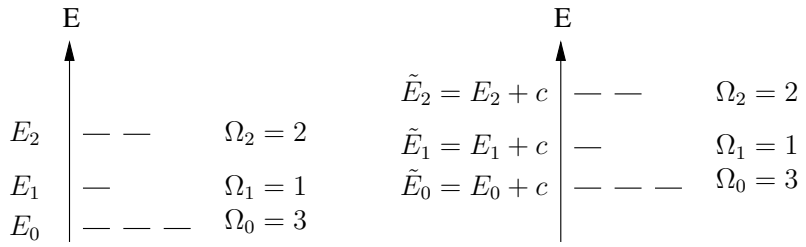
The exam consists of 2 problems on 2 pages altogether. The weights of the problems are given, and within a problem sub-questions have the same weight.

Writing aids and a simple calculator (that is one which can **not** do graphs or symbolic manipulations) are allowed. The "Golden sheet" (3 pages) are included with this exam. No further helping aids are allowed.

Problem 1 (40 %)

Consider a system with $k+1$ discrete energy levels E_n, $n = 0 \ldots k$, and let Ω_n be the degeneracy of each energy level (that is the number of micro-states with that energy).
(The left figure gives an example of such a system).

In the following the system is in contact with a heat-bath of a certain temperature and in thermal equilibrium.



Left: Example of system, in this case $k = 2$ as there are 3 energy levels. The number of micro-states for each energy-level is indicated.
Right: System with shifted energy scale, but otherwise same structure of the energy levels.

a) Show that the probability for finding the system at a given energy level is:

$$\mathcal{P}(E_n) = \frac{\Omega_n e^{-E_n\beta}}{\sum_{m=0}^{k} \Omega_m e^{-E_m\beta}} \tag{1}$$

We now additionally consider a system where the energy scale has been changed (shifted) so that $\tilde{E}_n = E_n + c$, where c is some constant (compare left and right figure). In the following variables with a ˜ (a tilde) refer to the system with the shifted energy scale, and variables without the tilde to the original system.

b) Show that the probabilities are unchanged by such a change in energy scale, that is:

$$\tilde{\mathcal{P}}(\tilde{E}_n) = \mathcal{P}(E_n) \tag{2}$$

c) Show that the mean energies of the two systems are related by:

$$\langle \tilde{E} \rangle = \langle E \rangle + c \tag{3}$$

d) Show that the free energies of the two systems are related by:

$$\tilde{F} = F + c \tag{4}$$

e) Show that the entropies of the two systems are related by:

$$\tilde{S} = S \tag{5}$$

and give an expression for the entropy as function of temperature.

f) Calculate the $T \to 0$ and $T \to \infty$ limits of the probability for finding the original system at a given energy (that is find the limits of $\mathcal{P}(E_n)$ for all n's).
Comment on the interpretation of the result.
(*Hint:* Use the results from the previous questions and choose c wisely before trying to evaluate the limits.)

g) Calculate the $T \to 0$ and $T \to \infty$ limits of the entropy for the original system.
Comment on the interpretation of the result.
(*Hint:* Use the results from the previous questions and choose c wisely before trying to evaluate the limits.)

Problem 2 (60 %)

In the following we consider a quasistatic adiabatic volume change, mainly with focus on a mono-atomic ideal-gas.

a) Show that the following relation holds for volume and temperature of a mono-atomic ideal-gas during a quasistatic adiabatic volume change:

$$VT^{3/2} = \text{Constant}. \tag{6}$$

b) Consider a quasistatic adiabatic process in which the volume of an mono-atomic ideal-gas is reduced to 1/3 of the initial volume.
Calculate the final temperature (T_f) and pressure (P_f) in terms of the initial temperature (T_i) and initial pressure (P_i).
Furthermore, calculate the final pressure if the temperature is afterwards reduced to the initial temperature, while holding the volume constant.

c) Show that the following relation between the adiabatic thermal expansion coefficient (α_S), the isochoric specific heat (C_V), the isothermal compressibility (κ_T), and the isobaric thermal expansion coefficient (α_P) holds in *general*:

$$\alpha_S = \frac{C_V \kappa_T}{VT\alpha_P}. \tag{7}$$

d) Show explicitly that equation 7 holds for a mono-atomic ideal-gas by evaluating the left and right hand side for such a gas.

The entropy of a mono-atomic ideal-gas is given by:

$$S = Nk_B \left[\ln\left(\frac{V}{NV_Q}\right) + 5/2 \right], \text{with } V_Q = \left(\frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}\right)^3 \tag{8}$$

where m is the mass of the atom.

e) Show *explicitly* that the entropy as given in equation 8 is in fact constant during a quasistatic adiabatic volume change of a mono-atomic ideal-gas (that is a process where equation 6 holds).

End of the exam

Skriftlig 4-timers prøve i
TERMODYNAMIK OG STATISTISK MEKANIK
Mandag 25/6-2012, kl 10.00-14.00

Opgavesættet består af 3 opgaver med hver 4 underspørgsmål på ialt 2 sider (+ denne forside). Hvert *underspørgsmål* har sammen vægt.

Skriveredskaber og en simpel lommeregner (dvs. en, som **ikke** kan lave grafer eller symbolsk manipulation) er tilladt. "Golden Sheet" (3 sider) er vedlagt. Ingen øvrige hjælpemidler er tilladt.

Opgave 1

Betragt et system som består af tre magnetiske spin, som enten kan være i tilstanden op eller tilstanden ned. Hvis to nabo spin har samme orienteringe biddrager det $-\epsilon$ til energien, mens to nabo spin med forskellig orientering biddrager med 0ϵ, hvor ϵ er en positiv konstant.

Systemet antages at være i ligevægt, og i kontakt med et varmebad med en given temperatur.

a) Vis at der er 2 tilstande med energi -2ϵ, 4 tilstande med energi -1ϵ og 2 tilstande med energi 0ϵ. Opskriv desuden tilstandssummen for systemet.

b) Find sandsynligheden for at være i makrotilstanden med højest energi som funktion af temperaturen og tilsvarende sansynelighed for at være i lavest energi.

c) Find høj- og lavtemperatur grænserne af de i **b)** fundne sandsynligheder. Kommenter på den fysiske fortolkning og specielt på forskelle og ligheder mellem sandsynlighederne for makrotilstanden med højest og lavest energi.

d) Beregn entropien som funktion af temperatur. Find desuden høj- og lavtemperatur grænserne af denne, og kommenter på disse.

Opgave 2

a) Bevis følgende generelle sammenhæng mellem tryk, temperatur, volumen og tilstandssum:

$$P = \frac{k_B T}{Z}\left(\frac{\partial Z}{\partial V}\right)_T .$$

b) Bevis følgende generelle sammenhæng:

$$C_P = C_V + \frac{VT\beta_V^2}{K_T} \tag{1}$$

I det følgende betragtes en *van der Waals* gas. Den har tilstandssummen:

$$Z = \frac{1}{N!}\left(\frac{V-Nb}{V_Q}\right)^N e^{\frac{N^2 a}{V k_B T}}; \quad V_Q = \left(\frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}\right)^3$$

hvor a, b er positive konstanter, og m er partiklens masse.

c) Vis at tilstandsligningen for en van der Waals gas er givet ved:

$$P = \frac{N k_B T}{V-Nb} - \frac{aN^2}{V^2}$$

En van der Waals gas har middelenergien givet ved:

$$< E > = \frac{3}{2} N k_B T - \frac{aN^2}{V}$$

d) Beregn C_P for en van der Waals gas
(forsøg ikke at reducere udtrykket).

Opgave 3

For et isoleret system med en indre frihedsgrad (som f.eks. illustret på figur 3a) ved vi at entropien i ligevægt er maximal, det vil sige at:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V_1}\right)_U (V_{1,eq}) = 0$$

Hvis man derimod har et system med fast entropi, kan man vise at energien er minimal i ligevægt, dvs.

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V_1}\right)_S (V_{1,eq}) = 0 \tag{2}$$

a) Bevis ligning 2

Betragt nu et system som på figur 3b hvor et isoleret system er opdelt af en isolerende væg. De to dele er fyldt med monoatomar idealgas (N_1, og N_2 molekyler).

b) Benyt kriteriet for ligevægt fra **a)** til at vise at $P_1 = P_2$ i ligevægt.

I det følgende får du brug for entropien af en monoatomar idealgas, som er:

$$S = Nk_B\left[\ln\left(\frac{V}{NV_Q}\right) + 5/2\right]\ ;\ V_Q = \left(\frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}\right)^3$$

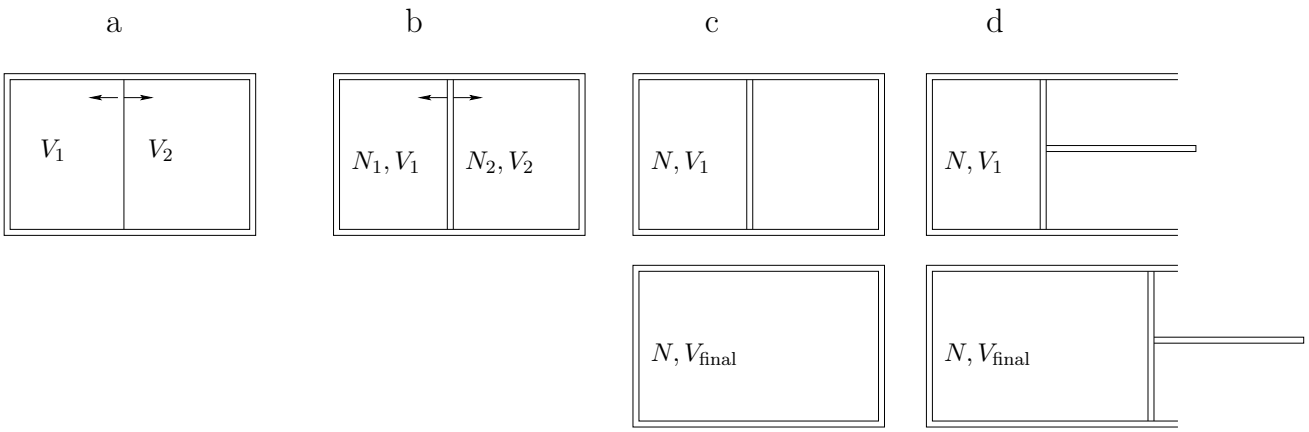
hvor m er massen af atomerne.

Figur 3c viser et eksempel på en proces som er "entropi drevet". Vægen som først separere de to dele fjernes pludselig, og efter noget tid fylder idealgassen hele det samlede volumen.

c) Forklar hvorfor denne proces er "entropi drevet". Beregn desuden forskellen i entropi mellem start og slut.

Figur 3d viser et eksempel på en proces som er "Energi drevet", gassen udvides langsomt ved at et stempel (med en isolerende væg) langsomt bevæges.

d) Forklar hvorfor denne proces er "Energi drevet". Beregn desuden ændringen i temperatur og energi mellem start og slut, samt det udførte arbejde.



Figur 3a til 3d

Eksamenssættet er slut.

Exam originally in Danish, translated by Bo Jakobsen 2012
Written 4-hour exam in
Thermodynamics and Statistical Mechanics
Monday 25/6-2012, kl 10.00-14.00

The exam consists of three problems with each 4 sub-questions on two pages altogether (+ this front page). Each *sub-question* have the same weight.

Writing aids and a simple calculator (that is one which can **not** do graphs or symbolic manipulations) are allowed. The "Golden sheet" (3 pages) are included with this exam. No further helping aids are allowed.

Problem 1

Consider a system consisting of three magnetic spin, each either in state up or state down. If two neighbor spins have the same orientation it contributes $-\epsilon$ to the total energy, while two neighbor spins with opposite orientation contributes 0ϵ, ϵ being a positive constant.

The system is in equilibrium, and in contact with a heath bath at a given temperature.

a) Show that the system has 2 states with energy -2ϵ, 4 states with energy -1ϵ and 2 states with energy 0ϵ. Give the partition function for the system

b) Find the probability as function of temperature, for being in the macro state with the highest energy, and similar the probability for being in the lowest energy state.

c) Find the high- and low-temperature limits of the in **b)** found probabilities. Comment on the physical interpretation and especially on the difference and similarities between the probability for the macro-states with highest and lowest energy.

d) Calculate the entropy as function of temperature. Furthermore, find the high- and low-temperature limits of this. Comment on the limits.

Problem 2

a) Proof the following general relation between pressure, temperature, volume, and partition function:

$$P = \frac{k_B T}{Z}\left(\frac{\partial Z}{\partial V}\right)_T .$$

b) Proof the following general relation:

$$C_P = C_V + \frac{VT\beta_V^2}{K_T} \tag{1}$$

In the following a *van der Waals* is considered. It has the partition function given by:

$$Z = \frac{1}{N!}\left(\frac{V-Nb}{V_Q}\right)^N e^{\frac{N^2 a}{V k_B T}}; \quad V_Q = \left(\frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}\right)^3$$

where a, b are positive constants, and m the mass of the particle.

c) Show that the equation of state for a van der Waals gas is given as:

$$P = \frac{N k_B T}{V-Nb} - \frac{aN^2}{V^2}$$

A van der Waals gas has mean energy given as:

$$< E > = \frac{3}{2} N k_B T - \frac{aN^2}{V}$$

d) Calculate C_P for a van der Waals gas
(Do not try to reduce the expression).

Problem 3

For an isolated system with a inner degree of freedom (as e.g. illustrated on figure 3a) we know that the entropy is maximal in equilibrium, that is:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V_1}\right)_U (V_{1,eq}) = 0$$

On the other hand, if you have a system with constant entropy, it is possible to show that the energy is minimal in equilibrium, that is:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V_1}\right)_S (V_{1,eq}) = 0 \tag{2}$$

a) Proof equation 2

Now consider a system as on figure 3b, where an isolated system is partitioned by an isolated wall. The two parts are filled with mono-atomic ideal-gas (N_1, and N_2 molecules).

b) Use the criterion for equilibrium from **a)** to show that $P_1 = P_2$ in equilibrium.

In the following you will need the entropy of a mono-atomic ideal-gas, which is::

$$S = Nk_B\left[\ln\left(\frac{V}{NV_Q}\right) + 5/2\right]\ ;\ V_Q = \left(\frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}\right)^3$$

where m is the mass of the atoms.

Figure 3c shows an example of a process which is "entropy driven". The wall which separates the two parts is suddenly removed, and after some time the idea-gas fill up the full volume.

c) Explain why this process is "entropy driven". Calculate the difference in entropy between start and end.

Figure 3d shows an example of a process which is "Energy driven", the gas is slowly expanded by moving a pistol (with isolated wall).

d) Explain why this process is "energy driven". Calculate the change in temperature and energy between start and end. Furthermore calculate the work done.

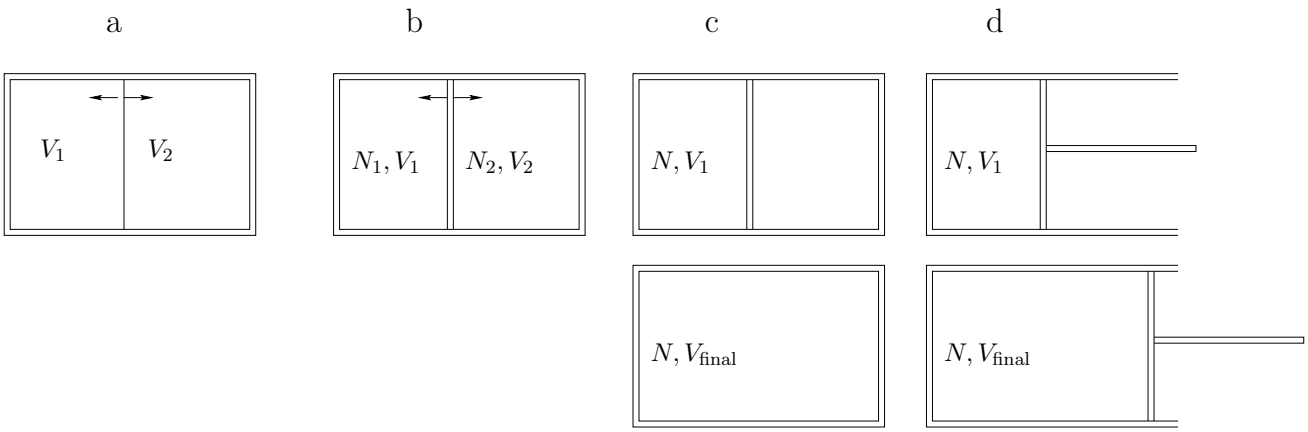


Figure 3a to 3d

End of exam.

1

Golden sheet Autumn 2012, ver. 1.0

1 Thermodynamics

1. law of thermodynamics:	$dU = q + w \overset{\text{QS}}{=} q - PdV$
2. law of thermodynamics (isolated system):	$\Delta S \geq 0\,, \qquad S = k_B \ln \Omega$
3. law of thermodynamics:	$T \to 0 \Rightarrow S \to 0, C_x \to 0$
Entropy growth by delivering heat:	$dS \geq \frac{q}{T}$
	$dS = \frac{q}{T}$ (Quasistatic)
Equipartition theorem:	$U = \frac{f}{2} N k_B T, \quad$ f = # degrees of freedom

Thermodynamic potentials:

Potential	Differential form	Maxwell relation
U	$dU = +TdS - PdV + \mu dN$	$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_{S,N} = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_{V,N}$
$H = U + PV$	$dH = +TdS + VdP + \mu dN$	$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_{S,N} = +\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_{P,N}$
$F = U - TS$	$dF = -SdT - PdV + \mu dN$	$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{T,N} = +\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{V,N}$
$G = U + PV - TS = \mu N$	$dG = -SdT + VdP + \mu dN$	$\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_{T,N} = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{P,N}$

Linear response functions (dN=0):

Specific heat	$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$	$C_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P$
Thermal expansion coefficient	$\alpha_P = +\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$	$\alpha_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_S$
Compressibility	$\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$	$\kappa_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S$
Bulk modulus	$K_T = -V\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{\kappa_T}$	$K_S = -V\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S = \frac{1}{\kappa_S}$
Pressure coefficient	$\beta_V = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$	$\beta_S = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_S$

$dV = 0$: Isochoric; $\quad dP = 0$: Isobaric; $\quad dT = 0$: Isothermal;
$Q = 0$: Adiabatic; $\quad dS = 0$: Isentropic (Adiabatic + Quasistatic)

2 Statistical mechanics

In thermal equilibrium with the surroundings: $p(s) = \frac{e^{-\beta E(s)}}{Z}, \quad \beta \equiv \frac{1}{k_B T}$
Partition function: $Z = \sum_s e^{-\beta E(s)} \quad (\Rightarrow \sum_s p(s) = 1)$
Average value of variable A: $\langle A \rangle = \sum_s A(s) p(s) = \sum_s A(s) \frac{e^{-\beta E(s)}}{Z}$
Mean energy: $U = \langle E \rangle = -\frac{\partial \ln(Z)}{\partial \beta} = -\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta}$
Helmholtz free energy: $F = -k_B T \ln(Z)$
Distinguishable, independent "particles": $Z = Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \cdot Z_4 \cdot ... \qquad (E = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + ...)$
Indistinguishable, independent "particles": $Z = Z_1^N / N!$

3 Ideal-gas

Equation of state: $PV = N k_B T = nRT$
Thermal energy: Only quadratic degrees of freedom; $U = f/2 N k_B T$.

2

4 Math

Binomial-coefficient: $\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$
Stirling's approximation: $\ln(N!) \approx N\ln(N) - N \quad (N >> 1)$
Taylor expansion: $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + ...$
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...$
$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...$
$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ...$
$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ...$
$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, hvor $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}$

$\int_0^\infty x^n \exp(-ax^2)dx = I(n,a), \quad \frac{\partial I(n,a)}{\partial a} = -I(n+2,a)$

$I(0,a) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}a^{-1/2}$	$I(2,a) = \frac{1}{4}\sqrt{\pi}a^{-3/2}$	$I(4,a) = \frac{3}{8}\sqrt{\pi}a^{-5/2}$
$I(1,a) = \frac{1}{2}a^{-1}$	$I(3,a) = \frac{1}{2}a^{-2}$	$I(5,a) = a^{-3}$

Z is a function of X and Y ($Z = Z(X,Y)$),
Y is a function of X and Q ($Y = Y(X,Q)$):

$$dZ = \left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)_Y dX + \left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right)_X dY \qquad \text{[Total differential]}$$

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)_Y = \left[\left(\frac{\partial X}{\partial Z}\right)_Y\right]^{-1} \qquad \text{[The inverse of the derivative]}$$

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)_Y = \left(\frac{\partial Z}{\partial Q}\right)_Y \left(\frac{\partial Q}{\partial X}\right)_Y \qquad \text{[The chain rule]}$$

$$-1 = \left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)_Y \left(\frac{\partial X}{\partial Y}\right)_Z \left(\frac{\partial Y}{\partial Z}\right)_X \qquad \text{["The fake chain rule"]}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right)_X\right)_Y = \left(\frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)_Y\right)_X \qquad \text{[Exchange of order of differentiation]}$$

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)_Q = \left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)_Y + \left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right)_X \left(\frac{\partial Y}{\partial X}\right)_Q \qquad \text{[Exchange of fixed variable]}$$

5 Constants

$k_B = 1.381 \cdot 10^{-23}$ J/K $= 8.617 \cdot 10^{-5}$ eV/K $\qquad R = 8.315$ J/(mol K)
$N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$
$h = 6.626 \cdot 10^{-34}$ J s $= 4.136 \cdot 10^{-15}$ eV s
1 atm $= 1.013$ bar $= 1.013 \cdot 10^5$ N/m^2 $= 1.013 \cdot 10^5$ Pa
1 eV $= 1.602 \cdot 10^{-19}$ J
1 u $= 1.661 \cdot 10^{-27}$ kg

Skriftlig 4-timers prøve i
TERMODYNAMIK OG STATISTISK MEKANIK
Torsdag 10/1-2013, kl 10.00-14.00

Opgavesættet består af tre opgaver på ialt to sider (+ denne forside). Vægtning er angivet på opgaverne, hvert underspørgsmål indenfor en opgave har sammen vægt.

Skriveredskaber og en simpel lommeregner (dvs. en, som **ikke** kan lave grafer eller symbolsk manipulation) er tilladt. "Golden Sheet" (3 sider) er vedlagt. Ingen øvrige hjælpemidler er tilladt.

Opgave 1 (40 %)

I det følgende betragtes et system med 6 pladser og 2 partikler (der kan maximalt være en partikkel på hver plads). Energien af systemet afhænger af hvilke pladser som er optaget, på følgende måde: Der er 1 plads som bidrager 0ϵ hvis den er optaget, 2 pladser som hver bidrager 1ϵ hvis den er optaget og 3 pladser som hver bidrager 2ϵ hvis den er optaget ($\epsilon > 0$). På figur 1 ses tre eksempler på konfigurationer med tilhørende total energi.

Systemet antages at være i ligevægt og i god termisk kontakt med et varmebad af en given temperature, T.

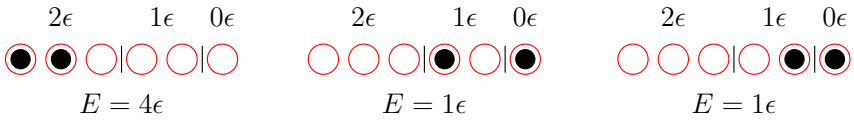


Figure 1: Tre eksempel på konfigurationer med tilhørende energi. De 6 ringe angiver de mulige pladser, og de udfyldte cirkler angiver de to partikler.

a) Opskriv tilstandssummen for systemet, og vis desuden at der i alt er 15 konfigurationer.

b) Beregn middelenergien for systemet som funktion af temperaturen, og beregn desuden høj- og lavtemperaturgrænsen af middelenergien.

c) Beregn entropien af systemet som funktion af temperaturen, og beregne desuden høj- og lav temperaturgrænsen af denne.

Systemet ændres nu så der er 2 pladser som hver bidrager med 0ϵ hvis den er optaget, 3 pladser som hver bidrager 1ϵ hvis den er optaget og 4 pladser som hver bidrager med 2ϵ hvis den er optaget (9 pladser i alt).

d) Angiv for det ændrede system (uden eksplicit beregning) høj- og lavtemperaturgrænserne af entropien, samt lavtemperaturgrænsen af middelenergien.

Opgave 2 (40 %)

a) Vis at følgende generelle sammenhæng gælder

$$\kappa_S = \kappa_T - \frac{TV\alpha_P^2}{C_P}. \tag{1}$$

Betragt i det følgende en monoatomar idealgas.

b) Beregn κ_S og κ_T for en monoatomar idealgas.

Betragt nu et system som skitseret på figur 2. Systemet består af en ydre isoleret kasse, med et isoleret stempel. Kassen er opdelt af en indre væg som er en god varmeleder. Kassen er fyldt med monoatomar idealgas. Systemet antages at være i termisk ligevægt.

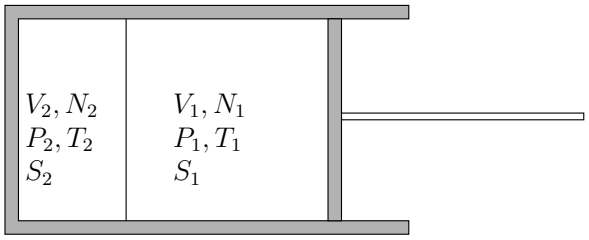


Figure 2: Illustration af systemet til Opgave 2.

Vi definere nu den „udefra sete“ (altså i volumen 1) adiabatiske kompresibilitet som (hvor det andet lighedstegn følger af den falske kæderegel):

$$\kappa_{S,1} = -\frac{1}{V_1}\left(\frac{\partial V_1}{\partial P_1}\right)_{S_{\text{total}}} = \frac{1}{V_1}\frac{\left(\frac{\partial S_{\text{total}}}{\partial P_1}\right)_{V_1}}{\left(\frac{\partial S_{\text{total}}}{\partial V_1}\right)_{P_1}} \tag{2}$$

hvor $S_{\text{total}} = S_1 + S_2$.

I det følgende udnyttes at entropien af en monoatomar idealgas kan skrives som:

$$S = Nk_B\left[\ln\frac{V\left(k_BT\right)^{3/2}}{N} + 5/2\right]. \tag{3}$$

c) Beregn $\kappa_{S,1}$.
Hint: Vis først at den samlede entropi af systemet kan skrives som:

$$S_{\text{total}} = N_1k_B\left(\ln\frac{V_1}{N_1}\left(\frac{P_1V_1}{N_1}\right)^{3/2} + 5/2\right) + N_2k_B\left(\ln\frac{V_2}{N_2}\left(\frac{P_1V_1}{N_1}\right)^{3/2} + 5/2\right). \tag{4}$$

d) Beregn $\kappa_{S,1}$ i grænserne $N_1 \gg N_2$ og $N_1 \ll N_2$. Sammenlign resultaterne med resultaterne fra spørgsmål **b)**.

Opgave 3 (20 %)

Betragt et system som består af en isolerer beholder som er opdelt i to dele (med volumen V_1 og V_2) af en varmeledende væg. Beholderens to dele er fyldt med monoatomar idealgas (N_1 og N_2 partikler).

For monoatomar idealgas vides at entropien kan skrives som:

$$S = Nk_B\left[\ln\frac{V\left(k_BT\right)^{3/2}}{N} + 5/2\right]. \tag{5}$$

a) Diskuter det fundamentale kriterie for ligevægt, og vis eksplicit at $T_1 = T_2$ i ligevægt.

Volumen 2 betragtes nu som et varmebad og de to dele antages at have samme temperatur.

b) Vis at ændringen i total entropi for det samlede system, som stammer fra ændring af en indre frihedsgrad i del-volumen 1 kan findes som

$$dS_{\text{total}} = -\frac{1}{T}dF_1 \tag{6}$$

hvor F_1 er Helmholts fri energi for del-volumen 1.

Eksamenssættet er slut.

Written 4-hour exam in
Thermodynamics and Statistical Mechanics
Thursday 10/01-12, 10.00-14.00

The exam consists of three problems on two pages altogether (+ this front page). The weights of the problems are given, and within a problem sub-questions have the same weight.

Writing aids and a simple calculator (that is one which can **not** do graphs or symbolic manipulations) are allowed. The "Golden sheet" (3 pages) are included with this exam. No further helping aids are allowed.

Problem 1 (40 %)

In the following we consider a system with 6 places and 2 particles (each place can maximal be occupied by one particle). The energy of the system depends on which places are occupied, in the following way: 1 place exists which contributes 0ϵ if occupied, 2 places exists which contributes 1ϵ if occupied, and 3 places exists which contributes 2ϵ if occupied ($\epsilon > 0$). Figure 1 shows three examples of configurations and the corresponding total energy.

The system is assumed to be in equilibrium, and in good thermal contact with a heat bath at a given temperature, T.

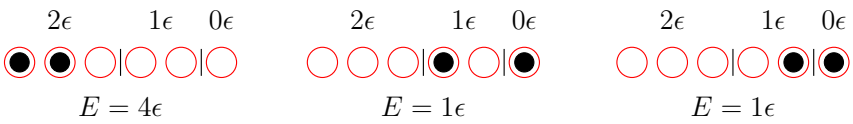


Figure 1: Three examples of configurations with corresponding energy. The 6 rings illustrates the possible places and the filled circles the two particles.

a) State the partition function for the system, furthermore show that there are 15 configurations in total.

b) Calculate the mean energy for the system as function of temperature. Furthermore, calculate the high and low temperature limits of the mean energy.

c) Calculate the entropy of the system as function of temperature. Furthermore, calculate the high and low temperature limits of the entropy.

The system is now changed in such a way that 2 places exists which each contributes with 0ϵ if occupied, 3 places exists which each contributes 1ϵ if occupied, and 4 places exists which each contributes 2ϵ if occupied (total of 9 places).

d) For the changed system, state (without explicit calculation) the high and low temperature limit of the entropy, and low temperature limit of the mean energy.

Problem 2 (40 %)

a) Show that the following general relation holds

$$\kappa_S = \kappa_T - \frac{TV\alpha_P^2}{C_P}. \tag{1}$$

In the following a mono atomic ideal gas is considered.

b) Calculate κ_S and κ_T for a mono-atomic ideal gas.

Consider a system as sketched on figure 2. The system consists of an outer isolating box, with an isolating piston. The box is partitioned by an inner wall which is a good heat conductor. The box is filled with mono-atomic ideal gas. The system is considered to be in thermal equilibrium.

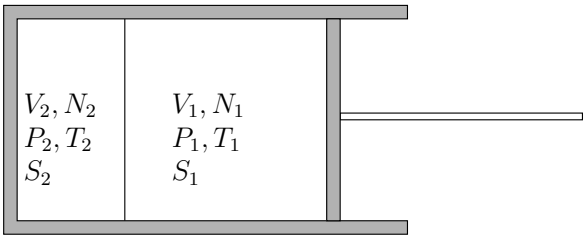


Figure 2: Illustration of the system for problem 2.

We now define the "externally seen" (that is in volume 1) adiabatic compressibility as (where the second equality sign follows from the "fake chain rule"):

$$\kappa_{S,1} = -\frac{1}{V_1}\left(\frac{\partial V_1}{\partial P_1}\right)_{S_{\text{total}}} = \frac{1}{V_1}\frac{\left(\frac{\partial S_{\text{total}}}{\partial P_1}\right)_{V_1}}{\left(\frac{\partial S_{\text{total}}}{\partial V_1}\right)_{P_1}} \tag{2}$$

where $S_{\text{total}} = S_1 + S_2$.

In the following it is used that the entropy of an mono-atomic ideal gas can be written as:

$$S = Nk_B\left[\ln\frac{V\left(k_BT\right)^{3/2}}{N} + 5/2\right]. \tag{3}$$

c) Calculate $\kappa_{S,1}$.

Hint: First show that the total entropy of the system can be written as:

$$S_{\text{total}} = N_1k_B\left(\ln\frac{V_1}{N_1}\left(\frac{P_1V_1}{N_1}\right)^{3/2} + 5/2\right) + N_2k_B\left(\ln\frac{V_2}{N_2}\left(\frac{P_1V_1}{N_1}\right)^{3/2} + 5/2\right). \tag{4}$$

d) Calculate $\kappa_{S,1}$ in the limits $N_1 \gg N_2$ and $N_1 \ll N_2$. Compare the results with the results from sub-question **b)**.

Opgave 3 (20 %)

Consider a system consisting of an isolated container which is separated into two compartments (each with volume V_1 and V_2) by a heat conducting wall. The two compartments are filled with mono-atomic ideal gas (N_1 and N_2 particles).

For an mono-atomic ideal gas, entropy can be written as:

$$S = Nk_B\left[\ln\frac{V\left(k_BT\right)^{3/2}}{N} + 5/2\right]. \tag{5}$$

a) Discuss the fundamental criterion for equilibrium, and show explicitly that $T_1 = T_2$ in equilibrium.

Volume 2 is now considered as a heat bath, and the two compartments are assumed to have the same tempe-rature.

b) Show that the change in total entropy, for the total system, coming from a change in an inner degree of freedom in sub-volume 1, can be found as:

$$dS_{\text{total}} = -\frac{1}{T}dF_1 \tag{6}$$

where F_1 is Helmholts free energy of sub-volume 1.

End of the exam.

Skriftlig 4-timers prøve i
Thermodynamik og Statistisk Mekanik
Torsdag 23/01-14, 10.00-14.00

Opgavesættet består af tre opgaver på ialt to sider. Vægtning er angivet på opgaverne, hvert underspørgsmål indenfor en opgave har sammen vægt.

Skriveredskaber og en simpel lommeregner (dvs. en, som **ikke** kan lave grafer eller symbolsk manipulation) er tilladt. "Golden Sheet" (2 sider) er vedlagt. Ingen øvrige hjælpemidler er tilladt.

Problem 1 (30 %)

I et paramagnetisk materiale har hver af de magnetiske partikler 3 tilstande (=orienteringer i forhold til et ydre magnetiske felt, B). De tilladte værdier af komponenten af det magnetiske spin μ som er parallel med feltet B er $-\mu_z$, 0 og μ_z, svarende til energierne $\mu_z B$, 0, and $-\mu_z B$.

a) En enkelt paramagnetisk partikel i et feltet B betragtes. Opskriv tilstandstandssummen og angiv sandsynligheden for de enkelte spin tilstande.

b) Beregn middelspinnet, $\langle \mu_z \rangle$, for en enkelt magnetisk partikel, og angiv den totale magnetisering M af et stort system bestående af N ikke-interagerende magnetiske partikler.

c) Bestem høj og lav temperatur grænserne ($T \to 0$ og $T \to \infty$) samt desuden 0-felts grænsen ($B \to 0$) af magnetiseringen M. Kommenter på de fundne grænser.

Problem 2 (35 %)

a) Bevis følgende generelle relation:

$$C_P - C_V = TV\frac{\beta_V^2}{K_T} \tag{1}$$

hvor C_P og C_V er den isobare hhv. isochore varmekapacitet, β_V den isochore trykstigningskoefficient, og K_T er det isoterme bulkmodul.

b) Vis at $C_P - C_V$ for en van der Waal's fluid med tilstandsligningen $(P + \frac{N^2}{V^2}a)(V - Nb) = Nk_BT$ kan skrives som

$$C_P - C_V = \frac{Nk_B}{1 - \frac{2a}{k_BT}\frac{N}{V}(1 - \frac{N}{V}b)^2} \tag{2}$$

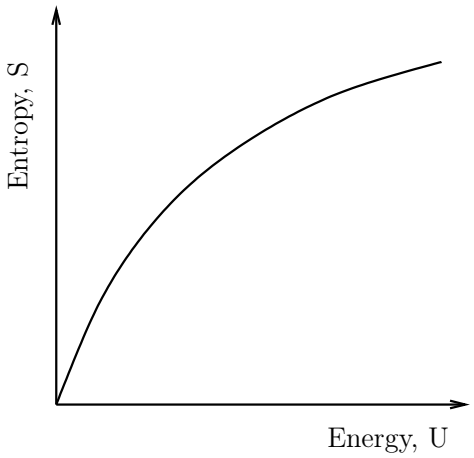
c) Bestem $C_P - C_V$ for en ideal gas.

d) I hvilken grænse for densiteten, N/V, går resultatet fra b) mod resultatet for en ideal gas? Giv en fortolkning af dette resultat.

Problem 3 (35 %)

Bestem temperaturen i hver af de følgende tilfælde:

a) *Skitser* temperaturen som funktion af energien for et system som udviser nedenstående sammenhæng mellem entropi og energi; forklar hvorfor temperaturen har netop denne opførsel.



b) I et eksperiment tilføres varme til en prøve med en konstant rate på 0.01 J/s. Entropien af prøven stiger med tiden. I tabellen nedenfor er den totale varme som prøven er blevet tilført samt den totale entropi af prøven anført som funktion af tiden. Hvad er temperaturen ved 500 s?

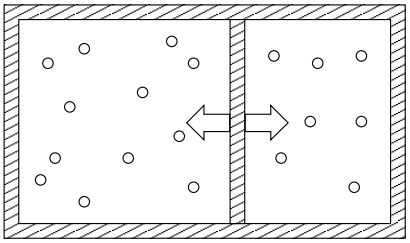
Tid (s)	100	200	300	400	500	600	700
Varme tilført ialt (J)	1.00	2.00	3.00	4.00	5.00	6.00	7.00
Total entropi (J/K)	2.30	2.65	2.85	3.00	3.11	3.20	3.28

c) Partikler med to ikke-degenerede energiniveauer i termisk kontakt med et varmebad. Population distributionen er som følger:

Energy (10^{-3}eV)	Population
12.9	25%
4.3	75%

(*Hint*: populationen af et givet energiniveau kan antages at være lig med sandsynligheden for at en partikel har denne energi.)

d) En isoleret kasse (skitseret nedenfor) har to kamre adskilt af en termisk isoleret, men flytbar, væg. Begge kamre indholder tynd gas med forskellig densitet og temperatur, men i mekanisk ligevægt. Venstre kammer indholder $1.0 \cdot 10^{22}$ gaspartikler ved 25°C, det højre indholder $6.0 \cdot 10^{21}$ gaspartikler ved 15°C. Hvad bliver ligevægtstemperaturen når væggen fjernes?



Eksamenssættet er slut.

Written 4-hour exam in
Thermodynamics and Statistical Mechanics
Thursday 23/01-14, 10.00-14.00

The exam consists of three problems on two pages altogether. The weights of the problems are given, and within a problem sub-questions have the same weight.

Writing aids and a simple calculator (that is one which can **not** do graphs or symbolic manipulations) are allowed. The "Golden sheet" (2 pages) are included with this exam. No further helping aids are allowed.

Problem 1 (30 %)

In some paramagnetic material, each of the magnetic particles has 3 states (=orientations with respect to the magnetic field, B). The allowed values of the component of the magnetic moment, μ, parallel to the applied field B are $-\mu_z$, 0, and μ_z corresponding to energies of $\mu_z B$, 0, and $-\mu_z B$.

a) Consider a single paramagnetic particle placed in a magnetic field of size B. State the partition function for this particle and the probabilities for each of the micro states as a function of temperature.

b) Calculate the average magnetic spin, $\langle \mu_z \rangle$, for a single magnetic particle, and state the total magnetization M of a large system of N non-interacting magnetic particles.

c) Determine the low and high temperature limits ($T \to 0$ and $T \to \infty$) of the magnetization M as well and the low field limit ($B \to 0$). Comment on the found limits.

Problem 2 (35 %)

a) Prove the following general relation

$$C_P - C_V = TV\frac{\beta_V^2}{K_T} \tag{1}$$

where C_P and C_V are the isobaric and isochoric heat capacities, β_V the isochoric pressure coefficient, and K_T the isothermal bulk modulus.

b) Show that $C_P - C_V$ for a van der Waal's gas with equation of state $(P + \frac{N^2}{V^2}a)(V - Nb) = Nk_BT$ can be written as

$$C_P - C_V = \frac{Nk_B}{1 - \frac{2a}{k_BT}\frac{N}{V}(1 - \frac{N}{V}b)^2} \tag{2}$$

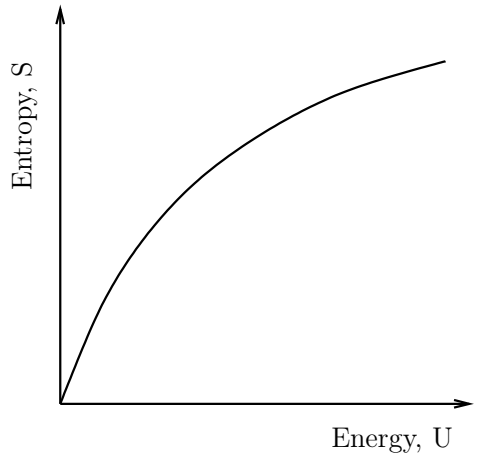
c) Determine $C_P - C_V$ for the ideal gas.

d) In what limit for the density, N/V, does the result from b) yield the ideal gas result? Give an interpretation of this result.

Problem 3 (35 %)

Determine the temperature in each of the following cases:

a) *Sketch* the temperature as a function of energy for a system that display the relation between energy and entropy shown below; explain why it has this shape.



b) In an experiment heat is supplied to a sample at a constant rate of 0.01 J/s. The entropy of the sample increases with time. In the table below the total heat delivered to the sample and the total entropy at given times is shown. What is the temperature at $t = 500$ s?

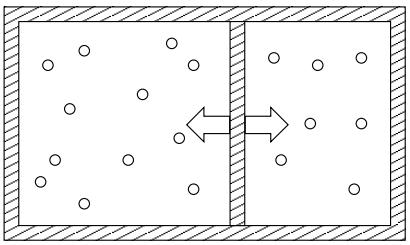
Time (s)	100	200	300	400	500	600	700
Total heat (J)	1.00	2.00	3.00	4.00	5.00	6.00	7.00
Total entropy (J/K)	2.30	2.65	2.85	3.00	3.11	3.20	3.28

c) Particles with 2 non-degenerate energy levels in thermal contact with a heat reservoir. The population distribution is as shown:

Energy (10^{-3}eV)	Population
12.9	25%
4.3	75%

(*Hint*: the population of a given energy level can be assumed equal to the probability for a particle to have that energy)

d) An isolated box (illustrated below) contains two chambers separated by a thermally insulating, but moveable, wall. Both chambers contain dilute gas at different densities and temperatures, but in mechanical equilibrium. The left chamber contains $1.0 \cdot 10^{22}$ gas particles at 25°C, the right chamber contains $6.0 \cdot 10^{21}$ gas particles at 15°C. What is the equilibrium temperature when the wall is removed?



End of the exam.

Skriftlig 4-timers prøve i
Termodynamik og Statistisk Mekanik
Mandag 26/05-14, 10.00-14.00

Opgavesættet består af tre opgaver på ialt to sider. Vægtning er angivet på opgaverne, hvert underspørgsmål inden for en opgave har samme vægt.

Skriveredskaber og en simpel lommeregner (dvs. en, som **ikke** kan lave grafer eller symbolsk manipulation) er tilladt. "Golden Sheet" (2 sider) er vedlagt. Ingen øvrige hjælpemidler er tilladt.

Opgave 1 (30 %)

Et (meget lille) system har Ω_1 tilstande med energien $-\varepsilon$ og Ω_2 tilstande med energien ε, hvor $\varepsilon > 0$.

a) I det følgende antages det at systemet er i kontakt med et varmereservior med temperaturen T.

Udregn sandsynligheden for at systemet har energien $-\varepsilon$ hhv. ε, og bestem høj- og lavtemperaturgrænserne ($T \to 0$ og $T \to \infty$) for disse sandsynligheder.

b) Udregn middelenergien som funktion af temperaturen af varmereservoiret og bestem grænserne for denne ($T \to 0$ og $T \to \infty$). Hvordan passer disse med resultaterne i a)?

c) Angiv høj- og lavtemperaturgrænserne for entropien.

d) Antag nu at systemet isoleres fra omgivelserne, dvs. at systemet enten har energien $-\varepsilon$ eller energien ε. Hvad er de tilsvarende entropier?

Opgave 2 (30 %)

Gibbs fri energi for et system er givet ved

$$G = -Nk_BT \ln\left(\frac{aT^{7/2}}{P}\right), \tag{1}$$

hvor a er en konstant.

a) Vis at entropien for systemet er givet ved: $S = Nk_B\left(\ln\left(\frac{aT^{7/2}}{P}\right) + \frac{7}{2}\right)$.

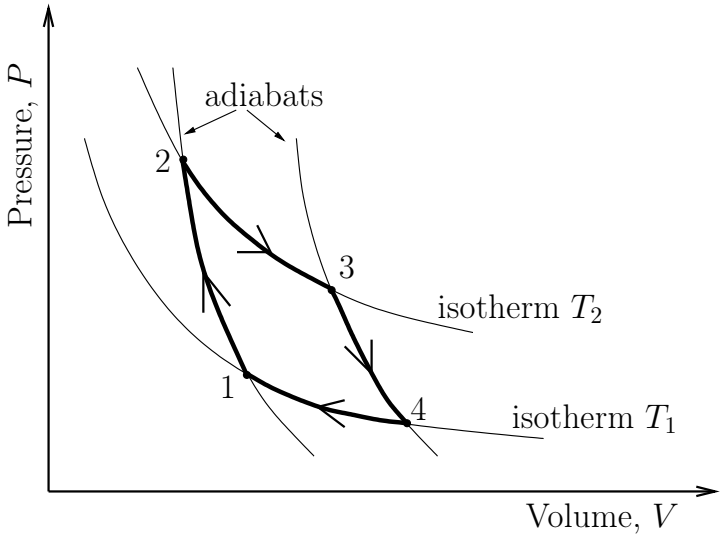
b) Udled tilstandsligningen for systemet (en tilstandsligning er en relation mellem de termodynamiske variable N, P, T, V).

c) Bestem den termiske energi U.

d) Identificer systemet udfra resultaterne i b) og c).

Opgave 3 (40 %)

Et stof gennemgår en række processer som ender i udgangspunktet, en såkaldt kredsproces. Denne er skitseret nedenfor:



Kredsprocessen består af 4 kvasistatiske, reversible delprocesser

$1 \to 2$ adiabatisk kompression

$2 \to 3$ isoterm ekspansion

$3 \to 4$ adiabatisk ekspansion

$4 \to 1$ isoterm kompression

Den termiske energi af stoffet er givet ved $U(T) = aT$, hvor a er en konstant.

a) Angiv for hver af delprocesserne $i \to j$ om hver af størrelserne $\Delta U_{i\to j}$, $Q_{i\to j}$ og $W_{i\to j}$ er positiv, negativ eller nul.

Hvad er den totale energi-ændring, ΔU_{tot}, efter afslutningen af kredsprocessen $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$?

b) Angiv entropi-ændringen for hver af de 4 delprocesser i termer af de relevante størrelser (dvs. varme og temperatur).

Hvad er den totale ændring i entropi, ΔS_{tot}, efter afslutningen af kredsprocessen?

c) Tegn kredsprocessen i et (S, T)-diagram.

d) Vis at effektiviteten af kredsprocessen defineret som $e = -W_{tot}/Q_{2\to 3}$ (dvs. det totale arbejde udført *af* stoffet på omgivelserne i forhold til varmeinputtet) er givet ved

$$e = 1 - T_1/T_2. \tag{2}$$

End of the exam.

Written 4-hour exam in
Thermodynamics and Statistical Mechanics
Monday 26/05-14, 10.00-14.00

The exam consists of three problems on two pages altogether. The weights of the problems are given, and within a problem sub-questions have the same weight.

Writing aids and a simple calculator (that is one which can **not** do graphs or symbolic manipulations) are allowed. The "Golden sheet" (2 pages) are included with this exam. No further helping aids are allowed.

Problem 1 (30 %)

A (very small) system has Ω_1 states with the energy $-\varepsilon$ and Ω_2 states with the energy ε, where $\varepsilon > 0$.

a) In the following, assume that the system interacting with a heat bath of temperature T.

Calculate the probabilities of the system having each of the two energies, and determine the limiting values ($T \to 0$ and $T \to \infty$) of these probabilities.

b) Calculate the average energy as a function of the temperature of the heat bath and determine the high and low temperature limits ($T \to 0$ and $T \to \infty$). How do these fit with the result in a)?

c) State the high and low temperature limits of the entropy of the system.

d) Assume now that the system is isolated from the surroundings, i.e. the system can have either the energy $-\varepsilon$ or the energy ε. What are the corresponding entropies?

Problem 2 (30 %)

Gibbs free energy of some system is given by

$$G = -Nk_BT \ln\left(\frac{aT^{7/2}}{P}\right) \tag{1}$$

a) Show that the entropy of the system is given as: $S = Nk_B\left(\ln\left(\frac{aT^{7/2}}{P}\right) + \frac{7}{2}\right)$

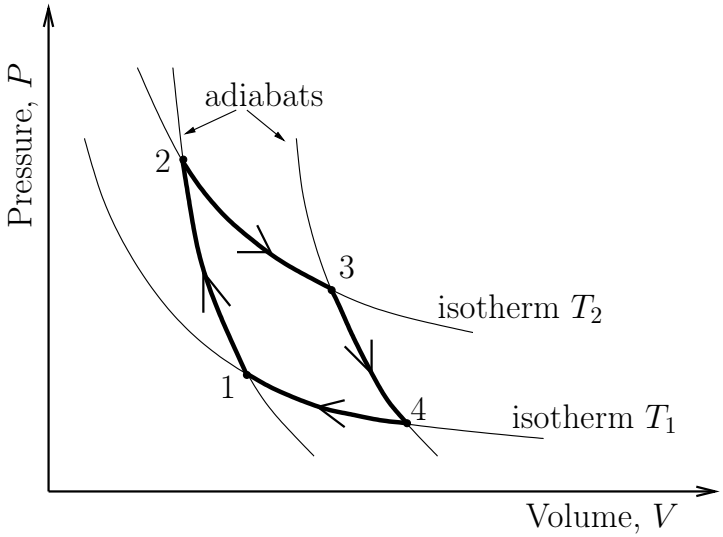
b) Derive the equation of state for the system (an equation of state is a relation between the thermodynamic variables N, P, T, V)

c) Determine the energy U.

d) Identify the system by arguing in terms the results in b) and c).

Problem 3 (40 %)

Some substance undergoes a series of processes ending at the point of origin. The cycle is depicted below:



The cycle consists of 4 quasistatic, reversible processes

$1 \to 2$ adiabatic compression

$2 \to 3$ isothermal expansion

$3 \to 4$ adiabatic expansion

$4 \to 1$ isothermal compression

The thermal energy of the substance is given as $U(T) = aT$, where a is a constant.

a) State for each of the sub-processes in the cycle $i \to j$, if each of the quantities $\Delta U_{i\to j}$, $Q_{i\to j}$, and $W_{i\to j}$ is positive, negative or zero.

What is the total change in energy ΔU_{tot} after one complete cycle $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$?

b) State the entropy change for each of the four subprocesses in the cycle in terms of the relevant quantities, i.e., heat and temperature.

What is the total change in entropy ΔS_{tot} of the substance after one complete cycle?

c) Draw the cycle in a (S, T)-diagram.

d) Show that the efficiency of the cycle defined as $e = -W_{tot}/Q_{2\to 3}$ (i.e., the total work done *by* the substance on the surroundings compared to the heatinput into the substance) is given by

$$e = 1 - T_1/T_2. \tag{2}$$

End of the exam.

Skriftlig 4-timers prøve i
Termodynamik og Statistisk Mekanik
Tirsdag 06/01-15, 9.00-13.00

Opgavesættet består af to opgaver på ialt to sider. Vægtning er angivet på opgaverne, hvert underspørgsmål inden for en opgave har samme vægt.

Skriveredskaber og en simpel lommeregner (dvs. en, som **ikke** kan lave grafer eller symbolsk manipulation) er tilladt. "Golden Sheet" (2 sider) er vedlagt. Ingen øvrige hjælpemidler er tilladt.

Opgave 1 (50 %)

I en kvasistatisk adiabatisk proces for en ideal gas gælder at $PV^\gamma =$ konstant, hvor den adiabatiske eksponent, γ, er givet ved $\gamma = C_P/C_V$.

a) Udtryk γ for en idealgas i termer af frihedsgrader.

b) Hvad er sluttrykket, P_f, for idealgassen efter en adiabatisk kompression fra start-volumen og -tryk (V_i, P_i) til slutvolumen V_f?

Er sluttrykket P_f større eller mindre for en diatomar idealgas end for en monoatomar idealgas ved den samme adiabatiske kompression?

c) Skitser den adiabatiske kompression som reducerer gassens volumen fra V_i to V_f i et (V, P)-diagram for både den mono- og diatomare idealgas startende fra samme starttryk, P_i.

Er arbejdet størst for the monoatomare eller den diatomare gas?

d) Vis at the totaldiffentialet af entropien *generelt* kan skrives

$$dS = \frac{C_V}{T\beta_V}dP + \frac{C_P}{TV\alpha_P}dV\,. \tag{1}$$

Vis at den tilførte varme til et system under en kvasistatisk isobar volumenændring fra V_0 to V_1 er givet ved

$$Q^{\text{isobar}} = \int_{V_0}^{V_1} \frac{C_P}{V\alpha_P}dV \tag{2}$$

og den tilførste varme under en kvasistatisk isochor trykændring fra P_0 to P_1 er givet ved

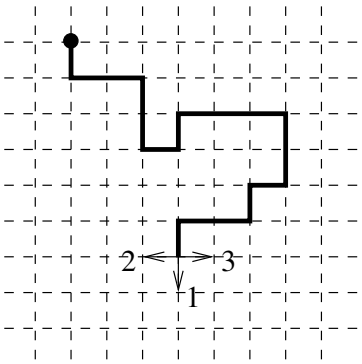
$$Q^{\text{isochor}} = \int_{P_0}^{P_1} \frac{C_V}{\beta_V}dP \tag{3}$$

For at finde γ for en gas eksperimentelt, kan man benytte følgende procedure: en bestemt mængde gas med starttryk P_0 og startvolumen V_0 varmes op. Forsøget gentages to gange: først holdes volumen konstant ved V_0 og trykket stiger fra P_0 til P_1, dernæst holdes trykket konstant på P_0 og volumen ændres fra V_0 til V_1. Den samme mængde varme tilføres gassen i de to forsøg.

e) Under antagelse af at gassen er en idealgas, bestem γ udtrykt ved de målte størrelser, V_0, P_0, V_1, P_1.

Opgave 2 (50 %)

En "sti" på et kvadratisk gitter udgør en simpel model for en to-dimensional polymer. På hvert gitterpunkt kan polymeren enten fortsætte ligeud (mulighed 1 på figuren) eller vælge mellem de to retninger vinkelret på den nuværende retning (mulighed 2 og 3 på figuren). Hver gang polymeren bøjes i en ret vinkel koster det en energi, ϵ. En given polymerform har således en total energi, som er givet ved ϵ gange antallet af rette vinkler, m. Det antages, at startsegmentet er fikseret et sted på gitteret og at polymeren består af $N+1$ segmenter. Enhver mulig polymer-form under disse antagelser er en tilstand for dette system.



a) Argumenter for at multipliciteten (dvs. antallet af polymerformer) for den totale energi $U = m\epsilon$, hvor $0 \leq m \leq N$, er givet ved

$$\Omega = 2^m \binom{N}{m} . \tag{4}$$

b) Under antagelse af at $m, N \gg 1$ og at $N - m \gg 1$, vis at entropien er givet ved

$$S = k_B \left[m \ln 2 + N \ln N - m \ln m - (N-m) \ln(N-m) \right] . \tag{5}$$

c) Bestem temperaturen af dette system som en funktion af energien, U, og længden af polymeren, N.

I det følgende antages det at polymeren er i termisk kontakt med et varmebad med temperaturen T.

d) Vis at tilstandssummen for systemet er givet ved

$$Z = \left(1 + 2e^{-\epsilon/k_B T}\right)^N , \tag{6}$$

og beregn middelenergien udfra Z.

Hjælp fra den matematiske værktøjskasse: $\sum_{m=0}^{N} \binom{N}{m} r^m = (1+r)^N$.

e) Bestem entropien, S, som funktion af temperaturen og bestem højtemperaturgrænsen for entropien.

End of the exam.

Written 4-hour exam in
Thermodynamics and Statistical Mechanics, 7.5 ECTS course
Tuesday 06/01-15, 9.00-13.00

The exam consists of two problems on two pages altogether. The weights of the problems are given, and within a problem each sub-question has the same weight.

Writing aids and a simple calculator (that is one which can **not** do graphs or symbolic manipulations) are allowed. The "Golden sheet" (2 pages) are included with this exam. No further helping aids are allowed.

Problem 1 (50 %)

For a quasistatic adiabatic process of an ideal gas, we have $PV^\gamma = \text{const}$, where the adiabatic exponent, γ, is given as $\gamma = C_P/C_V$.

a) Express γ for an ideal gas in terms of degrees of freedom.

b) What is the final pressure, P_f of an ideal gas when compressed adiabatically from the initial volume and pressure (V_i, P_i) to the final volume V_f?

Is the final pressure P_f larger or smaller for a diatomic ideal gas compared to a monoatomic ideal gas for the same adiabatic compression?

c) Sketch the adiabatic compression process reducing the gas volume from V_i to V_f in a (V, P)-diagram for both the monoatomic and the diatomic gas starting at the same pressure, P_i.

Is the work done larger for monoatomic or the diatomic gas?

d) Show the total differential of the entropy *in general* can be written as

$$dS = \frac{C_V}{T\beta_V}dP + \frac{C_P}{TV\alpha_P}dV \tag{1}$$

Show that the heat supplied to a system during an isobaric quasistatic volume change from V_0 to V_1 change is given by

$$Q^{\text{isobar}} = \int_{V_0}^{V_1} \frac{C_P}{V\alpha_P}dV \tag{2}$$

and likewise that the heat supplied to a system during an isochoric quasistatic pressure change from P_0 to P_1 is given by

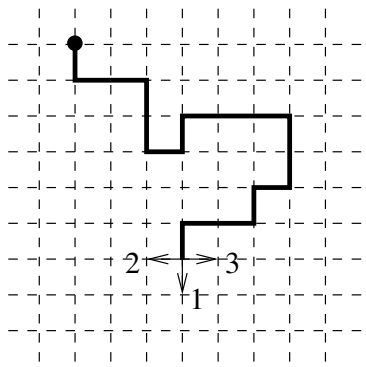
$$Q^{\text{isochor}} = \int_{P_0}^{P_1} \frac{C_V}{\beta_V}dP \tag{3}$$

To find γ of a gas experimentally, one can use the following method: A certain amount of gas with initial pressure P_0 and volume V_0 is heated. The experiment is done twice: first at a constant volume V_0 with the pressure changing from P_0 to P_1 and then at a constant pressure P_0 with the volume changing V_0 from V_1. The heat supplied to the gas is the same in both experiments.

e) Assuming the gas is ideal, find $\gamma = C_P/C_V$ in terms of the measured quantities, V_0, P_0, V_1, P_1.

Problem 2 (50 %)

A simple model for a polymer in two dimensions is that of a path on a square lattice. At every lattice point the polymer can either go straight (option 1 in the figure) or choose between the two directions in a right angle with respect to its current direction (options 2 and 3 in the figure). Each time it bends in a right angle, it pays a bending energy, ϵ. Thus, for a given shape of the polymer the total bending energy of the polymer is ϵ times the number of right angle turns, m. We assume that the starting segment of the polymer is fixed somewhere on the lattice and that the polymer consists of $N+1$ segments. Each possible shape of the polymer is a state of this system.



a) Argue that the multiplicity (i.e., number of polymer shapes) for a total bending energy $U = m\epsilon$, where $0 \leq m \leq N$, is given by

$$\Omega = 2^m \binom{N}{m} . \tag{4}$$

b) Assuming that $m, N \gg 1$ and that $(N-m) \gg 1$, show that the entropy is given by

$$S = k_B \left[m \ln 2 + N \ln N - m \ln m - (N-m) \ln(N-m) \right] . \tag{5}$$

c) Determine the temperature of this system as a function of the total energy U and the length N of the polymer.

In the following we assume the polymer is in thermal contact with a heat reservoir at temperature T.

d) Show that the partition function for this system is given as

$$Z = \left(1 + 2e^{-\epsilon/k_B T}\right)^N , \tag{6}$$

and calculate the average energy from Z.

Help from the mathematical toolbox: $\displaystyle\sum_{m=0}^{N} \binom{N}{m} r^m = (1+r)^N$.

e) Determine the entropy, S, as a function of temperature, and find the high temperature limit of the entropy.

End of the exam.

Skriftlig 4-timers prøve i
Termodynamik og Statistisk Mekanik
Tirsdag 06/01-15, 9.00-13.00

Opgavesættet består af to opgaver på ialt to sider. Vægtning er angivet på opgaverne, og hvert underspørgsmål inden for en opgave har samme vægt.

Skriveredskaber og en simpel lommeregner (dvs. en, som **ikke** kan lave grafer eller symbolsk manipulation) er tilladt. "Golden Sheet" (2 sider) er vedlagt. Ingen øvrige hjælpemidler er tilladt.

Opgave 1 (60 %)

I en kvasistatisk adiabatisk proces for en ideal gas gælder at $PV^\gamma =$ konstant, hvor den adiabatiske eksponent, γ, er givet ved $\gamma = C_P/C_V$.

a) Udtryk γ for en idealgas ved antallet af frihedsgrader.

b) Hvad er sluttrykket, P_f, for idealgassen efter en adiabatisk kompression fra start-volumen og -tryk (V_i, P_i) til slutvolumen V_f?

Er sluttrykket P_f større eller mindre for en diatomar idealgas end for en monoatomar idealgas ved den samme adiabatiske kompression?

c) Skitser den adiabatiske kompression som reducerer gassens volumen fra V_i to V_f i et (V, P)-diagram for både den mono- og diatomare idealgas startende fra samme starttryk, P_i.

Er arbejdet størst for the monoatomare eller den diatomare gas?

d) Vis at the totaldiffentialet af entropien *generelt* kan skrives

$$dS = \frac{C_V}{T\beta_V}dP + \frac{C_P}{TV\alpha_P}dV\,. \tag{1}$$

e) Vis at den tilførte varme til et system under en kvasistatisk isobar volumenændring fra V_0 to V_1 er givet ved

$$Q^{\text{isobar}} = \int_{V_0}^{V_1} \frac{C_P}{V\alpha_P}dV \tag{2}$$

og den tilførste varme under en kvasistatisk isochor trykændring fra P_0 to P_1 er givet ved

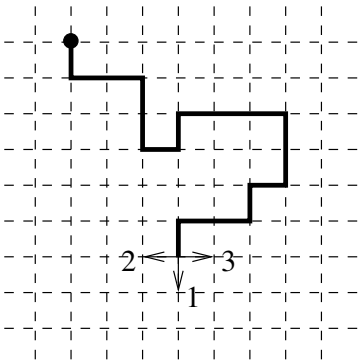
$$Q^{\text{isochor}} = \int_{P_0}^{P_1} \frac{C_V}{\beta_V}dP \tag{3}$$

For at finde γ for en gas eksperimentelt, kan man benytte følgende procedure: en bestemt mængde gas med starttryk P_0 og startvolumen V_0 varmes op. Forsøget gentages to gange: først holdes volumen konstant ved V_0 og trykket stiger fra P_0 til P_1, dernæst holdes trykket konstant på P_0 og volumen ændres fra V_0 til V_1. Den samme mængde varme tilføres gassen i de to forsøg.

f) Under antagelse af at gassen er en idealgas, bestem γ udtrykt ved de målte størrelser, V_0, P_0, V_1, P_1.

Opgave 2 (40 %)

En "sti" på et kvadratisk gitter udgør en simpel model for en to-dimensional polymer. På hvert gitterpunkt kan polymeren enten fortsætte ligeud (mulighed 1 på figuren) eller vælge mellem de to retninger vinkelret på den nuværende retning (mulighed 2 og 3 på figuren). Hver gang polymeren bøjes i en ret vinkel koster det en energi, ϵ. En given polymerform har således en total energi, som er givet ved ϵ gange antallet af rette vinkler, m. Det antages, at startsegmentet er fikseret et sted på gitteret og at polymeren består af $N+1$ segmenter. Enhver mulig polymer-form under disse antagelser er en tilstand for dette system.



a) Argumenter for at multipliciteten (dvs. antallet af polymerformer) for den totale energi $U = m\epsilon$, hvor $0 \leq m \leq N$, er givet ved

$$\Omega = 2^m \binom{N}{m} . \tag{4}$$

b) Under antagelse af at $m, N \gg 1$ og at $N - m \gg 1$, vis at entropien er givet ved

$$S = k_B \left[m \ln 2 + N \ln N - m \ln m - (N-m) \ln(N-m) \right] . \tag{5}$$

c) Bestem temperaturen af dette system som en funktion af energien, U, og længden af polymeren, N.

d) Den totale energi for polymeren som funktion af temperatur, T, og længde, N, er givet ved

$$U = 2N\epsilon \left(e^{\frac{\epsilon}{k_B T}} + 2 \right)^{-1} . \tag{6}$$

Bestem varmekapaciteten, C_N, for systemet.

End of the exam.

Written 4-hour exam in
Thermodynamics and Statistical Mechanics, 5 ECTS course
Tuesday 06/01-15, 9.00-13.00

The exam consists of two problems on two pages altogether. The weights of the problems are given, and within a problem each sub-question has the same weight.

Writing aids and a simple calculator (that is one which can **not** do graphs or symbolic manipulations) are allowed. The "Golden sheet" (2 pages) are included with this exam. No further helping aids are allowed.

Problem 1 (60 %)

For a quasistatic adiabatic process of an ideal gas, we have PV^γ = constant, where the adiabatic exponent, γ, is given as $\gamma = C_P/C_V$.

a) Express γ for an ideal gas in terms of degrees of freedom.

b) What is the final pressure, P_f of an ideal gas when compressed adiabatically from the initial volume and pressure (V_i, P_i) to the final volume V_f?

Is the final pressure P_f larger or smaller for a diatomic ideal gas compared to a monoatomic ideal gas for the same adiabatic compression?

c) Sketch the adiabatic compression process reducing the gas volume from V_i to V_f in a (V, P)-diagram for both the monoatomic and the diatomic gas starting at the same pressure, P_i.

Is the work done larger for monoatomic or the diatomic gas?

d) Show the total differential of the entropy *in general* can be written as

$$dS = \frac{C_V}{T\beta_V}dP + \frac{C_P}{TV\alpha_P}dV \tag{1}$$

e) Show that the heat supplied to a system during an isobaric quasistatic volume change from V_0 to V_1 change is given by

$$Q^{\text{isobar}} = \int_{V_0}^{V_1} \frac{C_P}{V\alpha_P}dV \tag{2}$$

and likewise that the heat supplied to a system during an isochoric quasistatic pressure change from P_0 to P_1 is given by

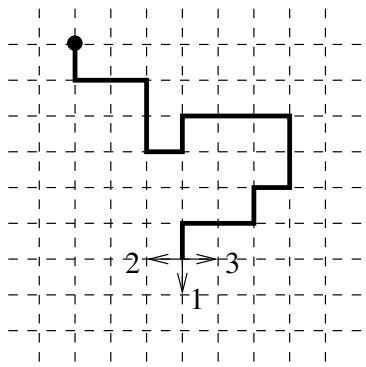
$$Q^{\text{isochor}} = \int_{P_0}^{P_1} \frac{C_V}{\beta_V}dP \tag{3}$$

To find γ of a gas experimentally, one can use the following method: A certain amount of gas with initial pressure P_0 and volume V_0 is heated. The experiment is done twice: first at a constant volume V_0 with the pressure changing from P_0 to P_1 and then at a constant pressure P_0 with the volume changing V_0 from V_1. The heat supplied to the gas is the same in both experiments.

f) Assuming the gas is ideal, find $\gamma = C_P/C_V$ in terms of the measured quantities, V_0, P_0, V_1, P_1.

Problem 2 (40 %)

A simple model for a polymer in two dimensions is that of a path on a square lattice. At every lattice point the polymer can either go straight (option 1 in the figure) or choose between the two directions in a right angle with respect to its current direction (options 2 and 3 in the figure). Each time it bends in a right angle, it pays a bending energy, ϵ. Thus, for a given shape of the polymer the total energy of the polymer is ϵ times the number of right angle turns, m. We assume that the starting segment of the polymer is fixed somewhere on the lattice and that the polymer consists of $N+1$ segments. Each possible shape of the polymer is a state of this system.



a) Argue that the multiplicity (i.e., number of polymer shapes) for a total energy $U = m\epsilon$, where $0 \leq m \leq N$, is given by

$$\Omega = 2^m \binom{N}{m} . \tag{4}$$

b) Assuming that $m, N \gg 1$ and that $(N-m) \gg 1$, show that the entropy is given by

$$S = k_B \left[m \ln 2 + N \ln N - m \ln m - (N-m) \ln(N-m) \right] . \tag{5}$$

c) Determine the temperature of this system as a function of the total energy U and the length N of the polymer.

d) The total energy as a function of temperature, T, and length, N, is given by

$$U = 2N\epsilon \left(e^{\frac{\epsilon}{k_B T}} + 2 \right)^{-1} . \tag{6}$$

Determine the heat capacity, C_N, of the system.

End of the exam.

Skriftlig 4-timers prøve i
Termodynamik og Statistisk Mekanik, 5 og 7.5 ECTS
Mandag 23/02-15, 9.00-13.00

Opgavesættet består af to opgaver på ialt to sider. Vægtning er angivet på opgaverne, hvert underspørgsmål inden for en opgave har samme vægt.

Skriveredskaber og en simpel lommeregner (dvs. en, som **ikke** kan lave grafer eller symbolsk manipulation) er tilladt. "Golden Sheet" (2 sider) er vedlagt. Ingen øvrige hjælpemidler er tilladt.

Problem 1 (60 %) – 5 og 7.5 ECTS

Betragt et system bestående af et fast stof i ligevægt med dens gas. Gassen kan betragtes som en ideal gas og volumen af det faste stof, V_s, er forsvindende sammenlignet med volumen af gassen, V_g.

a) Skitser et (T, P) fasediagram (indeholdende trippel-punktet samt co-eksistenslinier mellem de tre standard tilstande af et stof). Marker hvor i (T, P) diagrammet dette system befinder sig.

b) Hvilken fysisk størrelse bestemmer hvilken tilstand, der er den stabile? Angiv kriteriet for co-eksistenslinierne.

c) Vis at hældningen af co-eksisetenslinien mellem det faste stof og gassen kan approksimeres ved

$$\frac{dP}{dT} \approx \frac{\Delta S}{V_g}\,, \tag{1}$$

hvor $\Delta S = S_g - S_s$ er forskellen i entropi mellem de to tilstande.

d) Hvilket fortegn har $\frac{dP}{dT}$ i lign. (1) (er hældningen af co-eksistenslinien positiv eller negativ)? Begrund dit svar.

e) Temperaturafhængigheden af damptrykket (dvs. det tryk hvor det faste stof 'fordamper' eller $P(T)$ for co-eksistenslinien mellem fast stof og gas) er i et temperaturområde givet ved

$$\ln P = a - \frac{b}{T} - c \ln T\,, \tag{2}$$

hvor a, b og c er positive konstanter.

Bestem temperaturafhængigheden af den latente varme, $L = T\Delta S$.

f) En simplere antagelse er, at den latente varme, $L = T\Delta S$, er *uafhængig* af både temperatur og tryk.

Opskriv en differentialligning i T og P ud fra lign. (1) og vis at temperature afhængigheden af damptrykket i det tilfælde er givet ved

$$P = P_0 \exp\left\{-\frac{L}{Nk_B}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\right\}\,, \tag{3}$$

hvor (T_0, P_0) er et referencepunkt.

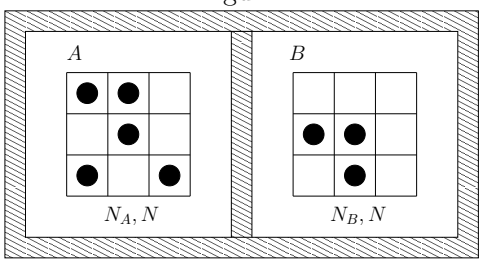
Problem 2 (40 %) – 5 ECTS

Vi betragter et system bestående af to identiske del-systemer, A og B, som hver har N pladser. På hver plads kan der sidde een eller ingen partikel.

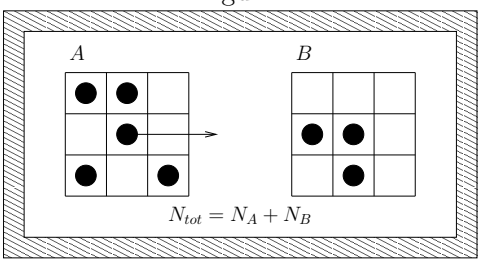
Først betragter vi det tilfælde hvor de to systemer er isolerede (Figur 1) og antallet af partikler i hver af de to delsystemer, N_A og N_B, er således fast.

Multipliciteten for et givet antal partikler N_x i hvert del-system er $\Omega_{N_x,N} = \binom{N}{N_x}$ (som angiver på hvor mange forskellige måder kan man placere N_x identiske partikler på N pladser).

Figur 1



Figur 2



Bemærk at figurerne er illustrationer og ikke den faktiske model, dvs. du kan ikke antage at det totale antal partikler er 9.

a) Under antagelse af at $N_x, N, N - N_x \gg 1$, vis at entropien er givet ved

$$S_x = k_B \left[N \ln N - N_x \ln N_x - (N - N_x) \ln(N - N_x) \right] , \tag{4}$$

hvor $x = A, B$.

Nu fjernes væggen mellem de to del-systemer så de kan udveksle partikler (Figur 2). Det totale antal partikler er stadig fastholdt, $N_{\text{tot}} = N_A + N_B$.

b) Hvad er multipliciteten af makrotilstanden med alle partikler placeret i del-system A, $N_A = N_{\text{tot}}$?

Hvor mange forskellige makrotilstande er der ialt for systemet for et givet antal partikler N_{tot}?

c) Hvad er den totale multiplicitet af systemet? Beregn den totale entropi og sammenlign med entropien for tilstanden $N_A = N_B$. Kommenter resultatet.

d) Hvad er kriteriet for ligevægt? Brug dette til at vise at der i ligevægt gælder at $\frac{\partial S_A}{\partial N_A} = \frac{\partial S_B}{\partial N_B}$.

Problem 2 (40 %) – 7.5 ECTS

Vi betragter en model med N mulige pladser. På hver plads kan der sidde nul eller en partikel. Dette kan fx. fortolkes som en model for adsorption af partikler på en overflade.

Hver partikel kan sidde i to forskellige orienteringer: den ene tilfører systemet energien $\varepsilon > 0$, den anden tilfører systemet energien 2ε. (En tom plads bidrager med 0ε til energien af systemet.)

Vi antager at modellen er i termisk og diffusiv ligevægt med et reservior af partikler og antallet af partikler i modellen kan således variere.

a) Argumenter for at tilstandssummen for en enkelt adsorberet partikel er

$$Z_a = e^{-\beta\varepsilon} + e^{-2\beta\varepsilon}\,, \beta = \frac{1}{k_B T} \tag{5}$$

og vis at tilstandssummen for hele systemet er givet ved

$$Z = (1 + Z_a)^N\,. \tag{6}$$

b) Bestem middelenergien af en enkelt adsorberet partikel, $\langle E_a \rangle$, og middelenergien af hele systemet, $\langle E \rangle$.

c) Bestem temperaturafhængigheden af antallet af adsorberede partikler, N_a.

Hint: resultaterne fra b) kan bruges til dette.

d) Bestem høj- og lavtemperaturgrænserne N_a. Kommenter på grænserne.

Eksamenssættet er slut.

Written 4-hour exam in
Thermodynamics and Statistical Mechanics, 5 and 7.5 ECTS course
Monday 23/02-15, 9.00-13.00

The exam consists of 2 problems on 2 pages altogether. The weights of the problems are given, and within a problem each sub-question has the same weight.

Writing aids and a simple calculator (that is one which can **not** do graphs or symbolic manipulations) are allowed. The "Golden sheet" (2 pages) are included with this exam. No further helping aids are allowed.

Problem 1 (60 %) – both 5 and 7.5 ECTS

Consider a system consisting of a solid in equilibrium with its gas. The gas may be considered ideal and volume of the solid, V_s, is negligible compared to the volume of the gas, V_g.

a) Sketch a (T, P) phase diagram (containing the triple point and co-existence lines between the three standard phases). Mark where on this diagram we may find this system.

b) State the physical quantity that determines which phase is the stable phase (at any given point (T, P) in the phase diagram) as well as the criterion for the co-existence lines.

c) Show that the slope of the solid-gas co-existence line for this system can be approximated by

$$\frac{dP}{dT} \approx \frac{\Delta S}{V_g}\,, \tag{1}$$

where $\Delta S = S_g - S_s$ is the difference in entropy between the two phases.

d) What is the sign of $\frac{dP}{dT}$ in Eq. (1) (is the slope positive or negative)? State your argument.

e) The temperature dependence of the vapour pressure (i.e. the pressure where the solid evaporates or, equivalently, $P(T)$ for the solid-gas co-existence line) is in a certain temperature range for this system given by

$$\ln P = a - \frac{b}{T} - c \ln T\,, \tag{2}$$

where a, b, and c are positive constants.

Determine the temperature dependence of the latent heat, $L = T\Delta S$.

f) In a simpler approach, we may assume that the latent heat $L = T\Delta S$ is *independent* of temperature and pressure.

Write up a differential equation in T and P from Eq. (1) and show that the temperature dependence of the vapour pressure in that case is given by

$$P = P_0 \exp\left\{-\frac{L}{Nk_B}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\right\}\,, \tag{3}$$

where (T_0, P_0) is a reference point.

Problem 2 (40 %) – 5 ECTS

Consider a system consisting of two identical sub-systems, A and B, each with N available sites. Each site can hold zero or one particle.

First we look at the case (Figure 1), where the two systems are isolated and thus number of particles in each subsystem, N_A and N_B, is fixed.

The multiplicity for a given number of particles N_x in each subsystem is $\Omega_{N_x,N} = \binom{N}{N_x}$ (describing how many unique ways we can place N_x identical particles in N positions).

Figure 1

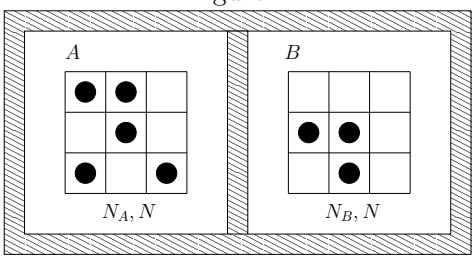
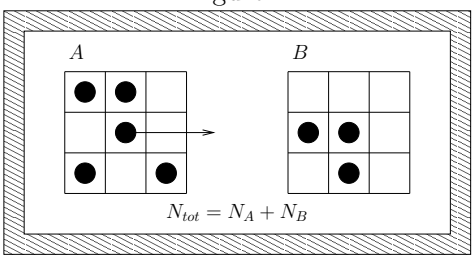


Figure 2



Note that the figures are illustrations and not the actual model, i.e., $N_{tot} \neq 9$.

a) Assuming that $N_x, N, N - N_x \gg 1$, show that the entropy is given as

$$S_x = k_B \left[N \ln N - N_x \ln N_x - (N - N_x) \ln(N - N_x) \right] , \tag{4}$$

where $x = A, B$.

Now we remove the wall between the two systems allowing them to exchange particles (Figure 2). The total number of particles is fixed, $N_{\text{tot}} = N_A + N_B$.

b) What is the multiplicity of the macrostate with all particles in subsystem A, $N_A = N_{\text{tot}}$?

How many different macrostates in total are available to the system for a given N_{tot}?

c) What is the total multiplicity of the system? Calculate the total entropy and compare to the entropy of the the macrostate with $N_A = N_B$. Comment on the result.

d) What is the criterion for equilibrium? Use this to argue that $\frac{\partial S_A}{\partial N_A} = \frac{\partial S_B}{\partial N_B}$ in equilibrium.

Problem 2 (40 %) – 7.5 ECTS

Consider a model-system with N possible available sites. Each site can hold zero or one particle. This can be interpreted as a model for adsorption of particles to a surface.

Each particle has two possible orientations, one adding the energy $\varepsilon > 0$ to the system, and another adding the energy 2ε to the system. (An empty position then contributes 0ε to the energy.)

We assume that the model is in thermal and diffusive equilibrium with a reservoir of particles so the number of particles in the model can vary.

a) Argue that the partition function for a single adsorbed particle is

$$Z_a = e^{-\beta\varepsilon} + e^{-2\beta\varepsilon}\,, \beta = \frac{1}{k_B T} \tag{5}$$

and show that the partition function for the system as a whole is given as

$$Z = (1 + Z_a)^N\,. \tag{6}$$

b) Determine the average energy of a single adsorbed particle, $\langle E_a \rangle$, and the average energy of the system as a whole, $\langle E \rangle$.

c) Determine the temperature dependence of the number of adsorbed particles, N_a.

Hint: results from b) may be used for this.

d) Determine the high and low temperature limits of N_a. Comment on these limits.

End of the exam.

Skriftlig 4-timers prøve i
Termodynamik og Statistisk Mekanik
Tirsdag 05/01-16, 10.00-14.00

Opgavesættet består af tre opgaver på ialt to sider. Vægtning er angivet på opgaverne, og hvert underspørgsmål inden for en opgave har samme vægt.

Skriveredskaber og en simpel lommeregner (dvs. en, som **ikke** kan lave grafer eller symbolsk manipulation) er tilladt. "Golden Sheet" (2 sider) er vedlagt. Ingen øvrige hjælpemidler er tilladt.

Problem 1 (40 %)

a) Vis at der for en idealgas gælder følgende sammenhæng

$$C_p = C_V + Nk_B \,. \tag{1}$$

b) Vis at total-differentialet af entropien for en ideal gas kan skrives som

$$dS = \frac{C_V}{T} dT + \frac{Nk_B}{V} dV \,. \tag{2}$$

c) Vis at Lign. (2) leder til følgende relation for en kvasistatisk, adiabatisk volumen ændring i en ideal gas

$$P_f = P_i \left(\frac{V_i}{V_f} \right)^{\gamma} , \tag{3}$$

hvor $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ og i, f refererer til henholdsvis start- og sluttilstand.

En blanding af 0.1 mol af en mono-atomar gas og 0.2 mol af en di-atomar gas, som kan antages at være et 'ideal mixture' af to idealgasser, fylder 4 liter og har temperaturen 300 K. Gasblandingen komprimeres kvasistatisk og adiabatisk.

d) Vis at Lign. (3) også er opfyldt for blandingen, dog med $\gamma = \dfrac{C_{P,\text{mono}} + C_{P,\text{di}}}{C_{V,\text{mono}} + C_{V,\text{di}}}$.

e) Beregn trykændringen for gasblandingen, hvis den komprimeres 1% kvasistatisk og adiabatisk.

Problem 2 (20 %)

Vi betragter et hydrogenatom i termisk ligevægt med et varmebad ved temperaturen T. Hvis grundtilstanden tilskrives energien $E_0 = 0$, vil den første exciterede tilstand have energien $E_1 = 10.2$ eV. Ignoreres spin frihedsgrader, vil grundtilstanden være unik, mens den exciterede tilstand er 4 gange udartet.

a) Hvis kun grundtilstanden og den første exciterede tilstand tages i betragtning, opskriv da tilstandsfuntionen for hydrogenatomet.

b) Ved hvilken temperatur er det mere sandsynligt at hydrogenatomet er i den exciterede tilstand end i grundtilstanden?

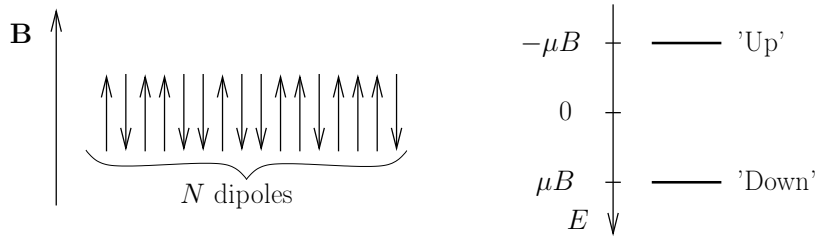
c) Skitser *kvalitativt* Helzholtz fri energi som funktion af temperaturen ved fastholdt volumen.

Problem 3 (40 %)

En 'two-state' paramagnet med N dipoler (hvor N er stor) er illustreret nedenfor. Dipolerne kan enten være orienteret parallelt med det påtrykte **B**-felt (tilstanden 'Up') hvilket bidrager med $-\mu B$ til den termiske energi, eller anti-parallelt (tilstanden 'Down') hvilket bidrager med μB til den termiske energi. Den termiske energi af systemet er således givet ved

$$U = -\mu B N_\uparrow + \mu B(N - N_\uparrow) = \mu B(N - 2N_\uparrow)\,, \tag{4}$$

hvor $N_\uparrow$ er antallet af dipoler i tilstanden 'Up'.



a) For et magnetfelt **B** og en given termisk energi, U, vis at entropien er givet ved

$$S \approx k_B \left[N \ln N - N_\uparrow \ln N_\uparrow - (N - N_\uparrow)\ln(N - N_\uparrow)\right]\,. \tag{5}$$

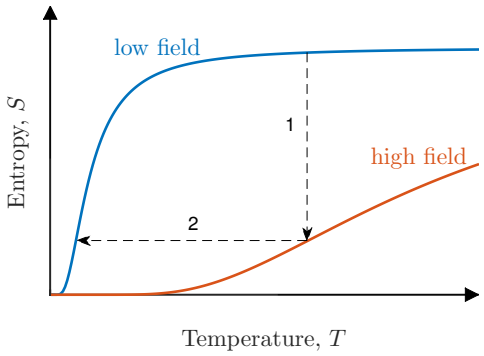
b) Vis at temperaturen af systemet som funktion af den termiske energi, U, er givet ved

$$T = \frac{2\mu B}{k_B}\left(\ln\left(\frac{N - U/\mu B}{N + U/\mu B}\right)\right)^{-1}\,. \tag{6}$$

c) Beregn temperaturafhængigheden af den termiske energi, U.

For en given endelig temperatur er høj-felts grænsen for energien $U \approx -N\mu B$. Hvad er den fysiske fortolkning af denne grænse? (Sammenlign eventuelt dette udtryk for U med Lign. (4)).

Nedenfor ses entropien skitseret som funktion af temperaturen for en høj og en lav værdi af det påtrykte **B**-felt.



d) De to processer (1 og 2) markeret med stiplede linier i (T, S)-plottet forklarer skematisk konceptet bag "magnetisk køling".

Beskriv hvad der foregår i de to processer.

Slut på eksamenssættet.

Written 4-hour exam in
Thermodynamics and Statistical Mechanics, 5 ECTS course
Tuesday 05/01-2016, 10.00-14.00

The exam consists of three problems on two pages altogether. The weights of the problems are given, and within a problem each sub-question has the same weight.

Writing aids and a simple calculator (that is one which can **not** do graphs or symbolic manipulations) are allowed. The "Golden sheet" (2 pages) is included with this exam. No further helping aids are allowed.

Problem 1 (40 %)

a) Show that for an ideal gas we have

$$C_p = C_V + Nk_B \,. \tag{1}$$

b) Show that the total differential of the entropy for an ideal gas can be written

$$dS = \frac{C_V}{T}dT + \frac{Nk_B}{V}dV \,. \tag{2}$$

c) Show that for a quasistatic adiabatic volume change of an ideal gas, Eq. (2) leads to the following relation

$$P_f = P_i \left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{\gamma} \,, \tag{3}$$

where $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ and subscripts i, f refer to initial and final states, respectively.

A mixture of 0.1 mole of a monatomic gas and 0.2 mole of a diatomic gas, considered an ideal mixture of two ideal gases, is initially at 300 K and occupies a volume 4 litres. The gas mixture is compressed quasistatically and adiabatically.

d) Show that Eq. (3) is obeyed for the mixture, however with $\gamma = \dfrac{C_{P,\text{mono}} + C_{P,\text{di}}}{C_{V,\text{mono}} + C_{V,\text{di}}}$.

e) Calculate the change in pressure for this gas mixture when compressed 1% quasistatically and adiabatically.

Problem 2 (20 %)

Consider a hydrogen atom in thermal equilibrium with a heat bath of temperature T. Ignoring the electron spin degree of freedom, the first excited state of a hydrogen atom is four-fold degenerate with an energy of $E_1 = 10.2$ eV, if one takes the ground state to have the energy $E_0 = 0$ eV.

a) Considering only the ground state and the first excited state, write up the partition function for the hydrogen atom.

b) At what temperature is the atom more likely to be found in the first excited state than the ground state?

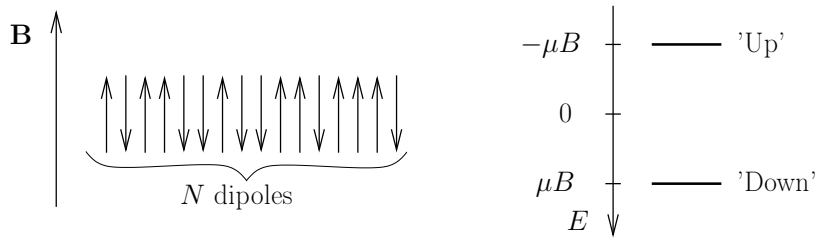
c) *Qualitatively*, sketch the Helmholtz free energy as a function of temperature at fixed volume.

Problem 3 (40 %)

Consider the two-state paramagnet with N dipoles (N is large), illustrated below. The dipoles can either be oriented parallel to the applied magnetic field $\mathbf{B}$ (the state 'Up'), contributing $-\mu B$ to the energy, or anti-parallel (the state 'Down'), contributing μB to the energy. The total thermal energy of the system is thus

$$U = -\mu B N_\uparrow + \mu B(N - N_\uparrow) = \mu B(N - 2N_\uparrow)\,, \tag{4}$$

where $N_\uparrow$ is the number of dipoles in the state 'Up'.



a) For an applied field $\mathbf{B}$ and a given thermal energy, U, show that the entropy is given by

$$S \approx k_B \left[N \ln N - N_\uparrow \ln N_\uparrow - (N - N_\uparrow)\ln(N - N_\uparrow)\right]\,. \tag{5}$$

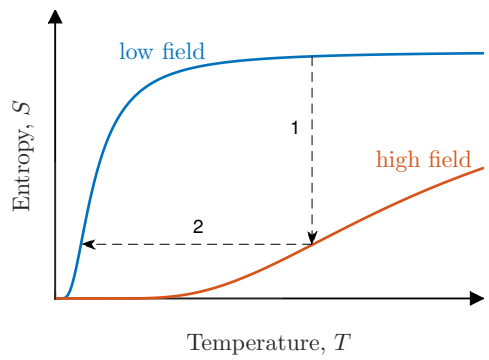
b) Show that the temperature of the system as a function of U is given by

$$T = \frac{2\mu B}{k_B}\left(\ln\left(\frac{N - U/\mu B}{N + U/\mu B}\right)\right)^{-1}\,. \tag{6}$$

c) Calculate the temperature dependence of the thermal energy, U.

At a given finite temperature we have $U \approx -N\mu B$ in the high-field limit. What is the physical interpretation of that? (You may compare this expression for U to the one stated in Eq. (4)).

The entropy as a function of temperature is sketched below at a high and a low value of the applied $\mathbf{B}$ field.



d) The two processes (1 and 2) marked by the dashed lines in the (T, S)-plot schematically explain the concept of "magnetic cooling".

Describe what is going on in the two processes.

End of the exam.

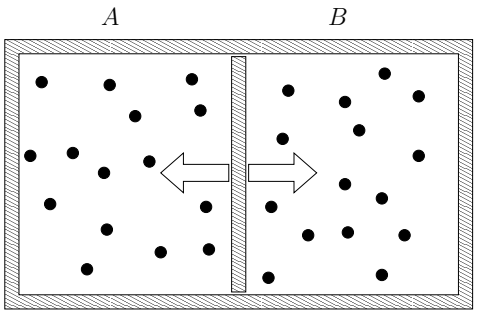
Skriftlig 4-timers prøve i
Termodynamik og Statistisk Mekanik
Tirsdag 10/02-2016, 10.00-14.00

Opgavesættet består af tre opgaver på i alt to sider. Vægtning er angivet på opgaverne, og hvert underspørgsmål inden for en opgave har samme vægt.

Skriveredskaber og en simpel lommeregner (dvs. en, som **ikke** kan lave grafer eller symbolsk manipulation) er tilladt. "Golden Sheet" (2 sider) er vedlagt. Ingen øvrige hjælpemidler er tilladt.

Problem 1 (40 %)

En isoleret beholder er delt i to kamre, A og B, af en termisk isolerende væg som kan bevæges friktionsløst (se illustrationen). Begge kamre indeholder 0.2 mol af den samme monoatomare gas. Gasserne i begge kamre har til en start samme temperatur (300 K) og tryk (1 atm). Langsomt tilføres så Q=100 J som varme til gassen i kammer A (fx. gennem en glødetråd som tændes i et bestemt stykke tid), hvilket får temperaturen i kammer A til at stige til 332 K. Gassen kan betragtes som ideal.



a) Hvor meget arbejde udføres på kammer B? Og hvad er sluttemperaturen i kammer B?

b) Beregn den effektive varmekapacitet for kammer A (defineret som $C^A = Q/\Delta T^A$) og sammenlign med C_V og C_P for den samme mængde gas.

c) Hvis mængden af gas i kammer B var meget større end mængden i kammer A (og dermed også volumen), ville det så bringe C^A tættere på C_V eller C_P? Argumenter for dit svar.

d) Udled et udtryk for trykstigningen i beholderen for et vilkårligt varmeinput, Q.

Hint: Udnyt at $V^{\text{tot}} = V^A + V^B = \text{constant}$ og $P^A = P^B$ (mekanisk ligevægts betingelse) til enhver tid.

Problem 2 (20 %)

a) Vis at den følgende relation gælder generelt

$$dS = \frac{C_P}{T} dT - V\alpha_P dP\,. \tag{1}$$

b) Trykket øges adiabatisk og kvasistatisk fra P_i til P_f for en metalblok. Vis at hvis volumen af blokken antages at være kontant under kompressionen, er start- og sluttemperaturen relateret på følgende måde

$$\ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) = \frac{V\alpha_P}{C_P}\Delta P\,, \tag{2}$$

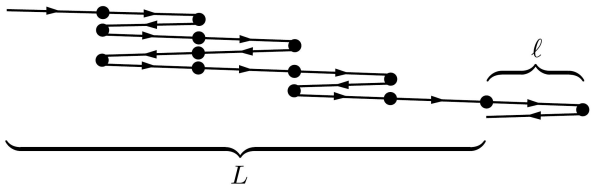
hvor $\Delta P = P_f - P_i$.

c) Trykket stiger 1 bar pr 10 m under havoverfladen. En termisk isoleret klump stål kastes i Marianer-graven og synker til bunds 10.900 m under havoverfladen. Hvis starttemperaturen var 300 K, hvad er temperaturen af stålet når klumpen når bunden?

(Data for stål:
specifik varmkapacitet $c_P = 502\ \mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$, termisk udvidelseskoefficient $\alpha_P = 3.6 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{K^{-1}}$, densitet $\rho = 7800\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$.)

Problem 3 (40 %)

Polymerer (såsom gummi) består af lange kæder som normalt er sammenfiltret i konfigurationer med stor entropy. En simpel model for en elastik er en en-dimensionel kæde med N segmenter med længden ℓ. Hvert segment kan enten pege mod højre eller venstre. Den totale længde af kæden L er givet ved afstanden fra begyndelsen af det første segment til enden af det sidste (se illustrationen) og kan skrives som $L = \ell(2N_R - N)$, hvor N_R er antallet af segmenter der peger mod højre.



a) For en given længde L og antal segmenter N i kæden, vis at entropien af kæden er givet ved

$$S \approx k_B\big[N \ln N - N_R \ln N_R - (N - N_R)\ln(N - N_R)\big]\,. \tag{3}$$

For et en-dimentionelt system er længden L analog til volumen af det tre-dimensionale system, og ligeledes kan trykket erstattes af en trækkraft, F. Hvis F regnes som positiv når kæden trækker indad kan den termodynamiske identitet for dette system skrives some $dU = T\,dS + F\,dL$, hvilket leder til den følgende relation

$$F = -T\left(\frac{\partial S}{\partial L}\right)_U\,. \tag{4}$$

b) Vis at Lign. (4) fører til følgende udtryk for trækkraften

$$F = \frac{k_B T}{2\ell}\ln\left(\frac{1 + L/(N\ell)}{1 - L/(N\ell)}\right)\,. \tag{5}$$

c) Vis at når $L \ll Nl$, er trækkraften direkte proportional med L (Hookes law).

d) Diskuter temperaturafhængigheden af trækkraften. Hvis temperaturen øges, vil elastikken udvide sig eller trække sig sammen, når trækkraften er konstant?

End of the exam.

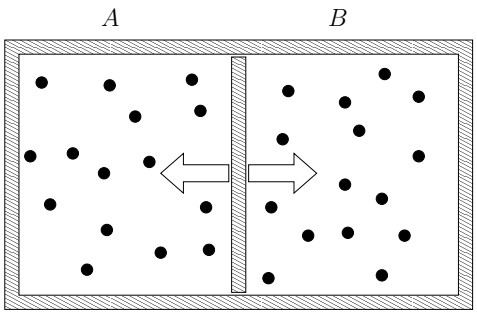
Written 4-hour exam in
Thermodynamics and Statistical Mechanics, 5 ECTS course
Tuesday 10/02-2016, 10.00-14.00

The exam consists of 3 problems on 2 pages altogether. The weights of the problems are given, and within a problem each sub-question has the same weight.

Writing aids and a simple calculator (that is one which can **not** do graphs or symbolic manipulations) are allowed. The "Golden sheet" (2 pages) is included with this exam. No further helping aids are allowed.

Problem 1 (40 %)

Consider an isolated tank with two chambers A and B separated by an insulating frictionless movable wall (see illustration). Both chambers contain 0.2 mol of the same monoatomic gas. Initially the gasses are at the same temperature (300 K) and pressure (1 atm). Then Q=100 J of heat is slowly supplied to the gas in chamber A (for example through a wire heater inside the chamber turned on for a certain amount of time) causing the temperature of chamber A to rise to 332 K. The gas can be considered ideal.



a) How much work is done on chamber B? And what is the final temperature of chamber B?

b) Calculate the effective heat capacity of chamber A (defined as $C^A = Q/\Delta T^A$) and compare to C_V and C_P of the same amount of gas.

c) If the amount of gas in chamber B were much larger than the amount in chamber A (and thus also the volume), would that bring C^A closer to C_V or C_P? Explain your reasoning.

d) Derive an expression for the pressure increase in the tank for an arbitrary heat input Q.

Hint: Use that $V^{\text{tot}} = V^A + V^B =$ constant and that $P^A = P^B$ (mechanical equilibrium condition) at all times.

Problem 2 (20 %)

a) Show that the following relation holds in general

$$dS = \frac{C_P}{T} dT - V\alpha_P dP\,. \tag{1}$$

b) For a block of metal the pressure is increased adiabatically and quasistatically from P_i to P_f. Assuming the volume of the block stays approximately constant during the compression, show that the initial and final temperatures, T_i and T_f, are related by

$$\ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) = \frac{V\alpha_P}{C_P}\Delta P\,, \tag{2}$$

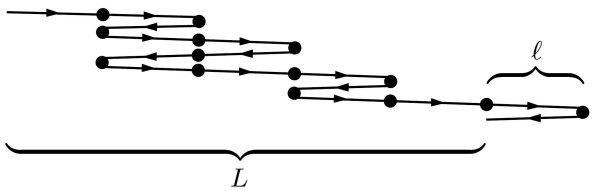
where $\Delta P = P_f - P_i$.

c) Pressure increases 1 bar per 10 m below sea level. A thermally isolated steel block is dropped in the Marianas trench and falls to the bottom at 10.900 m below sea level. If the initial temperature of the block was 300 K, what is the temperature when the block reaches the bottom?

(Data for steel:
specific heat capacity $c_P = 502\ \mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$, thermal expansion coefficient $\alpha_P = 3.6 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{K^{-1}}$, density $\rho = 7800\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$.)

Problem 3 (40 %)

Polymers (like rubber) consist of long chains usually tangled up in a configuration with large entropy. A simple model of a rubber-band is a one-dimensional chain with N segments of the length ℓ. Each segment can point either left or right. The total length L of the rubber band is the net displacement from the beginning of the first segment to the end of the last (see illustration below) and can be written as $L = \ell(2N_R - N)$, where N_R is the number of segments pointing right.



a) For a given length L and number of segments N of the chain, show that the entropy of the chain is given by

$$S \approx k_B\big[N \ln N - N_R \ln N_R - (N - N_R)\ln(N - N_R)\big]\,. \tag{3}$$

For a one-dimensional system, the length L is analogous to the volume of a three-dimensional system, and similarly the pressure P can be replaced by the tension force F. Taking F to be positive when the rubber band is pulling inwards, the thermodynamic identity for this system is given as $dU = T\,dS + F\,dL$, leading to the following partial derivative relation

$$F = -T\left(\frac{\partial S}{\partial L}\right)_U\,. \tag{4}$$

b) Show that Eq. (4) leads to the tension force

$$F = \frac{k_B T}{2\ell}\ln\left(\frac{1 + L/(N\ell)}{1 - L/(N\ell)}\right)\,. \tag{5}$$

c) Show that when $L \ll Nl$, the tension force is directly proportional to L (Hookes law).

d) Discuss the dependence of the tension force on temperature. If the temperature is increased, does the rubber band expand or contract for a fixed tension force?

End of the exam.

Written 4-hour exam in
Thermodynamics and Statistical Mechanics, 5 ECTS course

The exam consists of three problems on two pages altogether. The weights of the problems are given, and within a problem each sub-question has the same weight.

Writing aids and a simple calculator (that is one which can **not** do graphs or symbolic manipulations) are allowed. A "Golden sheet" (2 A4 pages) is allowed. No further helping aids are allowed.

Problem 1 (30%)

A) Show that the total differential of the entropy can be written in terms of the isobaric specific heat C_P and the isobaric thermal expansion α_P in the following way:

$$dS = \frac{C_P}{T} dT - V\alpha_P dP. \tag{1}$$

B) Find the entropy change of a substance that undergoes a quasistatic process where the temperature goes from T_i to T_f and the pressure from P_i to P_f, but the volume stays constant. Assume C_P is temperature independent and α_P is pressure independent (this is an acceptable approximation for water at the right conditions).

C) We now consider a quasistatic, isothermal pressure change from P_i to P_f. Set up an integral for the heat delivered during this process and evaluate the integral for a monatomic ideal gas.

Problem 2 (35 %)

A) Prove the following general relation:

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = T \cdot \left(\frac{\partial^2 P}{\partial T^2}\right)_V \tag{2}$$

A van der Waals gas obeys the equation

$$P = \frac{NKT}{V - Nb} - \frac{aN^2}{V^2},$$

with a and b material specific constants.

B) Find $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T$ for a van der Waals gas and for an ideal gas, respectively, and explain the difference.

C) Find the entropy $S(T, V)$ for a van der Waals gas.

Problem 3 (35 %)

Consider a model of a crystal which has N lattice points and N interstitial positions (places between the lattice points where the atoms can reside). The number of atoms is N. An atom can be either at a lattice point or at an interstitial positition and each lattice point or interstitial position can accomodate up to one atom. Let ϵ be the energy required to move an atom from a lattice site to an interstitial position and let n be number of atoms occupying interstitial sites in equilibrium. Define the energy when none of interstitial sites are occupied to be zero, so that the internal energy of the system in equilibrium is $U = n\epsilon$.

A) What is the entropy S for a given internal energy U? Show that when $n \gg 1$ and $N - n \gg 1$ the entropy is

$$S = 2k_B[N \ln N - n \ln n - (N - n) \ln(N - n)] \tag{3}$$

B) Find the temperature as a function of the internal energy when $n \gg 1$ and $N - n \gg 1$. What is the number of atoms at interstitial positions at temperature T?

C) What is the number of atoms at interstitial positions at high temperatures? Should we expect this result from the model?

1

Golden sheet Autumn 2016

1 Thermodynamics

0. law of thermodynamics:	$A \approxeq B \wedge B \approxeq C \Rightarrow A \approxeq C$
1. law of thermodynamics:	$dU = q + w \overset{\text{QS}}{=} q - PdV$
2. law of thermodynamics (isolated system):	$\Delta S \geq 0\,, \qquad S = k_B \ln \Omega$
3. law of thermodynamics:	$T \to 0 \Rightarrow S \to 0, C_x \to 0$
Entropy growth by delivering heat:	$dS \geq \frac{q}{T}$
	$dS = \frac{q}{T}$ (Quasistatic)
Equipartition theorem:	$U = \frac{f}{2} N k_B T, \quad$ f = # degrees of freedom

Thermodynamic potentials:

Potential	Differential form	Maxwell relation
U	$dU = +TdS - PdV + \mu dN$	$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_{S,N} = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_{V,N}$
$H = U + PV$	$dH = +TdS + VdP + \mu dN$	$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_{S,N} = +\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_{P,N}$
$F = U - TS$	$dF = -SdT - PdV + \mu dN$	$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{T,N} = +\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{V,N}$
$G = U + PV - TS = \mu N$	$dG = -SdT + VdP + \mu dN$	$\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_{T,N} = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{P,N}$

Thermodynamic coefficients (dN=0):

Heat capacity	$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$	$C_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P$
Thermal expansion coefficient	$\alpha_P = +\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$	$\alpha_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_S$
Compressibility	$\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$	$\kappa_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S$
Bulk modulus	$K_T = -V\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{\kappa_T}$	$K_S = -V\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S = \frac{1}{\kappa_S}$
Pressure coefficient	$\beta_V = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$	$\beta_S = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_S$

$dV = 0$: Isochoric; $dP = 0$: Isobaric; $dT = 0$: Isothermal;
$Q = 0$: Adiabatic; $dS = 0$: Isentropic (Adiabatic + Quasistatic)

2 Statistical mechanics

In thermal equilibrium with the surroundings: $p(s) = \frac{e^{-\beta E(s)}}{Z}, \quad \beta \equiv \frac{1}{k_B T}$
Partition function: $Z = \sum_s e^{-\beta E(s)} \quad (\Rightarrow \sum_s p(s) = 1)$
Average value of variable A: $\langle A \rangle = \sum_s A(s) p(s) = \sum_s A(s) \frac{e^{-\beta E(s)}}{Z}$
Mean energy: $U = \langle E \rangle = -\frac{\partial \ln(Z)}{\partial \beta} = -\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta}$

3 Ideal-gas

Equation of state: $PV = Nk_BT = nRT$
Thermal energy: Only quadratic degrees of freedom; $U = f/2Nk_BT$.

2

4 Math

Binomial-coefficient: $\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$
Stirling's approximation: $\ln(N!) \approx N\ln(N) - N \quad (N >> 1)$
Taylor expansion: $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + ...$
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...$
$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...$
$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ...$
$\sum_{n=0}^{N} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^N = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$

Z is a function of X and Y ($Z = Z(X,Y)$),
Y is a function of X and Q ($Y = Y(X,Q)$):

$$dZ = \left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)_Y dX + \left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right)_X dY \qquad \text{[Total differential]}$$

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)_Y = \left[\left(\frac{\partial X}{\partial Z}\right)_Y\right]^{-1} \qquad \text{[The inverse of the derivative]}$$

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)_Y = \left(\frac{\partial Z}{\partial Q}\right)_Y \left(\frac{\partial Q}{\partial X}\right)_Y \qquad \text{[The chain rule]}$$

$$-1 = \left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)_Y \left(\frac{\partial X}{\partial Y}\right)_Z \left(\frac{\partial Y}{\partial Z}\right)_X \qquad \text{[“The fake chain rule”]}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right)_X\right)_Y = \left(\frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)_Y\right)_X \qquad \text{[Exchange of order of differentiation]}$$

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)_Q = \left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)_Y + \left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right)_X \left(\frac{\partial Y}{\partial X}\right)_Q \qquad \text{[Exchange of fixed variable]}$$

5 Constants

$k_B = 1.381 \cdot 10^{-23}$ J/K $= 8.617 \cdot 10^{-5}$ eV/K $\qquad R = 8.315$ J/(mol K)
$N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$
$h = 6.626 \cdot 10^{-34}$ J s $= 4.136 \cdot 10^{-15}$ eV s
1 atm $= 1.013$ bar $= 1.013 \cdot 10^5$ N/m^2 $= 1.013 \cdot 10^5$ Pa
1 eV $= 1.602 \cdot 10^{-19}$ J
1 u $= 1.661 \cdot 10^{-27}$ kg

Skriftlig 4-timers eksamen i
Termodynamik og statistisk mekanik
Torsdag 12/01-17, 10.00-14.00

Eksamen består af tre opgaver på tre sider ialt. Vægten i bedømmelsen af de tre opgaver er angivet, og inden for hver opgave har hvert delproblem samme vægt.

Skriveredskaber og en simpel lommeregner (dvs. een som **ikke** kan tegne grafer eller udføre symbolske manipulationer) er tilladt. Et "Golden sheet" (2 sider) er vedlagt denne eksamen. Ingen andre hjælpemidler er tilladt.

Opgave 1 (30 %)

Elektromagnetisk stråling, der er i et volumen V, og som er i termisk ligevægt med omgivelser, der har en temperatur T udgør et termodynamisk system. Dette system kaldes også en fotongas. Den indre energi er

$$U = bVT^4 \tag{1}$$

hvor $b = 7.6 \times 10^{-16}\,\mathrm{J\,m^{-3}\,K^{-4}}$ er en universel konstant.

a) Find den isokore varmefylde, og vis at entropien er

$$S = \frac{4}{3}bVT^3 \tag{2}$$

b) Vis, at trykket af fotongassen er

$$p = \frac{1}{3}bT^4 \tag{3}$$

I midten af Solen er temperaturen $15 \times 10^6\,\mathrm{K}$ og tætheden af den ioniserede brint er $1.5 \times 10^5\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$.

c) Beregn bidraget til trykket fra henholdsvis stråling og stof. Antag, at brinten udgør en ideal gas. Giver denne antagelse en under- eller overvurdering af trykket fra partiklerne?

Opgave 2 (20 %)

Betragt et system med et endeligt antal, $N+1$ energi-niveauer med forskellen ϵ mellem hver. Dvs. energien af niveau n er

$$E_n = n\epsilon \quad n = 0, 1, 2, ...N \tag{4}$$

Der er kun een grundtilstand med energien 0, men antallet, Ω_n af tilstande med energi, E_n stiger eksponentielt med n. Lad Q være et positivt heltal. Da er

$$\Omega_n = Q^n \tag{5}$$

a) Vis, at tilstandssummen bliver

$$Z = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x} \quad \text{hvor} \quad x = e^{-\beta\epsilon}Q \quad \text{og} \quad \beta = \frac{1}{k_B T} \tag{6}$$

Betragt nu et specialtilfælde, $N = 1$ med kun to energi niveauer.

b) Find middelenergien og den specifikke varmefylde ved temperaturen T. Argumenter for, at den specifikke varmefylde må have et maximum som funktion af temperaturen.

Opgave 3 (50 %)

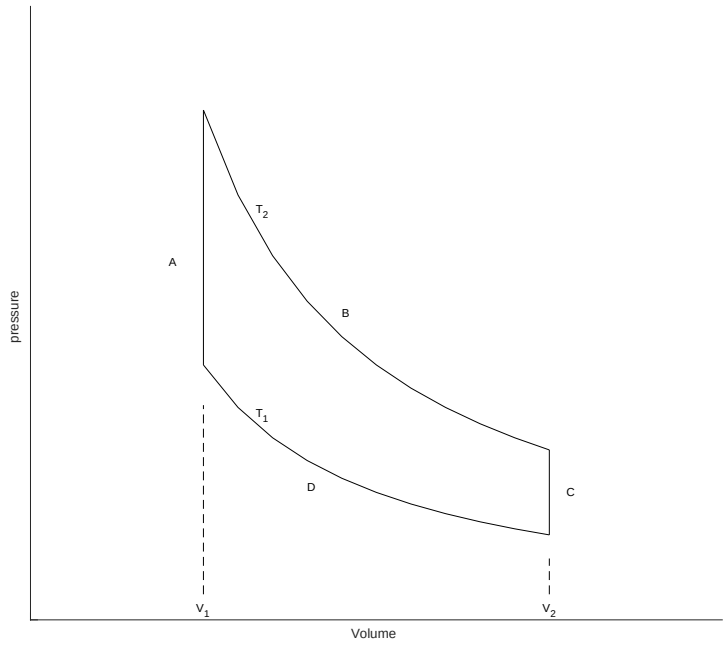
En ideal gas med f frihedsgrader fungerer som en termodynamisk maskine, der omdanner varme delvist til arbejde gennem en cyklisk følge af reversible processer. Delprocesserne er

A) Isokor opvarmning ved voluminet V_1

B) Isoterm udvidelse ved temperaturen T_2

C) Isokor afkøling ved voluminet V_2

D) Isoterm kompression ved temperaturen T_1



a) Argumenter for, at T_2 er højere end T_1.

b) Diskuter de varme- og arbejdsudvekslinger, der foregår ved de fire processer. Ligeså for ændringer i den indre energi. Hvorfor er varmeudvekslingerne for de to isokore processer tilsammen nul?

c) Beregn entropiændringerne, $\Delta S_A, \Delta S_B, \Delta S_C, \Delta S_D$ for de fire processer.

d) Hvad bliver summen af de fire entropiændringer, og hvorfor?

e) Effektiviteten e defineres som forholdet mellem det samlede arbejde, W udført af gassen på omgivelserne i forhold til den totale varmemængde, Q_B leveret ved proces B): $e = W/Q_B$. Vis, at

$$e = 1 - \frac{T_1}{T_2} \tag{7}$$

Slut på eksamen.

Written 4-hour exam in
Thermodynamics and Statistical Mechanics
Thursday 12/01-17, 10.00-14.00

The exam consists of three problems on three pages altogether. The weights of the problems are given, and within a problem sub-questions have the same weight.

Writing aids and a simple calculator (that is one which can **not** do graphs or symbolic manipulations) are allowed. The "Golden sheet" (2 pages) are included with this exam. No further helping aids are allowed.

Problem 1 (30 %)

Electromagnetic radiation occupying a volume V and in thermal equilibrium with the surroundings having a temperature T can be considered a thermodynamic system. This system is also called a photongas. The internal energy is

$$U = bVT^4 \tag{1}$$

where $b = 7.6 \times 10^{-16}\,\mathrm{J\,m^{-3}\,K^{-4}}$ is a universal constant.

a) Find the isochoric specific heat and show that the entropy is

$$S = \frac{4}{3}bVT^3 \tag{2}$$

b) Show the pressure of the photongas is

$$p = \frac{1}{3}bT^4 \tag{3}$$

In the middle of the Sun the temperature is $15 \times 10^6\,\mathrm{K}$ and the density of the ionized hydrogen in the middle of the Sun is $1.5 \times 10^5\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$.

c) Calculate the contributions to the pressure from the radiation and the particles respectively. Assume that the particles constitutes an ideal gas. Is this an over- or underestimation of the particle pressure?

Problem 2 (20 %)

Consider a system with a finite number, $N+1$ of energy levels with a spacing of ϵ. That is, the energy of level n is

$$E_n = n\epsilon \quad n = 0, 1, 2, ...N \tag{4}$$

There is only one ground state with the energy 0, but the number, Ω_n of states with energy, E_n increases exponentially with n. Let Q be a positive integer. Then

$$\Omega_n = Q^n \tag{5}$$

a) Show, that the partition function becomes

$$Z = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x} \quad \text{where} \quad x = e^{-\beta\epsilon}Q \quad \text{and} \quad \beta = \frac{1}{k_B T} \tag{6}$$

Now, consider the special case, $N = 1$ of only two energy levels

b) Find the mean energy and the specific heat at temperature T. Argue, that the specific heat must have a maximum as a function of temperature.

Problem 3 (50 %)

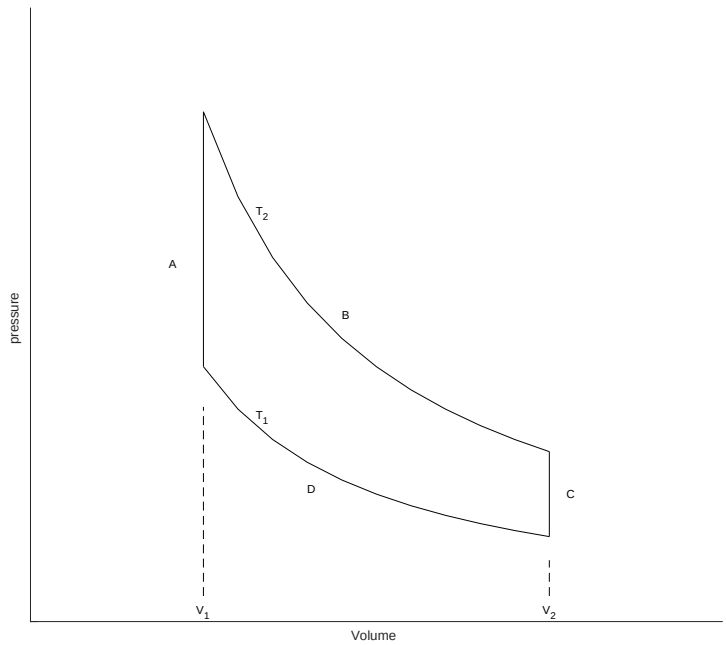
An ideal gas with f degrees of freedom acts as a thermodynamic machine converting heat partially into work through a cyclic sequence of reversible processes. The steps are

A) Isochoric heating at volume V_1

B) Isothermal expansion at temperature T_2

C) Isochoric cooling at volume V_2

D) Isothermal compression at temperature T_1



a) Argue that T_2 is higher than T_1

b) Discuss the work and heat transfers taking place during the four processes. Also the changes in the internal energy. Why must the heat transfers for the two isochoric processes add up to zero?

c) Calculate the entropy changes $\Delta S_A, \Delta S_B, \Delta S_C, \Delta S_D$ for the four processes.

d) What should be the sum of these four entropy changes and why?

e) The efficiency e is defined as the ratio of the total work W done by the gas on the surroundings to the total heat uptake Q_B at proces B): $e = W/Q_B$. Show that

$$e = 1 - \frac{T_1}{T_2} \tag{7}$$

End of the exam.

Skriftlig 4-timers eksamen i
Termodynamik og statistisk mekanik
Tirsdag 28/02-17, 10.00-14.00

Eksamen består af tre opgaver på to sider ialt. Vægten i bedømmelsen af opgaverne er angivet, og inden for hver opgave har hvert delproblem samme vægt.

Skriveredskaber og en simpel lommeregner (dvs. een som **ikke** kan tegne grafer eller udføre symbolske manipulationer) er tilladt. Et "Golden sheet" (2 sider) er vedlagt denne eksamen. Ingen andre hjælpemidler er tilladt.

Opgave 1 (50 %)

Vi betragter et termodynamisk system, hvis tilstand er bestemt af temperaturen, T og voluminet, V.

a) Vis, at differentialet af entropien, S kan skrives

$$dS = \frac{c_V}{T} dT + \beta_V dV \tag{1}$$

hvor $c_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$ er den isokore specifikke varmefylde, og $\beta_V = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$ er den isokore trykstigningskoefficient

b) Vis, at i specialtilfældet, en ideal gas, med f frihedsgrader er

$$dS = \frac{f}{2} N k_B \frac{dT}{T} + N k_B \frac{dV}{V} \tag{2}$$

og at en adiabatisk tilstandsændring fra (T_1, V_1) til (T_2, V_2) må opfylde

$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{-\frac{f}{2}} \tag{3}$$

c) Vis endvidere, at for den adiabatiske tilstandsændring gælder

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{-\frac{f+2}{f}} \tag{4}$$

Forestil dig en boble af metan, CH_4, som frigøres fra bunden af en 30 m dyb sø. Boblen stiger så hurtigt til overfladen, at den ikke når at udveksle varme med det omgivende vand. Diameteren af boblen er 1 cm ved bunden, og temperaturen er 5°C dernede.

d) Hvor mange frihedsgrader skal vi medregne for metan molekylet? Stemmer det med værdien af den isobare specifikke varme, som ved 1 atm og 25°C er $35.69\,\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$?

e) Hvad bliver størrelsen af boblen, når den når overfladen? Hvad bliver temperaturen af boblen ved overfladen?

Opgave 2 (20 %)

Antag, at man blander 50 l varmt vand ved 55°C med 25 l koldt vand ved 10 °C? Antag endvidere, at den specifikke varmefylde af vand er konstant, $4.2\,\mathrm{kJ\,kg^{-1}\,K^{-1}}$.

a) Hvad bliver blandingstemperaturen?

b) Hvor meget stiger den samlede entropi i verden ved processen?

Opgave 3 (30 %)

Betragt en model af et fast stof (the Einstein solid) bestående af N svagt vekselvirkende oscillatorer. Hver oscillators energiniveauer er adskilt af samme energispring, ϵ. Den samlede energi er $U = q\epsilon$. Modellen behandles i høj temperatur grænsen, hvor antallet af energienheder, q er meget større end N som i sig selv også er stor ($q \gg N \gg 1$). Det antages yderligere at ϵ afhænger af voluminet, V som $\epsilon = aV^{-m}$, hvor a og m er konstanter. Multipliciteten af makrotilstanden med energi U er $\Omega = \binom{N+q-1}{q}$

a) Vis, at entropien er

$$S = Nk_B\{\ln(UV^mN^{-1}a^{-1}) + 1\} \tag{5}$$

samt, at

$$U = Nk_BT \qquad \text{og} \qquad pV = mNk_BT \tag{6}$$

b) Beregn den isokore, c_V og den isobare, c_p specifikke varmefylde.

c) Beregn den isoterme, κ_T og den adiabatiske, κ_S kompressibilitet, og vis

$$\frac{\kappa_T}{\kappa_S} = \frac{c_p}{c_V} = m + 1 \tag{7}$$

Slut på eksamen.

Written 4-hour exam in
Thermodynamics and Statistical Mechanics
Tuesday 28/02-17, 10.00-14.00

The exam consists of 3 problems on 2 pages altogether. The weights of the problems are given, and within a problem sub-questions have the same weight.

Writing aids and a simple calculator (that is one which can **not** do graphs or symbolic manipulations) are allowed. The "Golden sheet" (2 pages) are included with this exam. No further helping aids are allowed.

Problem 1 (50 %)

We consider a thermodynamic system, the state of which is given by temperature, T and volume, V.

a) Show that the differential of the entropy, S can be written

$$dS = \frac{c_V}{T} dT + \beta_V dV \tag{1}$$

where $c_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$ is the isochoric specific heat and $\beta_V = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$ is the isochoric pressure coefficient

b) Show that in the special case of an ideal gas with f degrees of freedom

$$dS = \frac{f}{2} N k_B \frac{dT}{T} + N k_B \frac{dV}{V} \tag{2}$$

and that an adiabatic change of state going from (T_1, V_1) to (T_2, V_2) has to fulfill

$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{-\frac{f}{2}} \tag{3}$$

c) Show furthermore for the adiabatic change of state

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{-\frac{f+2}{f}} \tag{4}$$

Imagine a bubble of methane, CH_4, that is released from the bottom of a 30 m deep lake. The bubble ascends to the surface quickly without exchanging heat to the surrounding water. The diameter of the bubble is 1 cm at the bottom and the temperature down there is 5°C .

d) How many degrees of freedom should we include for the methane molecule? Does this agree with the fact that the isobaric specific heat of methane at 1 atm and 25°C is $35.69\,\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$?

e) What will be the size of the bubble when it comes to the surface? What will be the temperature of the bubble at the surface?

Problem 2 (20 %)

Suppose you mix 50 l of hot water at 55°C with 25 l of cold water at 10 °C. Assume the specific heat of water being constant, $4.2\,\mathrm{kJ\,kg^{-1}\,K^{-1}}$.

a) What becomes the temperature of the mixture?

b) How much is the increase of the entropy of the world by the process?

Problem 3 (30 %)

Consider a model of a solid (the Einstein solid) consisting of N weakly interacting oscillators. Each oscillator has equally spaced energy levels with the energy spacing ϵ. The total energy is $U = q\epsilon$. We look at the high temperature limit where the the number of energy units q is much larger than N which in itself is large ($q \gg N \gg 1$). Additionally we assume that ϵ depends on the volume, V as $\epsilon = aV^{-m}$, a and m being constants. The multiplicity of the macrostate of energy U is $\Omega = \binom{N+q-1}{q}$

a) Show, that the entropy is

$$S = Nk_B\{\ln(UV^mN^{-1}a^{-1}) + 1\} \tag{5}$$

and that

$$U = Nk_BT \qquad \text{and} \qquad pV = mNk_BT \tag{6}$$

b) Calculate the isochoric, c_V and isobaric, c_p specific heats.

c) Calculate the isothermal, κ_T and adiabatic, κ_S compressibilities and show

$$\frac{\kappa_T}{\kappa_S} = \frac{c_p}{c_V} = m + 1 \tag{7}$$

End of the exam.