TEKST NR 383 2000

Beviser i matematik

Vejleder: Mogens Niss

Af Anne K. S. Jensen, Gitte M. Jensen, Jesper Thrane, Karen L. A. W. Wille og Peter Wulff

TEKSTER fra

IMFUFA ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, Postboks 260, DK-4000 Roskilde, Danmark

Beviser i matematik

Af: Anne K. S. Jensen, Gitte M. Jensen, Jesper Thrane, Karen L. A. W. Wille, Peter Wulff
Vejleder: Mogens Niss

IMFUFA tekst nr. 383/2000 85 sider ISSN 0106-6242

Abstrakt

Dette projekts problemformulering lyder som følger: Hvornår er en matematisk påstand bevist? I rapporten tager vi udgangspunkt i seks sætninger med tilhørende beviser, som vi analyserer og diskuterer. Desuden behandles matematisk logik som en optakt til denne undersøgelse. Diskussionen behandler dels forskellige aspekter ved sætninger og beviser, herunder sætningstyper, bevistyper og bevisstrategier, dels nogle af de overvejelser vi har haft i løbet af projektet. Konklusionen på projektet blev, at et bevis skal indeholde en slutningsrække, hvor der sluttes fra antagelser til en påstand ved hjælp af en slutningsregel. Det skal være tydeligt, hvilket grundlag denne slutning er foretaget på, dvs. hvilke antagelser der forudsættes at være sande, for at påstanden er sand. Derudover skal forholdet mellem disse forudsætninger ikke være tvetydigt, dvs. at de skal være konsistente. Dette gøres ved at føre alle forudsætninger tilbage til ét aksiomatisk fundament.

Forord

Denne IMFUFA-tekst er med enkelte rettelser identisk med en projektrapport, der blev skrevet i løbet af efterårssemesteret 1999 på matematikoverbygningen på Roskilde Universitetscenter.

Projektet var et videnskabsfagsprojekt for Anne, Gitte, Jesper og Pinse og et professionsprojekt af formidlervarianten for Peter. Til den oprindelige rapport havde Peter skrevet en selvstændig del med egen problemformulering, diskussion og konklusion, der tilgodeså hans binding. Peter har dog valgt, at denne del ikke skal medtages i IMFUFA-teksten.
Ideen til emnet: *Beviser i matematik* er kraftigt inspireret af Mogens Niss og er noget, vi alle finder utroligt interessant. Oprindeligt var flere interesseret i emnet, og vi var 8, der begyndte på projektet. Af forskellige årsager holdt Ulla Franck, Sofie Andersen og Erik Munksø op undervejs, men de har således en andel i nærværende rapport.

Vi vil gerne takke Mogens Niss for god inspiration og vejledning til projektet.

Indhold

Forord 1

1 Indledning **4**
Problemformulering 5
1.1 Læsevejledning 5

2 Generel introduktion til matematiske beviser **7**
2.1 Teorigrundlag 7
2.2 Logik og logiske slutninger i matematik 8
Induktion 8
Deduktion 9
Slutningsregler 13
Prædikatslogik 14
2.3 Hvad er et matematisk bevis? 18
2.4 Bevistyper 18
Indirekte beviser 18
Direkte beviser 19
Kombinationer 19

3 Undersøgelse **21**
3.1 Udvælgelse af sætninger og beviser 21
3.2 Præsentation af analysemetode 22
3.3 $\sqrt{2}$'s irrationalitet 25
3.4 Geometriske sætninger 29
Kvadrering af et rektangel 29
Hippokrates' bevis for en månes kvadratur 33
Forsøg på bevis for cirklens kvadratur 36
Alternativt forsøg på et bevis for påstand 3.5 39
3.5 Konvergente delfølger af begrænsede følger 42
Bevis for sætning 3.6 ved brug af spidsbegrebet 43
Bevis for sætning 3.6 ved brug af bisektionsmetoden 45
3.6 Dimensionssætningen 49
3.7 Regneregel for den komplekse, naturlige eksponentialfunktion . . . 56
3.8 Binomialformlen 60
Induktionsbevis med sumtegn 60

Induktionsbevis med brøker og fakulteter 65
Kombinatorisk bevis for binomialformlen. 66

4 Diskussion **71**

5 Konklusion **79**

A Appendiks **80**

Litteratur **85**

1 Indledning

Denne rapport drejer sig om matematiske beviser og gør rede for et projekt, hvor vi har diskuteret forskellige aspekter ved beviser. Vores overordnede spørgsmål har været, hvad et matematisk bevis er, og hvad der skal til, før noget er bevist korrekt. Ud over at forstå dette har vi haft det mål selv at blive gode til at gennemgå og udføre beviser.

Vi har haft svært ved at konkretisere problemstillingen, så vi kunne arbejde mere målrettet med den.
Undervejs har vi bl.a. talt om, hvilke bevistyper der findes, og hvilke af disse der umiddelbart er lettest at forstå. Vi fandt dog hurtigt frem til, at der kun er få bevistyper, og at de alle benytter sig af deduktiv logik.
Vi har desuden været interesseret i, om et bevis er forklarende eller udelukkende bevisende. Dette, synes vi dog, oftere hænger sammen med den konkrete opstilling af et bevis, end det er en egenskab ved selve beviset, og det har ikke været vores intention at analysere selve bevisopstillingen. Det er desuden vores opfattelse, at jo bedre man kender et matematisk område, des mindre skal der til, før man synes, at et bevis også forklarer, hvorfor sætningen er rigtig. Selv om der findes beviser, der tilsyneladende ikke virker forklarende for nogen, så er svaret på spørgsmålet, om et bevis er forklarende eller ikke forklarende, derfor i høj grad subjektivt. Dette aspekt blev derfor ikke det centrale, selv om vi beskæftiger os med det, idet vi ser det som en kvalitet, at et bevis er så forklarende som muligt. De beviser, vi har medtaget, tager hovedsageligt udgangspunkt i lærebøgers fremstilling, men for at kunne analysere dem, har vi været nødt til at uddybe beviserne i stedet for at afskrive dem direkte.

Diskussionen om betydningen af bevisets opstilling ledte os frem til spørgsmålet om, hvornår et bevis er godt nok. Hvor meget kan man f.eks. fjerne fra en bevisopstilling, før det ikke længere kan siges at være et bevis? Disse overvejelser mundede ud i følgende problemformulering.

Problemformulering

Hvornår er en matematisk påstand bevist?

Problemformuleringen diskuteres og søges besvaret ud fra seks sætninger med tilhørende beviser. Vi analyserer sætningerne og beviserne ud fra konkrete spørgsmål. Disse spørgsmål er blevet revideret gennem forløbet, efterhånden som vi fandt, at nogle spørgsmål var af større interesse end andre, når vi søgte at svare på, om en given påstand var bevist.

Der er hovedsagelig to grunde til, at vi har valgt at bygge rapporten på konkrete sætninger og beviser. Gennem hele projektforløbet har vi fremlagt beviser for hinanden, som vi har diskuteret, men vi havde som nævnt svært ved at konkretisere vores problemstilling. På et tidspunkt følte vi, at nu *måtte* vi komme frem til noget mere håndfast, og så var det nærliggende at tage fat i de sætninger og beviser, vi havde arbejdet med. Derudover har det været vores mål, selv at blive bedre til at gennemføre beviser, og vi er overbeviste om, at vi kun kan blive dette netop ved at gennemføre konkrete beviser - ligesom man lærer at cykle ved at cykle, ikke ved at læse om hvordan man cykler. Svaret på problemformuleringen begrænses af, at vi behandler konkrete beviser i stedet for beviser generelt. Vi mener dog ikke, at vores konklusion er ringere, den er blot af en anden art, end hvis vi havde lavet et mere generelt litteraturstudie.

Projektrapportens målgruppe er hovedsagelig nye matematikstuderende, der ønsker at forstå og danne sig et overblik over matematiske beviser.

1.1 Læsevejledning

Rapporten er opbygget i tre dele: teori, undersøgelse og diskussion.

Teorien introducerer begrebet matematisk bevis. Dette indbefatter sammenhængen mellem sætning og bevis, deduktiv logik, som er den form for logik, der anvendes ved matematisk bevisførelse, samt hvilke bevistyper der findes.
Hvis man allerede kender til logik, skal man ikke forvente at læse noget nyt i disse afsnit.

Undersøgelsen består af analyser og diskussioner af seks konkrete sætninger med tilhørende beviser. Indledningsvis præsenteres vores analysemodel, dvs. hvilke spørgsmål vi har søgt svar på for de enkelte sætninger og beviser. Vi ser på sammenhængen mellem sætning og bevis, bevisets type og ide, samt på de matematiske universer der inddrages. Med matematisk univers mener vi dels de aksiomer, der trækkes på, dels hvilken matematisk disciplin, der er tale om.

I diskussionen samler vi trådene fra de enkelte beviser, idet vi ser på forskelle og ligheder beviserne imellem i forhold til nogle overordnede temaer. Desuden gør vi nogle overvejelser over projektet, bl.a. hvad vi har lært, og hvad vi kunne have gjort anderledes.

Diskussionen munder så ud i projektrapportens konklusion.

2 Generel introduktion til matematiske beviser

2.1 Teorigrundlag

For at kunne behandle matematiske beviser skal man kortlægge den begrebsverden, man befinder sig i. Vi vil her give en kortfattet gennemgang af de mest nødvendige begreber.

Vi starter med en formel karakterestik af et matematisk bevis: Det er en logisk deduktiv redegørelse for konsekvenser af en eller flere antagelser, hvor ethvert skridt i beviset føres tilbage til enten aksiomer eller tidligere beviste sætninger.
For at kunne forstå og bevise en matematisk påstand, må vi være i stand til at identificere de begreber, der indgår i påstanden. De indgående begreber må naturligvis begrænse sig til at være matematiske egenskaber og matematiske objekter, eksempelvis *7 er et ulige tal.* I et bevis kræves det, at alle benyttede egenskaber og objekter er entydigt klare. Vi skal forstå, hvad objektet *7* er, og hvilken betydning *ulige tal* har, før vi kan bevise påstanden.
Når vi har opstillet påstanden, kan vi vise eller afvise den ved hjælp af deduktive slutninger, som vi uddyber senere i kapitlet.
Hvis vi er i stand til at bevise påstanden, kan vi ophøje den til en matematisk sætning. Overordnet kan man omtale alle beviste påstande som sætninger, men for at øge overskueligheden er det naturligt at opdele disse i forskellige typer afhængigt af deres placering inden for en matematisk teori. Det giver et større overblik, når man skal forstå sammenhængen og funktionen af sætningerne. En hovedsætning er meget central for dens område, en sætning er knap så central, mens lemmaer er hjælpesætninger, som f.eks. bruges undervejs i et større bevis, og korollarer er afledte sætninger, dvs. umiddelbare følger af sætninger, der er bevist. I forhold til vores problemstilling er det ikke afgørende, hvordan sætningen placeres i forhold til andre sætninger, idet kravene til bevisførelsen er de samme. For at understrege dette har vi valgt at kalde alle de påstande vi beviser, og som ikke bruges til at bevise andre påstande, for sætninger.

I de følgende afsnit går vi nærmere ind på de deduktive slutningsregler. Vi har hentet inspiration fra følgende bøger: *100 % Mathematical Proof* (Garnier

& Taylor; 1996) som er hovedkilden til kapitlet, *Logic with Trees* (Howson; 1997) og *Q.E.D. En introduktion til matematisk bevis* (Brandt & Nissen; 1995).

2.2 Logik og logiske slutninger i matematik

Når man forsøger at komme til en nærmere forståelse af, hvad et matematisk bevis er, finder man hurtigt ud af, at ethvert skridt, der foretages i et bevis, skal gennemføres i overensstemmelse med nogle logiske slutningsregler. I det følgende vil vi derfor kigge nærmere på logikken, for derigennem at få en bedre forståelse af, hvilke krav, der skal overholdes, for at et bevis siges at være korrekt foretaget.

Når man i bredere forstand taler om slutninger, deles de gerne op i to hovedkategorier: induktive slutninger og deduktive slutninger. Populært bliver forskellen på disse slutningsmetoder beskrevet ved, at når man slutter induktivt, går man fra det specifikke til det generelle, og ved en deduktiv slutning fra det generelle til det specifikke.

Induktion

Vi tager udgangspunkt i en sætning, hvis bevis vi vil vise i sin helhed senere. Sætningen siger, at $\sqrt{2}$ er et irrationalt tal. En induktiv slutning, der understøtter dette udsagn, kan se ud som følger: Definitionen, på at et tal er irrationalt, er, at det ikke er rationalt, hvilket igen er ækvivalent med, at $\sqrt{2}$ ikke kan skrives som en uforkortelig brøk af naturlige tal. Vi siger nu, at vi har undersøgt en masse uforkortelige brøker, og at ingen af dem har et kvadrat der er lig 2. Deraf slutter vi, at $\sqrt{2}$ må være et irrationalt tal. Her træder svagheden ved induktive slutninger tydeligt frem. For så længe man ikke har undersøgt alle uforkortelige brøker, er det selvfølgelig muligt, at den brøk, man søger, eksisterer, men at man bare ikke har fundet den endnu.

Dette eksempel er tydeligvis karrikeret, men hvis man tilføjer den oplysning, at de brøker man undersøgte var bedre og bedre tilnærmelser til $\sqrt{2}$, vil slutningen stadig lide af samme svaghed; man kan aldrig vide sig sikker på, om man ville have fundet den brøk, man ledte efter, hvis man havde fortsat sin søgning. Den fuldstændige sikkerhed, der er et uomgængligt krav til matematiske sætninger, kan altså ikke opnås ved induktive slutninger.

Her kan man så undre sig over den hyppige brug af induktionsbeviser i matematikken, hvis induktive slutninger, som sådan, ikke er gode nok. Forklaringen på dette er, at induktionsbeviser ikke bygger på induktive slutninger, men er rent deduktive! At det forholder sig sådan blev observeret af Guiseppe Peano (1858-1932), og det gav anledning til induktionsaksiomet, der bruges til at bevise

udsagn af typen: $\forall n \in \mathbf{N} : P(n)$, hvor $P(n)$ er et prædikat, dvs. tillæggelsen af egenskaben P til objektet n, over en mængde.

Induktionsaksiomet

Lad $P(n)$ være et prædikat i $\mathbf{N}$ og sæt $M = \{n \in \mathbf{N} | P(n)\}$. M er altså mængden af tal i $\mathbf{N}$, for hvilke $P(n)$ er sand. Hvis vi kan vise, at

1. $1 \in M$
2. $\forall n \in \mathbf{N} : n \in M \Rightarrow n + 1 \in M$

så gælder det, at $M = \mathbf{N}$, eller med andre ord at $P(n)$ er sand for alle $n \in \mathbf{N}$ (Brandt & Nissen; 1995, kap.4). Det, der umiddelbart ligner en induktiv slutning, er i virkeligheden en deduktiv. Grunden til dette er, at man ikke bare har godtgjort, at $P(n)$ gælder i nogle specifikke tilfælde, men at det vil gælde for ethvert tilfælde, og man har således ikke sluttet fra det specifikke, men fra det generelle.

Det er dog værd at bemærke, at induktive ræsonnementer er en vigtig del af matematikken, ikke som elementer i beviser, men som en metode, hvorved man kan opdage nye resultater og sammenhænge. Når man skal bevise noget i matematik, er det jo ikke sådan, at man famler deduktivt rundt i blinde, for pludselig at opdage, at man har bevist, at alle polynomier faktoriseres helt over de komplekse tal. At det forholdt sig sådan, var man temmelig sikker på, før Gauss beviste det i 1799 (Lindstrøm; 1996, side 22), faktisk var det noget, man havde søgt at bevise i en årrække. Hvor kom så ideen fra? Det virker rimeligt at antage, at en masse resultater pegede i den retning, samt at der ingen modeksempler var, og at man på den baggrund, induktivt, sluttede at det nok forholdt sig sådan. Hvis en række resultater deler karakteristika, antyder det jo, at en nødvendig sammenhæng mellem resultaterne er mulig. Hvis en sådan sammenhæng skal bevises, skal det ske ved hjælp af deduktion.

Deduktion

I matematiske beviser godtages kun slutninger, der er foretaget ved deduktion. Hvad vil det så sige at slutte noget ved deduktion? Rent formelt siger man, at man udleder et udsagn fra andre udsagn i overensstemmelse med logiske slutningsregler (Lübcke; 1983, side 122). Før vi kigger på disse slutningsregler, vender vi tilbage til eksemplet med $\sqrt{2}$. Hvis man skal vise, at $\sqrt{2}$ er et irrationalt tal, skal det gøres ved hjælp af deduktion. Det kan eksempelvis gøres på følgende måde (Lindstrøm; 1996, side 67): Man starter med at antage, at $\sqrt{2}$ er et rationalt tal, for derefter at vise, at dette medfører en modstrid. Når $\sqrt{2}$ således ikke kan være rationalt, må det være irrationalt. Man har således udledt sætningen

ved at sammenholde sin undersøgelse af $\sqrt{2}$'s egenskaber med definitionen af, hvornår et tal er irrationalt. Her er det værd at understrege, at denne slutning ikke afhænger af nogle undersøgelser af et antal specialtilfælde, men er foretaget ud fra en undersøgelse af nogle generelle forhold, der med nødvendighed fører til konklusionen. På kort form ser beviset således ud:

1. Per definition er ethvert reelt tal enten rationalt, eller også er det irrationalt.
2. Vi antager, at $\sqrt{2}$ er et rationalt tal.
3. Vi viser, at $\sqrt{2}$ har egenskaber, der gør, at det ikke kan være rationalt.
4. Vi slutter, at når $\sqrt{2}$ ikke er rationalt, er det irrationalt.

Her er 1 en definition, 2 kaldes for antagelsen eller præmissen, 3 er bevisets fremgangsmåde, og 4 er en konklusion. Den deduktive slutning består i, at vi har udledt ny viden på baggrund af antagelse og definition på en særlig måde. For at få en bedre forståelse for, hvad der er på færde, vil vi i det følgende se nærmere på de forskellige ingredienser i en sådan deduktiv slutning.

Simple og sammensatte udsagn

Udsagn i matematik kan have form af simple udsagn eller sammensatte udsagn. Et simpelt udsagn er blot et objekt A, hvorom det antages, at det giver mening, at tillægge det en sandhedstildeling; det vil sige, at A enten har værdien sand (S) eller falsk (F). Det er dog, i praksis, ikke altid simpelt at afgøre sandhedsværdien. Ud fra disse simple udsagn, kan der dannes sammensatte udsagn ved at kombinere de simple udsagn med logiske konnektiver, f.eks. $\neg$, $\wedge$, $\vee$, og parenteser.

Nogle sammensatte udsagn er:

- Negation: $\neg A$, dvs. ikke-A

  Hvis man har et udsagn A, som man derpå negerer, betyder det ikke, at man nu har mistet sit A; det betyder, at man nu har udsagnet *ikke* A. I det tilfælde, hvor A er sand, kan $\neg A$ ikke samtidig være sand, men må være falsk og tilsvarende i det omvendte tilfælde[1].

- Konjunktion: $A \wedge B$, dvs. A og B

  I dette tilfælde skal begge de simple udsagn, A og B, være sande, for at det sammensatte udsagn er sandt.

[1]Dette kaldes for det udelukkede tredjes princip, og her er det nok på sin plads at nævne, at indenfor intuitionistisk logik, og den matematik der baserer sig på denne, gælder dette princip ikke universelt. Konsekvensen er, at hvis man vil vise $P(n)$, er det ikke nødvendigvis nok at vise, at $\neg P(n)$ er falsk.

- Disjunktion: $A \vee B$, dvs. A eller B

  Generelt kan en disjunktion være inklusiv eller eksklusiv. Disjunktionen $\vee$ anvendes i matematik dog udelukkende som inklusiv, hvilket betyder, at A og B godt må være sande begge to. Det ovenstående sammensatte udsagn er altså sandt, hvis enten A er sand, eller B er sand, eller hvis begge er det. Sprogligt kan dette oversættes til et og/eller. Hvis disjunktionen er eksklusiv, er det kun muligt at opfylde én af betingelserne A eller B. Sprogligt vil man oversætte dette til et enten/eller, sådan at det ene udelukker det andet.

- Implikation: $A \Rightarrow B$, dvs. hvis A så B

  At A medfører B kaldes også et betinget udsagn, hvor A er en forudsætning, og B er en konsekvens. Vi siger, at A er en tilstrækkelig betingelse for B, og B er en nødvendig betingelse for A.

- Biimplikation: $A \Leftrightarrow B$, dvs. hvis A så B, og hvis B så A

  Biimplikationen er symbolet for, at A medfører B, og at det omvendte også er tilfældet, nemlig at B medfører A. Dette kan forkortes til: A hvis og kun hvis B. Et udsagn af denne type er sandt, netop når A og B antager de samme sandhedsværdier.

De sammensatte udsagn, vi her har set på, er de mest basale sammensatte udsagn, man har. De kan kombineres på utallige måder. Eksempelvis betyder $A \Leftrightarrow (B \vee C)$, at A er sand, hvis og kun hvis B og/eller C er sand.

Sammensatte udsagn tildeles sandhedsværdier afhængigt af, hvilke sandhedstildelinger de simple udsagn, der indgår i udtrykket, antager. Dette illustreres almindeligvis med sandhedstavler. En sandhedstavle angiver samtlige mulige kombinationer af sandhedstildelinger for de simple udsagn A og B, der indgår i udtrykket. Ud fra disse kan sandhedstildelingen af et sammensat udsagn bestemmes. Eksempler på sandhedstavler er figurerne 2.1 og 2.2.

Sandhedstavlen angiver, at det sammensatte udsagn $A \Rightarrow B$ er falsk, netop i det tilfælde, hvor A er sand og B er falsk. Læg mærke til, at det sammensatte udsagn $\neg B \Rightarrow \neg A$ har nøjagtigt de samme sandhedstildelinger som $A \Rightarrow B$. Betydningen af dette vender vi tilbage til.

Der findes tre forskellige grupper af sammensatte udsagn:

1. En tautologi (betegnes i det følgende T), er et udtryk, der altid er sandt. Det vil sige, at udtrykket er sandt, uanset hvilke sandhedstildelinger de simple udsagn, der indgår i udtrykket, antager. Det betyder, at en benægtelse af en

A	B	A ⇒ B
S	S	S
S	F	F
F	S	S
F	F	S

Figur 2.1 Sandhedstavle for implikation.

A	B	¬B	¬A	¬B ⇒ ¬A
S	S	F	F	S
S	F	S	F	F
F	S	F	S	S
F	F	S	S	S

Figur 2.2 Sandhedstavle for det kontraponerede.

tautologi indebærer en logisk selvmodsigelse. En berømt tautologi, kaldet 'det udelukkede tredjes princip', er $(A \vee \neg A)$, et udtryk der tydeligvis er sandt, uanset hvilken værdi A antager.

2. En kontradiktion (betegnes herefter K) er det modsatte af en tautologi, hvilket vil sige, at udtrykket altid er falsk, uanset hvordan de involverede simple udtryk opfører sig. Et eksempel kunne være $A \wedge \neg A$.

3. Et kontingent udsagn står i kontrast til de to foregående ved at være et udsagn, som enten kan være sandt eller falsk. Det vil sige, at dets sandhedsværdi afhænger af de sandhedstildelinger som de simple udsagn, der indgår i udtrykket, antager. Eksempelvis vil sandheden af udsagnet $A \Rightarrow B$ afhænge af sandhedsværdierne for A og B, jf. figur 2.1.

Logisk ækvivalens

Hvis to sammensatte udsagn har ens sandhedstildelinger for alle kombinationer af de simple udsagn, siges de at være logisk ækvivalente, og vi skriver da $P \equiv Q$. Hvis dette gælder, kan man erstatte P med Q og omvendt, uden at det ændrer ved sandhedstildelingen for det overordnede udsagn. P og Q er ganske enkelt sande og falske i de samme tilfælde.
Nogle få logiske ækvivalenser er:

- Loven om dobbelt negation: $\neg(\neg A) \equiv A$

  Når man siger, at det er forkert, at A er forkert, så er A rigtig og omvendt.

- De Morgans regler:

  1. $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$
     Hvis det er forkert, at enten A eller B er rigtige, så er både A og B forkerte og omvendt.
  2. $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$
     Hvis det er forkert, at både A og B er rigtige, så må enten A eller B være forkert.

- Associative love:

  1. $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$
  2. $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$

- Identitetslove:

  1. $A \vee K \equiv A$

     Hvis enten A eller en kontradiktion er rigtige, så må A være rigtig (for det kan en kontradiktion pr. definiton ikke).

  2. $A \wedge T \equiv A$

     Hvis man har sagt A og en tautologi, så har man ikke sagt andet end A, hvad angår sandhedstildelinger.

- Loven om kontraposition: $(A \Rightarrow B) \equiv (\neg B \Rightarrow \neg A)$

  Dette er en hyppigt brugt ækvivalens i matematikken. Udtrykket *at kontraponere* dækker således over, at hvis man har en implikation og bytter om på forudsætning og konsekvens, samt negerer begge, får man en ny implikation, der er sand i samme tilfælde som den oprindelige. At det faktisk forholder sig sådan, viser sandhedstavlerne i figur 2.1 og figur 2.2 tydeligt.

Slutningsregler

Slutningsregler er regler for korrekte slutninger. En korrekt slutning er at slutte fra nogle præmisser til en konklusion på en sådan måde, at hvis præmisserne er sande, så er konklusionen det med nødvendighed også. En ækvivalent formulering af kravet er, at en konklusion ikke må kunne være falsk, hvis præmisserne alle er sande. Det er her vigtigt at understrege, at der med dette krav skelnes mellem form og indhold. En slutning kan således ikke være sand eller falsk, men vurderes i stedet som korrekt eller ikke korrekt. Det er indholdet, præmisserne og konklusionen, der kan være sande eller falske. En slutning skaber en forbindelse mellem præmisser og konklusion, og en korrekt slutning er så en forbindelse, der garanterer, at sande præmisser følges af en sand konklusion. Hvis de præmisser, der benyttes i en slutning, er falske, så vil brugen af slutningsregler ikke garantere noget om konklusionen, ikke engang at denne også er falsk.

Nogle almindelige slutningsregler er:

- Modus Ponens: $(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$ altså hvis man både ved, at P er sand og at $P \Rightarrow Q$, så vil også Q være sand. Dette er en tautologi, hvilken fremgår af tabellen figur 2.3

  Læg mærke til at dette er en simpel form på et direkte bevis: Først viser man, at sammenhængen mellem P og Q er på formen $P \Rightarrow Q$, hvor P kan

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$P \wedge P \Rightarrow Q$	$(P \wedge P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$
S	S	S	S	S
S	F	F	F	S
F	S	S	F	S
F	F	S	F	S

Figur 2.3 Sandhedstavle for modus ponens.

være et eller flere udsagn, der ikke kan betvivles (aksiomer, definitioner og sætninger). Herved er gyldigheden af Q, som så kan være den nye sætning, etableret. Selve beviset består i at bringe P og Q på en form, hvor der kan bruges Modus Ponens til at slutte fra P til Q.

- Modus Tollens: Hvis $(P \Rightarrow Q)$ og $\neg Q$, så følger heraf $\neg P$.

  Denne slutning hviler på ækvivalensen kontraposition og modus ponens.

- Reductio ad Absurdum (Modstrid): Hvis $\neg P \Rightarrow K$, så følger heraf P.

  Denne slutningsregel er den, der benyttes ved indirekte beviser. Først antages noget (eksempelvis $\neg P$) at være sandt. Derefter vises, at denne antagelse medfører en logisk selvmodsigelse ($\neg P \Rightarrow K$). På denne baggrund kan det derfor konkluderes, at P er sand.

Prædikatslogik

Indtil nu har vi kigget på simple og sammensatte udsagn, der altid er enten sande eller falske. Matematik er i højere grad en undersøgelse af, under hvilke omstændigheder dette eller hint udsagn er sandt. I det følgende skal vi se nærmere på prædikatslogikken. Prædikater betegnes også åbne udsagn.
For at kunne formalisere udsagn, har vi brug for, at kunne skelne mellem objekt og egenskaber. I det følgende vil vi, i overensstemmelse med sædvanlig praksis, bruge små bogstaver for objekter. Når objekterne tillægges egenskaber, som betegnes med store bogstaver, bliver de til prædikater.
Hvis man eksempelvis vil skrive *Punktet* $(3,4)$ *ligger i første kvadrant* kan man betegne punktet med p, og det at ligge i første kvadrant, som L. Når objekt og egenskab så sættes sammen, skrives egenskaben til venstre for objektet. *Punktet* p *ligger i første kvadrant* vil derfor skrives $L(p)$. Her bliver man nødt til at acceptere den uoverensstemmelse, der er mellem logisk notation og almindelig sprogbrug, hvilket i ovenstående tilfælde resulterer i at rækkefølgen og brug af store og små bogstaver i den logiske notation er præcis modsat dagligdagssproget.

Konnektiver og variable i prædikatslogikken

Konnektiverne bruges også i prædikatslogik. $\neg L(p)$ betyder således, at punktet p ikke ligger i første kvadrant. Her skal man lægge mærke til, at det er prædikatet der negeres og ikke selve objektet. Ved at negere udtrykker man det, at objektet ikke har den pågældende egenskab. Hvis man bruger C for *punktet ligger inden for enhedscirklen*, og skriver $L(p) \wedge \neg C(p)$, betyder det, at punktet p ligger i første kvadrant, men ikke inden for enhedscirklen.
Vi kan også bruge variable i stedet for givne størrelser. $L(x)$ betyder så, at x ligger i første kvadrant. Når et udsagn indeholder en variabel, kan det ikke altid siges at være sandt eller falsk. Prædikater kaldes som nævnt også åbne udsagn, og deres sandhedsværdi vil afhænge af, hvad man erstatter den variable med i et givet tilfælde. Prædikater kan indeholde en eller flere variable; et åbent udsagn med to variable kan eksempelvis se således ud: $L(x) \wedge C(y)$, hvilket betyder, at x ligger i første kvadrant, og y ligger inden for enhedscirklen. Her behøver det ikke at være det samme objekt, der både ligger i første kvadrant og inden for enhedscirklen. Hvis vi vil sikre os, at det er det samme, der både ligger i første kvadrant og inden for enhedscirklen, skal vi skrive $L(x) \wedge C(x)$. Vi er nu tæt på at kunne lave udtryk af den type, der indgår i matematikken, men der mangler stadig noget.

Kvantorer

Der findes to kvantorer: $\forall$, der betegnes alkvantoren, og $\exists$, der betegnes eksistenskvantoren. De benyttes på følgende måde: Hvis der står $\forall x$(betingelser for x) så gælder betingelserne for ethvert x. Ofte er parenteserne underforståede, det vil sige, at de udelades af hensyn til overskueligheden af hele udsagnet. På samme måde betyder $\exists x$(betingelser for x), at der eksisterer mindst ét x, der opfylder disse betingelser. De to kvantorer kan også negeres, hvilket giver endnu to varianter nemlig: $\neg\forall x$ og $\neg\exists x$ samt betingelser for x. Dette betyder, at der eksisterer mindst ét x, der ikke opfylder disse betingelser, hhv. at der ikke eksisterer noget x, der opfylder disse betingelser.
Det følgende er ovenstående ækvivalensregler for negation af kvantificerede prædikatsudtryk med symboler.

$$\neg\forall x(F(x)) \equiv \exists x \neg(F(x))$$

$$\neg\exists x(F(x)) \equiv \forall x \neg(F(x))$$

Det er værd at lægge mærke til, at når man kvantificerer et åbent udsagn, så er dette udsagn ikke åbent mere. Man kunne eksempelvis tage det åbne udsagn: $L(x) \wedge C(x)$, hvilket betyder, at x har egenskaberne, at det ligger i første kvadrant og inden for enhedscirklen; et udsagn hvis rigtighed afhænger af, hvad

man vælger at erstatte x med. Kvantificerer man udtrykket på følgende måde: $\exists x(L(x) \wedge C(x))$, betyder det, at der er nogle (mindst et punkt) som ligger i første kvadrant og inden for enhedscirklen. Nu er det ikke længere et åbent udsagn, men et postulat, hvis sandhedsværdi det er muligt at afgøre. $\forall x(L(x) \Rightarrow C(x))$ betyder tilsvarende, at alle punkter som ligger i første kvadrant også ligger inden for enhedscirklen, hvilket også er et postulat.

Domæne

Når vi har et åbent udsagn, kan vi erstatte de variable, der indgår med forskellige objekter. Det er dog sådan, at det ikke er ligegyldigt, hvilke slags objekter der erstattes med. Her taler vi om det domæne, udsagnet opererer på. Forskellen kan illustreres ved at se på udsagnet: $\exists x(L(x))$, hvilket betyder, at mindst et x ligger i første kvadrant. Udsagnet er jo noget upræcist, indtil man har defineret, hvad x kan være. Strengt taget kan det betyde alt fra tal til mængder. Umiddelbart ville man nok gætte på, at der var tale om et punkt, men det står der jo ikke nogen steder. Hvis domænet er punkter, kan dette fremgå på to måder. Enten lader man P repræsentere egenskaben, at være et punkt i en mængde, og skriver $\exists x(P(x) \wedge L(x))$, eller også definerer man udsagnets domæne til at være punkter, og skriver $\exists x(L(x))$. I begge tilfælde har man skrevet fuldstændig det samme. Hvilken løsning, man vælger, afhænger bl.a. af, hvad der er mest overskueligt. Det er dog af afgørende betydning, at det er tydeligt, hvad domænet er, hvis man bruger variable til at repræsentere objekterne.

Relationelle prædikater

De fleste af de prædikater, vi hidtil har set på, kaldes etpladsprædikater. Der findes også prædikater, der udtaler sig om forholdet mellem objekter. De kaldes relationelle prædikater eller prædikater af flere variable og er kendetegnet ved, at de først bliver til udsagn, hvis de knyttes til flere kvantificerede variable eller objekter fra domænet. Hvis vi for eksempel tildeler egenskaben *...er større end...* bogstavet S, vil prædikatet $S(7,4)$ være udsagnet *7 er større end 4*.

Relationelle prædikater angår som nævnt relationer mellem objekter, og med mindre denne relation er en ækvivalens, er den rækkefølge objekterne forekommer i ofte essentiel. Hvis vi bytter om på objekterne i det ovenstående prædikat og skriver $S(4,7)$, betyder det jo, at 4 er større end 7, hvilket er det modsatte af, hvad der stod før. Hvis man bruger relationelle prædikater med variable, bliver udsagnet igen åbent, $S(x,y)$ er sandt, hvis der kan vælges et x og et y fra domænet, så x er større end y.
Man kan også lave relationelle prædikater om til etpladsprædikater ved at bruge et objekt og en variabel. $S(4,x)$ er et åbent udsagn, hvis sandhedsværdi afhænger af, hvorvidt det, man indsætter i stedet for x, er mindre end 4 eller ej.

Vi er nu i stand til at give et eksempel, der illustrerer vigtigheden af entydigt at have bestemt domænet for et åbent udsagn. Vi vil i et senere kapitel se på nogle beviser for sætningen: *Enhver reel, begrænset følge har en konvergent delfølge.* Hvis vi lader prædikatet $B(x)$ betyde, at x er en begrænset følge, og $K(x)$ betyde at x er en konvergent følge, og $F(y,x)$ det relationelle prædikat *y er delfølge af x*, så kan vi formalisere ovenstående sætning således: $\forall x(B(x) \Rightarrow \exists y(F(y,x) \wedge K(y)))$. Nu mangler vi bare at specificere domænet, som x og y kan hentes fra. Sætningen har domænet *reelle følger*, og som vi senere skal se, er sætningen sand på dette domæne. Hvis domænet i stedet havde været *rationale følger*, ville udsagnet ikke være sandt mere. De nærmere grunde til dette ser vi på senere; her skal blot understreges domænets indflydelse på, hvorvidt udsagnet er sandt eller ej.

I prædikatslogik ændres udsagnet også afgørende, hvis man bytter om på rækkefølgen af kvantorerne. I det følgende giver vi nogle eksempler på dette:

Lad $S(x,y)$ være det relationelle prædikat *x sladrer om y*, og domænet være mennesker, så vil følgende udsagn betyde:

$\forall x \forall y(S(x,y))$	Alle sladrer om alle.
$\forall y \neg \forall x(S(x,y))$	For alle, er der nogen, der ikke sladrer om dem.
$\forall x \exists y(S(x,y))$	Alle sladrer om en eller anden.
$\exists y \forall x(S(x,y))$	Der er en, alle sladrer om.
$\neg \exists x \exists y(S(x,y))$	Der er ikke nogen, der sladrer om andre.
$\exists y \neg \exists x(S(x,y))$	Der er en, der slet ikke bliver sladret om.
$\forall y \exists x(S(x,y))$	Alle har en, der sladrer om dem.
$\exists x \forall y(S(x,y))$	Der er en, der sladrer om alle.

Til sidst ser vi på, hvordan der sluttes mellem åbne og lukkede udsagn.

- Reglen om universel instantiation:
  For ethvert åbent udsagn $F(x)$, gælder det, at hvis $\forall x(F(x))$ er sandt, så kan man slutte, at $F(a)$ er sand, for ethvert a i domænet.

- Reglen om eksistentiel instantiation:
  For ethvert åbent udsagn $F(x)$, gælder det, at hvis $\exists x(F(x))$ er sandt, så

kan man slutte, at der findes mindst et a i domænet, for hvilken $F(a)$ er sand.

- Reglen om universel generalisation:
  Hvis udsagnet $F(a)$ er sandt for ethvert a i domænet, så er $\forall x(F(x))$ sandt.
- Reglen om eksistentiel generalisation:
  Hvis udsagnet $F(a)$ er sandt for et specielt a i domænet, så er $\exists x(F(x))$ sandt.

2.3 Hvad er et matematisk bevis?

Et bevis er et argument for, at en påstand er sand. Beviset består af en endelig slutningskæde fra A til B:

$$A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow A_3 \Rightarrow \ldots \Rightarrow B$$

De enkelte skridt i slutningskæden skal være resultatet af korrekte logiske slutningsregler, dvs. deduktion, hvori kun aksiomer og allerede beviste sætninger benyttes.
Aksiomer er de basale påstande, der ikke bevises. Et eksempel på aksiomer er aksiomerne i Euklids Elementerne. Euklid opfattede sine aksiomer som indlysende sandheder, der ikke behøver bevis. Idag er et sæt af aksiomer, et såkaldt aksiomssystem, blot et vedtaget grundlag for et matematisk område. Disse aksiomer skal være konsistente, hvilket betyder, at man ikke ud fra aksiomerne kan udlede, at en sætning både er sand og falsk. Sandheden af en sætning er således afhængig af valget af aksiomer, og er således noget relativt. Da der altid er en række sætninger, som vi ønsker skal være sande, vælges aksiomerne så disse sætninger bliver sande. Ud fra aksiomerne bevises en sætning. Denne sætning kan nu sammen med aksiomerne indgå i grundlaget for beviset af endnu en sætning. På denne måde opbygges et helt system af sætninger, der alle kan føres tilbage til aksiomerne. En definition er en navngivning af nogle genstande, som tillægges nogle egenskaber. Definitioner bringer således ikke noget nyt på banen, men er blot en måde at forkorte notationen og en hjælp for tanken.

2.4 Bevistyper

Beviser kan inddeles i en række forskellige typer. Overordnet skelnes mellem direkte og indirekte beviser.

Indirekte beviser

Indirekte beviser er det samme som modstridsbeviser. Man antager det modsatte af, hvad man ønsker at vise, og viser ud fra aksiomerne og sætningerne udledt

herfra, at antagelsen medfører enten noget ikke-sandt (absurd) eller noget, der er i åbenlys modstrid med det antagede. Da aksiomsystemet skal være konsistent, kan der ikke udledes selvmodsigelser ud fra dette alene, så vi kan konkludere, at det må være antagelsen, der ikke er rigtig. Det modsatte af antagelsen må derfor gælde.
Den indirekte bevistype anvendes specielt ved umulighedssætninger, hvor man ønsker at vise, at noget ikke er muligt eller ikke eksisterer. Man antager, at det er muligt eller eksisterer, og viser at dette fører til en modstrid. Et direkte bevis er i disse tilfælde ikke muligt, da det søgte netop er defineret som fraværet af en egenskab. Føromtalte bevis for, at $\sqrt{2}$ ikke er et rationalt tal, er et eksempel herpå. De irrationale tal er netop defineret som alle de ikke-rationale, reelle tal, og det er vanskeligt at vise, at et tal er irrationalt, da det netop er defineret ud fra egenskaber, det ikke har.

Direkte beviser

Den type beviser, der hyppigst anvendes, er direkte beviser, dvs. alle de beviser der ikke er indirekte. Disse kan anvende de slutningsregler, som blev gennemgået i logikafsnittet. Med til de direkte beviser hører induktionsbeviserne, som vi også omtalte under logikafsnittet. Vi vil dog uddybe den tidligere fremstilling lidt.

Induktionsbeviser

Induktionsbeviser er som tidligere omtalt deduktive beviser, der blandt andet hviler på induktionsaksiomet. Først vises startbetingelsen $P(1)$, der sikrer, at vi har et sikkert (sandt) udgangspunkt. Herefter bevises induktionsmotoren, der sikrer, at vi altid kan gå et skridt videre. Det vises ved at bevise, at $P(n+1)$ er sandt, hvis $P(n)$ er sandt. Vi har således et sikkert udgangspunkt, $n = 1$, og vi ved, at vi altid kan gå trinvist frem til et vilkårligt givet n. Men derved må $P(n)$ være sandt for alle $n \in \mathbf{N}$. Argumentationen forudsætter, at ethvert $n \in \mathbf{N}$ kan nås ved gentagne gange at addere 1 til 1. Logikken udtaler sig ikke om dette; det er derimod en egenskab, vi tillægger de naturlige tal, og derfor må induktionsprincippet aksiomatiseres, og således medtages i matematikkens fundament. Induktionsaksiomet kan generaliseres. Der er intet til hinder for at have et udgangspunkt, $n_0 \in \mathbf{N}$, der er forskellig fra 1, da dette blot er en forskydning. Ligeledes er det legalt, at antage, at $P(m)$ er sand for $n_0 < m \leq n$, når vi beviser, at $P(n+1)$ er sand. Vi kan stadig konkludere, at $P(n)$ er sand for alle $n \in \mathbf{N}$. Dette er stadig en følge af induktionsaksiomet.

Kombinationer

Undervejs i et bevis benyttes typisk flere slutningsregler og bevistyper. Der er således intet i vejen for i et direkte bevis at vise delpåstande ved hjælp af induk-

tion eller reductio ad absurdum. Bevistyperne er således bare nogle overordnede fremgangsmåder, som kombineres efter behov.

3 Undersøgelse

3.1 Udvælgelse af sætninger og beviser

Denne rapport tager udgangspunkt i seks sætninger og deres beviser. Når vi har valgt netop disse sætninger og beviser ud, er det, fordi beviserne illustrerer nogle pointer, som, vi synes, er interessante og ønsker at diskutere.
De seks sætninger drejer sig om $\sqrt{2}$'s irrationalitet, nogle geometriske figurers kvadratur, konvergente delfølger af begrænsede følger, dimensionssætningen, en regneregel for den komplekse, naturlige eksponentialfunktion og binomialformlen. Sætningerne kommer således fra forskellige matematiske områder, og beviserne for dem er ligeledes af forskellig art.
I forhold til vores overordnede problemstilling om, hvornår en matematisk påstand er bevist, er sætningerne og deres beviser valgt ud fra følgende kriterier:
Beviset, for at $\sqrt{2}$ er et irrationalt tal, er et godt eksempel på et modstridsbevis.
Vi ønskede at have et geometrisk bevis med, fordi man let kan lade sig snyde til at tro, at noget er bevist, når man ser det illustreret. Det er derfor interessant at undersøge, om beviserne er deduktivt korrekte og ikke blot består af overtalende figurer. Desuden giver det os endnu en mulighed for at berøre umulighedsbeviser.
Sætningen om delfølger er med, hovedsagelig fordi vi til denne har to forskellige beviser, der har hver deres grundlæggende ide, og hvor det ene er intuitivt lettere forståeligt end det andet.
Dimensionssætningen er medtaget, fordi sætningen og beviset for den udelukkende bevæger sig inden for ét matematisk univers, nemlig lineær algebra. Det er derfor forholdsvis enkelt at føre alle skridt i beviset tilbage til aksiomerne og definitionerne.
Sætningen og beviset for den komplekse, naturlige eksponentialfunktions regneregel inddrager dele af forskellige matematiske universer, bl.a. komplekse tal og den naturlige eksponentialfunktion. Dette gør, at det bliver mere kompliceret at føre bevisets skridt tilbage til et aksiomatisk grundlag.
Binomialformlen har vi medtaget, fordi vi ved den kan vise dels to induktionsbeviser, dels et kombinatorisk bevis. Ved at holde disse op mod hinanden, kan vi se styrker og svagheder ved disse to forskellige måder at bevise på.

Til beviserne for sætningerne om $\sqrt{2}$'s irrationalitet, konvergente delfølger af be-

grænsede følger, regneregel for den komplekse, naturlige eksponentialfunktion og binomialformlen er vi blevet inspireret af Tom Lindstrøm: *Kalkulus* (Lindstrøm; 1996).
Til beviset for dimensionssætningen er vi blevet inspireret dels af Mogens Niss: *Lineær algebra og analyse* (Niss; 1990), dels af Stephen Friedberg et. al: *Linear Algebra* (Friedberg et al.; 1992).
Beviserne for de geometriske sætninger er hovedsagelig inspireret af William Dunham: *Journeys through genius* (Dunham; 1991).

3.2 Præsentation af analysemetode

Dette kapitel drejer sig som nævnt om seks sætninger og beviser for disse. I hvert afsnit præsenteres først en sætning, så opskrives de sætninger og definitioner, der trækkes på i beviset, og derefter følger de enkelte beviser. Beviserne for hver sætning analyseres og diskuteres enkeltvis. Til nogle sætninger gennemgår vi flere beviser, og da vil der være en analyse efter hvert bevis og en diskussion i slutningen af afsnittet.

Ud fra analyserne og diskussionerne af de enkelte beviser har vi en samlet diskussion af, hvornår en matematisk påstand er bevist.

I vores analyse ser vi på følgende områder: sætningstype, bevistype, matematisk univers og bevisets grundlæggende ide. Analysen lægger op til en diskussion af hvert enkelt bevis, hvor vi søger at tage stilling til,hvorfor beviset er godt nok. Herunder vil vi forklare, hvad der menes med de nævnte områder.

Sætningstype: Man kan sige, at alle matematiske sætninger er egenskabssætninger, idet de udtaler sig om bestemte egenskaber ved sætningens elementer. Men sætninger kan derudover være af andre typer, f.eks. identitetssætninger, der viser flere alternative måder at opskrive et udtryk på, eksistenssætninger, der som navnet siger, angår eksistensen af et givet element, entydighedssætninger, der angår eksistensen af netop ét element med en given egenskab, umulighedssætninger, der viser, at noget ikke er muligt, og desuden kan en sætning være et ligningsbånd, der fastlægger hver af de involverede størrelser.

Bevistype: Her ser vi på, om beviset er direkte, som f.eks. et induktionsbevis, eller indirekte.

I den efterfølgende diskussion ses på sammenhængen mellem sætningstype

og bevistype, f.eks. om sætningstypen lægger op til en bestemt bevistype.

Matematisk univers: Det matematiske univers ses dels som, hvilken matematisk disciplin, der er tale om, dels hvilket sæt af aksiomer, der tages udgangspunkt i. Vi ser på, om der er sammenhæng mellem det matematiske univers for sætning og bevis, eller om beviset inddrager andre universer end sætningens. I den efterfølgende diskussion af beviset bruges dette til at svare på, om bevisets bestanddele er veldefinerede, dvs. om de kan føres tilbage til aksiomerne for det (eller de) pågældende matematiske univers(er), som sætningen og beviset inddrager.

Grundlæggende ide: Her ønsker vi at tydeliggøre, hvilket eller hvilke skridt i beviset, der er af vital betydning for bevisets gennemførelse. Ideen til, hvordan en matematisk påstand kan bevises, er vigtig, da den gør det muligt for mange at gennemføre beviset. Derudover er det interessant, hvor meget af et bevis der skal tages med, for at det er forståeligt, dvs. hvor mange detaljer der skal tages med.

I diskussionerne af de enkelte beviser tager vi stilling til, om beviserne er forklarende eller ej, hvilket har at gøre med sammenhængen mellem sætningen og beviset. Hvis beviset er forklarende, kan man ud over den formelle overbevisning få en intuitiv forståelse af, hvorfor sætningen er sand.(Hanna & Jahnke; 1996) Ved et ikke-forklarende bevis, kan man derimod ikke se, *hvorfor* sætningen er sand, men kun at den nødvendigvis *er* sand. Dette vil i høj grad være en subjektiv bedømmelse, men der findes beviser, der ikke virker forklarende, selvom man har en stor matematisk viden og intuition.

Desuden giver vi et bud på, om beviserne er gode nok, dvs. om de er udført deduktivt korrekt, og hvorfor de i så fald er det. Hvad, vi mener med *godt nok* forklarer vi med følgende analogi.

Hvornår er noget bevist – hvornår er det godt nok?

Hvis man spiller et spil, er man ikke nødt til at kende alle reglerne for at være succesfuld. Det er muligt at forestille sig et naturtalent begå sig på en fodboldbane, udelukkende ud fra en instruktion om at forsøge at få bolden i modstanderens mål. Hvis man til gengæld udvider ambitionerne, sådan at man ud over at få succes i et spil, også vil vide om man har det, kræver det ud over et indgående kendskab til alle reglerne også, at man forstår deres indbyrdes samspil. At bevise noget i matematik kan sammenlignes med at have succes i et spil. Selve processen, at bevise noget, består i en række handlinger, hvis succes bedømmes ud fra to kriterier:

1. Opnåede man det ønskede (jf. Er det bevist)?
   I fodbold kan det eksempelvis være at score et mål, i matematik vil det være at skabe en sammenhæng mellem noget sikkert (aksiomer/definitioner) og den påstand, man gerne vil bevise, sådan at *hvis* aksiomerne er sande (og det er de jo), *så* må den nye sætning nødvendigvis også være sand.

2. I sine bestræbelser på at opnå målet, overholdt man da reglerne (jf. Er det bevist godt nok)?
   For at fortsætte fodboldanalogien, så nytter det ikke noget at slå på modspillerne, når man forsøger at få bolden i mål. På samme måde er man i matematik nødt til at overholde gældende regler, når man vil bevise noget. Hvis man eksempelvis undervejs i sit bevis har divideret med en variabel, der kan antage værdien nul, er beviset ganske simpelt ikke gyldigt. Hvis man så tilføjer nogle ræsonnementer, hvor man godtgør på anden vis, at hvis variablen antager værdien nul, så opnår man stadig det ønskede resultat, så vil ens bevis pludselig være bragt på gyldig form, dvs. man har vist det ønskede under hensyntagen til de regler, der gælder.

Nu følger den føromtalte gennemgang af de seks sætninger og beviserne for dem.

3.3 $\sqrt{2}$'s irrationalitet

Sætning 3.1
$\sqrt{2}$ er et irrationalt tal.

Beviset, vi vil føre for sætningen, er et modstridsbevis, hvor vi antager, at $\sqrt{2}$ er et rationalt tal og udtrykker det som et sådant. Ved at regne på dette udtryk vises, at antagelsen fører til en modstrid.

Vi har følgende forudsætninger:

Definition 1

$$\mathbf{Q} = \{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbf{Z}, b \neq 0\}$$

hvor $\mathbf{Q}$ er mængden af rationale tal.
Mængden af tal $\mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}$ kaldes irrationale tal.

Sætning 3.2 (Aritmetikkens fundamentalsætning)
Ethvert naturligt tal, $a > 1$, kan skrives som et produkt af primtal:

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$$

Denne faktorisering er entydig i den forstand, at hvis

$$a = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_m$$

er en anden fremstilling af a som et produkt af primtal, så er $n = m$, og faktorene $q_1, q_2, \ldots, q_m$ er de samme som $p_1, p_2, \ldots, p_n$ bortset fra rækkefølgen.

Lemma 1
Hvis $a \in \mathbf{N}$ og a^2 er et lige tal, så er også a et lige tal.
Hvis $a \in \mathbf{N}$ og a^2 er et ulige tal, så er også a et ulige tal.

Lemma 2
Et tal a er lige, netop hvis det kan skrives på formen $a = 2n$, hvor $n \in \mathbf{N}$.

Lemma 3
Ethvert rationalt tal har netop én uforkortelig brøkfremstilling med positiv nævner.

Bevis
Hvis $\sqrt{2}$ er et rationalt tal, kan der findes hele tal, a og $b \neq 0$, sådan, at

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

Vi antager, at brøken $\frac{a}{b}$ er forkortet mest muligt. Dette kan gøres i kraft af lemma 3, idet a og b kan forkortes, så de ikke har anden fælles faktor end 1.

Kvadreres på begge sider i ligningen $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, fås

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

Ved at multiplicere med b^2 på begge sider fås

$$2b^2 = a^2$$

Ifølge lemma 2 er a^2 et lige tal, og ifølge lemma 1 er a så også et lige tal. Da a er lige, kan det ifølge lemma 2 skrives på formen $a = 2n$. a^2 bliver da $a^2 = (2n)^2 = 4n^2$. Dette sættes ind i ligningen $2b^2 = a^2$

$$2b^2 = 4n^2$$

Forkortes dette udtryk med 2 fås $b^2 = 2n^2$
Denne ligning viser, at b^2 er et lige tal ifølge lemma 2; og ifølge lemma 1 er da også b et lige tal.
Dermed har vi vist, at både a og b er lige tal, og de kan derfor deles med 2. Dette strider mod antagelsen om, at de ikke har anden fælles faktor end 1, fordi 2 således er en fælles primtalsfaktor.
Altså fører antagelsen om, at $\sqrt{2}$ er rational, til en modstrid, og den eneste anden mulighed er, at $\sqrt{2}$ er irrational. □

Analyse

Sætningstype: Det er en sætning, der kan opfattes på to forskellige måder. Man kan sige, at det er en umulighedssætning, hvis man formulerer den som følger:
Der eksisterer intet rationalt tal, hvis kvadrat er 2.
Sætningen kan derimod opfattes som en egenskabssætning ved følgende formulering, hvor der lægges vægt på sidste del af sætningen:
Der eksisterer et reelt tal, hvis kvadrat er 2, som vi benævner $\sqrt{2}$; dette tal er ikke rationalt.
Som sætning 3.1 er opskrevet, er det ikke klart, hvilken af de to opfattelser, der henvises til. Umiddelbart udtaler den sig blot om en egenskab ved tallet $\sqrt{2}$ og tager ikke stilling til eksistensen af tallet. Måden, beviset er gennemført på, viser dog, at det er umulighedssætningen, der tænkes på, idet man som udgangspunkt antager eksistensen af et rationalt tal med kvadratet 2.

Bevistype: Det et et modstridsbevis (indirekte bevis), idet man som nævnt antager, at der eksisterer et rationalt tal med kvadratet 2 og viser, at dette

fører til en modstrid. Herefter konkluderes, at antagelsen nødvendigvis må være forkert, og at $\sqrt{2}$ følgelig er et irrationalt tal.

Matematisk univers: Det matematiske univers er talteori. I beviset anvendes regneregler og definitioner for de naturlige og de rationale tal. Selvom $\sqrt{2}$ er et irrationalt tal, tages der ikke udgangspunkt i de reelle tals aksiomer. Det skyldes, at måden, vi viser, at $\sqrt{2}$ er irrational, er at antage, at det er rationalt og regne på dette.

Grundlæggende ide: Den grundlæggende ide, er antagelsen om, at $\sqrt{2}$ er et rationalt tal. Man regner ud fra denne antagelse og viser, at $\sqrt{2}$ har egenskaber, der gør, at det ikke kan være rationalt.

Diskussion

Der er intet mærkværdigt ved, at sætningen påstår en egenskab om tallet $\sqrt{2}$, nemlig irrationalitet, hvorefter beviset udelukkende bygger på de rationale tal. Dette skyldes, at egenskaben irrationalitet er defineret som fravær af egenskaben rationalitet.
De reelle tal er karakteriseret ved at være mængden af rationale tal forenet med mængden af ikke-rationale tal, dvs. irrationale ($\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup (\mathbf{R} \backslash \mathbf{Q})$). For at vise at $\sqrt{2}$ er irrational, er det derfor naturligt, at tage udgangspunkt i fraværet af egenskaben rationalitet.

Bevisets konklusion, at hvis $\sqrt{2}$ ikke er rationalt, så er det irrationalt, følger umiddelbart af, at der inden for de reelle tal netop kun er mulighed for at være rational eller irrational; dette udelukker således, at der skulle være en tredie mulighed.
De reelle tals aksiomer afviger udelukkende fra de rationale tals aksiomer ved fuldstændighedsprincippet. Man kan forestille sig, at fuldstændighedsaksiomet netop er formuleret, fordi man fandt, at de rationale tal ikke indeholdt alle de tal, man kunne regne sig frem til. [1]

De reelle tal er givet ved aksiomerne, og ud fra disse aksiomer kan eksistensen af de rationale tal godtgøres. Viser man så, at der eksisterer ét tal f.eks $\sqrt{2}$, der er irrationalt, har man vist, at der eksisterer irrationale tal, og at mængden $\mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}$ ikke er tom.

[1] F.eks. mangles $\sqrt{2}$ ved udregningen af hypotenusen i en retvinklet trekant med kateter af længden 1. Bruges Phytagores' sætning på en sådan trekant, bliver længden af hypotenusen netop $\sqrt{2}$. Dette tal er ikke rationalt, og ville derfor ikke være defineret, hvis det ikke var for fuldstændighedsprincippet.

Man kan dog også godtgøre, at der eksisterer irrationale tal på anden vis end ved at påvise eksistensen af tal, der ikke er rationale, nemlig ved uendelige rækker, hvor man laver uendelige, ikke-periodiske decimalbrøker. At vise, at en decimalbrøk er ikke-periodisk, vil dog også kræve et indirekte bevis.

Som beviset står nu, er det let at følge de enkelte skridt, og at godtgøre at de er deduktivt korrekte. Det er således ikke svært at afgøre, at beviset er godt nok.

3.4 Geometriske sætninger

I det følgende gennemgår vi en række beviser for nogle geometriske sætninger og påstande. De to hovedbeviser er kvadratur af månen på en kvartcirkel og det fejlbehæftede bevis for cirklens kvadratur. Først vil vi bevise en af de sætninger, vi bruger, nemlig kvadratur af et rektangel. Efter hvert bevis er der en analyse, men vi diskuterer dem først efter, at alle beviserne er gennemført.
Beviserne bygger hovedsagelig på euklidisk geometri, og skal ses i lyset heraf. Det er således kun tilladt at udføre operationer, der kan udføres med passer og lineal. Når der tales om eksistensen af et kvadrat med samme areal som en given figur, er det underforstået, at kvadratet skal kunne konstrueres med passer og lineal. Hele begrebsverdenen inden for den euklidiske geometri er bygget op af nogle få grundlæggende forudsætninger og almindelige begreber. Heraf kan følgesætninger udledes.(Euklid/Eibe; 1897)

Kvadrering af et rektangel

For at illustrere den måde, beviserne inden for geometri gennemføres på, starter vi med at bevise følgende sætning.

Sætning 3.3
Et rektangel kan kvadreres.

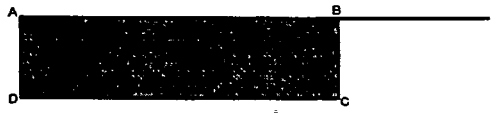
Det vil sige, at vi skal vise, at der findes et kvadrat med samme areal som rektanglet.

Hvis vi har et vilkårligt rektangel, ABCD, kan vi alene ved hjælp af passer og lineal konstruere et kvadrat med samme areal. Det vil vi nu bevise. Undervejs benytter vi elementer fra det euklidiske aksiomsystem til konstruktion af figurerne, nemlig at:

1. Man kan konstruere et liniestykke og forlænge dette.
2. Man kan med passer konstruere cirkler og cirkelbuer med en given radius og et givet centrum.
3. Thales' sætning: En trekant, som er indskrevet i en halvcirkel[2], og som har cirklens diameter som den ene side, er retvinklet.
4. Forholdet mellem sider i ensvinklede trekanter er konstant.
5. Summen af vinklerne i en trekant er π.

[2]Ved indskreven forstås, at trekanten ligger inden for halvcirkelskiven, at dens grundlinje har samme længde som halvcirklens diameter, samt at toppunktet i trekanten ligger på cirkelperiferien.

Bevis
Med udgangspunkt i et vilkårligt rektangel, ABCD, forlænges siden $|AB|$ med lineal. Se figur 3.1.

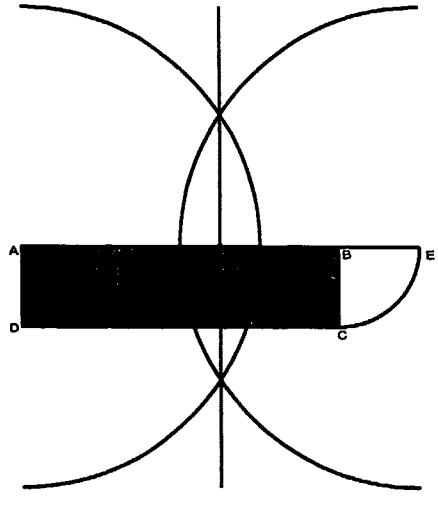


Figur 3.1 Siden $|AB|$ forlænges

Herefter konstrueres cirklen med centrum i B og radius ækvivalent med stykket $|BC|$. Denne cirkel skærer forlængelsen af $|AB|$ i to punkter. Vi vælger det punkt som ligger på forlænglelsen af liniestykket $|AB|$, dette punkt kaldes for E, se figur 3.2.

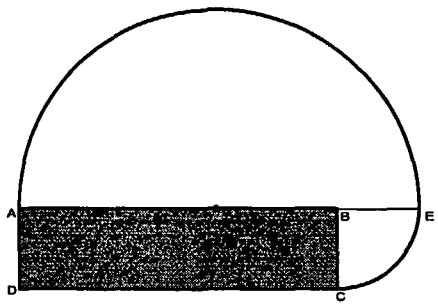
Figur 3.2 Punkt E findes som den ene skæring mellem cirkel og linie.

Stykket $|AE|$ deles i to lige store stykker $|AO| = |OE|$ ved at oprejse en midtnormal, se figur 3.3.



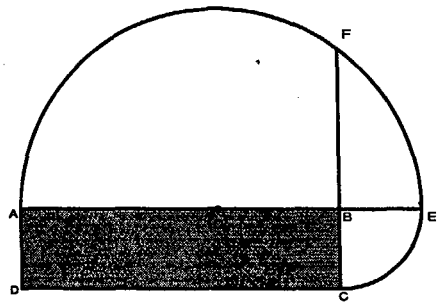
Figur 3.3 Oprejsning af midtnormalen til $|AE|$

Halvcirklen med centrum i O og radius $|AO| = |OE|$ konstrueres, se figur 3.4.



Figur 3.4 Konstruktion af halvcirklen med centrum i O

Siden $|BC|$ forlænges, så den skærer halvcirklen. Skæringspunktet kaldes F, se figur 3.5.

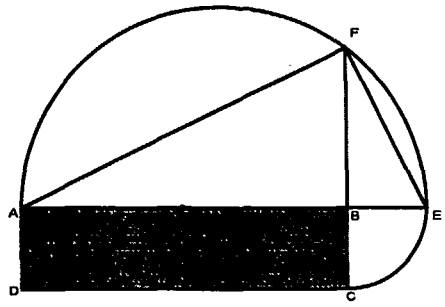


Figur 3.5 Forlængelse af $|BC|$

Nu konstrueres de liniestykker, som går fra henholdsvis A til F og E til F, se figur 3.6.
Derved fås en trekant, △AEF, der er inskrevet i halvcirklen, idet trekanten og halvcirklen har en fælles side, $|AE|$, som hhv. side og diameter, og vinkelspidsen af trekanten, $\angle F$, ligger på cirkelperiferien. Ifølge Thales' sætning er trekanten, △AEF, derved retvinklet, altså $\angle EFA = \frac{\pi}{2}$.

Vi ser på trekanterne △ABF og △BEF.
Trekanterne er begge retvinklede, da vinkel $\angle ABF$ er ret i △ABF, og vinkel $\angle FBE$ er ret i △BEF, idet deres fælles side, $|BF|$ ligger på forlængelsen af siden $|BC|$, som er vinkelret på $|AB|$. Da de to trekanter udgør den samlede trekant △AEF, er $\angle BFA + \angle EFB = \angle EFA = \frac{\pi}{2}$.
Det samme gælder for de ikke rette vinkler i △AFB og △BEF:

$$\angle FAB + \angle BFA = \frac{\pi}{2} \quad \text{og} \quad \angle BEF + \angle EFB = \frac{\pi}{2}$$



Figur 3.6 Konstruktion af siderne $|AF|$ og $|EF|$

da summen af vinklerne i en trekant er π. Heraf fås:

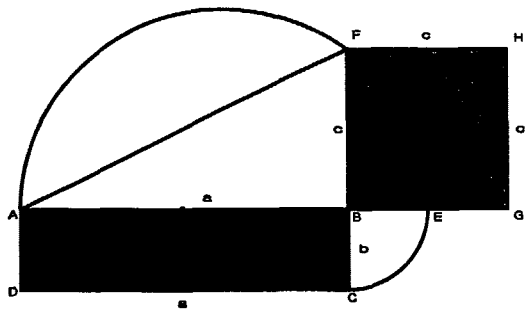
$$\angle BFA + \angle EFB = \angle FAB + \angle BFA \Leftrightarrow \angle EFB = \angle FAB$$

og

$$\angle BFA + \angle EFB = \angle BEF + \angle EFB \Leftrightarrow \angle BFA = \angle BEF$$

Det vil sige, at vinklerne er parvis ens, og trekanterne er dermed ensvinklede. Forholdet mellem trekanterne ensliggende sider er konstant, eller med andre ord: højden er mellemproportional mellem de to stykker, den deler hypotenusen i. Med følgende navngivning: $|AB| = a$, $|BE| = b$ og $|BF| = c$, kan vi opskrive følgende:

$$\frac{c}{a} = \frac{b}{c} \Leftrightarrow c^2 = ab$$



Figur 3.7 Konstruktion af kvadrat med sidelængde c

Arealet af rektanglet, ABCD, er givet ved ab, og da $c^2 = ab$, vil arealet af et kvadrat med sidelængden c have samme areal som rektanglet. Dette kvadrat kan konstrueres ved forlængelse af $|AE|$, afsættelse af stykket c, oprejsning af normal i G, afsætning af skykket c, så punktet H fremkommer, og konstruktion af liniestykket fra F til H, som den sidste side. Se figur 3.7.
Alle de her omtalte konstruktioner er af samme art som de foregående, der allerede er vist. Herved har vi konstrueret kvadratet, BGHF, som har samme areal som rektanglet, ABCD. □

Da vi nu kan kvadrere rektanglet, kan vi også kvadrere en vilkårlig retvinklet trekant med grundlinie a og højde b. Størrelsen af trekantens areal er givet ved $\frac{1}{2}ab$, og et rektangel med siderne a og $\frac{b}{2}$ har samme størrelse areal. Vi kan generalisere til vilkårlige trekanter med grundlinie a og højde b, da de jo har samme areal.

Analyse

Sætningstype: Sætningen udtaler sig om eksistensen af et kvadrat med samme areal som et givet rektangel.

Bevistype: Beviset er et direkte bevis.

Matematisk univers: Beviset inddrager både euklidisk geometri og algebra. Den euklidiske geometri anvendes ved konstruktion af figurerne. Algebraen bruges til at udtrykke arealet af kvadratet, og til at vise at kvadratets areal er det samme som rektanglets areal. Beviset benytter figurerne til at visualisere hvad der foregår, da det hele tiden er muligt at følge ræsonnementet ved konstruktion.

Grundlæggende ide: Den grundlæggende ide er at komme fra rektanglet over halvcirklen til den retvinklede trekant. Dette giver anvendelsen af forholdet mellem siderne, der viser, at det konstruerede kvadrat har samme areal som rektanglet.

Hippokrates' bevis for en månes kvadratur

Sætning 3.4
Månen på en kvartcirkel kan kvadreres.

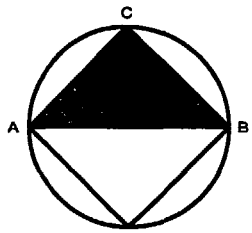
Det vil altså sige, at man kan konstruere et kvadrat med samme areal som månen. Her bemærker vi, at en måne er en figur, som er delvist afgrænset af to cirkelskiver, der overlapper hinanden delvist. Månen er den del af den ene cirkelskive, der ikke overlappes af den anden cirkelskive.
I det følgende opfattes symbolet $\langle \text{figur} \rangle_A$ som arealet af figuren.

Beviset går ud på, at vi konstruerer en halvcirkel med samme areal som en kvartcirkel. Dernæst opdeler vi figuren, så vi har en måne på en kvartcirkel og en retvinklet trekant, der har samme areal. Da trekanten kan kvadreres, slutter vi, at månen også kan kvadreres.

Beviset bygger på følgende:

1. Pythagoras' sætning.
2. Thales' sætning: En trekant, som er indskrevet i en halvcirkel, og som har cirklens diameter som den ene side, er retvinklet.
3. Forholdet mellem arealerne af to halvcirkler kan udtrykkes ved hjælp af diameteren i de respektive halvcirkler: $\frac{d^2}{D^2}$.
4. Det er muligt at konstruere et kvadrat med samme areal som en given trekant.
5. Når lige store størrelser trækkes fra lige store størrelser er resterne lige store.[3]

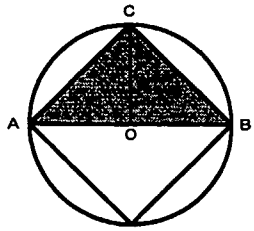
Bevis
Vi tager udgangspunkt i en ligebenet trekant, $\triangle$ABC, som er indskrevet i en halvcirkel, og som ifølge Thales' sætning derfor er retvinklet. Se figur 3.8.



Figur 3.8 Kvadrat indskrevet i en cirkel eller ligebenet trekant indskrevet i en halvcirkel

Da trekanten er ligebenet, er længden af korden $|AC|$ lig længden af korden $|BC|$, og vinklerne ved grundlinien, $\angle CAB$ og $\angle ABC$, er ens.
Når vi deler trekanten med højden fra $|AB|$ op til C, får vi to kongruente trekanter, $\triangle$BCO og $\triangle$AOC. Se figur 3.9.

[3]Det 3. af Euklids almindelige begreber. (Euklid/Eibe; 1897)



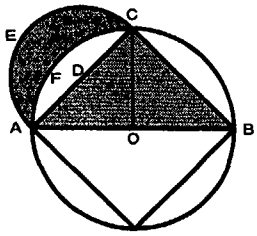
Figur 3.9 Højden fra C på $|AB|$

Vinklen mellem højden, $|OC|$, og $|AB|$ er pr. definition $\frac{\pi}{2}$, og da de to trekanter har to parvis ens vinkler, er deres sidste vinkel, $\angle OCA$ og $\angle BCO$, også ens. $\triangle$AOC og $\triangle$BCO vil således være ens og retvinklede.

Vi opskriver nu Pythagoras' sætning for den indskrevne, retvinklede trekant, $\triangle$ABC, hvor vi bruger, at $|AC| = |BC|$:

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 = 2|AC|^2$$

Vi konstruerer nu halvcirklen med diameter $|AC|$, se figur 3.10.



Figur 3.10 Halvcirklen med diameter $|AC|$

Da $|AB|$ er diameter for halvcirklen ABC, og $|AC|$ er diameter for halvcirklen ACE kan vi bruge forudsætning 3 til at opskrive følgende:

$$\frac{\langle \text{halvcirkel ACE} \rangle_A}{\langle \text{halvcirkel ABC} \rangle_A} = \frac{|AC|^2}{|AB|^2} = \frac{|AC|^2}{2|AC|^2} = \frac{1}{2}$$

Det vil sige, at arealet af halvcirklen ACE er halvt så stort som arealet af halvcirklen ABC. Men da arealet af kvartcirklen, AOCF, også er halvt så stort som arealet af halvcirklen ABC, må det derfor gælde, at arealet af kvartcirklen, AOCF, er det samme som arealet af halvcirklen ACE:

$$\langle \text{halvcirkel ACE} \rangle_A = \langle \text{kvartcirkel AOCF} \rangle_A$$

Vi betragter halvcirklen ACE og kvartcirklen AOCF. Korden i kvartcirklen AOCF, $|AC|$, er samtidig diameter i halvcirklen ACE. Korden deler kvartcirklen i

et cirkelafsnit, ADCF, og en retvinklet trekant, AOC. Da korden, $|AC|$, samtidig er diameter i halvcirklen ACE, vil cirkelafsnittet, ADCF, også ligge i halvcirklen ACE. Cirkelafsnittet, ADCF, er derfor et fælles område for kvartcirklen og halvcirklen. Halvcirklen, ACE, uden det fælles område udgør en måne, AFCE, og kvartcirklen uden det fælles område udgør den retvinklede trekant, AOC.

Dette kan udtrykkes ved følgende ligning, hvor vi ser på det fælles areal for halvcirkel ACE og kvartcirkel AOCF:

$$\begin{aligned} &\langle \text{måne AFCE}\rangle_A + \langle \text{cirkelafsnit ADCF}\rangle_A \\ = \ &\langle \triangle \text{ AOC}\rangle_A + \langle \text{cirkelafsnit ADCF}\rangle_A \end{aligned}$$

Vi fjerner nu det samme areal på begge sider, ifølge forudsætning 5.
Dette giver at:

$$\langle \text{måne AFCE}\rangle_A = \langle \triangle \text{ AOC}\rangle_A$$

Det vil sige, at arealet af månen er lig arealet af en retvinklet trekant.
Da det er muligt at konstruere et kvadrat med samme areal som en given trekant, er det hermed vist, at den her beskrevne måne, månen på en kvartcirkel, kan kvadreres. □

Analyse

Sætningstype: Sætningen er en eksistenssætning, da den siger at der eksisterer et kvadrat med samme areal som månens.

Bevistype: Beviset er et direkte bevis og specielt benytter det sig af geometriske figurer til at visualisere de forskellige skridt i beviset.

Matematisk univers: Ligesom i det foregående bevis inddrages både euklidisk geometri og algebra, og specielt benytter det sig af geometriske figurer til at visualisere de forskellige skridt i beviset.

Grundlæggende ide: Ideen er at udtrykke månens areal, som et areal man kan kvadrere, nemlig som en trekant.

Forsøg på bevis for cirklens kvadratur

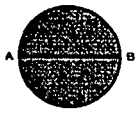
Vi har vist, at månen på en kvartcirkel kan kvadreres. Der findes en række andre måner, der ligeledes kan kvadreres, og dette har gennem tiden ført til den antagelse, at cirklen nok også kunne kvadreres.

Påstand 3.5
En cirkel kan kvadreres.

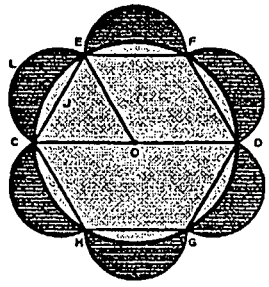
Påstanden er forsøgt bevist gennem flere tusind år. Nedenstående er et besnærende forsøg, hvor cirklens areal udtrykkes vha. måners areal. [4] Det gøres ved at konstruere seks måner, der har samme areal som en given cirkel, og deraf slutte, at hvis månerne kan kvadreres, så kan også cirklen kvadreres.
Undervejs benyttes at:

1. Enhver polygon kan kvadreres.
2. Additionsprincippet for areal: Det er muligt at konstruere et kvadrat med et areal, der svarer til summen af to vilkårlige kvadraters areal.
3. Subtraktionsprincippet for areal: Det er muligt at konstruere et kvadrat med et areal, der svarer til differensen mellem to vilkårlige kvadraters areal.
4. En måne kan kvadreres!
5. Forholdet mellem arealerne af to cirkler kan udtrykkes ved hjælp diameteren i de respektive cirkler: $\frac{d^2}{D^2}$.
6. Når lige store størrelser trækkes fra lige store størrelser, er resterne lige store.
7. I en cirkel kan indskrives en regulær sekskant, hvis sider er lig cirklens radius.

Bevis
Som udgangspunkt haves en cirkel, med diameter $|AB|$, som vi ønsker at kvadrere. Denne kaldes herefter *lille cirkel*, se figur 3.11.
Vi konstruerer så en cirkel med en dobbelt så stor diameter, som herefter kaldes *stor cirkel*, se figur 3.12. Det kan vi gøre ved at sætte diameteren i den lille cirkel lig radius i den store.



Figur 3.11 Lille cirkel med diameter $|AB|$



Figur 3.12 Stor cirkel med seks små halvcirkler

Det vil sige, at $|CD| = 2|AB|$.
I den store cirkel indskrives en regulær sekskant, som konstrueres ved brug af

[4] W. Dunham, s. 20, Dunham (1991)

radius i cirklen. Radius afsættes fra C til E, fra E til F og fra F til D. Da $|OE|$ og $|OF|$ netop også er radius, får vi delt halvcirklen, CDFE, i 3 lige store buelængder. Det samme gøres for den anden halvcirkel, CHGD, og vi får derved delt cirklen i 6 lige store buelængder. Dermed har vi også en regulær sekskant; det vil sige, at alle siderne i sekskanten har samme længde. Denne længde er også diameter i den lille cirkel, $|AB| = |OC|$.

På hver side af sekskanten konstrueres en halvcirkel med en diameter svarende til netop sidelængden af sekskanten. Derved fås seks halvcirkler ialt.

Vi deler den store cirkel i seks lige store cirkeludsnit, så den længste korde i hvert cirkeludsnit netop er en side i den regulære sekskant. Vi ser nu på cirkeludsnittet COEK. Da korden, $|CE|$, samtidig er diameter for den lille halvcirkel, CEL, har den lille halvcirkel og cirkeludsnittet et fælles område, CJEK. Halvcirklen, CEL, uden det fælles område, CJEK, udgør en måne, CKEL, og cirkeludsnittet, COEK, uden det fælles område udgør en trekant, COE. Denne trekant vil være ligesidet, da alle sider har samme længde som radius i den store cirkel, $|CO|$.

Der er to måder at udtrykke det samlede areal på:

1. Den regulære sekskant og de seks halvcirkler.
2. Den store cirkel og de seks måner.

De seks halvcirkler svarer i areal til tre små cirkler, derfor gælder at:

$$\langle \text{sekskant} \rangle_A + 3 \cdot \langle \text{lille cirkel} \rangle_A = \langle \text{stor cirkel} \rangle_A + \langle \text{seks måner} \rangle_A$$

Arealforholdet mellem to cirkler er givet ved $\frac{d^2}{D^2}$. Da den store cirkel har dobbelt så stor diameter som den lille, er arealet af den store cirkel fire gange så stort som arealet af den lille, idet $\frac{d^2}{D^2} = \frac{d^2}{(2d)^2} = \frac{d^2}{4d^2} = \frac{1}{4}$.
Heraf fås:

$$\langle \text{sekskant} \rangle_A + 3 \cdot \langle \text{lille cirkel} \rangle_A = 4 \cdot \langle \text{lille cirkel} \rangle_A + \langle \text{seks måner} \rangle_A$$

Vi trækker nu $3 \cdot \langle \text{lille cirkel} \rangle_A$ fra på begge sider af ligningen, idet vi benytter forudsætning 6.

$$\langle \text{sekskant} \rangle_A = \langle \text{lille cirkel} \rangle_A + \langle \text{seks måner} \rangle_A$$

og omskriver ifølge samme forudsætning til:

$$\langle \text{lille cirkel} \rangle_A = \langle \text{sekskant} \rangle_A - \langle \text{seks måner} \rangle_A$$

Arealet af en cirkel kan altså udtrykkes som arealet af en regulær sekskant fratrukket arealet af seks måner.

Sekskanten er en polygon og kan derfor kvadreres.
Alle månerne kan ifølge antagelsen ligeledes kvadreres, og deres sum kan kvadreres ifølge additionsprincippet.

Derfor må konklusionen ifølge subtraktionsprincippet være, at den lille cirkel kan kvadreres, da dens areal kan udtrykkes ved differensen mellem figurer, der kan kvadreres. □

Analyse

Sætningstype: Sætningen er en eksistenssætning, idet der skal eksistere et kvadrat med samme areal som cirklens.

Bevistype: Beviset er et direkte bevis.

Matematisk univers: Som de øvrige beviser inddrager dette bevis euklidisk geometri og algebra, og det støtter sig til figurerne.

Grundlæggende ide: Ideen er her at udtrykke cirklens areal vha. de konstruerede måners areal, idet man antager, at disse kan kvadreres.

Nu er det imidlertid sådan, at der er ført bevis for, at en cirkel ikke kan kvadreres[5], og i det perspektiv er ovenstående resultatet unægteligt noget overraskende. Problemet er imidlertid ikke større end, at det ovenfor gennemførte bevis hviler på forkerte antagelser, og at dets konklusion derfor ikke nødvendigvis er korrekt. De måner, beviset omhandler, er ikke de samme måner, som Hippocrates' bevis omhandler. Den måne, der er brugt i konstruktionen, kan netop ikke kvadreres, og derfor holder bevisets konklusion ikke, selv om selve slutningerne er foretaget i overensstemmelse med tidligere nævnte slutningsregler.

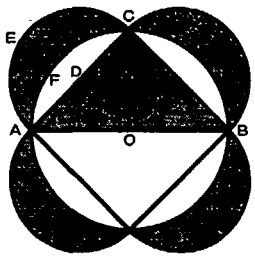
Alternativt forsøg på et bevis for påstand 3.5

I det følgende anvender vi ovenstående beviside, hvor vi blot anvender de rigtige måner, der kan kvadreres.

Vi tager udgangspunkt i en lille cirkel med diameter, $|MN| = d$, som vi

[5]Vi skal ikke her komme nærmere ind på dette bevis, blot nævne at beviset forløber sådan, at man først viser at π, som jo indgår i udtrykket for en cirkels areal, er et trancendent tal, og dernæst viser, at denne gruppe af tal ikke kan kvadreres.

ønsker at kvadrere. Herefter konstruerer vi en stor cirkel med diameter $2d$. I den store cirkel indskrives et kvadrat, og fire halvcirkler konstrueres på kvadratets sider, se figur 3.13. Halvcirklerne benævnes herefter halve mellemcirkler.



Figur 3.13

Vi kan udtrykke det samlede areal af figuren på to forskellige måder:

1. Kvadratet og fire halve mellemcirkler.
2. Den store cirkel og de fire måner.

Arealet af den store cirkel er fire gange så stort som den lille cirkel, da diameteren af den store cirkel er dobbelt så stor som diameter af lille cirkel.
Vi ved fra det tidligere gennemgåede bevis, at trekant $\triangle$AOC er retvinklet, og vi kan derfor bruge Pythagoras' sætning til at finde diameteren af mellemcirklen. Det er givet, at $|AO| = |OC|$, og at disse er lig d. Derfor er

$$|AC|^2 = d^2 + d^2 = 2d^2 \Leftrightarrow |AC| = \sqrt{2d^2}$$

Diameteren i en mellemcirkel er dermed $\sqrt{2d^2}$.

Arealet af en mellemcirkel er således dobbelt så stort som arealet af den lille cirkel, da forholdet mellem kvadratet af deres diametre er: $\frac{2d^2}{d^2} = 2$.

Vi sætter nu de to måder at udtrykke det samlede areal på lig hinanden:

$$\langle \text{kvadrat} \rangle_A + 4 \cdot \langle \text{halve mellemcirkler} \rangle_A = \langle \text{stor cirkel} \rangle_A + \langle \text{fire måner} \rangle_A$$

$$\Leftrightarrow \langle \text{kvadrat} \rangle_A + 4 \cdot \langle \text{lille cirkel} \rangle_A = 4 \cdot \langle \text{lille cirkel} \rangle_A + \langle \text{fire måner} \rangle_A$$

$$\Leftrightarrow \langle \text{kvadrat} \rangle_A = \langle \text{fire måner} \rangle_A$$

Her har vi blot vist, at månen kan kvadreres, hvilket vi allerede har bevist, men ikke at cirklen kan kvadreres, hvilket den som nævnt ikke kan.

Dette eksempel analyserer vi ikke, da det er fuldstændig analogt til det første forsøg på et bevis for cirklens kvadratur.

Diskussion

Samlet kan man sige at de alle er eksistensbeviser, som viser eksistensen af et bestemt kvadrat. Det specielle ved de nævnte geometriske beviser er, at man skal få en god ide til en konstruktion, der fører til det ønskede resultat. Ovenstående beviser støtter sig alle til noget helt håndgribeligt, nemlig figurer. Det er derfor let at følge bevisgangen og at lade sig overbevise om bevisernes korrekthed. Men beviset for cirklens kvadratur viser, at det netop kan være problematisk at støtte sig så meget til figurer. Man lader sig let forlede til at tro, at det, der sker i beviset, er korrekt; man kan jo se det for sig!
Vi lod os selv forlede af figurerne, mens vi arbejdede med de ovenstående beviser. Figurerne for hhv. kvadratur af måner og forsøg på kvadratur af cirklen, syntes vi havde så store ligheder, at hvis man blot brugte de måner, der beviseligt kan kvadreres, så måtte det da være muligt at kvadrere cirklen. Vel vidende, at dette aldeles ikke kan lade sig gøre.
Man kan altså ikke udelukkende støtte sig til figurerne, når man skal bevise geometriske sætninger. Man er nødt til at undersøge, om beviset er deduktivt korrekt på anden vis, nemlig ved at godtgøre at alle skridt i beviset kan føres tilbage til det euklidiske aksiomsystem. Til gengæld er figurerne med til at tydeliggøre og forklare beviset, når man først har godtgjort bevisets fremgangsmåde.

Det har været svært for os at føre beviserne tilbage til det euklidiske grundlag, og vi har derfor nogle steder anvendt algebra, for at gøre det lettere for os selv at se, om beviserne er deduktivt korrekte. Men selv om vi anvender algebra, er det nogle steder stadig ikke enkelt at udtrykke de beskrevne situationer ved stringente matematiske udtryk. Eksempelvis er nogle af de områder, der ligger *inden for* ét område og *udenfor* et andet område, ikke umiddelbart til at beskrive med simpel algebra.[6]
Ved sammenblandingen af forskellige matematiske universer skabes dog et nyt problem. Vi kan ikke umiddelbart vide, om aksiomerne for algebra og euklidisk geometri er konsistente; dette skal undersøges først. Det har vi ikke gjort, men vi antager alligevel, at de to universers aksiomsystemer er konsistente, idet de kan anvendes samlet ved analytisk geometri, hvor geometrien sættes i koordinatsystemer.
Kort sagt er det umådelig svært at godtgøre, om beviserne er holdbare, dvs. gode nok.

[6]Her skal inddrages mere avancerede metoder, som f.eks. Hilberts metoder

3.5 Konvergente delfølger af begrænsede følger

Sætning 3.6
Enhver reel, begrænset følge har en konvergent delfølge.

I det følgende vil vi bevise sætning 3.6 på to forskellige måder. Vi starter med at bevise et lemma, der anvendes i begge versioner. Dette lemma diskuteres, men analyseres ikke efterfølgende.
Analysen og diskussionen af alle beviserne kommer til sidst i afsnittet.

Det følgende er de forudsætninger, der anvendes i de efterfølgende beviser:

1. En talfølge er en uendelig sekvens af tal, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$. Tallene $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ kaldes følgens elementer.
   En reel talfølge er således en ordning af reelle tal i forhold til de naturlige tal således, at der til ethvert reelt tal i følgen er knyttet et naturligt tal. De naturlige tal kaldes så indeks til følgen. Følgen er ordnet sådan, at et tal a i følgen knyttet til et bestemt naturligt tal, kommer før alle de tal i følgen, der er knyttet til naturlige tal, der er større. Ligeledes kommer a efter de tal i følgen, der knytter sig til naturlige tal, der er mindre.

2. Lad $\{x_n\}$ være en talfølge, og lad $\{n_k\}$ være en strengt voksende følge af naturlige tal. Da kaldes følgen $\{y_k\}$, defineret ved $y_k = x_{n_k}$ en delfølge af $\{x_n\}$.
   En delfølge er altså en følge, hvor ethvert element stammer fra en anden følge og den oprindelige orden er bibeholdt.

3. Talfølgen a_n konvergerer mod et tal, b, hvis

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbf{N} \;\; \forall n \in \mathbf{N} : n \geq N \Rightarrow \mid a_n - b \mid < \epsilon$$

   At en følge konvergerer betyder altså, at der eksisterer en grænseværdi, som følgens elementer nærmer sig, når følgens indeks vokser. Følgen skal nærme sig på en sådan måde, at for ethvert vilkårligt lille tal, ϵ, skal der eksistere et indeksnummer sådan, at alle senere elementer i følgen ligger tættere på grænseværdien b end ϵ.

4. Fuldstændighedsprincippet: Enhver ikke-tom, opad begrænset delmængde A tilhørende $\mathbf{R}$ har et mindste overtal. Hvor der ved overtal forstås et tal, der er større end eller lig ethvert element i A. Det mindste overtal er således mindre end eller lig alle andre overtal.

5. En talfølge er begrænset, hvis

$$\exists M \in \mathbf{N} \; \forall n : |a_n| \leq M$$

6. Arkimedes' princip: For ethvert reelt tal p findes et naturligt tal n, der er større end p.

Lemma 4
Enhver reel, monoton og begrænset følge vil konvergere.

Vi beviser dette ved at antage, at vi har en voksende, begrænset følge, og ser på mængden bestående af følgens elementer og denne mængdes mindste overtal, b. Så viser vi, at følgen har grænseværdien b, altså at den konvergerer.

Bevis
Vi antager, at $\{a_n\}$ er en monoton, voksende og begrænset følge. Så er følgende mængde:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\} = \{a_n : n \in \mathbf{N}\}$$

som består af alle elementerne i følgen, en ikke-tom og begrænset mængde. Ifølge fuldstændighedsprincippet vil en sådan mængde have et mindste overtal, b. Vi vil nu vise, at $\{a_n\}$ er konvergent med grænseværdien b.

Da b er et overtal for A, vil det for alle n gælde, at $a_n \leq b$. Derudover vil det $\forall \epsilon > 0$ være sådan, at der findes et element a_N sådan, at $a_N > b - \epsilon$, ellers ville $b - \epsilon$ være et overtal for A, der var mindre end det mindste overtal, b, hvilket ikke kan lade sig gøre. Da $\{a_n\}$ er en monoton voksende følge, vil det for alle $n \geq N$ gælde, at $a_n \geq a_N > b - \epsilon \Rightarrow |b - a_n| < \epsilon$. Det gælder derfor, at ligegyldigt hvilket $\epsilon > 0$, der kommer på tale, vil det, for ethvert sådant ϵ, være muligt at fremskaffe et N, sådan at for alle $n \in \mathbf{N}$, hvor $n \geq N$, vil $\mid a_n - b \mid < \epsilon$. Hvilket betyder, at $\{a_n\}$ opfylder de krav, der stilles, for at følgen siges at konvergere, samt at grænseværdien er b. □

Beviset for at enhver reel, monoton aftagende, begrænset følge vil konvergere, er fuldstændigt analogt til det ovenstående.

Bevis for sætning 3.6 ved brug af spidsbegrebet

Vi vil bevise sætning 3.6 der siger, at *enhver reel, begrænset følge har en konvergent delfølge*, i to trin. Først viser vi, at enhver reel følge har en monoton delfølge. Dernæst vil vi vha. lemma 4 bevise selve sætningen.

Bevis
Vi starter med at definere begrebet en spids: Et element x_k er en spids i en følge $\{x_n\}$, hvis $x_k \geq x_m$ for alle $m \geq k$.
Der er nu to muligheder: Enten har en følge uendeligt mange spidser, eller også

har den endeligt mange, evt. ingen. Vi vil i det følgende vise, at det for ethvert tilfælde er muligt at konstruere en monoton delfølge.
Hvis den har uendeligt mange spidser, vil det være muligt at generere en monoton aftagende delfølge. Det vil nemlig være muligt at lave en delfølge bestående af spidserne, x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, ..., på følgende måde: Lad den første spids være x_{n_1}. Da der er uendeligt mange spidser, vil der findes en spids, med et indeks der er større end eller lig indekset for x_{n_1}; tag den og kald den x_{n_2}. Da der er uendeligt mange spidser, vil der igen kunne findes et element i $\{x_n\}$ med indeks større end x_{n_2}, som også er en spids; kald den for x_{n_3}, og fortsæt med at konstruere følgen $\{x_{n_k}\}$ på denne måde.

$\{x_{n_k}\}$ har nu følgende egenskaber:

1. Det er en delfølge af $\{x_n\}$, fordi den udelukkende består af elementer fra denne følge, der er plukket ud sådan, at indeks er strengt voksende. Det er karakteristisk for en følge, at den har en ordning, dvs. en bestemt rækkefølge.

2. Den er monotont aftagende, da definitionen af at være spids medfører, at $x_{n_1} \geq x_{n_2} \geq x_{n_3} \geq \ldots$.

Hvis en følge kun har endeligt mange spidser, evt. ingen, vil det være muligt at konstruere en monoton voksende delfølge på følgende måde: Da der kun er endeligt mange spidser, må der eksistere én, der er den sidste spids; den kalder vi x_m. Nu vælger vi x_{m+1} som det første element, x_{n_1}, i vores delfølge. Hvis der slet ingen spidser er, sættes x_{n_1} til at være x_1. Da dette element ikke er en spids, må der eksistere et senere element i $\{x_n\}$, som er større end x_{n_1}, ellers var x_{n_1} jo en spids. Dette større element vælger vi nu som det næste element i vores delfølge, x_{n_2}. Der må igen eksistere et element, hvor både elementet selv og dets indeks er større end vores andet element, da vi jo har lagt den sidste spids bag os. Dette element vælges som det tredie element i delfølgen. Sådan kan man blive ved med at finde elementer længere ude i $\{x_n\}$, som er større end det foregående element, man valgte til delfølgen. Til sidst har man så en følge $\{x_{n_k}\}$, hvor $x_{n_1} \leq x_{n_2} \leq x_{n_3} \leq \ldots$, hvilket er en monoton voksende følge.

Hermed har vi vist, at enhver reel følge har en monoton delfølge.

Når vi har vist, at enhver reel følge har en monoton delfølge, må dette nødvendigvis også gælde for de af dem, der ud over at være reelle, også er begrænsede. En sådan monoton delfølge af en begrænset følge, må nødvendigvis arve egenskaben at være begrænset, fordi ethvert element i delfølgen er hentet fra den originale. At en sådan monoton, begrænset følge altid er konvergent, ved vi fra lemma 4. Dermed er sætningen bevist. □

Bevis for sætning 3.6 ved brug af bisektionsmetoden

Her beviser vi ligeledes sætningen 3.6, der siger, at *enhver reel, begrænset følge har en konvergent delfølge*, blot på en anden måde. Her starter vi med at have en begrænset følge, som vi så *spærrer* inde på et interval. Derefter laver vi en intervalfølge ved at formindske intervallet igen og igen samtidigt med, at vi sørger for at intervallerne til stadighed indeholder uendeligt mange elementer fra følgen. Til sidst viser vi, at denne intervalfølge kan bruges til at konstruere en konvergent delfølge af den oprindelige følge.

Bevis

Vi har en reel, begrænset følge, som vi kalder $\{x_n\}$. At den er begrænset betyder, at der eksisterer et tal $M \in \mathrm{N}$, sådan at $\mid x_n \mid \leq M$ for alle n. Betragter man et interval, $[a, b]$, hvor $a = -M$ og $b = M$, betyder dette, at intervallet vil indeholde alle elementerne i $\{x_n\}$.

Herefter deler vi intervallet $[a, b]$ op i to lige store dele. Det gør vi ved at finde midtpunktet $q = \dfrac{a+b}{2}$ og se på de to nye intervaller: $[a, q]$ og $[q, b]$. Det vil nu være sådan, at der er uendeligt mange elementer fra $\{x_n\}$ på enten det ene, det andet eller på begge intervaller. Alternativt ville der kun være endeligt mange elementer i begge intervallerne. Men når intervallerne bliver forenet, indeholder de hele $\{x_n\}$, som har uendeligt mange elementer, og to gange endeligt mange elementer kan jo ikke blive til uendeligt mange.

Vi laver nu en følge, $\{I_n\}$, af intervaller på følgende måde: Første element, I_0 er lig $[a, b]$. Dernæst deles dette interval op i to lige store dele, som beskrevet ovenfor. Mindst et af disse intervaller vil indeholde uendeligt mange elementer af $\{x_n\}$-følgen, og et sådant interval vælges som I_1. På samme måde konstrueres I_2 ved at dele I_1 og vælge et interval indeholdende uendeligt mange elementer, og sådan fortsætter man med I_3, I_4, osv. Ethvert nyt interval, der fremkommer på denne måde, vil således være et delinterval af alle de foregående. For $\{I_n\}$ vil det nu gælde, at længden af et givet interval, I_n, er lig $\dfrac{|b-a|}{2^n}$, hvor n er antallet af gange, intervallet $[a, b]$ er delt.

Vi betragter nu en følge, $\{c_n\}$, som er konstrueret ud fra $\{I_n\}$-følgen sådan, at $c_n \in I_n$, hvilket betyder, at de enkelte elementer i $\{c_n\}$ er plukket ud af de korresponderende $\{I_n\}$-intervaller på vilkårlig måde. Vi vil vise, at enhver følge, der er konstrueret således, nødvendigvis må konvergere.

Vi begynder med at argumentere for, at der eksisterer et punkt k, som ligger i alle intervallerne i $\{I_n\}$-følgen. Det gør vi på følgende måde:
Først betragter vi en venstre endepunktsfølge, $\{v_n\}$, der er konstrueret således,

at v_0 er lig a, v_1 er lig det venstre endepunkt i I_1 og så videre. Det vil nu gælde, at $v_0 \leq v_1 \leq v_2 \leq \ldots$. Således er $\{v_n\}$ en monoton voksende følge. Helt analogt vil en følge, $\{h_n\}$, der er konstrueret ud fra de højre endepunkter i intervallerne, der udgør $\{I_n\}$, være en monoton aftagende følge. Lemma 4 giver, at både $\{v_n\}$ og $\{h_n\}$ vil konvergere. Vi kalder punktet, som $\{v_n\}$ konvergerer mod, for k, og konstaterer at $\{h_n\}$ også konvergerer mod k. Grunden til dette er, at afstanden mellem v_i og h_i er lig $\frac{|b-a|}{2^i}$, hvilket betyder, at afstanden mellem elementerne med korresponderende indeks bliver vilkårligt lille, når bare man går langt nok op i indeks.

At begge endepunktsfølger konvergerer mod k, betyder at k er *klemt inde* mellem endepunkterne i ethvert interval i $\{I_n\}$, hvilket igen medfører, at k må ligge i dem alle.

Vi har nu fundet et punkt, k, der ligger i alle intervallerne i $\{I_n\}$-følgen. Vi vil nu vise, at $\{c_n\}$-følgen konvergerer mod dette k. Det vil sige, at vi skal vise, at ligegyldigt hvor lille et ϵ, der er tale om, vil der findes et N, sådan at alle c_n-elementerne, der ligger længere ude end c_N, vil være tættere på k end ϵ. Sagt på en anden måde, skal vi godtgøre, at:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbf{N} \;\; \forall n \in \mathbf{N} : n \geq N \Rightarrow \mid c_n - k \mid < \epsilon$$

Da både c_n og k ligger på intervallet I_n, kan afstanden mellem dem ikke overstige $\frac{|b-a|}{2^n}$. $|b-a|$ er en fast størrelse, og Arkimedes' princip sikrer os, at vi kan finde et N, sådan at 2^N bliver så stor, vi måtte ønske os. Hvilket igen betyder, at vi kan få $\frac{|b-a|}{2^N}$ så lille det skal være; specielt kan vi altid få det mindre end et givet ϵ. For alle c_n-elementer, der har højere indeks end c_N, vil det altså være sådan, at $\mid c_n - k \mid \leq \mid c_N - k \mid < \epsilon$. Det vil være sådan, fordi både k og c_n befinder sig på stadigt mindre intervaller, og den maksimale afstand mellem dem vil derfor være mindre end ϵ. Vi har dermed fundet det N, der skulle til for at godtgøre, at $\{c_n\}$ er konvergent.

Vi er nu parate til at vise, at alle begrænsede følger har konvergente delfølger. Først tager vi vores oprindelige følge $\{x_n\}$, hvorom vi bare ved, at den er begrænset. Nu laver vi en delfølge af $\{x_n\}$, kaldet $\{x_{n_k}\}$, sådan, at følgende krav alle er opfyldt:

1. $x_{n_0} = x_0$, dvs. begge følger har samme startelement.

2. $\{x_{n_k}\}$ defineres sådan, at: $x_{n_o} \in I_0$, $x_{n_1} \in I_1$, $x_{n_2} \in I_2$ osv.

3. x_{n_k} er det element med laveste indeks i $\{x_n\}$, som tilhører I_k, hvorom det

desuden gælder, at det har større indeks, end de elementer der allerede er udpeget til $\{x_{n_k}\}$.

Vi har nu en følge $\{x_{n_k}\}$, som er en delfølge af en begrænset følge $\{x_n\}$. Derudover er den også defineret på samme måde, som den $\{c_n\}$-følge vi allerede har kigget på, hvilket betyder at den nødvendigvis må konvergere.
Dermed kan vi konkludere, at enhver begrænset følge har en konvergent delfølge.
□

Analyse

Sætningstype: Sætningen udtaler sig om eksistensen af konvergente delfølger, når delfølgerne er udtaget af reelle, begrænsede følger. Det er altså en eksistenssætning.

Bevistype: Begge beviser er direkte.

Matematisk univers: Beviserne bygger på det, der i forvejen er i sætningen, og inddrager ikke andre matematiske universer. Det vil sige, at beviserne udelukkende omfatter matematisk analyse for reelle tal. Specielt er fuldstændighedsprincippet helt centralt for både sætningen og beviserne for den. For det første ville sætningen slet ikke være sand, hvis den angik rationale, begrænsede følger. Det ville den ikke, fordi definitionen af konvergens kræver, at der eksisterer et tal, som følgen konvergerer mod. En rational følge der, over $\mathbf{R}$, konvergerer mod π, vil derfor ikke konvergere, hvis man betragter det over $\mathbf{Q}$. Tallet π eksisterer ikke i $\mathbf{Q}$, og da man ikke kan nærme sig noget, der ikke eksisterer, vil følgen ikke konvergere.
Derudover vil også beviserne falde fra hinanden, hvis ikke fuldstændighedsprincippet kunne antages. Grunden til dette er, at begge beviser hviler på lemmaet, at *enhver reel, monoton og begrænset følge vil konvergere*, hvilket, af samme grunde som angivet ovenfor, ikke vil være sandt over det rationale tallegeme. Specielt vil bisektionsbeviset lide under, at det ikke længere er sikkert, at der eksisterer et k, som ligger i alle intervallerne i $\{I_n\}$-følgen. Den eneste del af beviserne der kan stå distancen uden fuldstændighedsprincippet, er den monotone, begrænsede delfølge, der konstrueres vha. spidser. En sådan delfølge vil selv rationale og begrænsede følger have, og slutningsrækken vil stadig være gyldig over $\mathbf{Q}$. Grunden til dette er, at den angår legemets ordning, og ikke bekymrer sig om, hvor *tæt* tallene ligger.

Grundlæggende ide: Beviserne adskiller sig ved at have hver deres grundlæggende ide. I første bevis dannes en delfølge ud fra følgens spidser eller mangel på samme. Delfølgen findes således ved at finde elementer i følgen, der kan betragtes som *lokale ekstrema.*
I det andet bevis dannes en følge af intervaller, der har to karakteristika.

Dels vil alle talfølger, der *lever* på denne intervalfølge, konvergere, dels vil ethvert interval indeholde uendeligt mange elementer fra den oprindelige talfølge.

Diskussion

Begge beviser er gode eksempler på, hvorledes man i matematikken, ved præcise analyser af sætninger og definitioner, kan udlede ny viden. I dette tilfælde bevises et lemma og en sætning, der, ud fra en overfladisk betragtning, ikke synes at være umiddelbart indlysende konsekvenser af grundlaget. Hvis man eksempelvis kun kendte til definitionen af en følge, er det vel ikke specielt indlysende, at enhver reel følge nødvendigvis må have en monoton delfølge. En følge indeholder uendeligt mange elementer, der ikke behøver at være ordnede på anden måde, end ved rækkefølgen de forekommer i. Det, at man på baggrund af definitioner, der tillader kaos og forlanger uendelighed, kan uddrage så streng en orden, siger noget om rækkevidden af deduktive slutninger.
Hvad angår den matematiske udsigelseskraft, er beviserne interessante ved det, at de illustrerer, hvilken betydning fuldstændighedsprincippet har i den sammenhæng. Uden dét, ville man f.eks kun kunne sige, at alle rationale, begrænsede følger ville have en monoton og begrænset delfølge. Yderligere oplysninger om en sådan delfølges opførsel ville man være afskåret fra at udtale sig om. Fuldstændighedsprincippet sætter en i stand til at sige helt præcise ting om, hvorledes denne delfølge vil opføre sig.

Desuden er der ved disse beviser en sådan sammenhæng mellem sætningen og beviserne for den, at man, efter at have gennemgået beviserne, dels kan indse, at det med nødvendighed forholder sig sådan, men derudover har man også opnået en langt bedre forståelse for, hvorfor det nu engang forholder sig sådan.

3.6 Dimensionssætningen

Sætning 3.7 (Dimensionssætningen)
Hvis følgende tre forudsætninger er opfyldt:

F1 : V og W er vektorrum

F2 : afbildningen $T : V \longrightarrow W$ er en lineær transformation

F3 : V er endeligdimensional

så er

$$\dim\big(N(T)\big) + \dim\big(R(T)\big) = \dim(V)$$

Hvor $N(T)$ og $R(T)$ er hhv. nul- og billedrum for afbildningen T.

Fremgangsmåden for dette bevis er som følger: Man inddeler beviset i de tre tænkelige situationer, det generelle og to særtilfælde:

- Det tilfælde, hvor alle vektorer i V afbildes over i nulvektoren, dvs. hvor $\dim(N(T)) = \dim(V)$.
- Det tilfælde, hvor nogle vektorer i V afbildes i nulvektoren, og andre afbildes over i vektorer forskellig fra nulvektoren, dvs. hvor $0 < \dim(N(T)) < \dim(V)$.
- Det tilfælde, hvor kun nulvektoren afbildes over i nulvektoren, dvs. hvor $\dim(N(T)) = 0$.

Disse tre situationer gennemgås separat. Beviset går ud på at vise, at den del af en basis for hele V, der ikke udspænder nulrummet, netop afbildes over i en basis for billedrummet. Dvs. at billederne af den del af basen for V, der ikke ligger i nulrummet, netop udspænder $R(T)$ og er en lineært uafhængig mængde, se figuren 3.14. Begge sidstnævnte egenskaber er en umiddelbar følge af T's linearitet.

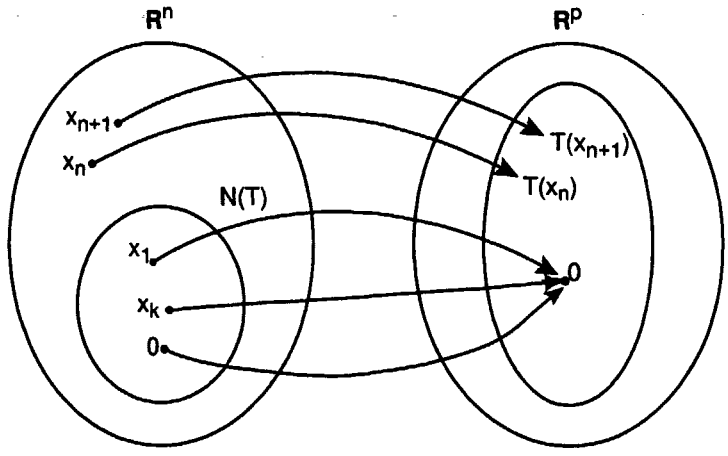
Følgende definitioner og sætninger bruges i beviset:

Definition 2
En delmængde, S, af et vektorrum er lineært afhængigt, *hvis der findes et endeligt antal vektorer, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, i S og skalarer $a_1, a_2, \ldots, a_n$, ikke alle lig 0, så at:*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$$

Hvis S ikke er lineært afhængig betegnes den lineært uafhængig, og skalarerne i udtrykket, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, vil alle være lig nul.

Definition 3
En basis, *β, for et vektorrum V er en lineært uafhængig delmængde af V, der udspænder V.*



Figur 3.14 Figuren illustrerer hvordan $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ afbilder nulrummet, $N(T)$, over i nulvektoren, 0, og de øvrige vektorer afbildes over i resten billedrummet. (Niss; 1990)

Definition 4
Lad S være en ikke-tom delmængde af et vektorrum V. Mængden af de vektorer, man kan danne ved at skalere og/eller addere vektorer fra S, siges at være udspændt af S, og betegnes span$S$.

Definition 5
Et vektorrum, V, er endeligdimensionalt, *hvis det har en basis med et endeligt antal vektorer. Antallet af vektorer i basis kaldes vektorrummets* dimension *og angives som $dim(V)$. Nulrummet tillægges per definition dimensionen nul.*

Definition 6
Lad V og W være vektorrum, En funktion $T : V \longrightarrow W$ kaldes en lineær transformation *fra V til W, hvis der for alle $x, y \in V$ og $\lambda \in \mathbf{R}$ gælder at:*

- $T(x + y) = T(x) + T(y)$
- $T(\lambda x) = \lambda T(x)$

Definition 7
Lad V og W være vektorrum og $T : V \longrightarrow W$ være lineær. Nulrummet *for T er: $N(T) = \{x \in V : T(x) = 0\}$.* Billedrummet *for T er: $R(T) = \{T(x) \in W : x \in V\}$.*

Definition 8
Lad V være et vektorrum. Da eksisterer for ethvert $x \in V$ et additivt inverst element $y \in V$, således at $x + y = 0$.

Sætning 3.8
Lad V og W være vektorrum og $T : V \longrightarrow W$ være lineær. Så er $N(T)$ og $R(T)$ underrum af henholdsvis V og W.

Sætning 3.9
Lad W være et underrum af et endeligdimensionalt vektorrum V. Så er W endeligdimensional og $dim(W) \leq dim(V)$. Desuden gælder, at hvis $dim(W) = dim(V)$, så er $V = W$.

Sætning 3.10
Hvis W er et underrum i et endeligt dimensionalt vektorrum V, så er $W = \{0\}$ eller også har W en endelig basis, og enhver basis for W kan udvides til en basis for V.

Sætning 3.11
Lad V og W være vektorrum, lad V være endeligdimensional og lad $T : V \longrightarrow W$ være lineær. Hvis $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ er en basis for V, så er $R(T) =$ $\text{span}(\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\})$.

Sætning 3.12
Lad V være et vektorrum og $\beta = \{u_1, \ldots, u_n\}$ være en delmængde af V. Så er β en basis for V, hvis og kun hvis enhver vektor v i V kan udtrykkes på netop en måde som en linearkombination af vektorer i β. Det vil sige, at enhver vektor i V kan udtrykkes på formen $v = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n$, hvor a_i-erne er reelle koefficienter.

Bevis for sætning 3.7
Definitionen på at være endeligdimensional er ifølge definition 5, at der eksisterer en basis med et endeligt antal basisvektorer for et vektorrum U, hvor $\dim(U)$ er lig antallet af vektorer i denne basis, n. Da V er endeligdimensional, kan vi derfor antage at:

$$\dim(V) = n, \ n \in \mathbf{N}$$

Sætning 3.8 siger, at når T er lineær, og V er et vektorrum, så er $N(T)$ et underrum af V. Ifølge sætning 3.9 er et underrum til et endeligdimensionalt vektorrum selv endeligdimensionalt, med dimensionen $k \leq n$, hvor n er dimensionen af vektorrummet. $N(T)$ er således et underrum, der er endeligdimensionalt, og vi kan derfor antage at:

$$\dim\big(N(T)\big) = k \leq n, \ k \in \mathbf{N}$$

Nu er det sådan, at vi får forskellige situationer alt efter hvilke værdier k antager. Det eneste, vi ved om k, er, at $0 \leq k \leq n$. Dette giver tre forskellige tilfælde, som vil blive behandlet selvstændigt. Vi vil i det følgende se på, hvad der sker, hvis:

A. $k = n$

B. $0 < k < n$

C. $k = 0$

A. $\dim\big(N(T)\big) = n$

Først ser vi på det tilfælde, hvor $\dim\big(N(T)\big) = n$. Dimensionen af nulrummet er således den samme som dimensionen af V, men da nulrummet er et underrum til V, må $N(T) = V$, jf. sætning 3.9. Dette er derfor den situation, hvor alle vektorer i V bliver afbildet over i nulvektoren, og enhver vektor i V således tilhører nulrummet. Billedrummet består da kun af nulvektoren og har derfor dimensionen 0. Der gælder derfor at: $\dim(R(T)) = 0$ og $\dim\big(N(T)\big) + \dim\big(R(T)\big) = \dim(V) = n$. Dette var netop hvad vi skulle vise.

B. $0 < \dim\big(N(T)\big) < n$

Fordi $\dim\big(N(T)\big)$ netop er defineret som værende antallet af elementer i en basis for $N(T)$, kan vi antage, at $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ er en basis for $N(T)$. En basis for et underrum til et endeligdimensionalt vektorrum kan ifølge sætning 3.10 udvides til en basis for hele vektorrummet. Derfor kan $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ på grund af F1 og F3 udvides til en basis, $\beta = \{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$, for V.
Hvis man nu kan vise, at $S = \{T(v_{k+1}), T(v_{k+2}), \ldots, T(v_n)\}$ er en basis for $R(T)$, så at

$$\dim\big(R(T)\big) = \dim(S) = n - k$$

vil vi da få, at $k + (n - k) = n$, og det ønskede er vist. Beviset, for at S er en basis for $R(T)$, falder i tre dele, svarende til de tre punkter i definitionen på en basis, definition 3:

1. $S \subset R(T)$
2. S udspænder $R(T)$
3. S er lineært uafhængig

ad 1 Dette er en følge af, at $\{v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n\}$ tilhører V og af at billedrummet er defineret som: $R(T) = \{T(x) : x \in V\}$.

ad 2 Da T er lineær, og vi har en basis β for V, hvor $\beta = \{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$, giver sætning 3.11, at billedrummet, $R(T)$, er udspændt af billederne af basisvektorerne for V. Dette betyder, at $R(T) = \operatorname{span}\{T(v_1), \ldots, T(v_k), T(v_{k+1}), \ldots, T(v_n)\}$. Men da $\{v_1, \ldots, v_k\}$ er en basis for nulrummet, betyder det, at $T(v_1) = \ldots = T(v_k) = 0$, hvilket medfører at: $\operatorname{span}\{T(v_1), \ldots, T(v_k), T(v_{k+1}), \ldots, T(v_n)\} = \operatorname{span}\{T(v_{k+1}), \ldots, T(v_n)\} = \operatorname{span}(S) = R(T)$

ad 3 For at vise, at S består af lineært uafhængige vektorer, ses på:

$$b_{k+1}T(v_{k+1}) + \ldots + b_nT(v_n) = 0, b_i \in \mathbf{R}$$

Hvis S er lineært uafhængig, skal alle b'erne i udtrykket være lig nul. Dette skyldes, at lineær uafhængighed er defineret som værende det modsatte af lineær afhængighed, jf. definition 2. Da T ifølge F2 er en lineær transformation kan ovenstående udtryk omskrives, jf. definition 6:

$$b_{k+1}T(v_{k+1}) + \ldots + b_nT(v_n) = 0 \Leftrightarrow T\left(b_{k+1}(v_{k+1}) + \ldots + b_n(v_n)\right) = 0$$

Da definitionen på nulrummet er $N(T) = \{x \in V : T(x) = 0\}$, må $b_{k+1}(v_{k+1}) + \ldots + b_n(v_n)$, som T transformerer over i nul, tilhøre $N(T)$. Vi har antaget, at $N(T)$ har en basis: $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, og vi kan, ifølge sætning 3.12, skrive ethvert element i $N(T)$ som en linearkombination af elementerne i denne basis. Dette giver at: $b_{k+1}v_{k+1} + \cdots + b_nv_n = c_1v_1 + \cdots + c_kv_k$, hvor skalarerne $c_1, \ldots, c_k \in \mathbf{R}$. Da V er et vektorrum, findes additive inverse elementer, jf. definition 8, så ovenstående kan omskrives til:

$$0 = c_1v_1 + \ldots + c_kv_k - b_{k+1}v_{k+1} - \ldots - b_nv_n \tag{3.1}$$

Vi har nu aktiveret hele β, der er en basis for V, og en basis er jo lineært uafhængig, jf. definition 3. Derfor må alle skalarerne i ligning 3.1 være lig 0, hvilket betyder, at S er en lineært uafhængig mængde, jf. definition 2. Dette var netop, hvad vi ville vise.

C. $\dim(N(T)) = 0$

Hvis $\dim(N(T)) = 0$, har vi det tilfælde, hvor nulrummet kun indeholder 0-vektoren. Ifølge sætning 3.11 er $R(T) = \text{span}(T(\beta)) = \text{span}(\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\})$, hvor β er en basis for V. Vi ønsker at vise, at $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ er en basis for $R(T)$, og at $\dim(R(T)) = n$. Argumentationen er analog til ovenstående. $T(\beta)$ tilhører $R(T)$ og udspænder dette, så vi skal vise, at $T(\beta)$ er lineært uafhængig. Vi omskriver som ovenfor:

$$b_1T(v_1) + \ldots + b_nT(v_n) = 0 \Leftrightarrow T\left(b_1(v_1) + \ldots + b_n(v_n)\right) = 0$$

Da nulrummet kun indeholder nulvektoren, medfører dette, at $b_1(v_1) + \ldots + b_n(v_n) = 0$. Da β er en basis og derfor lineært uafhængig, har dette udtryk kun den trivielle løsning $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$. Det ses heraf, at ligningen $b_1T(v_1) + \ldots + b_nT(v_n) = 0$ ligeledes kun har den trivielle løsning, og derfor er $T(\beta)$ en basis for $R(T)$, hvilket medfører, at $\dim(R(T)) = n$. I dette særtilfælde bliver dimensionssætningen derfor $n + 0 = n$, hvilket er sandt.

Vi har nu bevist dimensionssætningen for alle mulige tilfælde. □

Analyse

Sætningstype: Dimensionssætningen viser en relation mellem nogle vektorrum og den lineære afbildning imellem dem. Den kan derfor siges at være et

ligningsbånd mellem dimensionerne af disse vektorrum. Det, sætningen gør, er således at fastlægge størrelsen af hvert enkelt vektorrum som et forhold mellem de to andre.

Bevistype: Beviset er direkte.

Matematisk univers: Både sætningen og beviset drejer sig udelukkende om lineær algebra, der er studiet af vektorrum over et legeme, K, med kompositioner addition og multiplikation $(K, +, \cdot)$. Beviset hviler således kun på aksiomer og definitioner fra lineær algebra, samt sætninger der er afledt af disse. Vi har således den situation, at alle elementerne i beviset er veldefinerede og hviler på samme grundlag, og at der er sammenhæng mellem sætning og bevis.

Grundlæggende ide: Ideen i beviset er at vise, at man kan udvide enhver basis for et underrum til en basis for hele vektorrummet.

Diskussion

Beviset trækker på en lang række definitioner og sætninger og virker måske derfor kompliceret og som havende et meget bredt matematisk fundament. Indtrykket snyder, da alle sætningerne er en del af den meget basale lineære algebra, f.eks. linearitetsbegrebet, basis, nulrum og billedrum. Beviset er således meget nært ved sit aksiomatiske grundlag. Det gør det nemt at godtgøre, at beviset er deduktivt korrekt, da alle skridt kan føres tilbage til disse aksiomer. Det, at alle bestanddele i beviset befinder sig inden for samme univers, gør, at der er konsistens mellem bestanddelene.

Man skal dog tage højde for, at man ikke i beviset anvender en sætning, der kun kan bevises ud fra dimensionssætningen. Ellers bliver det en cirkelslutning, man foretager, hvor man forudsætter (dele af) det, der skal vises. Alle de sætninger, der bliver brugt i ovenstående bevis, kan dog bevises uden brug af dimensionssætningen, og vi har således ikke det nævnte problem.

Vektorrumsbegrebet er let at forstå, når man taler om det i 1, 2 og 3 dimensioner. Det bliver abstrakt, når man bevæger sig i vektorrum af 4 dimensioner eller større og således ikke længere kan visualise, hvad der foregår. Da vi ikke længere intuitivt forstår, hvad der foregår i vektorrummene, har vi udelukkende argumenter, at holde os til. Når vi således skal undersøge, om beviset er deduktivt korrekt, er vi ikke udsat for de fælder, der opstår, når man synes, at noget virker selvindlysende, og af denne grund undlader at undersøge det ordentligt. Under disse forhold er man derfor muligvis mere grundig, end man ville have været, hvis man havde en klar forståelse af vektorrum på over 3 dimensioner.

På den anden side, kan det dog være tilfældet, at man netop snydes af sin intuition, ved at tro, at hvad der gælder for 1, 2 og 3 dimensioner ligeledes gælder for større dimensioner. I et sådant tilfælde vil beviset virke forklarende, da sætningen vil være intuitivt forståelig, når man har indset, hvad der sker, når en basis bliver afbildet lineært. Man må så stole på sine matematiske evner til desuden at kunne se det stringente i beviset.

3.7 Regneregel for den komplekse, naturlige eksponentialfunktion

Sætning 3.13
For alle komplekse tal z og w er

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w$$

Fremgangsmåden for dette bevis er meget enkel, idet det stort set består af beregninger; først regnes på den ene side af lighedstegnet i sætningens ligning, så på den anden, hvorefter man konstaterer, at de to sider er ens.

Vi har følgende forudsætninger:

1. For den reelle, naturlige eksponentialfunktion gælder: $e^a \cdot e^c = e^{a+c}$.

2. For et komplekst tal, $z = a + ib$, hvor a og b er reelle tal, gælder det pr. definition at:
$$e^z = e^a(\cos b + i \sin b)$$
hvor både eksponentialfunktionen på højre side af lighedstegnet og de trigonometriske funktioner er de sædvanlige reelle funktioner.

3. For to komplekse tal $z = a + ib$ og $w = c + id$, hvor a, b, c og d er reelle tal, gælder at:
$$z + w = (a + c) + i(b + d)$$
$$z \cdot w = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

4. For de reelle sinus- og cosinusfunktioner gælder at:
$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

Bevis for sætning 3.13
Først omskrives venstre side af sætningen vha. forudsætning 2 og 3:

$$e^{z+w} = e^{(a+c)+i(b+d)} = e^{a+c}(\cos(b + d) + i \sin(b + d)) \tag{3.2}$$

Vi arbejder herefter på højre side af lighedstegnet i sætningen. Ifølge forudsætning 2 og den distributive lov kan $e^z \cdot e^w$ omskrives:

$$e^z \cdot e^w = e^a(\cos b + i \sin b) \cdot e^c(\cos d + i \sin d) = (e^a \cos b + ie^a \sin b)(e^c \cos d + ie^c \sin d)$$

Herefter anvendes regneregel for produkt af komplekse tal og regneregler for den reelle, naturlige eksponentialfunktion (forudsætninger 3 og 1), samt kommutativ og distributiv lov for komplekse tal:

$$(e^a \cos b + ie^a \sin b)(e^c \cos d + ie^c \sin d)$$

$$= (e^a \cos b\ e^c \cos d - e^a \sin b\ e^c \sin d) + i(e^a \cos b\ e^c \sin d + e^a \sin b\ e^c \cos d)$$

$$= e^{a+c}((\cos b \cdot \cos d - \sin b \cdot \sin d) + i(\cos b \cdot \sin d + \sin b \cdot \cos d))$$

Nu anvendes de trigonometriske additionsformler for reelle tal (forudsætning 4):

$$e^{a+c}((\cos b \cdot \cos d - \sin b \cdot \sin d) + i(\cos b \cdot \sin d + \sin b \cdot \cos d))$$

$$= e^{a+c}(\cos(b+d) + i \sin(b+d))$$

Vi har nu vist, at: $e^z \cdot e^w = e^{a+c}(\cos(b+d) + i \sin(b+d))$ og da dette ifølge ligning (3.2) er lig e^{z+w}, er sætningen bevist. □

Analyse af bevis

Sætningstype: Ovenstående sætning er en egenskabssætning, da den omhandler en egenskab ved den komplekse, naturlige eksponentialfunktion, nemlig den, at e opløftet i en kompleks sum, er lig produktet af e opløftet i hvert af leddene i denne sum. Anderledes udtrykt siger sætningen, at den komplekse, naturlige eksponentialfunktion respekterer den sædvanlige funktionalligning, hvilket vil sige, at $f(z+w) = f(z) \cdot f(w)$.

Bevistype: Beviset, vi har gennemført, er direkte, og det er baseret på regneregler for den reelle, naturlige eksponentialfunktion og reelle trigonometriske funktioner, samt regnereglerne for komplekse tal.

Matematisk univers: Sætningen omhandler tilsynladende kompleks funktionsteori. Men da sætningens elementer og beviset både inddrager den reelle, naturlige eksponentialfunktion, reelle trigonometriske funktioner, samt regneregler for komplekse tal, er det ikke tydeligt, hvilken aksiomatik en sådan sætning med bevis hviler på. En væsentlig del af et bevis for en sådan sætning, vil således bestå i at klarlægge forholdet mellem bevisets bestanddele på en sådan måde, at det ud fra ét aksiomatisk grundlag godtgøres, at man kan tillægge bestanddelene de egenskaber, man benytter sig af i beviset.

Grundlæggende ide: At anvende additionsreglerne for cosinus og sinus, samt at anvende funktionalligningen for den reelle eksponentialfunktion.

Diskussion

Som beviset er udført, er det er et godt eksempel på et bevis, der indeholder elementer fra flere forskellige grene af matematikken. Der inddrages både reelle tal, trigonometriske elementer og den naturlige eksponentialfunktion. Når et bevis inddrager flere forskellige grene af matematikken, kan dette gøres på flere måder:

1. Man kan blande kortene uden at gøre opmærksom på, hvilket grundlag der arbejdes ud fra. Eksempelvis er det ikke er veldefineret, hvad sinusfunktionen, som er en trigonometrisk funktion, har at gøre med den reelle eksponentialfunktion.

2. Man kan antage eksistensen af de enkelte elementer og redegøre for, hvilke egenskaber man vælger at tillægge dem. Beviset vil så falde eller stå med disse eksistensantagelser. Hvis elementerne eksisterer og har de egenskaber, man har tillagt dem, er beviset korrekt (forudsat at de enkelte skridt er foretaget korrekt). Hvis ikke de eksisterer og har de nødvendige egenskaber, har man ikke bevist noget som helst.

3. Man kan vise, at det ud fra et enkelt aksiomatisk grundlag er muligt at skabe elementer, der er ækvivalente med dem, man bruger i beviset. Her nøjes man ikke med at antage eksistensen af elementerne, men påviser den også. Det er således veldefinerede størrelser, man inddrager i sine slutninger.

Hvis man bruger den første måde, forudsætter man implicit, at aksiomerne, for de forskellige områder der inddrages, er konsistente. I dette bevis drejer det sig om aksiomerne for de reelle tal, for de trigonometriske funktioner og for den reelle eksponentialfunktion. Hvis aksiomerne ikke er konsistente, giver det ikke mening at foretage de forskellige udregninger i beviset, da selve fundamentet for at sige noget meningsfuldt ikke længere er til stede. At det aksiomatiske grundlag ikke er konsistent betyder nemlig, at det nu vil være muligt at føre korrekte beviser for, at noget både er sandt og falsk på samme tid.

Når man ofte lader sig forføre af første måde, er det muligvis, fordi man koncentrerer sig om måden, en funktion bliver brugt på, idet man genkender den i et bevis. Man tænker ikke på, om det overordnet er korrekt at bruge den i den pågældende sammenhæng.
I lærebøger møder man ofte denne metode, altså at en hel del bliver implicit antaget, hvilket også gælder kilden til dette eksempel Lindstrøm (1996). Dette betyder ikke nødvendigvis, at forfatteren ikke er bevidst om problemstillingen, men at der er mange hensyn at tage, når man skriver lærebøger.

Hvis man bruger den anden måde, så kunne det foregå som følger:

Vi antager, at der eksisterer en funktion $f(x) = e^x$: $D_f = \mathbf{R}$ og $V_f = \mathbf{R}_+$, som har følgende egenskaber: $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$. På samme måde antages eksistensen af funktionerne $\cos x$ og $\sin x$: $D_f = \mathbf{R}$ og $V_f = [-1, 1]$, som har egenskaberne, at $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ og $\sin(x+y) = \cos x \sin y + \sin x \cos y$.
Problemet er, at indtil man har godtgjort eksistensen af funktioner med sådanne egenskaber ud fra det samme grundlag, er det ikke klart, hvad det er, man har foretaget sig. Beviset hviler derfor på et usikkert fundament.

I vores tilfælde er det faktisk muligt at give præcise definitioner på uendelige rækker, der udelukkende er skabt på grundlag af aksiomerne for de reelle tal, der er ækvivalente til e^x, $\sin x$ og $\cos x$. Det vil sige, at vi kan anvende den tredie måde ved at definere følgende funktioner:

$$\forall x : e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot x^k$$

$$\forall x : \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1}$$

$$\forall x : \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k}$$

og bevise ud fra aksiomsystemet for de reelle tal, at de konvergerer mod de ønskede funktioner og har de egenskaber, som blev postuleret i forrige eksempel. Da er bevisets elementer både veldefinerede og samlede under ét aksiomatisk system, sådan at forholdet elementerne imellem ikke længere er ukendt.

Det bedste vil være at anvende den tredie måde, når man skal bevise noget, altså at starte beviset med at godtgøre eksistensen af de elementer man anvender, og at forsøge at få alle elementer til at hvile på samme grundlag.
Konsekvensen af ikke at indføre alle funktioner på samme grundlag, og derfor operere med elementer der ikke er veldefinerede, er, at selv om man har fået etableret den sammenhæng mellem præmisser og konklusion, hvor den sidste følger med nødvendighed af den første, har man stadig ikke bevist sætningen. Man har nemlig ikke sikret sig, at præmisserne er sande, og vi har før kigget på, at slutningsregler kun garanterer noget om konklusionen, hvis præmisserne er sande.

3.8 Binomialformlen

I dette afsnit vil vi arbejde med nogle beviser for følgende formel:

Sætning 3.14 (Binomialformlen)

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

for a og $b \in \mathbf{R}$ og $n \in \mathbf{N}$.

Ud fra denne formel kan man opskrive koefficienterne direkte til et led af typen $a^{n-i}b^i$ i stedet for at skulle gange alle parenteserne ud. Navnet har formlen fra, at en toleddet størrelse, $(a+b)$, også kan betegnes et binomium.
I det følgende gennemgår vi tre forskellige beviser for binomialformlen.

- Et induktionsbevis, hvor vi omskriver med sumtegn og benytter binomialkoefficientnotationen, $\binom{n}{k}$.
- Et induktionsbevis, hvor vi udelukkende regner med brøker og fakulteter.
- Et kombinatorisk bevis.

Vi har medtaget disse tre beviser, da vi mener, at man ved at sammenholde de forskellige beviser kan illustrere nogle forskellige sider af bevisbegrebet.

Efter hvert bevis vil der være en analyse, mens diskussionen først kommer efter alle beviserne.

Induktionsbevis med sumtegn

Beviset er et induktionsbevis. Fremgangsmåden i beviset er, at man først kontrollerer, om sætningen er sand for basisbetingelsen, $n = 1$. Herefter antages, at binomialformlen gælder for $n = k$, og ved hjælp af antagelsen, regnes der på udtrykket for $n = k+1$, hvorved det vises, at formlen gælder for $n = k+1$. Det kan så konkluderes, at formlen gælder for alle $n \in \mathbf{N}$.

I det efterfølgende benytter vi et lemma, hvor vi vil lade

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Vi vil ikke tillægge notationen nogen kombinatorisk betydning, men blot lade $\binom{n}{k}$ være en kort notation for ovenstående brøk.

Beviset benytter følgende forudsætning:

- Potensregnereglen: $a^{p+q} = a^p \cdot a^q$.

Bevis
Startbetingelsen er opfyldt, idet der for $n = 1$ gælder:

$$(a+b)^1 = a + b = 1 \cdot a \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot b = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = \sum_{i=0}^{1} \binom{1}{i} a^{1-i} b^i$$

Vi har her benyttet, at pr. definition er $0! = 1! = 1$, og derfor er $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

Vi antager nu, at binomialformlen gælder for $n = k$. Altså at:

$$(a+b)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^{k-i} b^i$$

Vi skal vise, at den også gælder for $n = k + 1$, altså at:

$$(a+b)^{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} a^{k+1-i} b^i$$

Først faktoriseres efter potensregnereglerne.

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k$$

Derefter benytter vi antagelsen, $(a+b)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^{k-i} b^i$.

$$(a+b)(a+b)^k = (a+b) \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^{k-i} b^i$$

Herefter ganges summen ind i parentesen (iflg. den distributive lov):

$$(a+b)^{k+1} = (a+b) \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^{k-i} b^i = a \cdot \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^{k-i} b^i + b \cdot \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^{k-i} b^i$$

Nu flyttes a henholdsvis b ind i under sumtegnet (iflg. den distributive lov, den kommutative lov og potensregnereglerne):

$$(a+b)^{k+1} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^{k-i+1} b^i + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^{k-i} b^{i+1}$$

Vi fraspalter nu det første led i den første sum og det sidste led i den anden sum. Herved ændres summationsgrænserne: Nedre summationsgrænse for den første sum ændres fra $i = 0$ til $i = 1$, og øvre summationsgrænse for den anden sum ændres fra k til $k - 1$.

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k}{0} a^{k+1} b^0 + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} a^{k-i+1} b^i + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} a^{k-i} b^{i+1} + \binom{k}{k} a^{k-k} b^{k+1}$$

Udtrykket reduceres herefter til:

$$(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} a^{k-i+1} b^i + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} a^{k-i} b^{i+1} + b^{k+1}$$

Vi ønsker nu at ændre summationsgrænserne i den højre sum, så den får samme grænser som den venstre sum, dvs. vi ønsker at summere fra $i = 1$ til $i = k$. Antallet af led bibeholdes ved dette, da både nedre og øvre summationsgrænse øges med 1. Der korrigeres for, at indekset er øget med 1 i alle led, ved at fratrække 1 fra indekset alle de steder indekset optræder under sumtegnet. Derved får vi samme sum, selv om summationsgrænserne er hævet:

$$(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} a^{k-i+1} b^i + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i-1} a^{k-(i-1)} b^i + b^{k+1}$$

Vi hæver nu parentesen i eksponenten ved den højre sum, og derved ses, at de to sidste faktorer, som summernes led består af, er ens, nemlig $a^{k-i+1}b^i$.

$$(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} a^{k-i+1} b^i + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i-1} a^{k-i+1} b^i + b^{k+1}$$

Da vi nu har samme grænser for de to summer, og summernes leds sidste to faktorer er ens, kan disse ifølge den distributive lov samles under ét sumtegn:

$$(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \left(\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1}\right) a^{k-i+1} b^i + b^{k+1}$$

Vi benytter nu, at $\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1} = \binom{k+1}{i}$, der bevises efterfølgende som lemma 5.

Da kan summen omskrives til:

$$(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \binom{k+1}{i} a^{k-i+1} b^i + b^{k+1}$$

Hele udtrykket kan nu samles under ét sumtegn, ved at benytte at $\binom{k+1}{0} = \binom{k+1}{k+1} = 1$ og ved at ændre på summationsgrænserne:

$$
\begin{aligned}
&(a+b)^{k+1} \\
&= \binom{k+1}{0} a^{k+1} b^0 + \sum_{i=1}^{k} \binom{k+1}{i} a^{k-i+1} b^i + \binom{k+1}{k+1} a^{k+1-(k+1)} b^{k+1} \\
&= \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} a^{k+1-i} b^i
\end{aligned}
$$

Dette er netop binomialformlen for $n = k+1$, og det er dermed vist, at binomialformlen gælder for $n = k+1$. Da den ligeledes gælder for $n = 1$, gælder den dermed for alle $n \in \mathbf{N}$ □

Analyse af induktionsbevis med sumtegn

Sætningstype: Binomialformlen er en identitetssætning, idet den viser to forskellige måder, hvorpå man kan opskrive en værdi af en bestemt type, nemlig potensen af en toleddet størrelse. Formlen gør det let at finde koefficienterne til en potens af toleddede størrelser.

Bevistype: Det er et direkte bevis af typen induktionsbevis, der udelukkende benytter sig af udregninger. Beregningerne består hovedsageligt af manipulation af summationsgrænser, hvor vi forklarer, hvordan og hvorfor de enkelte skridt fremkommer, samt ved manipulation af binomialkoefficienter. Vi ændrer grænserne på en måde, der gør det let at finde frem til resultatet, vi søger, nemlig at formlen er sand for $n = k+1$.

Matematisk univers: Beviset bevæger sig inden for de naturlige tals univers, når vi ser på binomialkoefficienterne og i og med, at beviset er et induktionsbevis der benytter sig af summationsgrænser, hvor indekset i løber inden for de naturlige tal. Ser vi på leddene i den toleddede størrelse bevæger vi os inde for de reelle eller de komplekse tals univers, da a og b enten kan være reelle eller komplekse.

Grundlæggende ide: At opskrive $(a+b)^{k+1}$ som $(a+b)(a+b)^k$ og derved kunne bevise sætningen ved induktion under anvendelse af manipulation af de indgående størrelser.

Vi vil nu bevise lemma 5, som blev anvendt i ovenstående bevis.

Lemma 5

$$\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1} = \binom{k+1}{i}$$

Bevis for lemma 5
Vi anvender, at

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

og regner på udtrykkene:

$$\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1} = \frac{k!}{i!(k-i)!} + \frac{k!}{(i-1)!(k-(i-1))!}$$

Vi omskriver brøkerne ved at udnytte, at $i! = i(i-1)!$ og $(k-i+1)! = (k-i+1)(k-i)!$:

$$\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1} = \frac{k!}{i(i-1)!(k-i)!} + \frac{k!}{(i-1)!(k-i+1)(k-i)!}$$

Udtrykkene sættes på fælles brøkstreg:

$$\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1} = \frac{k!(i-1)!(k-i+1)(k-i)! + k!i(i-1)!(k-i)!}{i(i-1)!(k-i)!(i-1)!(k-i+1)(k-i)!}$$

Brøken forkortes, og vi anvender igen, at $i!$ og $(k-i+1)!$ kan omskrives, samt at vi kan sætte $k!$ udenfor en parentes i tælleren:

$$\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1} = \frac{k!((k-i+1)+i)}{i!(k-i+1)!}$$

Vi reducerer i tælleren og flytter om på leddene i nævneren:

$$\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1} = \frac{k!(k+1)}{i!(k+1-i)!}$$

Vi omskriver ved brug af $k!(k+1) = (k+1)!$:

$$\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1} = \frac{(k+1)!}{i!(k+1-i)!} = \binom{k+1}{i}$$

Dette er netop, hvad vi ønskede at vise. □

Induktionsbevis med brøker og fakulteter

Vi vil nu vise, at beviset for binomialformlen kan gennemføres uden brug af binomialnotationen og sumtegn. Når man udfører alle mellemregninger bliver dette for uoverskueligt til at medtage her. Vi synes dog, at der er en pointe i at kunne følge alle skridt tilbage til de regneregler, der anvendes, derfor har vi sat den uforkortede udgave i appendiks A.

Sætning 3.15 (Binomialformlen)

$$(a+b)^n = \frac{n!}{0!(n-0)!}a^n + \frac{n!}{1!(n-1)!}a^{n-1}b^1 + \cdots + \frac{n!}{i!(n-i)!}a^{n-i}b^i + \cdots + \frac{n!}{n!(n-n)!}b^n$$

Bevis

Beviset er et induktionsbevis og er helt analogt til det forrige bevis.

Startbetingelserne er opfyldt, idet der for $n = 1$ gælder:

$$(a+b)^1 = a + b = 1 \cdot a \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot b = \frac{1!}{0!(1-0)!}a^1b^0 + \frac{1!}{1!(1-1)!}a^0b^1$$

Vi antager, at binomialformlen gælder for $n = k$. Det vil sige, at koefficienten til leddet $a^{k-i}b^i$ er $\frac{k!}{i!(k-i)!}$, hvor $0 \leq i \leq k$. Vi skal vise, at den gælder for $n = k + 1$. Det vil sige at:

$$\begin{aligned}(a+b)^{k+1} &= \frac{(k+1)!}{0!(k+1-0)!}a^{k+1} + \frac{(k+1)!}{1!(k+1-1)!}a^{k+1-1}b^1 + \cdots \\ &+ \frac{(k+1)!}{i!(k+1-i)!}a^{k+1-i}b^i + \cdots + \frac{(k+1)!}{(k+1)!(k+1-(k+1))!}b^{k+1}\end{aligned}$$

Vi kan efter potensregnereglerne, $a^{p+q} = a^p \cdot a^q$, opskrive følgende:

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k$$

Nu benyttes induktionsantagelsen, at binomialformlen gælder for $n = k$.

$$\begin{aligned}(a+b)(a+b)^k = (a+b)\Bigg(&\frac{k!}{0!(k-0)!}a^kb^0 + \frac{k!}{1!(k-1)!}a^{k-1}b^1 + \cdots \\ &+ \frac{k!}{i!(k-i)!}a^{k-i}b^i + \cdots + \frac{k!}{k!(k-k)!}a^{k-k}b^k\Bigg)\end{aligned}$$

Når parenteserne ganges ud, vil der fremkomme en række led, der alle vil være af typen $ca^{k+1-i}b^i$, hvor $0 \leq i \leq k+1$. Koefficienten, vi søger, er $c \in \mathbf{N}$.

For leddene $a^{k+1}b^0$ og a^0b^{k+1} vil koefficienten være 1, da disse led fremkommer ved at gange a på a^k og b på b^k, hvilket kun kan ske på én måde.
Vi ser nu på koefficienten for et generelt led af typen: $a^{k+1-i}b^i$, hvor $0 < i < k+1$. Dette led kan fremkomme på netop to måder: Ved enten at gange a på $a^{k-i}b^i$ eller b på $a^{k-(i-1)}b^{i-1}$. Ud fra induktionsantagelsen kan vi derfor opstille følgende sum for c:

$$c = \frac{k!}{i!(k-i)!} + \frac{k!}{(i-1)!(k-(i-1))!}$$

Denne kan vi ifølge lemma 5 omskrive til:

$$c = \frac{(k+1)!}{i!(k+1-i)!}$$

Vi har hermed vist, at sætningen er sand for $n = k+1$. □

Analyse af induktionsbevis med brøker og fakulteter

Beviset svarer på de fleste punkter til det første bevis, idet det stort set er det samme, vi foretager os. Her har vi ikke anvendt sumtegn, som blot er en notationsmåde, men regner på de udskrevne brøker. Beviset adskiller sig dog fra det ovenstående på følgende punkter:

Bevistype: En lille forskel findes i slutningen af beviset, hvor argumentationen er af kombinatorisk art, idet vi viser, hvorledes man kan fremskaffe et led af en given type, $ca^{k+1-i}b^i$, på to forskellige måder.

Matematisk univers: Beviset bevæger sig ligesom det forrige inden for de reelle og de komplekse tals univers, idet leddene i de toleddede størrelser både kan være reelle og komplekse. Desuden er de naturlige tal bragt på banen, i og med at det er et induktionsbevis.

Kombinatorisk bevis for binomialformlen.

Vi skal gøre rede for, at størrelsen af koefficienterne, når man ganger toleddede størrelser sammen, svarer til binomialkoefficienterne i binomialformlen.

Inden beviset for selve binomialformlen, bevises, at $\binom{k}{i} = \frac{k!}{i!(k-i)!}$ er antallet af måder, hvorpå man kan udtage i elementer ud af k elementer, når rækkefølgen er uden betydning. Derefter illustreres pointen i det kominatoriske bevis for binomialformlen med et eksempel, og efterfølgende bevises sætningen.

Bevis
Hvis man skal vælge 1 element ud af k elementer, kan dette gøres på k forskellige måder. Hvis man skal vælge 2 ud af k elementer, kan dette gøres på $k(k-1)$ forskellige måder, da det samme element ikke kan vælges to gange. Hvis man skal vælge i elementer ud fra k mulige kan dette gøres på $k(k-1)(k-2)\cdots(k-(i-1))$ måder. En del af disse måder indeholder de samme elementer, kun rækkefølgen af elementerne er forskellig.

i elementer kan sorteres på $i!$ måder, da der kan være i forskellige på første plads, $(i-1)$ forskellige på næste plads osv. Vi får derfor, at i elementer ud af k kan udtages på $\dfrac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-(i-1))}{i!}$ forskellige måder, når rækkefølgen ikke betyder noget. Denne brøk kan skives kortere, hvis vi forlænger med $(k-i)!$. Derved fås:

$$\frac{k!}{i!(k-i)!}$$

□

Inden beviset for binomialformlen starter vi med et eksempel.

Vi udregner $(a+b)^2$ og ser, om det passer med binomialformlen.

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 = \sum_{i=0}^{2} \binom{2}{i} a^{2-i} b^i.$$

Udregningen bygger på de distributive og kommutative love. Fremgangsmåden er, at man tager et led fra hver parentes og multiplicerer disse. Slutresultatet er summen af disse produkter. I dette eksempel tages et a fra første parentes og et a fra anden parentes og disse multipliceres. Derefter tages et a fra første parentes og et b fra anden parentes og disse multipliceres. Så tages et b fra første parentes og et a fra anden, og slutteligt et b fra både første og anden parentes. Summen af disse er: $a^2 + ab + ba + b^2$. Dette er lig $1 \cdot a^2 + 2 \cdot ab + 1 \cdot b^2$, hvor leddenes koefficienter svarer til antallet af måder, hvorpå man kan få produktet ved at udtage ét led fra hver parentes. Der er altså netop én måde, hvorpå man kan tage to a'er eller to b'er ud af de to parenteser, mens der er to måder, hvorpå man kan tage et a og et b fra de to parenteser.

Sættes endnu et led på fås:

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2+2ab+b^2) = a(a^2+2ab+b^2)+b(a^2+2ab+b^2)$$
$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Man ser, at alle leddene indeholder netop tre faktorer, og disse led er fremkommet ved, at der for hver parentes, der ganges ud, udvælges enten et a eller et b fra hver parentes. Dette princip vil vi nu søge at generalisere til et egentligt bevis.

Bevis
Vi skal vise, at

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)\cdots(a+b) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i}b^i.$$

Hvis man ganger $(a+b)^n$ ud vha. den distributive lov, fås summen af alle de mulige produkter, hvor der er taget netop én faktor fra hver af de n parenteser. Når man tager et b ud fra i parenteser, må der tages a'er fra resten af parenteserne, dvs. $(n-i)$ a'er. Ved hjælp af den kommutative lov og potensregnereglerne, kan leddene omskrives til formen $a^{n-i}b^i$.

Man har taget alle de mulige kombinationer netop én gang, men nogle af disse muligheder er ens, fordi vi ikke skelner mellem, hvilke parenteser a'erne og b'erne kommer fra, men kun deres samlede antal. Derfor kan led, der har samme antal a- og b-faktorer, slås sammen.

Koefficienten foran leddet $a^{n-i}b^i$ bliver dermed antallet af de produkter, der indeholder nøjagtig $(n-i)$ a'er og i b'er. Denne koefficient svarer således til det antal måder, hvorpå man kan tage i b'er ud af n parenteser, altså er koefficienten lig $\binom{n}{i}$, hvilket var, hvad vi skulle vise. □

Analyse af det kombinatoriske bevis.

Bevistype: Dette er et direkte bevis, der bygger på kombinatorik, idet vi argumenterer for, at binomialkoefficienten svarer til det antal måder, hvorpå man kan udtage i elementer ud af k elementer.

Matematisk univers: Dette bevis beskæftiger sig ligeledes med de komplekse og reelle tal i og med, at leddene i den toleddede størrelse både kan være komplekse og reelle, og med de naturlige tal, idet koefficienterne opfattes som tællelige størrelser.

Grundlæggende ide: Ideen er netop at tænke på binomialkoefficienterne som det antal måder, man kan vælge et vist antal elementer ud af et givet antal elementer. Denne ide fås ved notationen for binomialkoefficienter nemlig ved, at $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, hvor brøken netop svarer til antallet af forskellige udtagningsmåder.

Diskussion af beviserne for binomialformlen

Binomialformlen er som nævnt en identitetssætning, der hjælper en til at beregne koefficienter på en overskuelig måde. Hvis man har et udtryk $(a+b)^{2345}$, vil det

være tidskrævende at beregne som $(a+b)(a+b)\cdots(a+b)$ med 2345 faktorer. Det er mere overskueligt at beregne koefficienterne vha. binomialformlen, $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$.
Sætningen kan både bevises vha. induktion og vha. kombinatorik. Det ses, at binomialformlen er sand for $n = 1, 2, 3$ ved udregning af $(a+b)^n$. Det er derfor nærliggende at undersøge, om formlen er sand for $(n+1), ((n+1)+1)$ osv. Dette kan gøres ved et induktionsbevis.
Hvis man derimod tænker over, hvad det er, der sker, når man multiplicerer toleddede størrelser, dvs. tager et led fra hver parentes, lægges der op til et kombinatorisk bevis. Da skal man blot vide, at antallet af måder, hvorpå man kan udtage k elementer ud af n elementer, kan findes som $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Både induktionsbeviset og det kombinatoriske bevis holder sig inden for aksiomerne for naturlige tal. Kombinatorik tager udgangspunkt i tællelige størrelser, og induktionsaksiomet vedrører de naturlige tal. Det giver derfor ikke problemer at blande de to bevismåder, som vi gør det i det andet bevis, idet bevismåderne holder sig inden for samme aksiomatik. Det skal dog bemærkes, at leddene i de toleddede størrelser både kan være komplekse og reelle.

Det er dog let at se, at der er forskel på de ovenstående beviser. Det første induktionsbevis består af beregninger, der alle er foretaget ud fra enkle regneregler. At det benytter sig af summationstegn, kan dog gøre uklart, hvad der foregår, hvis man ikke er vant til at manipulere med summationsgrænser. Der er dog intet suspekt ved måden, der er manipuleret på, hvilket man kan overbevises om ved at udskrive summerne.

Det andet induktionsbevis er mere ligetil at følge rent regnemæssigt, idet vi udskriver brøkerne. Men hermed mistes overblikket let, fordi udtrykkene bliver lange. Man får således et rent formidlingsmæssigt dilemma: Skal man foretage flere beregninger på en gang og risikere, at folk ikke kan følge med, eller skal man udskrive alle beregninger med fare for, at folk taber tråden undervejs. Vi har valgt at korte beregningerne ned og i stedet indføre kombinatoriske argumenter. Man kan dog bevise sætningen udelukkende ved hjælp af beregninger, som det blev vist i det første bevis, derfor har vi i appendiks A medtaget et rent induktivt bevis, hvor alle beregninger er udskrevet og forklaret. Grunden, til at det befinder sig i et appendiks, er netop, at det virker uoverskueligt, når alle beregninger fremstår på denne måde.

Det kombinatoriske bevis er mere sprogligt baseret end de to foregående, men er ikke af den grund mindre matematisk. Der argumenteres for, at sætningen nødvendigvis er sand, når man opfatter binomialkoefficienterne som antallet af

måder, hvorpå man kan udtage et antal elementer ud af et givet antal elementer. Hvis man accepterer denne opfattelse, er det kombinatoriske bevis mere forklarende end induktionsbeviserne, idet det forklarer, hvorfor koefficienterne har de pågældende værdier og ikke nøjes med at godtgøre, at de har dem. Til gengæld er det svært at vurdere, om det kombinatoriske bevis er udført deduktivt korrekt, fordi det er svært at overskue, om argumenterne er korrekte og fuldstændige, blot fordi de intuitivt virker korrekte. Argumentationen har ikke umiddelbart nogen mangler, så beviset må siges at være godt nok. Det er dog svært at afgøre, hvilke krav der stilles, for at et kombinatorisk bevist er godt nok; måske er det endda en smagssag.

Det er lettere at undersøge, om det første induktionsbevis er udført korrekt, da det som nævnt består af simple udregninger. Alle bevisets skridt kan forklares ud fra potensregneregler, som gælder for både reelle og komplekse tal, og beviset er således udført deduktivt korrekt.

I det andet bevis, hvor først induktionsaksiomet og siden kombinatoriske argumenter anvendes, kan det umiddelbart virke som om, man ved at gå over til kombinatorik går bort fra det stringent matematiske og snakker sig fra resten. Dette er dog ikke tilfældet, idet kombinatoriske argumenter, som ovenfor nævnt, er deduktivt korrekte.

4 Diskussion

Vi vil nu diskutere forskellige punkter omkring beviser med udgangspunkt i de beviser, vi har behandlet og herunder godtgøre, hvorfor vi har valgt at tage de enkelte beviser med.

Bevisers funktion i matematik

Beviser bruges til at udbygge og supplere det aksiomatiske grundlag. For eksempel er dimensionssætningen en meget central sætning inden for lineær algebra, og mange efterfølgende sætninger bygger på den.

Vores valg af sætninger og beviser

Da vi startede projektet, troede vi, at hele matematikken hvilede på det samme grundlag, så al matematik kunne føres tilbage til de samme aksiomer. Efterhånden fandt vi dog ud af, at de forskellige beviser, vi havde fat i, hvilede på forskellige aksiomer, og det var ikke klart for os, hvilken forbindelse der er mellem disse aksiomer. Vi var derfor interesserede i at se på et eksempel, hvor denne problematik trådte tydeligt frem.

Vi ved nu, at der rent faktisk har været gjort forsøg på at skabe et fælles grundlag for al matematik, men at det ikke kunne gennemføres. Jo længere hen i projektet vi kom, desto bedre kunne vi forstå ideen bag et sådant forsøg; mange ting i matematikken ville være nemmere, hvis et sådant grundlag var blevet skabt.

Da vi valgte at medtage sætningen og beviset, der vedrører den komplekse eksponentialfunktion, var det, fordi vi troede, at det var et eksempel på en manglende sammenhæng mellem sætning og bevis. Vi betragter det dog nu som et eksempel, hvor selve sætningen indeholder elementer, der umiddelbart tilhører forskellige matematiske områder. Der er således ikke problemer med det indbyrdes forhold mellem sætning og bevis; problemet er at udrede forholdet mellem elementerne, der indgår i både sætning og bevis. Det interessante i beviset er således ikke de manipulationer, der foretages, men at skabe et grundlag, hvor det giver mening at foretage disse manipulationer.

Dimensionssætningen er til gengæld et eksempel på en sætning og et bevis, der udover at være solidt forankret i et aksiomsystem også ligger tæt på aksiomerne i dette system. Her benyttes mange forskellige sætninger og definitioner, men da alle elementerne er placeret inden for samme univers, er forholdet imellem dem uproblematisk, så længe man ikke kommer til at forudsætte et resultat, der selv er en konsekvens af sætningen.
Når man beskæftiger sig med et bevis som det for dimensionssætningen, kan man, i modsætning til beviset for den komplekse eksponentialfunktion, primært koncentrere sig om manipulationerne, der foretages, ikke om det i første omgang giver mening at foretage dem.

Sætningers udsigelseskraft

Efter at have beskæftiget os med sætninger og beviser i et stykke tid, er vi endt op med et noget abstrakt begreb, vi har valgt kalde sætningens udsigelseskraft. Sætninger i matematik har en funktion, idet de indgår i en sammenhæng. Det er således svært at forestille sig en sætning, der ikke kan bruges til noget og ikke i en eller anden forstand rækker ud over sig selv. Som eksempel på en sætning, der ikke synes at have nogen stor udsigelseskraft, kunne man nævne sætningen, der siger, at $\sqrt{2}$ er irrational. Vi ved godt, at denne sætning har haft stor historisk betydning for skabelsen af de reelle tal. Men ud over at kunne bruges til at konstatere, at mængden af irrationale tal er ikke-tom, er det ikke nemt at se, hvor den ellers kan bruges. Derimod finder vi, at dimensionssætningen har stor udsigelseskraft. Senere i lineær algebra viser det sig, at dimensionssætningen er yderst anvendelig i beviser for andre sætninger. Ved at kunne sige noget om størrelsesforholdet mellem de indgående vektorrum, kan man ofte forholdsvis enkelt udlede yderligere information om disse. Det er derfor tydeligvis smart at bevise dimensionssætningen så hurtigt som muligt, når man begynder at udlede sætninger på grundlag af aksiomerne for lineær algebra.

Det bliver klart, at da rækkefølgen af beviserne i et aksiomsystem ikke er givet på forhånd, bliver denne dels bestemt af nødvendighed - hvad kan beskrives på grundlag af hvad - og dels af strategiske overvejelser - hvad er nemt at bevise på grundlag af hvad.

Sammenhængen mellem sætning og bevis

Der er selvfølgelig en nødvendig sammenhæng mellem en sætning og beviset for den, idet beviset er et bevis for netop dén sætning. Man kan ikke tale om et bevis uden en tilhørende sætning. Derudover kan man opfatte spørgsmålet om, hvorvidt der er sammenhæng mellem sætning og bevis, på to forskellige måder, dels en forståelsesmæssig, og dels at sætningen kan indeholde begrænsninger for, hvilke bevistyper der kan anvendes. Hvad det første angår, foretrækker man, at der er

en forståelsesmæssig sammenhæng mellem, hvad sætningen udsiger, og hvad der foregår i beviset. Dette har naturligvis en subjektiv dimension, da det kan være nødvendigt med et stort overblik, hvis man skal være i stand til at se eventuelle sammenhænge. F.eks. havde vi i starten svært ved at se sammenhængen mellem sætning og bevis for den komplekse eksponentialfunktion. Vi indså dog, at bevisets elementer var hentet direkte fra definitionen af sætningens elementer. Det er dog også muligt at bevise sætninger på en sådan måde, at sammenhængen mellem sætning og bevis simpelthen er uklart for enhver. I et sådant tilfælde er det muligt at se, at det er sandt, men ikke at forstå, hvorfor det forholder sig sådan.
På den anden side kan der også være en mere tvingende sammenhæng mellem sætning og bevis. Hvis sætningen omhandler en egenskab, og denne egenskab er defineret negativt, som f.eks. egenskaben irrationalitet, så tvinger det sandsynligvis en til at benytte et modstridsbevis, for hvordan bevises fraværet af en egenskab direkte? Omvendt er det også sådan, at vil man benytte et induktionsbevis, så kræver det noget af sætningen; nemlig at sætningens indhold kan bringes på en form, hvor det, at indeks gennemløber de naturlige tal, vil udtømme enhver tænkelig situation.

Forskellige udgaver af samme bevis

Det er ofte muligt at bevise en sætning på flere måder. Eksempelvis er de to delfølgebeviser forskellige, selvom de minder om hinanden på visse punkter. Det kan være en fordel at have flere beviser for det samme, dels kan det give en øget forståelse af, hvad der er på færde, og dels kan man på denne måde fremhæve nogle sammenhænge, det ikke umiddelbart er til at få øje på. Det er ikke sådan, at det ene bevis er mere rigtigt end det andet. At en sætning er bevist betyder, at der er skabt en nødvendig forbindelse til et aksiomatisk grundlag, så givet disse aksiomer, så er sætningen sand. Sætningen bliver således ikke mere sand af at blive bevist endnu en gang. Det er dog sådan, at nogle har en forkærlighed for det ene bevis fremfor det andet. Dette kan skyldes den forskellige måde, vi hver især læser og forstå beviserne på. Eksempelvis er der tre forskellige udgaver af binomialbeviset, hvor de to er induktionsbeviser og ligner hinanden, og det tredje er et kombinatorisk bevis. Det kombinatoriske bevis giver mere indsigt i, hvorfor sætningen er, som den er. Til gengæld er det sværere at argumentere for, hvilket grundlag der gør det muligt at foretage ethvert skridt i beviset. Modsat er det med induktionsbeviser forholdsvist enkelt at se, at beviset er korrekt udført, men ikke så nemt at overskue, hvor de mange skridt fører en hen.

Ideen i et bevis

Alle beviser kræver en ide, som kan være mere eller mindre kompliceret. I nogle beviser skal man udelukkende omskrive på det oprindelige udtryk, hvilket ikke

kræver de store ideer. Af de beviser, vi har medtaget, er $\sqrt{2}$-beviset og binomialbeviset de, der ikke kræver så store ideer. I induktionsbeviset for binomialformlen skal man, når man én gang har fundet på at bruge induktion, blot regne derudaf. Andre beviser bygger på en mere krævende ide, som f.eks. beviserne for konvergente delfølger, hvor det er centralt, at man begynder at se på spidser eller at benytte et princip som bisektion. I beviset, for at en måne kan kvadreres, skal man få ideen at konstruere en måne på den specielle måde, som det gøres i beviset.

For at kunne bevise en påstand er det således nødvendigt, at få en ide til, hvordan det gøres. At få en brugbar ide kræver en vis erfaring for matematisk tankegang. En sådan opbygges og styrkes ved ved at gennemføre flere beviser.

Intuition i matematik

Så længe der er overenstemmelse mellem ens intuition og de logiske implikationer af de aksiomer, man arbejder med, betyder det ikke så meget for resultatet, om man forlader sig på intuitionen i beviser, eller kun accepterer skarpe argumenter. Men når de matematiske aksiomer har kontraintuitive konsekvenser, er det overvejende sandsynligt, at man bliver ledt på vildspor, hvis man udelukkende forlader sig på argumenter, der appellerer til intuitionen. Problemet er, at det netop ikke er til at vide, hvornår aksiomer har disse kontraintuitive konsekvenser, hvis ikke man udelukkende baserer sine slutninger på præcis argumentation.

Matematik som naturvidenskab

De geometriske beviser kan godt betragtes som en slags naturvidenskab, da vi kan konstruere figurer og betragte disse. Altså ved empiriske *forsøg* kan man konstruere sig frem til et ønsket resultat og dermed vise eksistensen af et givet objekt.
Man kan også betragte det kombinatoriske bevis som en slags naturvidenskab, i og med at man også her kan prøve sig frem ved f.eks. at tage n sorte kugler ud af en mængde af sorte og hvide. I dette eksempel er man dog begrænset til at efterprøve en sætning på et konkret eksempel og kan ikke sige noget generelt.

Under hele projektforløbet har vi været fascinerede af geometriske beviser. Grunden til dette er, at geometriske beviser, af den slags vi har set på, tillader, at hvert trin anskueliggøres visuelt. Dette har den store fordel, at det giver to forskellige veje til at forstå, hvad det er, der foregår i beviset. Vi kan imidlertid også konstatere, at det ikke er uproblematisk at arbejde med geometriske beviser. Vi har i et tidligere afsnit set på, at beviser er en logisk konstruktion, hvor der skabes en nødvendig forbindelse mellem præmisser og konklusion. Fordelen ved at arbejde med geometri er, at elementer i denne logiske konstruktion kan anskueliggøres ved hjælp af en tegning. Til gengæld kan ens intuition om, hvad der foregår på en

tegning være så stærk, at det forleder en til at mene, at yderligere argumentation er unødvendig. F.eks. synes det ikke at kræve yderligere argumentation, at en specifik opdeling resulterer i to identiske trekanter, når man først har set på en tegning, hvorledes de ser ud.
Problemet er således, at det, der umiddelbart ser ud til at bidrage med overskuelighed og derved støtte den logiske tænkning, i stedet kan give anledning til en ukritisk accept af de argumenter, der indgår i beviset. Således kan man ende med at stille sig tilfreds med en empirisk verifikation af en påstand i stedet for at bruge denne som afsæt for en omhyggelig undersøgelse af argumenterne i beviset.

Vores oplevelse af geometriske beviser er, at de både er de nemmeste og de sværeste - dem hvor det umiddelbart er nemmest at forstå, hvad der tales om, og dem hvor det er sværest at se, hvornår og hvordan man bliver snydt. Dette illustreres tydeligt i beviset for, at en cirkel kan kvadreres. Selvom man ved, at det ikke kan lade sig gøre, kan det være utroligt svært at slå ned på, hvor det helt præcist er, at beviset, eller dets forudsætninger, ikke holder.

Umulighedsbevis

Matematik er den eneste videnskab, hvori man kan lave umulighedsbeviser, altså bevise at noget er umuligt. For eksempel er det muligt at bevise, at en vilkårlig cirkel ikke kan kvadreres. Dette er specielt for matematik, da der ikke er andre videnskaber der kan udtale sig om ikke-eksistens eller sikre, at noget gælder for alle objekter i en kategori. Grunden til dette er, at matematik er en rent deduktiv videnskab, hvor hele domænet for et udsagn er fastlagt på forhånd. Når man beviser, at en cirkel ikke kan kvadreres, tager man udgangspunkt i definitionen af en cirkel, hvori forholdet mellem omkreds og radius, og dermed π, indgår. Fremgangsmåden i beviset er så, at man viser, at alle tal, hvori π indgår, ikke kan kvadreres.

Overvejelser over projektet

Vi har nu samlet op på vores analyser og forsøgt at udtale os om emnet matematiske beviser på baggrund af de rent formelle logiske krav, der stilles til beviser, samt ud fra vores undersøgelser af en håndfuld af slagsen. Nu kan man selvfølgelig ikke lade være med at overveje om det, vi siger, rækker ud over eksemplerne selv. Vi har kort behandlet forholdet mellem deduktive og induktive slutninger, og når vi forsøger at udtale os generelt om beviser ud fra vores cases, er der således tale om induktive slutninger. Disse slutninger er oven i købet foretaget på et yderst spinkelt grundlag, idet der ifølge overslaget fra *Ulams dilemma* produceres ca. 200.000 sætninger (og beviser) om året (Davis & Hersh; 1998, side 21). Det er imidlertid sådan, at hvis man vil ud over en rent teoretisk tilgang, til det at bevise

matematiske påstande, vil arbejde med konkrete eksempler på bevisførelse, så er der tale om en empirisk undersøgelse. Det, at beviserne er deduktive, ændrer ikke ved det faktum, at vores behandling af beviserne nødvendigvis må være induktiv.

I en refleksion over vores slutningsgrundlag må man også have med, at vi i gruppen har haft en del andre beviser oppe til debat, samt det faktum at alle i gruppen er stødt på en varieret mængde beviser i deres studieforløb. Vores analyser og konklusioner er foretaget på denne baggrund og er selvfølgelig afhængige af vores erfaringer med beviser generelt. Ikke desto mindre er denne rapport hverken mere eller mindre end vores forsøg på at fremdrage nogle specifikke aspekter af vores cases, samt vores forsøg på drage nogle generelle konklusioner på dette grundlag, med de styrker og svagheder dette indebærer.

Vi har i det ovenstående nævnt nogle af grundene til, hvorfor de enkelte beviser var med. Her kan det dog være på sin plads at nævne, at udvælgelsen af hovedparten af beviserne blev foretaget på grundlag af en akut trang til at konkretisere det videre forløb i projektet. I starten af projektet behandlede vi beviser uden aktivt at selektere, forstået på den måde, at hvis man fandt et bevis, der var interessant, og som alle i gruppen havde forudsætninger for at kunne forstå, så blev der brugt tid på det. På et tidspunkt gjorde vi så status over, hvilke beviser vi havde kigget på og foretog på dette grundlag vores valg af, hvilke beviser vi ville koncentrere os om fremover. Dette medførte bl.a., at vi sent i forløbet opdagede, at vi ikke havde medtaget et eksempel på et modstridsbevis. Denne mangel blev så udbedret ved at inddrage beviset for, at $\sqrt{2}$ er irrational.

En radikalt anderledes tilgang til emnet havde været udelukkende at studere den tilgængelige litteratur, der omhandler bevisførelse i matematik, og så forsøge at drage nogle konklusioner på dette grundlag. Da en grundliggende motivation for os alle var tilegnelsen af færdigheder udi konstruktionen af beviser, var det hele tiden centralt for os, at der var konkrete beviser med i projektet. Denne indstilling forhindrede os i at lave et rent litteraturstudie, og det er vi stadig glade for. En del af selve det at bevise matematiske sætninger involverer valg af midler og strategier, noget der kun kan systematiseres indtil et vist niveau, og det er således snarere noget man udvikler et håndelag for, end det er noget, der kan læres teoretisk. Når man er i gang med at udvikle dette håndelag, kan det selvfølgelig være rart at være i stand til at systematisere sine erfaringer på en hensigtsmæssig måde, og her er der ingen tvivl, om at man med fordel kan hente hjælp i litteraturen. Der er dog stadig en stor forskel på at hente hjælp i litteraturen og at bygge sine undersøgelser på andres erfaringer. Noget, vi diskuterede og praktiserede en del undervejs, var egne beviser for geometriske sætninger. Der var forskellige grunde til, at den endelige rapport ikke kom til at indeholde et sådant, men vi er alle enige om, at vi gerne havde set et sådant i

vores udvalg.

I en diskussion af teori kontra håndelag er det interessant, at der er forskellige synspunkter i gruppen på, hvordan disse ideelt balanceres; synspunkter som i høj grad afhænger af de enkeltes faglige niveau og forudsætninger. De, der er langt henne i deres studieforløb, ville gerne have lavet dette projekt for længe siden, helst som det første, hvorimod de, som lige er startet på studiet, alle har oplevet det som utroligt frustrerende, at skulle tilegne sig, og udvikle, begreberne om emnet med så få forudsætninger. At det har været frustrerende, er dog ikke ensbetydende med, at det ikke har været givende, men alle føler trang til at vende tilbage til emnet senere i studiet, forhåbentligt med flere forudsætninger, og samle op på de løse tråde.

Hvis vi vender tilbage til emnet, vil vi eksempelvis gerne arbejde med et eller flere længere, og mere komplicerede, beviser, hvor man bringer mange elementer i spil på en gang. Her kunne det eksempelvis være interessant at fokusere på ideaspektet: Hvad er den grundlæggende ide i beviset? Dvs. den ide, som afspejles i selve stukturen af beviset, i valg af elementer osv. Vi har også haft lyst til at gøre æstetik til det centrale emne. Næsten alle, der beskæftiger sig med matematik, må have oplevet et særligt bevis som smukt, og hvorvidt det var tankegangen bag, det simple i beviset, eller simpelthen den medfølgende forståelse af sætningen, som blev bevist, eller om det var noget helt andet, der afstedkom denne reaktion, kunne nok være en undersøgelse værd. At starte på dette niveau forekom os dog i starten at være mere tiltrækkende end realistisk. Noget vi også gerne vil vende tilbage til, er en mere detaljeret kategorisering af de forskellige beviser, end den vi har præsenteret i rapporten. Kategoriseringen har været tilstrækkelig til det, vi skulle bruge den til, men da vi startede projektet var det vores intention at gøre mere ud af dette. Om det er nok til at bære et helt projekt, er dog tvivlsomt.

Et udbytte af projektet, vi alle har haft, er afstedkommet af arbejdet med fremstillingen af beviser. Det har givet os en bedre fornemmelse for to ting; for det første at lærebøgers opbygning ikke er givet, men er et resultat af nogle valg, der er foretaget, men det har først og fremmest givet os en fornemmelse for nogle af de overvejelser, dette involverer: Hvor meget skal med? Hvordan skal det struktureres? For de i projektet, der allerede er eller snart bliver lærere, kan dette bruges i en formidling af lærebøger. For resten af os kan det forhåbentlig bruges i en fremtidig tilegnelse af indholdet af disse.

Projektet har også været udbytterigt i anden retning, idet vi har fået en bedre forståelse for nogle af de diskussioner, der foregår inden for faget. For eksempel læste vi alle et uddrag af Lakatos fra *Proofs and Refutations* (Lakatos; 1976) undervejs i forløbet, hvilket, vi alle syntes, var interessant, men hvorfor

nogle af hans ideer betragtes som værende kontroversielle, havde vi svært ved at se. På lang sigt kunne vi dog begynde at se paralleller til diskussioner, der blev ved med at dukke op i projektet. Vi har eksempelvis flere gange diskuteret følgende: Når det formelle krav til beviser er en klarlæggelse af en forbindelse fra aksiomer til den sætning, der skal bevises, sådan at den sidste følger med nødvendighed af de første, og vi i vores arbejde med lærebogsversionen af dimensionssætningen, havde fundet, at en sådan forbindelse godt nok var der, men at en del af ræsonnementerne var undertrykt af plads- og overskuelighedshensyn i bogens udgave af beviset, er beviset så godt nok? Hvis ja, hvor få ræsonnementer kan man så tillade sig at tage med i et bevis? Hvis nej, og vores egen udpenslede (og uoverskuelige) version er god nok, hvor meget kan man så fjerne i vores bevis, før det ikke er godt nok længere? Dette fører igen andre diskussioner med sig, som f.eks. graden af sikkerhed i beviser: Er det en funktion, hvor sikkerheden af et bevis er afhængigt af antallet (og dygtigheden) af de matematikere, der har efterprøvet det? Er det en trossag? Er det forkert at stille spørgsmålet på denne måde? Er beviser i virkeligheden strukturer, der afdækkes, snarere end noget man finder på?
Vi har haft mange af denne slags diskussioner på gruppemøder, over frokosten osv. Vi har ikke trukket på dem i rapporten og diskussionen af beviserne, da vi er af den mening, at det er diskussioner, der kræver en grundig behandling, gerne et helt projekt. Vi kom til den konklusion, at hvis man kun tager dele af en sådan diskussion med, kommer man let til at give udtryk for et videnskabsteoretisk standpunkt, hvis rækkevidde i relation til faget matematik ikke er til at overskue.

5 Konklusion

I løbet af dette projekt har vi diskuteret og lært mange forskellige ting vedrørende matematiske beviser. Vores udbytte har derfor været større, end det umiddelbart er muligt at nedskrive i denne konklusion på projektet. Vi vil dog her forsøge at sammenfatte et svar på vores problemformulering om, hvornår en matematisk påstand er bevist.

For at være sikre på at en konklusion, der udledes af et bevis, er korrekt, skal man vide, at beviset ikke indeholder deduktive fejl, og at det bygger på sande antagelser. Hvis disse betingelser er opfyldt, så er påstanden bevist. Mere præcist vil det sige, at beviset skal indeholde en slutningsrække, hvor der sluttes fra antagelser til påstand ved hjælp af en slutningsregel. Derudover skal det være tydeligt, hvilket grundlag denne slutning er foretaget på, dvs. hvilke antagelser der forudsættes at være sande, for at påstanden er sand. Til sidst skal man godtgøre, at forholdet mellem disse forudsætninger ikke er tvetydigt, dvs. at de er konsistente. Dette gøres ved at analysere alle forudsætninger og klargøre deres aksiomatiske fundament. Når en påstand er bevist, kaldes den en sætning.

For det enkelte individ er det desuden afgørende, at beviset er til at forstå. Hvis man ikke kan forstå beviset, er det at acceptere sætningen reduceret til en trossag.

A Appendiks

I det følgende gennemgås et rent induktivt bevis, hvor alle bevisets skridt er vist og forklaret.

Sætning A.1 (Binomialformlen)

$$
\begin{aligned}
(a+b)^n = &\frac{n!}{0!(n-0)!}a^n + \frac{n!}{1!(n-1)!}a^{n-1}b^1 \\
&+\frac{n!}{2!(n-2)!}a^{n-2}b^2 + \cdots + \frac{n!}{i!(n-i)!}a^{n-i}b^i + \cdots \\
&+\frac{n!}{(n-1)!(n-(n-1))!}a^1b^{n-1} + \frac{n!}{n!(n-n)!}b^n
\end{aligned}
$$

Bevis for binomialformlen ved induktion
Startbetingelserne er opfyldt, idet der for n=1 gælder:

$$a+b = 1\cdot a\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot b = \frac{1!}{0!(1-0)!}a^1b^0 + \frac{1!}{1!(1-1)!}a^0b^1 = (a+b)^1$$

Vi antager, at binomialformlen gælder for n=k, dvs. at koefficienten til leddet $a^{k-i}b^i$ er $\frac{k!}{i!(k-i)!}$.

Vi skal nu vise, at det gælder for n=k+1, dvs. at:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{k+1} = &\frac{(k+1)!}{0!(k+1-0)!}a^{k+1} + \frac{(k+1)!}{1!(k+1-1)!}a^{k+1-1}b^1 \\
&+\frac{(k+1)!}{2!(k+1-2)!}a^{k+1-2}b^2 + \cdots + \frac{(k+1)!}{i!(k+1-i)!}a^{k+1-i}b^i + \cdots \\
&+\frac{(k+1)!}{(k+1-1)!(k+1-(k+1-1))!}a^1b^{k+1-1} + \frac{(k+1)!}{(k+1)!(k+1-(k+1))!}b^{k+1}
\end{aligned}
$$

Vi kan efter potensregnereglerne, a^{p+q} og $a^p \cdot a^q$ opskrive følgende:

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k$$

Nu benyttes induktionsantagelsen, at binomialformlen gælder for $n = k$.

$$
\begin{aligned}
(a+b)(a+b)^k = (a+b)(&\frac{k!}{0!(k-0)!}a^k b^0 + \frac{k!}{1!(k-1)!}a^{k-1}b^1 \\
&+\frac{k!}{2!(k-2)!}a^{k-2}b^2 + \cdots + \frac{k!}{i!(k-i)!}a^{k-i}b^i + \cdots \\
&+\frac{k!}{(k-1)!(k-(k-1))!}a^{k-(k-1)}b^{k-1} + \frac{k!}{k!(k-k)!}a^{k-k}b^k)
\end{aligned}
$$

Hvis vi ganger $(a+b)$ ind i parentesen fås:

$$
\begin{aligned}
&a\frac{k!}{0!(k-0)!}a^{k-0}b^0 + a\frac{k!}{1!(k-1)!}a^{k-1}b^1 + a\frac{k!}{2!(k-2)!}a^{k-2}b^2 + \cdots \\
&\quad +a\frac{k!}{i!(k-i)!}a^{k-i}b^i + \cdots + a\frac{k!}{(k-1)!(k-(k-1))!}a^{k-(k-1)}b^{k-1} + a\frac{k!}{k!(k-k)!}a^{k-k}b^k \\
&\quad +b\frac{k!}{0!(k-0)!}a^{k-0}b^0 + b\frac{k!}{1!(k-1)!}a^{k-1}b^1 + b\frac{k!}{2!(k-2)!}a^{k-2}b^2 + \cdots \\
&\quad +b\frac{k!}{i!(k-i)!}a^{k-i}b^i + \cdots + b\frac{k!}{(k-1)!(k-(k-1))!}a^{k-(k-1)}b^{k-1} + b\frac{k!}{k!(k-k)!}a^{k-k}b^k
\end{aligned}
$$

Her flytter vi a og b i hvert led, da faktorernes orden er ligegyldig.

$$
\begin{aligned}
&\frac{k!}{0!(k-0)!}a\cdot a^{k-0}b^0 + \frac{k!}{1!(k-1)!}a\cdot a^{k-1}b^1 + \frac{k!}{2!(k-2)!}a\cdot a^{k-2}b^2 + \cdots \\
&\quad +\frac{k!}{i!(k-i)!}a\cdot a^{k-i}b^i + \cdots + \frac{k!}{(k-1)!(k-(k-1))!}a\cdot a^{k-(k-1)}b^{k-1} + \frac{k!}{k!(k-k)!}a\cdot a^{k-k}b^k \\
&\quad +\frac{k!}{0!(k-0)!}a^{k-0}b\cdot b^0 + \frac{k!}{1!(k-1)!}a^{k-1}b\cdot b^1 + \frac{k!}{2!(k-2)!}a^{k-2}b\cdot b^2 + \cdots \\
&\quad +\frac{k!}{i!(k-i)!}a^{k-i}b\cdot b^i + \cdots + \frac{k!}{(k-1)!(k-(k-1))!}a^{k-(k-1)}b\cdot b^{k-1} + \frac{k!}{k!(k-k)!}a^{k-k}b\cdot b^k
\end{aligned}
$$

Vi bruger nu potensregnereglerne til at samle led af typen $a^p \cdot a = a^{p+1}$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{k!}{0!(k-0)!}a^{k-0+1}b^0 + \frac{k!}{1!(k-1)!}a^{k-1+1}b^1 + \frac{k!}{2!(k-2)!}a^{k-2+1}b^2 + \cdots \\
&\quad +\frac{k!}{i!(k-i)!}a^{k-i+1}b^i + \cdots + \frac{k!}{(k-1)!(k-(k-1))!}a^{k-(k-1)+1}b^{k-1} + \frac{k!}{k!(k-k)!}a^{k-k+1}b^k \\
&\quad +\frac{k!}{0!(k-0)!}a^{k-0}b^{0+1} + \frac{k!}{1!(k-1)!}a^{k-1}b^{1+1} + \frac{k!}{2!(k-2)!}a^{k-2}b^{2+1} + \cdots \\
&\quad +\frac{k!}{i!(k-i)!}a^{k-i}b^{i+1} + \cdots + \frac{k!}{(k-1)!(k-(k-1))!}a^{k-(k-1)}b^{k-1+1} + \frac{k!}{k!(k-k)!}a^{k-k}b^{k+1}
\end{aligned}
$$

Nu udregner vi eksponenterne og benytter, at $a^0 = 1$ og $a^1 = a$:

$$\begin{aligned}
&\frac{k!}{0!(k-0)!}a^{k+1}\cdot 1 + \frac{k!}{1!(k-1)!}a^k b + \frac{k!}{2!(k-2)!}a^{k-1}b^2 + \cdots \\
&\quad + \frac{k!}{i!(k-i)!}a^{k-i+1}b^i + \cdots + \frac{k!}{(k-1)!(k-(k-1))!}a^2b^{k-1} + \frac{k!}{k!(k-k)!}ab^k \\
&\quad + \frac{k!}{0!(k-0)!}a^k b + \frac{k!}{1!(k-1)!}a^{k-1}b^2 + \frac{k!}{2!(k-2)!}a^{k-2}b^3 + \cdots \\
&\quad + \frac{k!}{i!(k-i)!}a^{k-i}b^{i+1} + \cdots + \frac{k!}{(k-1)!(k-(k-1))!}ab^k + \frac{k!}{k!(k-k)!}1\cdot b^{k+1}
\end{aligned}$$

Vi reducerer udtrykkene. Bemærk at $0! = 1! = 1$.

$$\begin{aligned}
&1\cdot a^{k+1} + k\cdot a^k b + \frac{k!}{2\cdot(k-2)!}a^{k-1}b^2 + \cdots \\
&\quad + \frac{k!}{i!(k-i)!}a^{k-i+1}b^i + \cdots + k\cdot a^2b^{k-1} + 1\cdot ab^k \\
&\quad + 1\cdot a^k b + k\cdot a^{k-1}b^2 + \frac{k!}{2!(k-2)!}a^{k-2}b^3 + \cdots \\
&\quad + \frac{k!}{i!(k-i)!}a^{k-i}b^{i+1} + \cdots + k\cdot ab^k + 1\cdot b^{k+1}
\end{aligned}$$

Vi samler nu led af samme type, dvs. $a^pb^q + a^pb^q$:

$$\begin{aligned}
&a^{k+1} + k\cdot a^k b + a^k b + \frac{k!}{2\cdot(k-2)!}a^{k-1}b^2 + k\cdot a^{k-1}b^2 \\
&\quad + \frac{k!}{2!(k-2)!}a^{k-2}b^3 + \cdots + \frac{k!}{i!(k-i)!}a^{k-i+1}b^i + \frac{k!}{i!(k-i)!}a^{k-i}b^{i+1} \\
&\quad + \cdots + k\cdot a^2b^{k-1} + ab^k + k\cdot ab^k + \cdots + b^{k+1}
\end{aligned}$$

Vi lægger nu leddene sammen, dvs. $a^pb^q + a^pb^q = 2a^pb^q$:

$$\begin{aligned}
&a^{k+1} + (k+1)\cdot a^k b + \left(\frac{k!}{2\cdot(k-2)!} + k\right)a^{k-1}b^2 + \frac{k!}{2!(k-2)!}a^{k-2}b^3 \\
&\quad + \cdots + \frac{k!}{i!(k-i)!}a^{k-i+1}b^i + \frac{k!}{i!(k-i)!}a^{k-i}b^{i+1} + \cdots + k\cdot a^2b^{k-1} \\
&\quad + (k+1)\cdot ab^k + \cdots + b^{k+1}
\end{aligned}$$

Vi vil nu sætte koefficienterne på fælles brøkstreg. Vi regner først på koefficienten for et generelt led af typen $a^{k-(i-1)}b^i$. (Dette svarer til beviset for lemma 5.)

Disse to led er kommet af at gange a på $a^{k-i}b^i$ og b på $a^{k-(i-1)}b^{i-1}$.

$$\frac{k!}{i!(k-i)!} + \frac{k!}{(i-1)!(k-(i-1))!}$$

Vi sætter nu på fælles brøkstreg:

$$\frac{k!(i-1)!(k-(i-1))! + k!i!(k-i)!}{i!(k-i)!(i-1)!(k-(i-1))!}$$

Vi sætter $k!(i-1)!$ udenfor parentes. Her benyttes, at $i! = i \cdot (i-1)!$

$$\frac{k!(i-1)!((k-(i-1))! + i(k-i)!)}{i!(k-i)!(i-1)!(k-(i-1))!}$$

Vi forkorter med $(i-1)!$

$$\frac{k!((k-(i-1))! + i \cdot (k-i)!)}{i!(k-i)!(k-(i-1))!}$$

Vi sætter $(k-i)!$ uden for parentes. Her benyttes, at $(k-(i-1))! = (k-(i-1)) \cdot (k-i)!$

$$\frac{k!(k-i)!((k-(i-1)) + i)}{i!(k-i)!(k-(i-1))!}$$

Vi forkorter med $(k-i)!$

$$\frac{k!((k-(i-1)) + i)}{i!(k-(i-1))!}$$

Vi reducerer i tælleren og flytter om på leddene i nævneren:

$$\frac{k!(k+1)}{i!(k+1-i)!}$$

Vi omskriver ved brug af $k!(k+1) = (k+1)!$

$$\frac{(k+1)!}{i!(k+1-i)!}$$

Vi kan nu genkende koefficienten fra $n = k$ når der i denne indsættes $n = k+1$. Heraf følger, at:

$$(a+b)(a+b)^k = a^{k+1} + (k+1)\cdot a^k b + (\frac{k!}{2\cdot(k-2)!} + k)a^{k-1}b^2 + \frac{k!}{2!(k-2)!}a^{k-2}b^3,$$
$$+\cdots + \frac{k!}{i!(k-i)!}a^{k-i+1}b^i + \frac{k!}{i!(k-i)!}a^{k-i}b^{i+1} + \cdots + k\cdot a^2 b^{k-1}$$
$$+(k+1)\cdot ab^k + \cdots + b^{k+1}$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^{k+1} = \frac{k+1!}{0!(k+1-0)!}a^{k+1} + \frac{k+1!}{1!(k+1-1)!}a^{k+1-1}b^1$$
$$+\frac{k+1!}{2!(k+1-2)!}a^{k+1-2}b^2 + \cdots + \frac{k+1!}{i!(k+1-i)!}a^{k+1-i}b^i + \cdots$$
$$+\frac{k+1!}{(k+1-1)!(k+1-(k+1-1))!}a^1 b^{k+1-1} + \frac{k+1!}{k+1!(k+1-k+1)!}b^{k+1}$$

Dette var netop, hvad vi skulle vise.

□

Litteratur

Brandt, K. & Nissen, J. (1995). *Q.E.D. En introduktion til matematisk bevis.*, Abacus, Vejle.

Davis, P. J. & Hersh, R. (1998). *The Mathematical Experience*, Mariner Books, New York, First Mariner Books edition.

Dunham, W. (1991). *Journeys through genius: the great theorems of mathematics*, Penguin Books, New York.

Euklid/Eibe, T. (1897). *Euklids Elementer*, Gyldendals boghandels forlag, København.

Friedberg, S. H., Insel, A. J. & Spence, L. E. (1992). *Linear Algebra*, Prentice Hall, New York, 2. udgave.

Garnier, R. & Taylor, J. (1996). *100 % Mathematical Proof*, John Wiley and Sons, Chichester.

Hanna, G. & Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving, *International Handbook of Mathematics Education* **4**.

Howson, C. (1997). *Logic with Trees*, Routledge, London.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations*, Cambridge University Press, Cambridge.

Lindstrøm, T. (1996). *Kalkulus*, Universitetsforlaget, Oslo, 2. udgave.

Lübcke, P. (ed.) (1983). *Politikens Filosofi Leksikon*, Politikens forlag, København.

Niss, M. (1990). *Lineær Algebra Og Analyse*, Vol. 200 of *Tekster Fra IMFUFA*, RUC, IMFUFA, Roskilde.

Liste over tidligere udsendte tekster kan ses på IMFUFA´s hjemmeside: http://mmf.ruc.dk eller rekvireres på sekretariatet, tlf. 46 74 22 63 eller e-mail: imfufa@ruc.dk.

332/97 ANOMAL SWELLING AF LIPIDE DOBBELTLAG
Specialerappoprt af: Stine Korremann
Vejleder: Dorthe Posselt

333/97 Biodiversity Matters
an extension of methods found in the literature on monetisation of biodiversity
by: Bernd Kuemmel

334/97 LIFE-CYCLE ANALYSIS OF THE TOTAL DANISH ENERGY SYSTEM
by: Bernd Kuemmel and Bent Sørensen

335/97 Dynamics of Amorphous Solids and Viscous Liquids
by: Jeppe C. Dyre

336/97 Problem-orientated Group Project Work at Roskilde University
by: Kathrine Legge

337/97 Verdensbankens globale befolkningsprognose
- et projekt om matematisk modellering
af: Jørn Chr. Bendtsen, Kurt Jensen, Per Pauli Petersen

338/97 Kvantisering af nanolederes elektriske ledningsevne
Første modul fysikprojekt
af: Søren Dam, Esben Danielsen, Martin Niss,
Esben Friis Pedersen, Frederik Resen Steenstrup
Vejleder: Tage Christensen

339/97 Defining Discipline
by: Wolfgang Coy

340/97 Prime ends revisited - a geometric point of view -
by: Carsten Lunde Petersen

341/97 Two chapters on the teaching, learning and assessment of geometry
by: Mogens Niss

342/97 A global clean fossil scenario DISCUSSION PAPER prepared by Bernd Kuemmel for the project LONG-TERM SCENARIOS FOR GLOBAL ENERGY DEMAND AND SUPPLY

343/97 IMPORT/EKSPORT-POLITIK SOM REDSKAB TIL OPTIMERET UDNYTTELSE AF EL PRODUCERET PÅ VE-ANLÆG
af: Peter Meibom, Torben Svendsen, Bent Sørensen

344/97 Puzzles and Siegel disks
by: Carsten Lunde-Petersen

345/98 Modeling the Arterial System with Reference to an Anesthesia Simulator
Ph.D. Thesis
by: Mette Sofie Olufsen

346/98 Klyngedannelse i en hulkatode-forstøvningsproces
af: Sebastian Horst
Vejledere: Jørn Borggren, NBI, Niels Boye Olsen

347/98 Verificering af Matematiske Modeller
- en analyse af Den Danske Eulerske Model
af: Jonas Blomqvist, Tom Pedersen, Karen Timmermann, Lisbet Øhlenschlæger
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek

348/98 Case study of the environmental permission procedure and the environmental impact assessment for power plants in Denmark
by: Stefan Krüger Nielsen
project leader: Bent Sørensen

349/98 Tre rapporter fra FAGMAT - et projekt om tal og faglig matematik i arbejdsmarkedsuddannelserne
af: Lena Lindenskov og Tine Wedege

350/98 OPGAVESAMLING - Bredde-Kursus i Fysik 1976 - 1998
Erstatter teksterne 3/78, 261/93 og 322/96

351/98 Aspects of the Nature and State of Research in Mathematics Education
by: Mogens Niss

352/98 The Herman-Swiatec Theorem with applications
by: Carsten Lunde Petersen

353/98 Problemløsning og modellering i en almendannende matematikundervisning
Specialerapport af: Per Gregersen og Tomas Højgaard Jensen

354/98 A Global Renewable Energy Scenario
by: Bent Sørensen and Peter Meibom

355/98 Convergence of rational rays in parameter spaces
by: Carsten Lunde Petersen and Gustav Ryd

356/98 Terrænmodellering
Analyse af en matematisk model til konstruktion af digitale terrænmodeller
Modelprojekt af: Thomas Frommelt, Hans Ravnkjær Larsen og Arnold Skimminge
Vejleder: Johnny Ottesen

357/98 Cayleys Problem
En historisk analyse af arbejdet med Cayleys problem fra 1870 til 1918
Et matematisk videnskabsfagsprojekt af: Rikke Degn, Bo Jakobsen, Bjarke K.W. Hansen, Jesper S. Hansen, Jesper Udesen, Peter C. Wulff
Vejleder: Jesper Larsen

358/98 Modeling of Feedback Mechanisms which Control the Heart Function in a View to an Implementation in Cardiovascular Models
Ph.D. Thesis by: Michael Danielsen

359/99 Long-Term Scenarios for Global Energy Demand and Supply
Four Global Greenhouse Mitigation Scenarios
by: Bent Sørensen (with contribution from Bernd Kuemmel and Peter Meibom)

360/99 SYMMETRI I FYSIK
En Meta-projektrapport af: Martin Niss, Bo Jakobsen & Tune Bjarke Bonné
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen

361/99 Symplectic Functional Analysis and Spectral Invariants
by: Bernhelm Booß-Bavnbek, Kenro Furutani

362/99 Er matematik en naturvidenskab? - en udspænding af diskussionen
En videnskabsfagsprojekt-rapport af: Martin Niss
Vejleder: Mogens Nørgaard Olesen

363/99 EMERGENCE AND DOWNWARD CAUSATION
by: Donald T. Campell, Mark H. Bickhard, and Peder V. Christiansen

364/99 Illustrationens kraft - Visuel formidling af fysik
Integreret speciale i fysik og kommunikation
af Sebastian Horst
Vejledere: Karin Beyer, Søren Kjørup

365/99 To know - or not to know - mathematics, that is a question of context
by: Tine Wedege

366/99 LATEX FOR FORFATTERE - En introduktion til LATEX
og IMFUFA-LATEX
af: Jørgen Larsen

367/99 Boundary Reduction of Spectral Invariants and Unique Continuation Property
by: Bernhelm Booss-Bavnbek

368/99 Kvartvejsraport for projektet SCENARIER FOR SAMLET UDNYTTELSE AF BRINT SOM ENERGIBÆRER I DANMARKS FREMTIDIGE ENERGISYSTEM
Projektleder: Bent Sørensen

369/99 Dynamics of Complex Quadratic Correspondences
by: Jacob S. Jalving
Supervisor: Carsten Lunde Petersen

370/99 OPGAVESAMLING - Bredde-Kursus i Fysik 1976 - 1999
Eksamensopgaver fra perioden 1976 - 1999. Denne tekst erstatter tekst nr. 350/98

371/99 Bevisets stilling - beviser og bevisførelse i en gymnasial matematik undervisning
Et matematikspeciale af: Maria Hermannsson
Vejleder: Mogens Niss

372/99 En kontekstualiseret matematikhistorisk analyse af ikke-lineær programmering: Udviklingshistorie og multipel opdagelse
Ph.d.-afhandling af Tinne Hoff Kjeldsen

373/99 Criss-Cross Reduction of the Maslov Index and a Proof of the Yoshida-Nicolaescu Theorem
by: Bernhelm Booss-Bavnbek, Kenro Furutani and Nobukazu Otsuki

374/99 Det hydrauliske spring - Et eksperimentelt studie af polygoner og hastighedsprofiler
Specialeafhandling af: Anders Marcussen
Vejledere: Tomas Bohr, Clive Ellegaard, Bent C. Jørgensen

375/99 Begrundelser for Matematikundervisningen i den lærde skole hhv. gymnasiet 1884-1914
Historiespeciale af Henrik Andreassen, cand.mag. i Historie og Matematik

376/99 Universality of AC conduction in disordered solids
by: Jeppe C. Dyre, Thomas B. Schrøder

377/99 The Kuhn-Tucker Theorem in Nonlinear Programming: A Multiple Discovery?
by: Tinne Hoff Kjeldsen

378/00 Solar energy preprints:
1. Renewable energy sources and termal energy storage
2. Integration of photovoltaic cells into the global energy system
by: Bent Sørensen

379/00 EULERS DIFFERENTIALREGNING
Eulers indførelse af differentialregningen stillet over for den moderne
En tredjesemesters projektrapport på den naturvidenskabelige basisuddannelse
af: Uffe Thomas Volmer Jankvist, Rie Rose Møller Pedersen, Maja Bagge Pedersen
Vejleder: Jørgen Larsen

380/00 MATEMATISK MODELLERING AF HJERTEFUNKTIONEN
Isovolumetrisk ventrikulær kontraktion og udpumpning til det cardiovaskulære system
af: Gitte Andersen (3.moduls-rapport), Jakob Hilmer og Stine Weisbjerg (speciale)
Vejleder: Johnny Ottesen

381/00 Matematikviden og teknologiske kompetencer hos kortuddannede voksne
- Rekognosceringer og konstruktioner i grænselandet mellem matematikkens didaktik og forskning i voksenuddannelse
Ph. d.-afhandling af Tine Wedege

382/00 Den selvundvigende vandring
Et matematisk professionsprojekt
af: Martin Niss, Arnold Skimminge
Vejledere: Viggo Andreasen, John Villumsen

383/00 Beviser i matematik
af: Anne K.S.Jensen, Gitte M. Jensen, Jesper Thrane, Karen L.A.W. Wille, Peter Wulff
Vejleder: Mogens Niss

384/00 Hopping in Disordered Media: A Model Glass Former and A Hopping Model
Ph.D. thesis by: Thomas B. Schrøder
Supervisor: Jeppe C. Dyre

385/00 The Geometry of Cauchy Data Spaces
This report is dedicated to the memory of Jean Leray (1906-1998)
by: B. Booss-Bavnbek, K. Furutani, K. P. Wojciechowski

386/00 Neutrale mandatfordelingsmetoder – en illusion?
af: Hans Henrik Brok-Kristensen, Knud Dyrberg, Tove Oxager, Jens Sveistrup
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek

387/00 A History of the Minimax Theorem: von Neumann´s Conception of the Minimax Theorem - - a Journey Through Different Mathematical Contexts
by: Tinne Hoff Kjeldsen

388/00 Behandling af impuls ved kilder og dræn i C. S. Peskins 2D-hjertemodel
et 2. moduls matematik modelprojekt
af: Bo Jakobsen, Kristine Niss
Vejleder: Jesper Larsen

389/00 University mathematics based on problemoriented student projects: 25 years of experience with the Roskilde model
By: Mogens Niss
Do not ask what mathematics can do for modelling. Ask what modelling can do for mathematics!
by: Johnny Ottesen

390/01 SCENARIER FOR SAMLET UDNYTTELSE AF BRINT SOM ENERGIBÆRER I DANMARKS FREMTIDIGE ENERGISYSTEM Slutrapport, april 2001
Projektleder: Bent Sørensen
Projektdeltagere: DONG: Aksel Hauge Petersen, Celia Juhl, Elkraft System[#]: Thomas Engberg Pedersen[# #], Hans Ravn, Charlotte Søndergren, Energi 2[#]: Peter Simonsen, RISØ Systemanalyseafd.: Kaj Jørgensen[*], Lars Henrik Nielsen, Helge V. Larsen, Poul Erik Morthorst, Lotte Schleisner, RUC: Finn Sørensen[**], Bent Sørensen
[#]Indtil 1/1-2000 Elkraft, [# #] fra 1/5-2000 Cowi Consult
[*] Indtil 15/6-1999 DTU Bygninger & Energi, [**] fra 1/1-2001 Polypeptide Labs.
Projekt 1763/99-0001 under Energistyrelsens Brintprogram

391/01 Matematisk modelleringskompetence – et undervisningsforløb i gymnasiet
3. semesters Nat.Bas. projekt af: Jess Tolstrup Boye, Morten Bjørn-Mortensen, Sofie Inari Castella, Jan Lauridsen, Maria Gøtzsche, Ditte Mandøe Andreasen
Vejleder: Johnny Ottesen

392/01 "PHYSICS REVEALED" THE METHODS AND SUBJECT MATTER OF PHYSICS
an introduction to pedestrians (but not excluding cyclists)
PART III: PHYSICS IN PHILOSOPHICAL CONTEXT
by: Bent Sørensen.

393/01 Hilberts matematikfilosofi
Specialerapport af: Jesper Hasmark Andersen
Vejleder: Stig Andur Pedersen

394/01 "PHYSICS REVEALED" THE METHODS AND SUBJECT MATTER OF PHYSICS
an introduction to pedestrians (but not excluding cyclists)
PART II: PHYSICS PROPER
by: Bent Sørensen.

395/01 Menneskers forhold til matematik. Det har sine årsager!
Specialeafhandling af: Anita Stark, Agnete K. Ravnborg
Vejleder: Tine Wedege

396/01 2 bilag til tekst nr. 395: Menneskers forhold til matematik. Det har sine årsager!
Specialeafhandling af: Anita Stark, Agnete K. Ravnborg
Vejleder: Tine Wedege

397/01 En undersøgelse af solvents og kædelængdes betydning for anomal swelling i phospholipiddobbeltlag
2. modul fysikrapport af: Kristine Niss, Arnold Skimminge, Esben Thormann, Stine Timmermann
Vejleder: Dorthe Posselt

398/01 Kursusmateriale til "Lineære strukturer fra algebra og analyse" (E1)
Af: Mogens Brun Heefelt

399/01 Undergraduate Learning Difficulties and Mathematical Reasoning
Ph.D Thesis by: Johan Lithner
Supervisor: Mogens Niss

400/01 On Holomorphic Critical quasi circle maps
By: Carsten Lunde Petersen

401/01 Finite Type Arithmetic
Computable Existence Analysed by Modified Realisability and Functional Interpretation
Master's Thesis by: Klaus Frovin Jørgensen
Supervisors: Ulrich Kohlenbach, Stig Andur Pedersen and Anders Madsen

402/01 Matematisk modellering ved den naturvidenskabelige basisuddannelse
- udvikling af et kursus
Af: Morten Blomhøj, Tomas Højgaard Jensen, Tinne Hoff Kjeldsen og Johnny Ottesen

403/01 Generaliseringer i integralteorien
- En undersøgelse af Lebesgue-integralet, Radon-integralet og Perron-integralet
Et 2. modul matematikprojekt udarbejdet af: Stine Timmermann og Eva Uhre
Vejledere: Bernhelm Booss-Bavnbek og Tinne Hoff Kjeldsen

404/01 "Mere spredt fægtning"
Af: Jens Højgaard Jensen

405/01 Real life routing
- en strategi for et virkeligt vrp
Et matematisk modelprojekt af: David Heiberg Backchi, Rasmus Brauner Godiksen, Uffe Thomas Volmer Jankvist, Jogvan Martin Poulsen og Neslihan Saglanmak
Vejleder: Jørgen Larsen

406/01 Opgavesamling til dybdekursus i fysik
Eksamensopgaver stillet i perioden juni 1976 til juni 2001
Denne tekst erstatter tekst nr. 25/1980 + efterfølgende tillæg

407/01 Unbounded Fredholm Operators and Spectral Flow
By: Bernhelm Booss-Bavnbek, Matthias Lesch, John Phillips

408/02 Weak UCP and Perturbed Monopole Equations
By: Bernhelm Booss-Bavnbek, Matilde Marcolli, Bai-Ling Wang