

**Verdensbankens  
globale  
befolkningsprognose**

**-et projekt om matematisk modellering.**

**Udarbejdet af: Jørn Chr. Bendtsen  
Kurt Jensen  
Per Pauli Petersen**

**Vejleder: Jørgen Larsen**

**TEKSTER fra**

**IMFUFA ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER**  
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES  
FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA, Roskilde Universitetscenter,  
Postbox 260, 4000 Roskilde.

## **Verdensbankens globale befolkningsprognose - et projekt om matematisk modellering.**

Udarbejdet af: Jørn Chr. Bendtsen, Kurt Jensen og Per Pauli Petersen.

Vejleder: Jørgen Larsen.

IMFUFA-tekst nr. 337/1997 (135 sider) ISSN 0106-6242

### **Abstract**

Projektets hovedproblemstilling er delt i to, nemlig dels en afdækning af hvorledes Verdensbankens befolkningsprognosemodel fremskriver de enkelte landes samlede befolkninger og deres køns- og aldersmæssige sammensætning, dels en vurdering af hvor stor troværdighed man kan tillægge modellen.

Som en forudsætning for analysen af modellen diskuteres indledningsvis, dels forskellige begrebslige opfattelser af modelleringsprocessen, dels forskellige typer af befolkningsvækstmodeller. Formålet med diskussionen af en begrebslig forståelse af modelleringsprocessen er at nå frem til at pege på potentielle kritiske punkter i modelleringsprocessen, som siden kan fungere som metodiske ledetråde i selve analysen af modellen. Diskussionen af de forskellige vækstmodeller skal bl.a. give forudsætninger for at forstå den såkaldte kohortekomponentmetode, som Verdensbankens model bygger på. - Som yderligere forudsætning for analysen af modellen gøres der rede for en række demografiske begreber og deres indbyrdes sammenhæng.

Herefter præsenteres beregningsmetoderne for fertilitet, dødelighed og migration, og det anskueliggøres, hvordan de enkelte størrelser fremskrives ved hjælp af den såkaldte fremskrivningsmatrix.

Afslutningsvis forsøges begreberne om modelleringsprocessen brugt til at sætte fokus på og analysere svage punkter i modellens grundantagelser, tilpasning til virkeligheden og matematiske grundlag. Endvidere vurderes eksempler på evaluering af forskellige befolkningsmodellers prognoseresultater.

# Forord.

Denne projektrapport handler om Verdensbankens globale befolkningsprognosemodel - en beskrivelse af modellen samt en kritisk analyse af den. Rapporten er et resultat af et projektarbejde på 2. modul af matematikuddannelsen på Roskilde Universitetscenter, og skal opfylde studieordningens krav til det såkaldte modelprojekt.

Baggrunden for vores valg af problemfelt har dels været vores interesse for demografiske problemstillinger, dels et håb om at de demografiske modeller og analysen af Verdensbankens model i særdeleshed ville give os en eksemplarisk indsigt i matematiske modeller og de problemstillinger, der knytter sig til deres udvikling og anvendelse.

I denne forbindelse skal det også nævnes, at vi har en baggrund som undervisere i gymnasiet og på teknisk skole. Udgangspunktet for vores arbejde med og interesse for matematiske modeller har derfor også været de dannelsesaspekter, der knytter sig til undervisningen i matematiske modeller.

Med håbet om en udbytterig læsning.

IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, januar 1997

Jørn Chr. Bendtsen

Kurt Jensen

Per Pauli Petersen



# Indhold

<b>1 Indledning.</b>	<b>7</b>
1.1 Rids af problemfeltet. . . . .	8
1.2 Problemformulering. . . . .	10
1.3 Metodiske overvejelser og afgrænsning. . . . .	11
1.4 Læsevejledning. . . . .	11
<b>2 Om matematiske modeller.</b>	<b>13</b>
2.1 Hvad er en model? . . . . .	13
2.2 Modelleringsprocessens struktur. . . . .	14
2.3 Modellen som en del af en undersøgelsesproces. . . . .	20
2.4 Afrunding. . . . .	22
<b>3 Befolkningsvækst.</b>	<b>25</b>
3.1 Den demografiske transitionsmodel. . . . .	26
3.2 Eksponentiel vækst. . . . .	29
3.3 Forsinket demografisk transition. . . . .	30
3.4 Logistisk vækst. . . . .	32
3.5 Rids af kohorte-komponentmetoden. . . . .	33
3.6 Afrunding. . . . .	35
<b>4 Det matematiske grundlag for Verdensbankens model.</b>	<b>37</b>
4.1 Grundlæggende demografiske begreber. . . . .	37
4.2 Fertilitet. . . . .	39

4.3	Dødelighed. . . . .	41
4.3.1	Vurdering af de aldersbetingede sandsynligheder for at dø. . . . .	46
4.3.2	Overlevelsestavlen - et konkret eksempel. . . . .	48
4.3.3	Modeloverlevelsestavler. . . . .	49
4.4	Migration. . . . .	55
4.5	Kohorte-komponentmetoden. . . . .	56
4.5.1	Startbefolkningen. . . . .	57
4.5.2	Overlevelsesratematrixen. . . . .	58
4.5.3	Fertilitetsmatrixen. . . . .	60
4.5.4	Fremskrivningsmatrixen. . . . .	62
4.5.5	Et konkret eksempel - Indien. . . . .	63
<b>5</b>	<b>Fremskrivningerne i Verdensbankens model.</b>	<b>67</b>
5.1	Fremskrivning af fertilitet. . . . .	68
5.2	Fremskrivning af dødeligheden. . . . .	71
5.2.1	Fremskrivning af middellevetid. . . . .	72
5.2.2	Fremskrivning af spædbørnsdødeligheden. . . . .	74
5.2.3	Dødelighed forårsaget af AIDS. . . . .	75
5.3	Fremskrivning af migration. . . . .	75
5.4	Afrunding. . . . .	76
<b>6</b>	<b>Analyse af Verdensbankens model.</b>	<b>77</b>
6.1	Om globale befolkningsprognoser. . . . .	78
6.2	Karakteristik af Verdensbankens model. . . . .	80
6.2.1	Formålet med modellen. . . . .	80
6.2.2	Modellens indre relationer. . . . .	81
6.2.3	Modellens relation til virkeligheden. . . . .	82
6.3	Kritik af modellens grundantagelser. . . . .	83
6.3.1	Befolkningsudviklingen betragtes isoleret. . . . .	83

---

6.3.2	Stabilitets problematikken. . . . .	83
6.4	Kritik af tilpasningerne til virkeligheden. . . . .	84
6.4.1	Modellens geografiske udgangspunkt - lande eller regioner. . . . .	84
6.4.2	Kritik af modeloverlevelsestavlerne. . . . .	87
6.4.3	Kritik af modellens migrationsantagelser. . . . .	87
6.4.4	Kritik af modellens AIDS-antagelser. . . . .	88
6.5	Kritik af modellens matematisering. . . . .	88
6.5.1	Kontinuert kontra diskret matematik i modellen. . . . .	89
6.6	Metoder til evaluering af modellens prognoseresultater. . . . .	94
6.6.1	Keyfitz' historiske analyse. . . . .	95
6.6.2	Sammenligning af IIASA, FN og Verdensbankens prognoser. . . . .	96
6.7	Afrunding. . . . .	98
<b>7</b>	<b>Konklusion og perspektivering.</b>	<b>99</b>
<b>8</b>	<b>Litteraturoversigt</b>	<b>105</b>
<b>A</b>	<b>Middellevetid og dødelighed.</b>	<b>111</b>
<b>B</b>	<b>Logitmodeller.</b>	<b>117</b>
<b>C</b>	<b>Tabeller og figurer.</b>	<b>121</b>

---

1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
10	10
11	11
12	12
13	13
14	14
15	15
16	16
17	17
18	18
19	19
20	20
21	21
22	22
23	23
24	24
25	25
26	26
27	27
28	28
29	29
30	30
31	31
32	32
33	33
34	34
35	35
36	36
37	37
38	38
39	39
40	40
41	41
42	42
43	43
44	44
45	45
46	46
47	47
48	48
49	49
50	50
51	51
52	52
53	53
54	54
55	55
56	56
57	57
58	58
59	59
60	60
61	61
62	62
63	63
64	64
65	65
66	66
67	67
68	68
69	69
70	70
71	71
72	72
73	73
74	74
75	75
76	76
77	77
78	78
79	79
80	80
81	81
82	82
83	83
84	84
85	85
86	86
87	87
88	88
89	89
90	90
91	91
92	92
93	93
94	94
95	95
96	96
97	97
98	98
99	99
100	100

# Kapitel 1

## Indledning.

Dette projekt er et såkaldt modelprojekt på matematikuddannelsen på Roskilde Universitetscenter. I følge studieordningen<sup>1</sup> skal projektet behandle

*matematiske modeller opstillet til at repræsentere og bearbejde genstandsområder udenfor matematikken selv. Der kan både være tale om en undersøgelse og vurdering af eksisterende modeller/modeltyper og om selvstændig opstilling og analyse af modeller eller modeldele.*

Matematiske modeller bliver i stigende grad brugt som grundlag for at træffe beslutninger på mange niveauer i vores stadig mere komplekse samfund. Karakteren af modellerne er forskellige, nogle er for eksempel udtryk for simulering af en umiddelbart verificerbar aktuel del af virkelighed, hvorimod andre forsøger at udsige noget meningsfuldt om fremtiden. De sidstnævnte, altså prognoser, bliver i stigende grad anvendt af bl.a. økonomiske og politiske magthavere i forbindelse med en mere langsigtet planlægning af ressourceforbruget.

I dette projekt har vi valgt at se nærmere på en af de modeller, som anvendes til udarbejdelse af prognoser for den globale befolkningsudvikling. Behovet for at kunne planlægge fødevareproduktion, energiforsyning, miljøindsats, by- og infrastrukturudvikling, uddannelses-, sundheds- og socialektoren kræver rimelig sikre skøn over befolkningstallets fremtidige udvikling.

I medierne og den offentlige debat jongleres der ofte rundt med tal for den fremtidige befolkningsudvikling, og politikere tager løbende beslutninger på

---

<sup>1</sup>Studieordning af 1. september 1996, s. 2.

baggrund af disse. Tallene fremstår ofte som indiskutable, og de færreste tænker over, at de er produkter af en matematisk model, som bygger på bestemte forudsætninger, antagelser og teorier, som ikke er entydige, men står til diskussion. Således er der f.eks. flere forskellige bud på teorier om, hvordan befolkningstallet udvikler sig i forskellige samfundsformationer på forskelligt udviklingstrin<sup>2</sup>.

## 1.1 Rids af problemfeltet.

I det enkelte land både fødes der, og dør der jo mennesker hver eneste dag. Det årlige totale antal fødsler og døde, sammen med antallet af henholdsvis indvandrere og udvandrere, ændrer dels det enkelte lands totale befolkningstal, dels befolkningens sammensætning efter både alder og køn. Antallet af fødsler og døde i det enkelte land er samfundsmæssigt bestemt, idet det jo afhænger af det pågældende lands udviklingsstadium og dermed de økonomiske og sociale forhold, - men også krige og dødelige epidemier kan spille en væsentlig rolle.

I en matematisk model, der skal kunne modellere befolkningstallets udvikling, vil de centrale områder derfor være udviklingen i fertiliteten, dødeligheden (herunder børnedødeligheden), levealderen og migrationen. De afgørende elementer i modellen vil dels være antagelserne om den aldersspecifikke fertilitet og den alders- og kønsspecifikke dødelighed og migration, dels metoderne efter hvilke disse størrelser fremskrives, - og disse forhold vil derfor have en afgørende indflydelse på prognoseresultaternes usikkerhed.

Det der blandt andet gør det vanskeligt at konstruere en befolkningsprognosemodel er naturligvis, at den skal kunne sige noget meningsfuldt om en fremtidig udvikling, men også at modellens udsagnskraft jo ikke umiddelbart kan testes empirisk, og at man derfor må nøjes med bl.a. at sammenligne resultaterne med andre tilsvarende modellers prognoser. Substansen i en sådan model vil bygge på analysen af historiske data og mønstre for befolkningsudviklingen, som er fremkommet på baggrund af disse studier.

Man kan sige, at de demografiske modeller både bygger på noget mere velfunderet teori om, hvordan befolknings sammensætningen udvikler sig i forskellige typer af samfund, og så mere usikre hypoteser i forbindelse med fremskrivningen af de ovenfor nævnte størrelser.

---

<sup>2</sup>Her tænker vi bl.a. på Malthus og Marx' udviklingsteorier, men også teorier af nyere dato [Matthiessen, 1984, s. 120-129].

Bag prognosetallene skjuler sig også interessekonflikter. Således vil for eksempel FN, Verdensbanken og de enkelte lande have forskellige økonomiske og politiske interesser i bestemte udviklinger, og dette må også påvirke de grundlæggende antagelser, der ligger som forudsætninger for de forskellige modeller. I forlængelse af dette kunne det også være relevant at undersøge om modellernes fremskrivninger blot er udtryk for subjektive gætteri og ønsketænkning, eller om modellerne er forankret i et mere objektivt teori-, metode- og empirigrundlag.

I starten opererede vi med følgende mulige tilgange til projektet:

- Et metaorienteret projekt hvor en befolkningsprognosemodel blot indgik som en illustration. Vægten lægges altså ikke på en konkret model, men på generelle overvejelser og diskussioner om bl.a. antagelser og tilgange til modelleringen.
- Et komparativt perspektiv kunne være det centrale. Kernen i projektet kunne være en sammenligning mellem FN og Verdensbankens prognosemodeller.
- Kernen i projektet kunne være en kritisk analyse af en enkelt befolkningsprognosemodel, hvor modellen analyseres ved hjælp af begreber om modelleringsprocessen.

Vi har efter nærmere overvejelse valgt at tage udgangspunkt i den tredje mulighed, dels fordi tidshorizonten for projektet fra starten har været et halvt år, dels fordi vi har fundet det mere givende at nå rimeligt rundt i en enkelt model i stedet for at analysere udvalgte dele af flere modeller uden detaljeret kendskab til den helhed, som delene indgår i. Vi har fundet det naturligt at vælge en af de mest udbredte prognosemodeller, hvilket vil sige enten FN's eller Verdensbankens model<sup>3</sup>, og har så valgt Verdensbankens model, dels fordi vi ud fra en vurdering af de to institutioners politiske og økonomiske interesser opfatter Verdensbanken som en mere entydig størrelse, dels fordi vi, med udgangspunkt i det materiale vi har haft lejlighed til at se, finder Verdensbankens model bedst dokumenteret.

Et centralt udgangspunkt for projektet vil naturligvis være den del af virkeligheden udenfor matematikken, der er genstand for modellering, nemlig befolkningsudviklingsproblematikken. Transformationen af virkelighedens kvalitative aspekter til kvantitative størrelser i modellen vil være en væsentlig

---

<sup>3</sup>Jævnfør [Lutz, s. 39].

faktor til forståelsen af modellens funktionsmåde<sup>4</sup>. Derudover vil vi naturligvis analysere modellens struktur og indhold nærmere, og se kritisk på modellens antagelser og grundlag.

## 1.2 Problemformulering.

I forlængelse af ovenstående kan vi nu formulere projektets hovedproblemstilling på følgende måde:

### Hovedproblemstilling:

1. Hvordan fremskriver Verdensbankens befolkningsprognosemodel de enkelte landes totale befolkning og deres aldersmæssige sammensætning?
2. Hvor stor troværdighed kan vi tillægge Verdensbankens befolkningsprognosemodel?

I forsøget på at svare på ovenstående kan der formuleres en række mere konkrete spørgsmål, som vi vil være opmærksomme på, når vi beskæftiger os med Verdensbankens model. Med andre ord nogle spørgsmål der kan være med til at fungere som en slags metodiske ledetråde, uden at vi på forhånd binder os til at svare entydigt på dem alle:

### Spørgsmål til Verdensbankens model:

1. Hvilke muligheder eksisterer der for demokratisk kontrol af modellen og dens anvendelse?
2. Hvilken overordnet teori ligger bag prognoserne?
3. Hvordan er befolkningsprognosemodellen opbygget?
4. Hvilke matematiske elementer indeholder befolkningsprognosemodellen?
5. Hvilke krav stiller modellen til omfanget og karakteren af oplysningerne om de enkelte lande/verdens aktuelle befolknings sammensætning?
6. Hvilke parameterestimationsmetoder anvendes der?

---

<sup>4</sup>I denne sammenhæng vil de interesser, som modelbyggeren repræsenterer/har selvfølgelig også påvirke den måde, som virkeligheden "skæres til" på.

### 1.3 Metodiske overvejelser og afgrænsning.

Som metodiske ledetråde for analysen og kritikken af Verdensbankens model vil vi også bruge nogle af de begreber, som Skovsmose anvender til forståelse af modelleringsprocessen [Skovsmose, 1990] og nogle af de spørgsmål, som Lutz stiller til modellen [Lutz, 1994]. Skovsmose bidrager specielt til en mere bevidst forholden sig til relationerne model-teori, objekt-system-model og model-interesse, og vi får således sat de enkelte delprocesser i modelleringsprocessen på begreb. Lutz sætter fokus på de indledende spørgsmål til modellen, en alternativ tilgang og parametrenes fremtidige opførsel som modellens springende punkt.

Befolkningsprognoser er vel i følge Skovsmose et eksempel på social teknologi [Skovsmose, 1990, s. 118]. Der eksisterer en dominerende teoretisk opfattelse af, hvordan fertilitet og dødelighed udvikler sig i forskellige typer af samfund og produktionsmåder, nemlig den såkaldte transitionsmodel, - et paradigme som der er bred konsensus om, selvom andre opfattelser, som tidligere nævnt, også eksisterer, og derfor kan danne udgangspunkt for en kritik af modellens teoretiske grundlag.

Der er imidlertid, som tidligere nævnt, en begrænsning i forhold til en empirisk testning af modellens resultater, idet det jo handler om prognoser for en fremtidig udvikling. Vi må derfor i denne sammenhæng nøjes med dels at sammenligne resultaterne med resultater fra tilsvarende modeller, dels at teste modellen i forhold til fortidige udviklingsforløb.

I forhold til modellens funktionalitet er der en række antagelser, som er åbenlyst urealistiske. For eksempel antages det, at antallet af nettomigranter i hvert land nærmer sig 0 lineært, hvilket jo ikke umiddelbart virker indlysende. Andre<sup>5</sup> har udviklet teoretiske modeller, i hvilke migrationen spiller en større rolle i fremskrivningerne, men vi tager naturligvis udgangspunkt i den måde, som modellen håndterer problemet på.

### 1.4 Læsevejledning.

Vi har i projektet forudsat, at læseren har en matematisk indsigt svarende til en matematikstuderende midt i studiet, hvorimod vi ikke forudsætter, at læseren har detaljeret viden om demografi.

Projektet består af tre indholdsmæssige områder, som kvalitativt er vægtet nogenlunde ens, nemlig

---

<sup>5</sup>Bl.a. [Keyfitz, 1977].

- en generel diskussion af matematiske modeller,
- en redegørelse for modellens struktur og indhold,
- en analyse og kritik af modellen.

I kapitel 2 diskuterer vi, hvad man forstår ved en matematisk model i almindelighed, og vi gør rede for et par bud på en begrebslig forståelse af modelleringsprocessen. Formålet med kapitlet er derigennem at nå frem til at pege på kritiske punkter i modelleringsprocessen, som så kan fungere som metodiske ledetråde i analysen i kapitel 4, 5 og især 6.

Kapitel 3 er en bred introduktion til befolkningsvækst, som danner baggrund for en forståelse af de forskellige vækstmodel-betragtninger, der ligger i Verdensbankens model. Vi gør først rede for den demografiske transitionsmodel, som er en væsentlig præmis for Verdensbankens model, dernæst præsenteres pointerne i henholdsvis eksponentiel vækst, forsinket demografisk transition og logistisk vækst, for til sidst at give et foreløbigt rids af kohortekomponentmetoden, som anvendes i Verdensbankens model.

I kapitel 4 og 5 gøres der så rede for Verdensbankens model. Først introduceres en række demografiske begreber, dernæst præsenteres beregningsmetoderne på fertilitet, dødelighed og migration, for endelig at demonstrere hvordan de enkelte størrelser fremskrives ved hjælp af den såkaldte fremskrivningsmatrix.

I kapitel 6 forholder vi os så mere analytisk og diskuterende til Verdensbankens model. Efter først at have givet en karakteristik af modellen bruger vi begreberne systemafgrænsning og matematisering fra kapitel 2 til at sætte fokus på svage punkter i modellens grundantagelser, tilpasninger til virkeligheden og matematiske grundlag. Afslutningsvis demonstrerer vi to eksempler på evaluering af en befolkningsmodels prognoseresultater.

Da kapitel 6 indeholder delkonklusioner på de centrale punkter i vores analyse og kritik af modellen, vil kapitel 7 i højere grad have karakter af en perspektivering af nogle af de væsentlige temaer i projektet.

## Kapitel 2

### Om matematiske modeller.

I dette kapitel vil vi beskæftige os med matematiske modeller i almindelighed for at etablere et felt af begreber og viden, som kan bruges til at beskrive og kritisere demografiske modeller og specielt Verdensbankens befolkningsprognosemodel. Først vil vi ganske kort diskutere, hvad vi vil forstå ved en model og i særlig grad en matematisk model. Dernæst vil vi præsentere synsvinkler på matematiske modeller, som har selve modellen og modelleringsprocessen som udgangspunkt og komme ind på forskellige problemfelter i forbindelse med udviklingen og brugen af matematiske modeller, som disse rejser. Herefter følger et afsnit, hvor modelleringsprocessen ses som værende en del af en større arbejds- og undersøgelsesproces. Også her vil vi komme ind på problemer, som udviklingen og brugen af matematiske modeller giver anledning til. Endelig vil kapitlet rumme en opsamling på de væsentlige pointer samt give en række forskellige parametre, som kan bruges til at typologisere matematiske modeller med og i vores tilfælde at karakterisere Verdensbankens model med senere i kapitel 6.

#### 2.1 Hvad er en model?

Matematik finder anvendelse i mange forskellige sammenhænge og ofte af ikke-professionelle matematikere. I mange tilfælde vil dette ske ved at opstille en matematisk model til at løse et problem med ofte med inddragelse af viden indenfor andre fagområder end matematikken. Da matematiske modeller anvendes af mange forskellige interessenter, vil den konkrete proces også være ret forskellig. En typisk udviklingsproces kunne bestå i, at f.eks. en offentlig institution møder et problemkompleks, som man gør sig forestillinger om, at en matematisk model kan løse. Der sættes et projekt i gang, evt. udenfor den

pågældende institution, med henblik på at udvikle en matematisk model, der kan håndtere problemet eller dele af det. På et tidspunkt vil der formentlig være produceret et produkt, ofte i form af et computerprogram. Man vil typisk fortsætte udviklingen af produktet ved f.eks. at inddrage flere facetter af virkeligheden i modellen eller gøre brug af et større statistisk datamateriale.

Vi har hidtil brugt begrebet model uden at præcisere, hvad vi forstår ved en model og i særdeleshed en matematisk model. Hermann og Niss formulerer deres definition af begrebet således:

*En model er en repræsentation (ved hjælp af en eller anden form for midler) af et kompliceret område af virkeligheden, med henblik på at indfange træk ved virkelighedsområdet, som ellers er for vanskelige tilgængelige eller uhåndterlige [Hermann, s. 7].*

Vi finder, at definitionen er lovlig snæver, idet der tales om et kompliceret område af virkeligheden og et vanskeligt og/eller uhåndterligt træk ved virkelighedsområdet. Vi medgiver dog Hermann og Niss, at det er en væsentlig pointe, at matematiske modeller giver overblik over et kompliceret udsnit af virkeligheden, men vil dog ikke afskære os fra at diskutere modeller, som ikke eller kun vanskeligt kan siges at modellere et kompliceret område af virkeligheden. Vores definition vil derfor se således ud:

*En model er en repræsentation i et sprog (f.eks. matematik) af et virkelighedsområde med henblik på at indfange træk ved dette område, som ikke umiddelbart er tilgængelige eller håndterlige.*

Rent konkret kan en model have mange fremtrædelsesformer. Det kan være arkitektens perspektivtegning af det kommende byggeri eller elektronikfirmaets netværksdiagram af et apparat, som firmaet sælger. En matematisk model er selvsagt en model, som, i sit forsøg på at beskrive sider/træk af virkeligheden, gør anvendelse af matematik. Matematik udgør i denne forbindelse, dels et sprog som modellen formuleres i, men også en mængde af metoder og løsninger på standardproblemer, som kan bringes i spil i forhold til det givne modelarbejde.

## 2.2 Modelleringsprocessens struktur.

Ole Skovsmose har opstillet to synsvinkler, udfra hvilke en modelkritik kan formuleres [Skovsmose, 1990, s. 120]. Man kan fokusere på modellens syn-

krone relationer eller modellens diakrone relationer. Hvis man ser på modellens synkrone relationer<sup>1</sup>, er man interesseret i, hvordan modellen relaterer sig til forskellige størrelser, som er væsentlige for modelleringen og dens anvendelse. Hvis man ser på modellens diakrone relationer<sup>2</sup>, er man interesseret i den undersøgelses- og beslutningsproces, som udviklingen og/eller brugen af modellen er en del af. Vi vil her tage udgangspunkt i de synkrone relationer for herigennem at karakterisere modelleringsprocessen.

Modellen må på den ene side relatere sig til den del af virkeligheden, den skal modellere, og på den anden side gøre brug af en teorimængde af en eller anden art. Det er i dette spændingsfelt mellem teori og empiri, at en lang række bidrag til diskussionen om matematiske modeller koncentrerer sig.

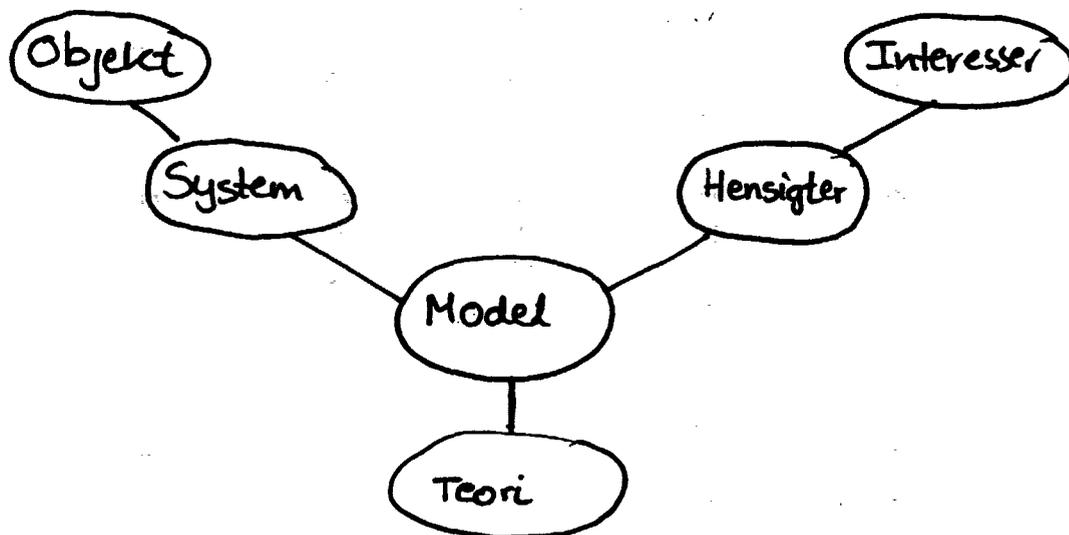
Når et objekt skal modelleres, må man gøre sig klart, hvilke faktorer der er væsentlige, og hvilke der er uvæsentlige. Der sker så at sige en beskæring af virkelighedsfeltet, ud fra hvad der formodes væsentligt i forhold til ens hensigter med modelleringen. Ved denne udvælgelse skabes et begrebsligt system, som kan være bindeled mellem model og objekt [Skovsmose, 1990, s. 120]. Hvis man således ønsker at modellere jordens bevægelse i solsystemet, ville man måske konstruere et system med solen og jorden som punktformige masser i rummet. Man har således set bort fra en række forhold, som forhåbentlig viser sig ikke at have betydning. F.eks. har man valgt at se bort fra de andre planeter, og at solen og jorden ikke er punktformige. I dette eksempel er systemet opsat med baggrund i en teori (den klassiske mekanik). I andre tilfælde er man ikke så heldig, at der eksisterer en teori, som på denne måde hjælper én i systemafgrænsningen. Her må systemafgrænsningen foretages ud fra den måde, som virkeligheden fremstår på. Man må antage, at virkeligheden opfører sig i henhold til visse regler, som ganske vist ikke er dokumenteret eller kendt, men som er nødvendige for at opstille en model, der kan beskrive dens opførelse. Der eksisterer naturligvis en række mellemting herimellem.

Skovsmose har herudover begrebet interesser med blandt de synkrone relationer [Skovsmose, 1990, s. 121]. Det fremgår af det ovenstående, at forholdet mellem objekt og model og i mange tilfælde også mellem model og teori, ikke er noget entydigt. Det implicerer en række valg. Disse valg kan være begrundet i nogle interesser, som modelløren har eller repræsenterer. Hermann og Niss skriver noget tilsvarende:

*For det første foregår enhver modeldannelse, som tidligere antydet, altid med en hensigt, nemlig at indfange træk ved det*

<sup>1</sup>Med synkront hentydes til, at disse relationer eksisterer samtidig. Man afskærer sig således fra et fuldstændigt billede af den tidlige dynamik.

<sup>2</sup>Med diakront hentydes til, at der fokuseres på modelleringsprocessen tidlige dynamik.

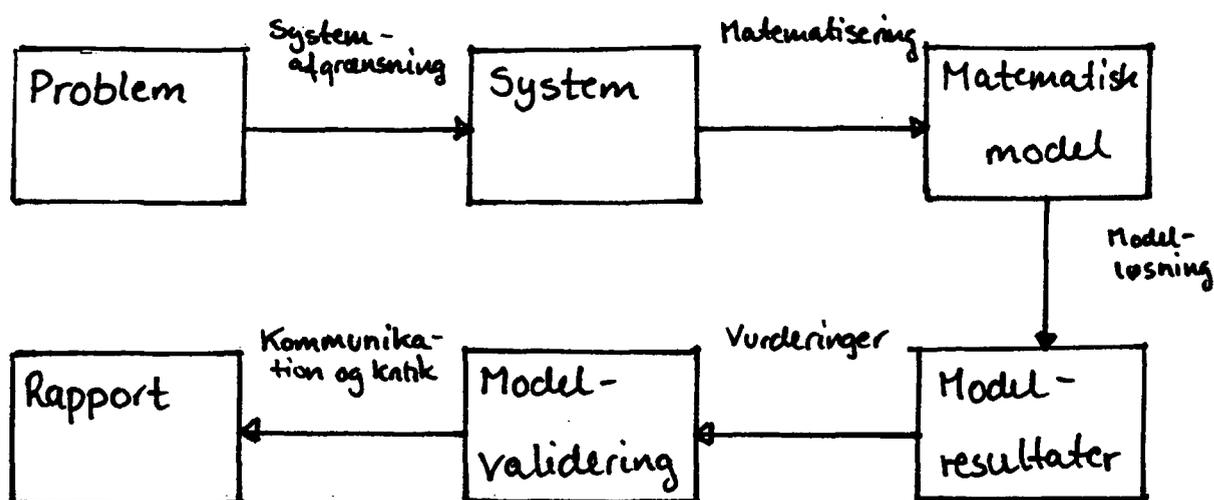


Figur 2.1: Viser modelleringsprocessens synkrone relationer [Skovsmose, 1990, s. 121].

*pågældende virkelighedsområde af betydning for en interesse modelbyggeren/-brugeren har i sagen [Hermann, s. 10].*

Som det ses af citatet, indskyder Hermann og Niss begrebet hensigt mellem interesse og model. Det finder vi rimeligt, fordi begrebet hensigt markerer noget mere bevidstgjort og handlingsorienteret end begrebet interesser. Vores samlede analysemodel for de synkrone relationer ser derfor ud som på figur 2.1.

I modsætning til ovenstående model, der ser modelleringsprocessen i fugleperspektiv, vil vi nu præsentere en model, som i højere grad ser på modelleringsprocessen fra modellørens synsvinkel. Vi vil kalde den fasemodellen, fordi den opdeler modelleringsprocessen i en række delprocesser (faser), som modelløren skal igennem for at konstruere en model. I denne model opfattes et problem som udgangspunkt for hele modelleringsprocessen. Den efterfølgende arbejdsproces består i at opstille et system, som modellen kan udvikles over. Denne delproces kaldes systemafgrænsningen. Som sagt udvikles der nu en matematisk model over dette system. Denne delproces består i at opstille relationer (ligninger), som gælder for systemet, og som er relevante for det, man søger at beskrive. Denne proces kaldes matematisering. Med matematik



Figur 2.2: Viser en opdeling af modelleringsprocessen i adskilte faser.

af forskellig art løses modellens ligninger, og med afsæt i løsningen udledes nogle konkrete resultater af modellen. Herefter skal modellen valideres ved, at resultaterne vurderes, og resultaterne kommunikeres sidenhen ud til andre. En simpel udgave af modellen viser disse elementer som adskilte og efterfulgt af hinanden (hvilket naturligvis er en voldsom forenkling af virkeligheden). Modelleringsprocessen anskues således som en lineær proces startende med et problem og sluttende med en rapportering, hvilket må siges at være en voldsom forenkling af praksis, hvor man f.eks. ofte vil vende tilbage til udgangspunktet for at reformulere problemet. Dette kan naturligvis indbygges i modellen ved at tillade rekursion i modellen eller blot se alle arbejdsprocesser som betinget af hinanden og derved tegne pile mellem alle elementerne i modellen. Vi har dog valgt at gengive modellen i sin rene form, fordi der vil være en vis rækkefølge i processen, selvom det er en voldsom forenkling.

I forhold til den synkrone model nuancerer fasemodellen nogle af de processer, der er involveret i processen. Bl.a. bliver relationen mellem system og model uddybet med begrebet matematisering. Systemet skal så at sige oversættes til matematik.

Skovsmose har beskrevet fire sprogtyper, som er involveret i forskellige faser i modelleringsprocessen [Hansen, 1996, s. 75]. Det første sprog, som finder anvendelse i problemfasen, er det 'naturlige sprog'. Ved systemafgrænsningen foretages en oversættelse til et 'systemsprog'. Her vil anvendes fagtermer,

der er knyttet til den teori, som modellen bygger på. Hvis det er en fysisk mekanisk model, vil begreber som kraft og hastighed formentlig finde anvendelse. Som beskrevet ovenfor foretages nu en oversættelse til 'matematiksprog' (matematisering). For at opnå resultater af modellen må man angive beregningsprocedurer (f.eks. for en computer). Dette formuleres i et 'algoritmisk sprog'. Processen kan således ses som en række oversættelser mellem forskellige sprog. Disse sprog er meget forskellige. Derfor er den oversættelse, som foregår i modelleringsprocessen, ikke entydig. F.eks. er matematiksproget kvantitativt og eksakt, mens dagligsproget er åbent overfor usikkerhed og bedre til at beskrive kvalitative forhold ved objektet.

Det fremgår af det ovenstående, at modelleringsprocessen er behæftet med en række valg, som jævnfør den synkrone model er influeret af de interesser, som modelløren har i sagen. Der er f.eks. foretaget en forsimpning af virkelighedsfeltet/objektet ved systemafgrænsningen. Det er derfor nødvendigt for modelløren, og for den kritiske vurdering af modellen, at afdække, i hvor høj grad modellen afspejler de centrale sider af virkelighedsfeltet/objektet. Man ønsker at undersøge modellens validitet. De krav man stiller til en models validitet afhænger naturligvis af, hvad modellen skal anvendes til. Man kan f.eks. kræve, at modellen mere eller mindre præcist kan gengive objektets bevægelsesmønstre. Eller man kan gøre sig forhåbninger om, at modellen forsyner én med en mere grundlæggende erkendelse om objektets strukturelle opbygning. F.eks. kan en økonomisk model både laves med den hensigt, at den i det væsentlige kan gengive økonomiens opførsel, og således kan bruges til at vurdere konsekvenser af indgreb af forskellige art, men modellen kan også laves med den hensigt at sige noget fundamentalt om nogle væsentlige mekanismer i økonomien.

Evalueringen af modellen kan bevæge sig to veje rundt. Dels kan man ved at lave en række kørsler af modellen, og f.eks. sammenholde dem med nogle måledata, empirisk undersøge, om modellen opfører sig, som man må forvente. Og dels kan man sammenholde modellen og de antagelser, der lægger til grund for den, med den tilgængelige teori.

En tredje side af evalueringen af modellen er at vurdere, hvilken betydning usikkerheden på inputparametrene har på det resultat, modellen kommer med. I nogle tilfælde kan dette gøres teoretisk ved variansanalyse. Men i mange tilfælde vil man lave en række kørsler, hvor man mere eller mindre systematisk undersøger, hvordan modellen opfører sig ved ændringer i inputparametrene.

Men vurderingen af en model kan gå dybere end ovenstående evaluering. Man kan interessere sig for modellens antagelser og de forsimpninger, der er gjort

med andre mål end blot at validere modellen. F.eks. kan en model godt beskrive objektets opførsel korrekt, men gøre det under en række problematiske antagelser. Selv en valideret model er ikke nogen uproblematisk størrelse. I et efterfølgende afsnit vil vi pege på tre problemfelter.

Da nogle modeller er baseret på en stor og accepteret teoribygning, mens andre modeller i det væsentlige er empirisk funderet, vil der være forskel på, hvilken form for validering eller kontrol modeller kan udsættes for. Teoribaserede modeller kan både udsættes for empirisk og teoretisk kontrol, mens empiribaserede modeller kun kan udsættes for empirisk kontrol. Dette er ikke i sig selv noget problem, idet det kun peger på, at modeller så at sige må tillægges forskellig status. Problemet opstår, fordi to modeller, med helt forskellig status på dette punkt, kan se ens ud i den matematiske repræsentation. Det fremgår så at sige ikke af et funktionsudtryk, hvordan det er funderet teoretisk. Eller sagt lidt anderledes: Matematikken skjuler forskelle mellem modellernes teoretiske fundering. Samtidig kan to modeller fremstå ens matematisk men være anvendt på helt forskellige objekter [Jensen, 1989, s. 76].

Jensen peger her på et væsentligt problem, men vi finder som Hansen m.fl. [Hansen, 1996, s. 82], at denne meget kategoriske sondring mellem teoribaserede modeller og empiriske modeller er for simpel til at karakterisere en models teoretiske fundament samt mulighederne for kontrol. Opdelingen i teoribaserede og empirisk baserede modeller har en tendens til kun at være operationel i forhold til modeller indenfor de naturvidenskabelige fag og især fysik. Der er, som Skovsmose forsøger, behov for et mere nuanceret standpunkt. Skovsmose indfører en tredje type teoretisk fundering af en model [Skovsmose, 1990, s. 122]. Han gør opmærksom på, at nogle modeller, f.eks. økonomiske modeller, ganske vist bygger på teorier, men teorien er udvalgt mellem forskellige konkurrerende teorier. Man skal her være opmærksom på, at denne situation også rummer en slags kontrol, fordi man får mulighed for at opdele modellerne, efter hvilken type teori de bygger på.

Selvom en model er evalueret og med rimelig sandsynlighed siger noget 'rigtigt' om virkeligheden, vil systemafgrænsningen alligevel repræsentere nogle valg med hensyn til, hvad modellen skal sige noget om og på hvilken måde. F.eks. kan en befolkningsprognosemodel måske sige noget rimelig præcist om Danmarks befolkningstal de næste 10-20 år. Men alligevel har man jo set bort fra nogle størrelser, som ganske givet kan have indflydelse på prognoseresultatet. F.eks. kan der ligge nogle antagelser bag en sådan model om en vis stabil udvikling med hensyn til migration og økonomi. Problemet består i, at den matematiske repræsentation ikke i sig selv viser, hvilke valg der er truffet.

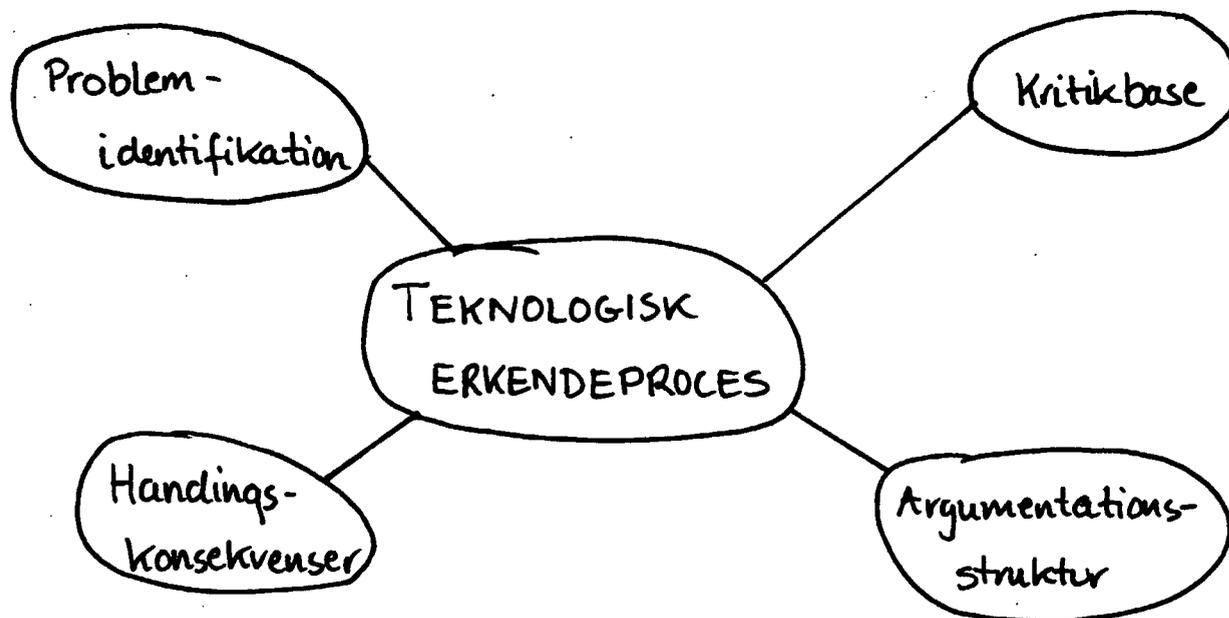
Matematiske modeller bygges som tidligere nævnt med forskellige hensigter, hvilket ikke vil fremgå af den matematiske repræsentation. F.eks. er nogle modeller bygget med den hensigt at udvikle teori og begreber snarere end at frembringe en eksakt beskrivelse af et objekt, mens andre har netop dette formål. En eksponentiel vækstmodel kan f.eks. anvendes som en slags overslag over, hvor galt det kan gå, men dette fremgår ikke umiddelbart af selve differentilligningen og dens løsning. Andre kunne finde på at tillægge en befolkningsprognose lavet på baggrund af denne vækstmodel en mere eksakt fortolkning. D.v.s., at et resultat udarbejdet af en gruppe mennesker med en ganske bestemt hensigt, kan anvendes af en anden gruppe mennesker i en anden sammenhæng med en helt anden hensigt, som måske af forskellige grunde er mere problemfyldt. Der er med Skovsmoses ord sket en ukontrol-label interesseforskydning [Skovsmose, 1990, s. 128].

### 2.3 Modellen som en del af en undersøgelsesproces.

Hvor vi i det ovenstående har set på modelleringsprocessens struktur, vil vi nu betragte modelleringsprocessen som en del af, hvad Skovsmose kalder en teknologisk undersøgelses- og manipulationsproces [Skovsmose, 1990, s. 128]. Dette dækker over en erkendeprocess, som foretages for at opnå en erkendelse, der gør personer i stand til at foreskrive løsninger på et problem og handle derefter.

Skovsmose karakteriserer en sådan proces ved hjælp af fire elementer: Problemidentifikation, kritikbase, argumentationsstruktur og handlingskonsekvenser [Skovsmose, 1990, s. 128]. Udgangspunktet for en sådan undersøgelsesproces er et problem. I modsætning til fasemodellen opfattes problemet her dynamisk, d.v.s. identifikation af problemet indgår i modelleringsprocessen. Kritikbasen er de personer, som har mulighed for at deltage i erkendeprocessen. Erkendeprocessen foregår mellem personer, der accepterer visse regler for argumentation. Dette kaldes erkendeprocessens argumentationsstruktur. Processen sigter mod en eller anden form for teknologisk handling. Eller som Skovsmose udtrykker det:

*Med andre ord karakteriseres processen gennem det man taler om, den gruppe af personer der har mulighed for at diskutere, den argumentative struktur i diskussionen og den type handlingskonsekvenser der kan drages [Skovsmose, 1990, s. 128-29].*



Figur 2.3: Modellens diakrone relationer.

Alle fire elementer vil ændre sig løbende gennem erkendeprocessen og skal således opfattes som dynamiske. Påstanden er nu, at indførelsen af matematik i en sådan erkendeprocess vil påvirke elementerne - i nogle tilfælde drastisk. Matematik har en formaterende effekt på processen. Dette kan være en begrænsning for erkendeprocessen, men kan bl.a. også vise nye handlemuligheder.

Det er oplagt, at indførelsen af matematik ofte vil påvirke kritikbasen meget, fordi matematik er et forudsætningstungt sprog, der ikke mestres af alle. Umiddelbart repræsenterer det vel en begrænsning, fordi det kan udelukke nogle fagfolk, som ikke kan matematik, fra at deltage i processen. På den anden side kan det give nogle andre mulighed for at deltage i processen, fordi der vil ske et skift fra systemsprog til matematiksprog. Et eksempel på kritikbasens følsomhed overfor indførelsen af matematik kunne være brugen af matematiske modeller indenfor økonomien, hvor det vil udelukke nogle økonomer fra at deltage i diskussionen af økonomiske problemstillinger (eller i hvert fald påvirke deres rolle), fordi de ikke forstår modellernes matematiske formuleringer.

Også problemidentifikationen er følsom overfor anvendelsen af matematik. I en modelleringsproces vil problemet løbende blive redefineret i processen, f.eks. ved systemafgrænsningen og ved matematiseringen. Man vil derfor ikke nødvendigvis løse det oprindelige problem. Matematik kan bidrage til, at

væsentlige aspekter ved det oprindelige problem glemmes, men det kan også bidrage til, at nye væsentlige aspekter ved det oprindelige problem opdages eller opprioriteres.

Skovsmose nævner brugen af økonomiske modeller i den politiske beslutningsproces som et eksempel på, hvordan argumentationsstrukturen i den politiske beslutningsproces er følsom overfor brugen af matematiske modeller. Man kan så at sige dække sig bag modellens resultater. Brugen af modellen udgør på denne måde en magtfaktor, fordi man kan ændre på modellens præmisser og derved få den til at understøtte egne synspunkter og kritisere modstanderens. Dette ville selvsagt ikke være muligt, hvis den matematiske model ikke eksisterede [Skovsmose, 1990, s. 131].

Endelig vil indførelsen af matematik kunne påvirke horisonten af handlinger. Demografiske modeller kan være et godt eksempel herpå, idet en fokusering på begreber som fertilitet og dødelighed, uden en kobling til f.eks. den økonomisk udvikling, let kan begrænse horisonten af handlemuligheder til at sætte fødselsbegrænsningsprogrammer i gang fremfor at gribe ind i den økonomiske politik.

## 2.4 Afrunding.

I dette kapitel har vi diskuteret og analyseret matematiske modeller ved at betragte modelleringsprocessen på tre forskellige måder. Vi har set på en fase-model, hvor udviklingsprocessen ses fra modellørens synsvinkel, en synkron model, hvor strukturen i modelleringsprocessen ses i fugleperspektiv samt en diakron model, hvor modellen ses som en del af en teknologisk undersøgelses- og manipulationsproces.

Vi vil i denne afrunding blot præcisere et par af kapitlets hovedproblemstillinger, anwise en måde at typologisere modeller på og pege på elementer til modelkritikken, som skal finde sted i kapitel 6.

### Hovedproblemstillinger.

Vi er kommet ind på to hovedproblemstillinger i forbindelse med matematiske modeller, nemlig:

- Den matematiske repræsentation siger intet om hensigten med modellen, dens teoretiske fundering og de tilskæringer, der er foretaget i

forbindelse med systemafgrænsning m.v.. Dette udgør et problem, da disse faktorer har stor betydning for, hvilken status vi skal tillægge en matematisk model.

- Matematiske modeller har en formaterende virkning på en teknologisk erkende- og manipulationsproces. Dette udgør et problem, fordi mange opfatter matematik som en absolut sandhed.

### En typologisering.

I kapitlet har vi beskrevet forskellige typer modeller. Vi vil nedenfor systematisere dem (og tilføje nogle nye)<sup>3</sup>:

- Opdeling efter *modellens relation til virkeligheden*.
  - Hvilket genstandsfelt beskriver modellen?
  - Hvordan er modellen teoretisk funderet?
- Opdeling efter *interesser/hensigter med modellen*.
  - Ligger der teknologiske eller videnskabelige interesser bag modellen?
  - Skal modellen besvare kvantitative eller kvalitative spørgsmål?
  - Skal modellen bruges til at beskrive et udsnit af virkeligheden, til at forudsige virkelighedens opførsel eller til at foreskrive en bestemt handling i forhold til et problem?
- Opdeling efter *hvilke typer matematik der anvendes i modellen*.

### Kritikelementer.

Afslutningsvis vil vi med afsæt i kapitlet pege på fem områder, hvor en modelkritik kan sætte ind:

- Vurdering og afdækning af de antagelser og idealiseringer som foretages ved systemafgrænsningen.

---

<sup>3</sup>Inspireret af Hansen m.fl. [Hansen, 1996, s. 81-84].

- Vurdering af transformationen af kvalitative størrelser i virkeligheden til kvantitative størrelser i modellen, - altså selve matematiseringsprocessen.
- Evaluering af modellen. Der foretages en vurdering af, om modellen siger noget sandt om det objekt, den søger at beskrive. Det kan blandt andet ske ved at sammenligne resultaterne med empiri af forskellig art, eller ved at modellen vurderes på baggrund af en teori. Modellen vurderes her så at sige på modellens præmisser.
- Afdækning af koblinger mellem antagelser og de interesser og hensigter, som modelløren har eller repræsenterer.
- Afdækning af en models formaterende virkning på en undersøgelsesproces. Denne formaterende virkning kan ske i forhold til problemidentifikationen, argumentationsstrukturen, kritikbasen og mulige handlingskonsekvenser.

De fire første punkter knytter sig til fasemodellen og modelleringsprocessens synkroner relationer. Det sidste punkt knytter sig til modelleringsprocessens diakrone relationer.

Vi vil i særlig grad lægge vægten på de tre første punkter i vores kritik af Verdensbankens model i kapitel 6.

## Kapitel 3

### Befolkningsvækst.

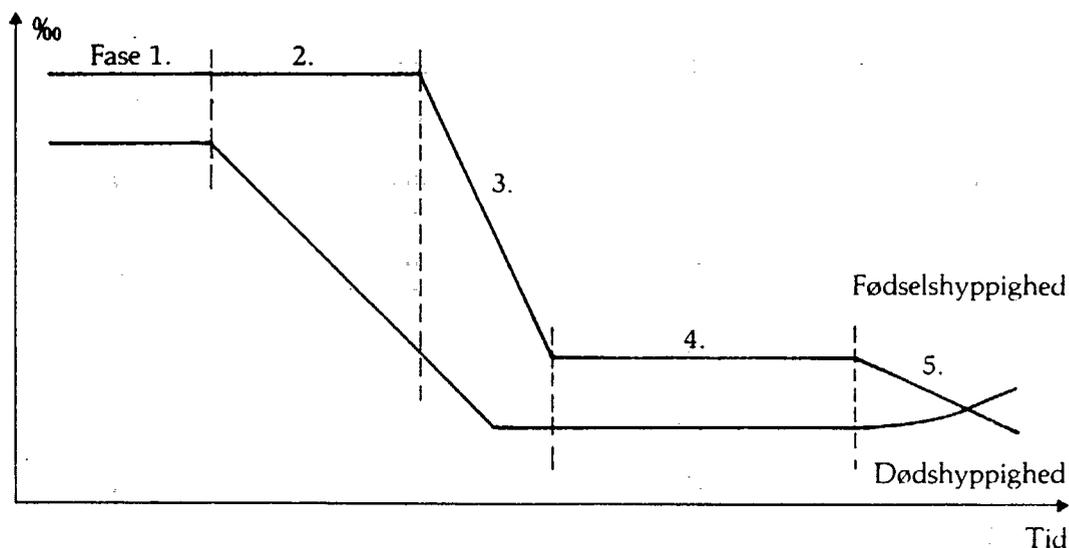
I dette kapitel vil vi give et første indtryk af problemstillinger, der knytter sig til befolkningens vækst. Det vil vi gøre for at kvalificere vores stillingtagen til befolkningsprognosernes forudsætninger, samt for at give en oversigt over mulige faktorer til modellering af den fremtidige befolkningsudvikling. Herudover vil vi præsentere forskellige befolkningsvækstmodeller, herunder kohorte-komponentmetoden, som anvendes i Verdensbankens model.

I den såkaldte befolkningsbalanceligning, også kaldet "demografiens grundlov", er de overordnede elementer, der bestemmer en befolknings vækst, opstillet. Befolkningsbalanceligningen udtrykker nemlig, at:

$$B_t = B_0 + (F - D) + (I - U) \quad (3.1)$$

hvor:

- $B_t$  = befolkningen til tiden  $t$ .
- $B_0$  = befolkningen til tiden 0.
- $F$  = antal fødsler mellem 0 og  $t$ .
- $D$  = antal dødsfald mellem 0 og  $t$ .
- $I$  = antal indvandrede mellem 0 og  $t$ .
- $U$  = antal udvandrede mellem 0 og  $t$ .
- $(F - D)$  kaldes den naturlige befolkningstilvækst.
- $(I - U)$  kaldes vandrings- eller migrationsbalancen.



Figur 3.1: Den demografiske transitionsmodel.

Befolkningsbalanceligningen siger i sig selv intet om, hvordan væksten og dens elementer udvikler sig over tid, endsi­ge om hvorfor. For at kunne udarbejde en prognose er det imidlertid nødvendigt at have nogle teorier om, eller modeller for, hvordan befolkningen udvikler sig, og disse teorier og/eller modeller vil vi nu omtale.

### 3.1 Den demografiske transitionsmodel.

Den idag oftest omtalte demografiske model, er den såkaldte demografiske transitionsmodel, der beskæftiger sig med den historiske udvikling af komponenterne fødsler og dødsfald, og dermed med udviklingen i den naturlige vækstrate i befolkningen.

Den er opdelt i 5 stadier eller faser, og viser en faktisk konstateret udvikling for de fleste i-lande i verden, bl.a. Danmark, se figur 3.1. Den viser overordnet set, hvordan fødsler og dødsfald udvikler sig fra et primitivt selvforsynende agrar­te feudalsamfund i fase I, via nogle overgangs- eller transitionsfaser, nemlig fase II og III, til slutfaserne IV og V, hvor samfundene befinder sig på et højtudviklet industrielt niveau, og hvor erhvervsstrukturen mere og mere går i retning af et såkaldt postindustrielt servicesamfund, med over 70 procent af befolkningen beskæftiget i servicesektoren. I fase I er  $F$  og  $D$  begge høje, væksten er lav, fødsler og dødsfald foregår på "naturens" præmisser. I

fase II falder dødeligheden p.gr.a. forbedringer i fødevareproduktionen, bedre hygiejne, senere p.gr.a. medicinske fremskridt.

I fase II er fødselsniveauet fortsat ligeså højt som i fase I, da man fortsat befinder sig på landbrugsstadiet med stort behov for manuel arbejdskraft, høj spædbørnsdødelighed samt ingen alderssikring, hvorfor en stor børneflokk var en slags social sikring i alderdommen. Det ses, at vækstraten er stigende i fase II, derfor kaldes denne fase også for eksplosionsfasen. Det er i denne fase en stor del af u-landene, specielt de afrikanske, stadig befinder sig.

I fase III falder også fødselshyppigheden, endda stærkere end dødeligheden, hvorfor vækstraten også er for nedadgående. Som årsager hertil nævnes en kombination af urbanisering, industrialisering samt en generel levestandardforbedring, der ikke blot omfatter et højere BNP pr. indbygger, men en bredt forankret forbedring af de sociale, sundheds- og uddannelsesmæssige basisvilkår. Overgangen fra fase II til III ligger i Danmark ca. omkring 1890.

I fase IV er både  $F$  og  $D$  lave, men nu styret af mennesker og menneskelig teknologi. I fase V opleves undertiden et yderligere fertilitetsfald som følge af bl.a. den kønslige ligestilling på arbejdsmarkedet med høj kvindelig erhvervsfrekvens med deraf følgende lav fertilitet til følge. Også brugen af moderne, sikre præventionsmidler i kombination med fri abort virker i samme retning, selv om de kun repræsenterer midler, ikke motiver, til børnebegrænsning. I fase IV og V ses en stigende summarisk dødelighed, der dog primært har rod i, at befolkningen bliver ældre, ikke i at samtlige aldersbetingede dødeligheder stiger. Det modsatte gør sig faktisk gældende, især for børn og ældre, mens kun gruppen mellem 50-70 år har svage stigninger i de aldersbetingede dødeligheder, som følge af såkaldte livsstilsbetingede dødsårsager. Resultatet er, at den naturlige befolkningsvækst i fase V er negativ, men erfaringerne fra Danmark i 1990'erne, hvor et mindre baby-boom har været i gang, lader antyde, at væksten i fase V vil fluktuere omkring nulvækst-niveauet fremover.

Den demografiske transitionsmodel anvendes ofte til at beskrive, hvordan også u-landenes befolkningsudvikling vil blive i fremtiden, nemlig at den med en tidsforskydning vil efterligne udviklingen i i-landene, hvor alle faser som nævnt er blevet gennemløbet. Det er allerede nu værd at bemærke sig, at langt de fleste af de globale befolkningsprognoser som sit forudsætningsmæssige udgangspunkt har, at u-landene også vil gennemgå transitionsmodellens 5 faser indenfor en tidsramme på maksimum 50-75 år. Man kan så spørge, om der er tendenser i den faktiske udvikling i u-landene, der støtter denne opfattelse. Svaret herpå er både ja og nej, især viser udviklingen i større og større dele af Asien en udvikling, hvor landene i fuld fart er på vej ind i fase III og IV. Både som følge af restriktiv familiepolitik, f.eks. i Kina,

men også som følge af et bredt omfattende økonomisk opsving med generelle levevilkårsforbedringer til følge. I det hele taget er u-landene idag en mere inhomogen masse af lande, end man opfattede dem for bare 30 år siden. Der findes stadigvæk ludfattige u-lande, især i Afrika, de såkaldte LDC-lande<sup>1</sup>, men derudover er der både OPEC-lande og NIC-lande, d.v.s. henholdsvis olieeksporterende lande og nyindustrialiserede lande, og det er blandt den sidste gruppe, at man har konstateret en markant nedgang i væksten, svarende til hvad transitionsmodellen udsiger.

Derimod kan man stadig ikke spore nogen nævneværdig ændring i befolkningsvæksten i Afrika, snarere kan man her sige, at en positiv økonomisk og social udvikling i første omgang vil resultere i en stigende befolknings-tilvækst. Landene vil opnå lavere dødelighed men fortsat have høj fertilitet svarende til udviklingen i transitionsmodellens stadium II.

På den anden side er der også markante forskelle i transitionsmodellens forløb, hvis man sammenligner Danmark med f.eks. det afrikanske land Kenya, forskelle der gør, at man oprigtigt kan spørge, om transitionsmodellen, der jo er konstrueret på basis af fertilitets- og dødelighedserfaringerne i i-landene, blot kan overføres til alle u-lande. Vi ser på et eksempel.

I Danmark har fødselshyppigheden i eksplosionsfasen ligget på ca. 32 promille, og væksten har maksimalt været ca. 15 promille omkring år 1890. I Kenya, der idag er i fase II, d.v.s. også i eksplosionsfasen, ligger fødselshyppigheden idag på ca. 45 promille, og væksten er 35 promille, d.v.s. mere end dobbelt så meget, som den var, da Danmark var i den tilsvarende fase. Forskellen består i to ting: Dels et højere fertilitetsniveau grundet en anden familiestruktur (storfamilier modsat kernefamilier i Danmark), dels en dødelighed, der på rekordtid er styrtdykket p.gr.a. tilførsel af medicinske fremskridt fra i-landene, vaccinationmidler og antibiotika m.m.. Det betyder, at væksten i fase II bliver langt større, og i sig selv kan virke udviklingsblokerende og udsætte tidspunktet for indtræden i fase III. Omvendt viser udviklingen på f.eks. Grønland og i Kina og andre østasiatiske lande, at det også er muligt hurtigt at få nedsat fødselshyppigheden ved en målrettet indsats. Mere herom senere.

---

<sup>1</sup>"Least developed countries" er FN's betegnelse for den mindst udviklede gruppe af lande i Verden. Tre kriterier ligger til grund for inddelingen, nemlig lavt BNP pr. indbygger, alfabetiseringsgrad på under 20 procent af befolkningen, og en lav industrialiseringsgrad, hvor industriens andel af BNP er under 10 procent. I 1992 var der 47 LDC-lande i Verden, hvoraf de 31 lå i Afrika.

## 3.2 Eksponentiel vækst.

I den almindelige debat om den globale befolkningsudvikling præsenteres befolkningsvæksten ofte som verdens absolut største problem, og ord som befolkningsekspllosion og "babybomben" ses ofte i forbindelse med beskrivelser af især u-landenes befolkningstilvækst. Vi vil nu gennemgå nogle almindeligt kendte befolkningsvækstmodeller ud fra en matematisk synsvinkel, nemlig først den eksponentielle vækstmodel og derefter den logistiske vækstmodel, og forsøge at relatere dem til ovennævnte visuelle skrækbilleder samt til den demografiske transitionsmodel.

Vi kalder befolkningens vækstrate for  $r(t)$ , og antager at vækstraten er en funktion af tiden  $t$ . Vi kalder desuden befolkningen til tiden  $t = 0$  for  $P_0$  og til tiden  $t = T$  for  $P(T)$ . Vi definerer nu vækstraten  $r(t)$  på følgende måde:

$$r(t) = \frac{1}{P(t)} \frac{dP(t)}{dt}. \quad (3.2)$$

Denne differentiaalligning løses ved separation af de variable, og ved efterfølgende integration får vi:

$$\int_0^T r(t) dt = \int_0^T \frac{dP(t)}{P(t)} \quad (3.3)$$

Tages eksponentialfunktionen af resultatet af denne integration fås:

$$P(T) = P_0 \exp\left[\int_0^T r(t) dt\right] \quad (3.4)$$

Den gennemsnitlige vækstrate  $r_m$ , der giver den samme samlede befolkningsvækst som de varierende vækstrater  $r(t)$ , kan udtrykkes:

$$r_m = \frac{\int_0^T r(t) dt}{T} \quad (3.5)$$

hvorved udtryk (3.4) omdannes til:

$$P(T) = P_0 e^{r_m T} \quad (3.6)$$

Er vækstraten konstant lig  $r$  fås tilsvarende:  $P(T) = P_0 e^{rT}$ . Når der tales om befolkningsekspllosion, er det netop den høje vækstrate i transitionsmodellens fase II, der berettiger dette ordvalg, idet væksten er eksponentielt stigende (og med stor vækstrate), og hvor denne funktions vækstegenskaber blot fremskrives på ubestemt tid.

Lad os v.h.j.a. udtryk (3.6) foretage en sådan simpel fremskrivning: Antag Kenya's befolkningsvækst idag og de næste 30 år regnet fra 1990 lig  $r_m = 0.035$  (d.v.s. 3.5 procent pr.år) og  $P_0 = 24$  mill., da er befolkningen ifølge denne simple eksponentialmodel i 2020 vokset til:  $P(2020) = 24e^{0.035 \cdot 30} = 68.6$  mill.. I Verdensbankens prognose regnes med befolkningstallet 44.4 mill. i Kenya i år 2020, en forskel svarende til 24 mill., - netop landets befolkningstal idag.

Dette eksempel viser, hvor følsomt befolkningsprognoserne er m.h.t. den forudsatte vækstrate. Dette tema vil vi behandle mere generelt matematisk i afsnittet om den forsinkede demografiske transition.

Med dagens viden om befolkningsvækstrater er det dog mere oplagt at betragte vækstudviklingen over tid og bruge en variant, hvor vækstraten på en eller anden måde er en funktion af tiden. Antages f.eks. en lineær vækst, d.v.s. at:  $r(t) = a + bt$ , vil befolkningstallet til tiden  $t$  blive:

$$P(t) = P(0)e^{(at + \frac{bt^2}{2})},$$

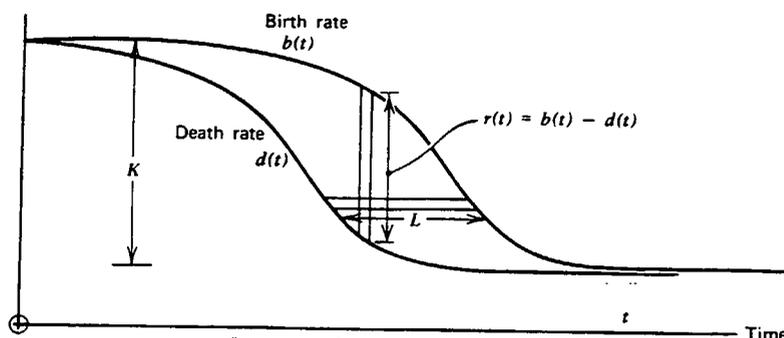
idet udtryk (3.5) er anvendt til integration af vækstraten  $r(t) = a + bt$ . Anvendes de globale befolkningsvækstrater  $r(1965 - 1969) = 0.0206$  og  $r(1985 - 1989) = 0.0177$ , kan konstanterne  $a$  og  $b$  bestemmes<sup>2</sup>. Problemet med eksponentialmodellen er imidlertid, at den ikke tager højde for aldersfordelingen i det pågældende land, og dette kan have afgørende betydning for landets befolkningsudvikling, især er u-landenes befolkninger opladet til vækst på grund af de store unge årgange.

### 3.3 Forsinket demografisk transition.

I dette afsnit vil vi betragte den situation, hvor den demografiske transition af en eller anden grund bliver forsinket, og vi vil så interessere os for, hvilke konsekvenser dette får. Vi tager udgangspunkt i figur 3.2.

Vi forudsætter et forløb over tid, hvor fødsels- og dødshyppighed starter og slutter med at være ens, men at de begge er faldet med  $K$  procent i løbet af

<sup>2</sup>I K.Davis og M.S.Bernstam: Resources, environment and population, 1991, s. 48, anføres, at prognoser, der bygger på denne lineære vækstrateudviklingsmetode, faktisk giver resultater, der med startår  $P(0) = 1987$  kun giver afvigelser på 1.5 procent frem til 2050 i forhold til prognoser fra FN og US kontoret for folketællinger. Vækstraten vil ifølge denne model blive nul i år 2088, og befolkningen i Verden vil da være 13 milliarder, 20 procent højere end Verdensbankens tilsvarende langtidsprognose, der, som vi vil vende tilbage til, bygger på kohorte-komponentmetoden. Når resultaterne ligger så tæt på hinanden, skyldes det, at begge metoder bygger på, at fødsels-, dødeligheds- og vækstudvikling vil følge det mønster, som det har haft i den nære fortid.



Figur 3.2: Stiliseret transitionsforløb fra høj til lav fødsels- og dødsrate.

disse  $T$  år. Der er altså tale om en modificeret udgave af den demografiske transitionsmodel.

Væksten  $r(t) = b(t) - d(t)$  starter og slutter derfor med at være nul. Den samlede vækst i perioden  $T$  må være lig arealet  $A$  mellem kurverne for  $b(t)$  og  $d(t)$ , og findes ved integration:

$$\int_0^T [b(t) - d(t)] dt = \int_0^T r(t) dt = A \quad (3.7)$$

Idet vi nu anvender udtryk (3.4) fra sidste afsnit, ses at:

$$P(T) = P_0 \exp\left[\int_0^T r(t) dt\right] = P_0 \exp(A) = P_0 e^A \quad (3.8)$$

Vi antager nu, som antydnet på figuren, det simple tilfælde, at kurven for  $b(t)$  og kurven for  $d(t)$  netop har samme form fra  $t = 0$  til  $t = T$ , og at fødselskurven halter  $L$  år efter dødskurven. Arealet mellem kurverne, nemlig  $A$ , er da lig  $KL$ , d.v.s. den fælles højdeforskel ( $K$ ) af kurverne ganget med tidsforskellen  $L$ . Dette kan indses ved at opdele intervallet mellem kurverne i vandrette stykker med længde  $L$ . Disse stykker ses at kunne reorganiseres til et rektangel med længde  $L$  og højde  $K$ . Dette betyder, at:

$$P(T) = P_0 e^A = P_0 e^{KL} \quad (3.9)$$

Antages nu at både fødsels- og dødshyppighed falder med f.eks. 2 procent, d.v.s.  $K = 0.02$  med en tidsforskel  $L$  på 30 år, da vil befolkningen vokse:  $e^{0.02 \cdot 30} = 1.82$  gange før nulvækst igen indfinder sig. Er tidsforskellen henholdsvis 60 og 90 år, vil befolkningen vokse 3.32 og 6.05 gange. Forøges "faldhøjden"  $K$  til 3 procent (0.03), hvilket ikke er urealistisk jævnfør de højere fødselsniveauer i f.eks. Kenya, hvor startværdien har været ca. 5 procent

for  $b(t)$ , ja så vil befolkningen vokse med 2.46 gange ( $L = 30$  år), 6.05 gange ( $L = 60$  år), og endelig 14.88 gange såfremt  $L = 90$  år.

Disse udregninger viser, at prognoseresultaterne vil være ekstremt følsomme overfor de vækstforudsætninger, der ligger til grund, og at selv en lille ændring af væksten i et mindre tidsinterval kan forskubbe prognoseresultatet ganske betragteligt.

### 3.4 Logistisk vækst.

Ved at betragte den demografiske transitionsmodel ses, at vækstforløbet vil være eksponentielt i faserne II og III, men at man i fase IV og især V vil være tæt på en nulvækst-situation. Vi kunne nu være interesseret i at finde en matematisk vækstmodel, der i form kunne beskrive vækstforløbet i den demografiske transitionsmodel fra fase I til fase V. Den logistiske funktion synes her at være den mest velegnede. Betragtes klodens begrænsede ressourcemæssige og økologiske bæreevne, er det oplagt, at forsøge at modificere den eksponentielle vækstmodel, således at verdensbefolkningen på et tidspunkt i stedet for fortsat vækst, asymptotisk vil nærme sig en balancetilstand, nedefor kaldet  $a$ . Tages udgangspunkt i ligningen:  $dP(t)/dt = rP(t)$ , hvor  $r$  regnes som konstant, og tilføjes til højresiden nu et ekstra led, nemlig  $1 - [P(t)/a]$ , altså en proportionalitetsfaktor med den egenskab, at den aftager lineært med befolkningens størrelse  $P(t)$ , idet fødegrundlaget vil begrænse væksten, og er lig nul når  $P(t) = a$ , vil den derved fremkomne funktion være en såkaldt logistisk funktion, med netop den efterlyste asymptotiske egenskab:

$$\frac{dP(t)}{dt} = rP(t)\left[1 - \frac{P(t)}{a}\right] \quad (3.10)$$

Det ses, at højresiden bliver nul, når  $P(t) = a$ , så til dette tidspunkt ophører kurven med at vokse. Vi kan omskrive udtrykket således:

$$\left[\frac{1}{P(t)} + \frac{1}{a - P(t)}\right]dP(t) = rdt, \quad (3.11)$$

der ved integration giver:

$$\ln\left[\frac{P(t)}{a - P(t)}\right] = rt + c, \quad (3.12)$$

hvor  $c$  er en konstant. Ændres denne, således at  $t_0 = -c/r$ , opnås, at kurvens midtpunkt bliver netop i  $t_0$ . Den logistiske befolkningsfunktion vil sluttelig antage udseendet:

$$P(t) = \frac{a}{1 + e^{-r(t-t_0)}}. \quad (3.13)$$

Det synes umiddelbart ret indlysende, at den logistiske vækstmodel på globalt plan er den mest realistiske sammenlignet med andre modeller, idet verdensbefolkningen på lang sigt nødvendigvis må nærme sig en øvre grænse afstukket af det globale ressourcegrundlag og miljøets bæreevne<sup>3</sup>.

Der er derimod ingen, der siger, at dette befolkningsoptimum, svarende til størrelsen  $a$  i ligningen ovenfor, skal opnås ud fra en biologisk junglelovsproces, men at det måske, som antydtes af den demografiske transitionsmodel, kan lade sig gøre ved en økonomisk og social udviklingsproces, specielt i de lande der idag har befolkningsekspllosion.

Det skal også bemærkes, at størrelsen  $a$ , selv om den matematisk i udtryk (3.13) er en konstant, i virkelighedens verden ikke skal opfattes som et statistisk optimum, men at den vil kunne ændre sig som følge af f.eks. teknologisk udvikling, således at det vil være rimeligt nytteløst at forsøge at fastlægge en konkret globalt gældende værdi for  $a$ . Dermed ikke være sagt, at dette ikke praktiseres rundt om i Verden, f.eks. mener kineserne, at 700 mill. er en optimal befolkningsstørrelse i Kina. Idag er befolkningen ca. 1200 mill.. Ligeledes kan størrelsen for befolkningsoptimum  $a$  opfattes dels som et maksimalt antal mennesker med en minimal levestandard, d.v.s. et lille forbrug pr. indbygger, dels som et begrænset antal mennesker med et tilsvarende stort forbrug pr. indbygger. I begge tilfælde vil ressourcegrundlaget fastlægge et optimum,  $a$ , for antal mennesker med et givet forbrug, men godtnok et dynamisk optimum.

### 3.5 Rids af kohorte-komponentmetoden.

I stedet for ovennævnte matematisk set ret enkle og forsimplede modeller til at fremskrive befolkningens størrelse med, kan man vælge at udarbejde en dynamisk prognose, hvor fødsler, dødsfald og migrationer kan indgå også som dynamiske parametre, d.v.s. at deres tidsmæssige udvikling i sig selv kan beskrives som en funktion af tiden og andre faktorer.

Den befolkningsprognosemodel, vi vil se nærmere på i dette projekt, er netop af sidstnævnte type og kaldes kohorte-komponentmetoden. Den bygger kort sagt på, at man kender en befolknings køns- og aldersfordeling et givet år, helst på baggrund af en folketælling. Befolkningen deles så op i 5-års aldersgrupper, og hvert prognose-tidsskridt er på netop 5 år. Desuden har man tal for dødeligheden og dermed overlevelseshastigheder,  $s(x)$  for hver aldersgruppe, tal for fødslerne og for vandringerne. På basis af disse tal og startbefolkningen

---

<sup>3</sup>Dette vil vi vende tilbage til i kapitel 6.

kan befolkningen fremskrives 5 år frem i tiden. Efter hver ny femårsperiode kan tallene for overlevelsesseraterne, fødslerne og vandringerne ændres i overensstemmelse med de funktioner, som prognosemagerne nu mener styrer disse parametres udvikling over tid<sup>4</sup>.

Vi præsenterer nu kort den færdige fremskrivningsmatrix, og vil så i kapitel 4 redegøre detaljeret for dens forskellige elementer. Vi gør allerede nu opmærksom på, at vi i første omgang vælger helt at se bort fra vandringskomponenten, da denne i Verdensbankens model spiller en ret ubetydelig rolle, hvilket også vil fremgå af kapitel 5.

Den færdige fremskrivningsmatrix ved anvendelse af kohorte-komponentmetoden ser således ud:

$$\mathbf{K}^{(t+1)} = \{\mathbf{S} + \mathbf{B}\} \mathbf{K}^{(t)} = \mathbf{G}\mathbf{K}^{(t)} \quad (3.14)$$

hvor matricen  $\mathbf{G}$  har følgende udseende:

$$\mathbf{G} = \begin{Bmatrix} 0 & b_1 & b_2 & \cdots & 0 \\ s_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{Bmatrix}$$

Søjlematricen  $\mathbf{K}^{(t)}$  skal så blot påganges matricen  $\mathbf{G}$  efter de sædvanlige regler for matrixmultiplikation. De nævnte matricer står for følgende:

1.  $\mathbf{K}^{(t+1)}$ : Befolkningen køns- og aldersfordelt efter 5 år.
2.  $\mathbf{K}^{(t)}$ : Startbefolkningen køns- og aldersfordelt på 5-års aldersklasser.
3.  $\mathbf{S}$ : Overlevelsersratematricen, med overlevelsesserater  $s_1, s_2, \dots$
4.  $\mathbf{B}$ : Fertilitetsmatricen, med bidragene  $b_1, b_2, \dots$
5.  $\mathbf{G} = \mathbf{S} + \mathbf{B}$ .

Der vil selvfølgelig være en fremskrivningsmatrix for hvert køn. Vi har nu antydnet, hvad det er for komponenter, der indgår i kohorte-komponentmetoden, og i det næste kapitel vil vi mere detaljeret uddybe det demografiske begrebsapparat, der ligger til grund, samt redegøre for de matematiske sammenhænge mellem de indgående størrelser.

<sup>4</sup>I kapitel 5 behandler vi netop disse inputparametre specifikt i relation til Verdensbankens befolkningsprognosemodel.

## 3.6 Afrunding.

Vi har i dette kapitel introduceret de hyppigst omtalte matematiske modeller, der beskriver befolkningens vækst, og kort præsenteret omridset af en speciel type vækstmodel til befolkningsfremskrivning, nemlig kohortekomponentmetoden. Vi har desuden præsenteret den demografiske transitionsmodel, der ikke så meget er en matematisk model men derimod en deskriptiv historisk-empirisk baseret demografimodel. Formålet med kapitlet har været at omtale og perspektivere de dele af befolkningsvækstproblematikken, som vi anser som vigtige, når man skal forholde sig til befolknings spørgsmål i almindelighed, og Verdensbankens befolkningsprognose i særdeleshed.



# Kapitel 4

## Det matematiske grundlag for Verdensbankens model.

I dette kapitel vil vi først gennemgå de grundlæggende demografiske begreber, og dernæst betragte den matematik der binder disse begreber sammen. Formålet hermed er at forstå, hvordan befolkningsprognosemodeller, der bygger på kohorte-komponentmetoden, matematisk set er opbygget. Det betyder, at vi i de kommende afsnit vil gennemgå de størrelser, der indgår som elementer i den fremskrivningsmatrix, vi gav et rids af i afsnit 3.5, og som vi vil vende tilbage til i afsnit 4.5. Dette kapitel vil iøvrigt være af mere generel karakter forstået på den måde, at kapitlet danner baggrund for at forstå fællestræk ved modeller af kohorte-komponenttypen. I kapitel 5 vil vi så se på de specifikke fremskrivninger af fertilitet og dødelighed i Verdensbankens model, der som nævnt er af kohorte-komponenttypen.

### 4.1 Grundlæggende demografiske begreber.

Definition og omtale af demografiske begreber:

1. **Den summariske dødelighed eller dødsraten** er antal døde pr. 1000 indbyggere (pr.år). Dette begreb er stærkt påvirket af befolkningens aldersstruktur, hvorfor det er uanvendeligt til at fortælle noget om f.eks. sundhedsvæsenets tilstand i et land.
2. **Den aldersbetingede dødelighed** er antal døde pr. 1000 personer i en bestemt aldersgruppe pr. år. Dette dødsmaal udtrykker dødsrisikoen i en given aldersgruppe. Et eksempel på en aldersbetinget dødelighed

er **spædbørnsdødeligheden**, der defineres som antal døde spædbørn i alderen (0-1 år) pr. 1000 levendefødte. Dette dødelighedsmål er ofte det mest anvendte, når sundhedsvæsenets tilstand i to lande skal sammenlignes.

3. **Middellevetiden for 0-årige** er et teoretisk mål, der udtrykker, hvor lang tid en nyfødt person kan forventes at leve, såfremt pågældende gennem hele livsforløbet er udsat for de aldersbetingede dødsrater, der var gældende på fødselstidspunktet. Vi vil senere bruge betegnelsen  $e(0)$  for middellevetiden for en 0-årig og generelt  $e(x)$  som værende lig middellevetiden for en  $x$ -årig.
4. **Fødselshyppigheden eller fødselsraten** er antal fødte pr. 1000 indbyggere pr. år. Dette mål er også påvirket af befolkningens aldersstruktur, mere præcist af andelen af befolkningen i fødedygtig (fertil) alder, normalt regnet lig alderen fra 15-49 år.
5. **Den aldersbetingede fødselsrate** er antallet af fødsler pr. 1000 kvinder i en bestemt aldersgruppe pr. år, normalt et- eller femårsaldersklasser. Denne størrelse vil senere få betegnelsen  $F(x)$ .
6. **Den samlede fertilitet** (eng.: "Total fertility rate" = TFR) udtrykker det antal børn, 1000 nyfødte piger eller kvinder i en bestemt generation vil føde under forudsætning af, at ingen af kvinderne dør før efter den reproduktive alder, og at fødslerne sker i overensstemmelse med den aldersbetingede fertilitet i en given periode (1 eller 5 år).
7. **Brutto-reproduktionstallet** er det antal døtre en generation på 1000 kvinder vil føde, under forudsætning af at ingen af kvinderne døde før efter den reproduktive alder, og at fødslerne sker i overensstemmelse med den aldersbetingede fertilitet i en bestemt periode.
8. **Nettoreproduktionstallet** (forkortet NRR) er det antal døtre en generation på 1000 kvinder vil føde, under forudsætning af at fødslerne sker i overensstemmelse med den aldersbetingede fertilitet i en bestemt periode, og der tages hensyn til, at kvinderne er udsat for de aldersbetingede dødsrater, der gælder for kvinder i den fødedygtige alder.

Vi har nu præsenteret den grundlæggende terminologi indenfor demografien, og vi vil herefter gå i dybden med begreberne fertilitet, dødelighed og migration.

## 4.2 Fertilitet.

I det netop gennemgåede afsnit definerede vi de grundlæggende demografiske begreber, som danner baggrund for stillingtagen til demografiske spørgsmål i almindelighed og for opbygning og forståelse af en befolkningsprognose i særdeleshed. Vi var i det afsnit inde på de begreber, der siger noget om fødsler og en befolknings reproduktionsevne på længere sigt. Vi vil vente med "fertilitetens matematik" til afsnit 4.5<sup>1</sup>. I dette afsnit vil vi blot konstatere, at omkring fødsler, fertilitet og reproduktion har følgende interesse for befolkningsprognostikere:

- At kende den samlede fertilitet, TFR.
- At kende fertilitetens fordeling på kvindernes alder, d.v.s. den aldersbetingede fertilitet for kvinder i fertil alder, ca. 15-49 år.
- At kende kvindernes aldersfordeling, d.v.s. råde over køns- og aldersfordelte folketællingsoplysninger.

Desuden skal befolkningsprognostikeren gøre sig tanker om de aldersbetingede fertilitetsraters fremtidige udvikling, herunder specielt hvornår den givne befolkning opnår nettoreproduktionstal 1000, svarende til at befolkningen netop reproducerer sig selv, og hvilken matematisk funktion der bedst beskriver fertilitetens udvikling fra det aktuelle niveau til den fremtidige opnåelse af nettoreproduktionstal 1000.

Vi gør allerede her opmærksom på, at for langt de fleste såkaldt autoritative prognoser gælder, at skønnene over fertilitetsudviklingstendensen har sin rod i den såkaldte demografiske transitionsmodel, der som beskrevet i kapitel 3 kort sagt udsiger, at den fertilitets- og dødelighedsudvikling vi har set i i-landene, også vil være gældende for u-landene, blot tidsforskuet.

Vi viser nu et eksempel på, hvordan nogle af de centrale begreber hænger sammen. I tabel 4.1 vises den aldersbetingede fertilitet. Udfra disse tal kan den samlede fertilitet i Danmark beregnes ved at gange hvert af tallene i tabel 4.1 med 5, da hver aldersgruppe indeholder 5 årgange:

Samlet fertilitet:  $9 \cdot 5 + 69 \cdot 5 + 135 \cdot 5 + 90 \cdot 5 + 30 \cdot 5 + 4 \cdot 5 = 1685$ .

Til brug ved prognoser kan man f.eks. gøre sig antagelser om udviklingen i den samlede fertilitet, og derefter fordele denne ud på de fødedygtige kvinders

---

<sup>1</sup>Dette skyldes, at de fødte også dør, hvorfor fertilitetsmatematik, d.v.s. fertilitetsmatricer (se afsnit 4.5.3) også indeholder elementer af dødelighedsmatematik, som først gennemgås i næste afsnit.

aldersgruppe	Aldersbet. fertilitetskvoient
15-19 år	9
20-24 år	69
25-29 år	135
30-34 år	90
35-39 år	30
40-44 år	4

Tabel 4.1: Aldersbetingede fertilitetskvoienter i Danmark, 1991.

aldre, svarende til hvad der er vist i tabel 4.1 ovenfor. Det vil desuden ofte være sådan, at der erfaringsmæssigt er forskellige aldersbetingede fødselsratemønstre svarende til forskellige niveauer for den samlede fertilitet (TFR). Dette vil ligeledes kunne bruges i prognosesammenhæng, d.v.s. for hver femårsperiode kan der tages højde for en ændret TFR og dens fordeling på alder. Dette princip er iøvrigt konkret anvendt i Verdensbankens prognose, se afsnit 5.1.

Den samlede fertilitet (TFR) bruges tillige med nettoreproduktionstallet (NRR) til at udtrykke, hvorvidt en befolkning kan reproducere sig selv på længere sigt. Er den samlede fertilitet under 2100 (i i-landene)<sup>2</sup>, vil befolkningstallet formindskes på længere sigt. Er det netop 2100, vil befolkningstallet være stabilt, såfremt befolkningens alderstruktur netop svarer til en stabil befolkning, d.v.s. en befolkning, hvis samlede fertilitet har været konstant lig 2100 i ca. 100 år, så fertiliteten ikke påvirkes af unormale fødsels-episoder, såkaldte baby-booms, med deraf følgende unormal aldersstruktur, sammenlignet med den stabile befolkningens aldersstruktur. Omvendt vil unge befolkninger, f.eks u-landenes, være stærkt opladet til vækst selv ved øjeblikkelig opnåelse af samlet fertilitet lig 2600. Dette skyldes, at mellem 40 og 50 procent af befolkningen er mellem 0 og 15 år, og dermed snart vil være i den fødedygtige alder. Det betyder, at selv ved øjeblikkelig opnåelse af samlet fertilitet svarende til erstatningsniveauet, vil befolkningen i sådanne lande fortsætte med at stige, væksten er så at sige uundgåelig. Der vil være tale om en såkaldt potentiel vækst på op til 50 procent i befolkningstallet regnet fra det øjeblik, hvor erstatningsniveauet er nået, og indtil befolkningen ikke mere vokser, d.v.s. er stabil. Denne periode kaldes bremselængden og kan for f.eks. afrikanske lande være mellem 50-75 år.

<sup>2</sup>Tallet 2100 svarer til, at 1000 kvinder netop føder 2000 børn, plus 100, idet der skal tages hensyn til, at nogle af kvinderne dør før udløbet af deres fødedygtige periode. I u-lande vil TFR tilsvarende skulle være ca. 2600, p.gr.a. det højere dødelighedsniveau, for at sikre befolkningens reproduktion på længere sigt.

Ihukommende at den samlede fertilitet for nuværende i disse lande ligger på ca. 5000-6500, altså langt fra erstatningsniveauet, vil vækstpotentialet altså være endnu større, og bremselængden endnu længere end anført overfor. Som det blev nævnt i afsnit 3.3, er det derfor af overordentlig stor betydning for prognoseresultatet, til hvilket årstal man regner med, at TFR er lig med 2100/2600, svarende til at netto-reproduktionstallet, NRR, er lig med 1000. Dette årstal beror selvfølgelig på et skøn, men et forkert skønnet årstal for opnåelse af erstatningsniveauet forskyder altså prognoseresultatet væsentligt. Men et skøn for NRR = 1000 er imidlertid blot et element i vurderingen af fødselshyppighedens udvikling over tid, og dette tal er selvfølgelig i sig selv ikke mere afgørende end den eventuelle matematiske funktion, der generelt måtte beskrive fertilitetens udvikling (læs: fald) over tid.

### 4.3 Dødelighed.

I dette afsnit vil vi se på det andet vigtige element i udarbejdelsen af en befolkningsprognose, nemlig dødeligheden. Som det fremgik af præsentationen af fremskrivningsmatricen i afsnit 3.5, indgår der en række overlevelsesrater i diagonalen i denne matrix; og i dette afsnit vil vi gennemgå, hvordan disse overlevelsesrater fremkommer. Overlevelsesraterne er dog kun et blandt mange begreber, der indgår i omtalen og analysen af en befolknings dødelighedsforhold. Samtlige disse begreber har man samlet i en såkaldt overlevelsestavle (eng: "Life table").

#### Elementerne i overlevelsestavlen.

Vi vil nu give en systematisk gennemgang af overlevelsestavlens elementer, d.v.s. vi vil opskrive og definere elementerne i den rækkefølge, de optræder i overlevelsestavlen (fra venstre mod højre)<sup>3</sup>.

1.  $q(x)$ : Sandsynligheden for at dø indenfor de næste 5 år efter alder  $x$ , d.v.s. den aldersbetingede dødelighed for personer i aldersgruppen  $[x, x + 5[$ .
2.  $l(x)$ : Antal personer i den oprindelige fødselskohorte, der overlever til alder  $x$ .
3.  $d(x)$ : Antal døde i aldersgruppen  $[x, x + 5[$ .

<sup>3</sup>I appendiks C, s. 1 er vist et eksempel på en overlevelsestavle.

4.  $L(x)$ : Gennemlevet tid for personer i aldersgruppen  $[x, x + 5[$ <sup>4</sup>. eller: Antal personer i live fra eksakt alder  $x$  til eksakt alder  $x + 5$ . eller: Det samlede antal personår levet af kohorten fra eksakt alder  $x$  til eksakt alder  $x + 5$ .
5.  $m(x)$ : Er den årlige aldersbetingede dødsrate. Er ca.  $1/5$  af  $q(x)$ .
6.  $s(x)$ : Er andelen af personer i aldersgruppen  $[x, x + 5[$  der overlever til aldersgruppen  $[x + 5, x + 10[$ .
7.  $T(x)$ : Er det forventede samlede antal personår som de personer ( $l(x)$ ), der er overlevende fra fødselskohorten  $l(0)$  ved alder  $x$ , har tilbage at leve i.
8.  $e(x)$ : Middellevetiden for  $x$ -årige.

I gennemgangen og analysen af overlevelsestavlens elementer vil vi dog ikke starte i denne rækkefølge, men af naturlige grunde tage udgangspunkt i størrelsen  $l(0)$ , som er en såkaldt fødselskohorte, d.v.s. en slags fiktiv udgangsbe-folkning, hvis antal normalt fastsættes til 100000. I overlevelsestavlen har vi nu et redskab til at beskrive dødelighedsforløbet fra fødsel til død for denne fiktive udgangsbefolkning. Normalt forudsættes de aldersbetingede dødelig-heder, som kohorten er udsat for, som værende konstante i en sådan over-levelsestavle. Desuden regnes ikke med migration. Derved vil ændringer i kohortens antal kun være et resultat af dødsfald. Nedenfor gennemgås nu trin for trin, hvordan overlevelsestavlens elementer hænger sammen mate-matisk. Vi vil i denne gennemgang desuden betjene os af de grundlæggende demografiske begreber omtalt og defineret i afsnit 4.1.

Vi lader  $l(0)$  betegne fødselskohorten af spædbørn født på et givet tidspunkt. Udsættes denne kohorte nu for de aldersbetingede dødelighedskvotienter, der gælder for en given observerbar befolkning, vil kohorten formindskes i antal, indtil den sidste er død. Disse aldersbetingede dødshyppigheder kan let udreg-nes og måles i lande med en central personregistrering, således at der for hvert år kan komme nye friske tal for dødeligheden, der så vil indgå i f.eks. en prog-nose. I u-lande med ingen eller sparsom personregistrering benyttes såkaldte modeloverlevelsestavler til at skaffe disse dødshyppigheder/overlevelsesserater, se afsnit 4.3.3.

Vi lader tilsvarende  $l(x)$  betegne det forventede antal personer, der overlever til alder  $x$  år. Antallet af dødsfald i kohorten i aldersintervallet fra  $[x, x + dt]$

<sup>4</sup>Udtrykket gennemlevet tid anvendes bl.a. af [Matthiessen, 1970].

vil derfor være  $l(x) - l(x + dt)$ , mens gennemlevet tid af personer i kohorten med alder  $x$  i løbet af tiden  $dt$ , er  $l(x)dt$ . Dette betyder, at størrelsen:

$$f(x) = \frac{l(x) - l(x + dt)}{l(x)dt} \quad (4.1)$$

netop betegner den aldersbetingede dødsrate. Herudfra kan den øjeblikkelige dødelighed  $\mu(x)$  defineres til at være lig grænseværdien for  $f(x)$ , når det betragtede aldersinterval går imod nul, d.v.s.:

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{l(x) - l(x + dt)}{l(x)dt} \Leftrightarrow \\ \mu(x) &= -\frac{1}{l(x)} \left[ \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{l(x + dt) - l(x)}{dt} \right] \Leftrightarrow \\ \mu(x) &= -\frac{1}{l(x)} \frac{d}{dx} l(x) \Leftrightarrow \\ \mu(x) &= -\frac{d}{dx} \ln(l(x)) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Hvis sidstnævnte differentialligning integreres, fås at  $l(x)$  kan skrives:

$$l(x) = l(0) \exp\left[-\int_0^x \mu(t)dt\right], \quad (4.3)$$

hvor  $l(0)$  bliver integrationskonstantens værdi for  $x=0$ . Ikke uventet er antal overlevende til alder  $x$  altså en aftagende funktion af tiden, d.v.s. alderen<sup>5</sup>. Det fremgår også af formlen, at dødeligheden også er en funktion af tiden, og i praksis gælder, at efter alder 10 år vil dødeligheden stige med alderen<sup>6</sup>. Det betyder, at når man i overlevelsestavler opererer med 5-årsintervaller, vil dødeligheden indenfor 5-års aldersklassen ikke præcist være en lineært aftagende funktion af tiden, men normalt være større jo tættere man kommer til højre intervalendepunkt. I de beregninger, der ligger til grund for talmateriale i overlevelsestavlerne, er der imidlertid regnet med, at dødeligheden

<sup>5</sup>Hvilken kurvetype  $l(x)$  beskriver er afhængig af dødelighedsfunktionen  $\mu(t)$ . Her kan man tænke sig flere forskellige funktionstyper: Dødeligheden konstant i alle aldre, at dødeligheden ændres med en konstant i alle aldre, eller dødeligheden ændres proportionalt med det nuværende dødelighedsniveau i alle aldre. Anvendes den sidste variant vil  $l(x)$ -kurven få form som en logistisk kurve. I appendiks A: 'Middellevetid og dødelighed', beskrives disse forskellige varianter af dødelighedsfunktionen og dermed  $l(x)$ -funktionen nøjere rent matematisk.

<sup>6</sup>Se [Keyfitz, 1977, s. 37].

er konstant indenfor en 5-års aldersklasse (se afsnit 4.3.1), og at den befolkning, der er udsat for den pågældende aldersklasses dødelighed, ligeledes er konstant i 5-årsperioden, hvilket jo i forlængelse af ovenstående heller ikke kan være helt korrekt, da der jo vil være færre personer i den sidste halvdel af 5-årsintervallet end i den første halvdel af det<sup>7</sup>. Efter at vi nu har gjort opmærksom på denne problemstilling, vender vi tilbage til de matematiske udredninger.

Sandsynligheden  $p(x)$  for, at en person med alder  $x$  år vil leve yderligere 5 år kan nu ved anvendelse af udtryk (4.3) skrives som<sup>8</sup>:

$$p(x) = \frac{l(x+5)}{l(x)} = \frac{\exp[-\int_0^{x+5} \mu(t)dt]}{\exp[-\int_0^x \mu(t)dt]} = \exp[-\int_x^{x+5} \mu(t)dt] \quad (4.4)$$

Hvis vi med  $q(x)$  betegner komplementet til  $p(x)$ , betyder  $q(x)$  altså sandsynligheden for at dø indenfor de næste 5 år efter alder  $x$  år. Det betyder, at  $q(x)$  kan defineres ved hjælp af udtrykket:

$$q(x) = 1 - p(x) = 1 - \frac{l(x+5)}{l(x)} = \frac{l(x) - l(x+5)}{l(x)} \quad (4.5)$$

Antallet af personer i kohorten som dør i aldersintervallet  $[x, x+dx]$  er  $l(x) - l(x+dx)$  eller  $l(x)\mu(x)dx$ . Hvis man nu integrerer denne mængde af personer over et interval på 5 år, fås faldet i kohorten som følge af dødsfald:

$$d(x) = \int_0^5 l(x+t)\mu(x+t)dt \quad (4.6)$$

Sammenhængen mellem  $l(x)$ ,  $l(x+5)$  og  $d(x)$  ses nu at være:

$$l(x+5) = l(x) - d(x) \quad (4.7)$$

Opsummerende har vi ovenfor nu gennemgået de tre første elementer i overlevelsestavlen, altså  $q(x)$ ,  $l(x)$  og  $d(x)$ . Vi går nu videre med at forklare de fem sidste elementer, og starter med størrelsen  $L(x)$ , som er den gennemlevede tid for personerne i kohorte-aldersgruppen  $[x, x+5[$  i en 5-årsperiode.

Vi har indtil nu brugt betegnelsen  $l(x)$  som værende lig antallet af personer i live til præcis alder  $x$ . Man kan imidlertid også give mængden af  $l(x)$ -værdier en anden fortolkning, nemlig at de repræsenterer en aldersfordeling af

<sup>7</sup>Dette problem med den kontinuerte kontra den diskrete matematik vender vi tilbage til i afsnit 6.5.1.

<sup>8</sup>At det sidste lighedstegn i udtryk (4.4) gælder ses ved brug af indskudsreglen for integraler samt regnereglerne for eksponentialfunktionen.

personer i live på et givet tidspunkt for en stabil befolkning, hvor det samlede årlige antal fødsler nøjagtigt svarer til det samlede årlige antal dødsfald. Hvis denne befolkning ikke påvirkes af migration, kan antallet af personer i live mellem alder  $x$  og alder  $x + dx$  skrives som  $l(x)dx$ , og mellem alder  $x$  og alder  $x + 5$  som<sup>9</sup>:

$$L(x) = \int_0^5 l(x+t)dt, \quad (4.8)$$

Næste udtryk i overlevelsestavlen vi vil omtale, er udtrykket  $s(x)$ , også kaldet overlevelsesraten (eng: Survival rate). Vi definerer andelen af personer i aldersgruppen  $[x, x + 5]$ , der overlever til aldersgruppen  $[x + 5, x + 10]$ , ved udtrykket:

$$s(x) = \frac{L(x+5)}{L(x)} \quad (4.9)$$

Udtrykket  $m(x)$  i overlevelsestavlen kan vi definere v.h.j.a. udtryk (4.6) og (4.8):

$$m(x) = \frac{d(x)}{L(x)} = \frac{\int_0^5 l(x+t)\mu(x+t)dt}{\int_0^5 l(x+t)dt} \quad (4.10)$$

Størrelsen  $m(x)$  er den **årlige** aldersbetingede dødsrate gældende i den kunstigt konstruerede stationære befolknings overlevelsestavle.

Idet vi nu igen vender tilbage til den første fortolkning af  $l(x)$  som en kohorte, da vil  $L(x)$  under disse omstændigheder være lig det samlede antal personår, som kohorten har levet mellem alder  $x$  og alder  $x + 5$ . Det forventede samlede antal personår  $T(x)$ , som de  $l(x)$  overlevende fra fødselskohorten  $l(0)$  har tilbage at leve i, kan nu findes ved integration fra  $x$  til  $\omega$ , hvor  $\omega$  er den højeste alder noget individ kan forventes at opnå:

$$T(x) = \int_0^{\omega-x} l(x+t)dt = L(x) + L(x+5) + \dots \quad (4.11)$$

Man kan nu finde middellevetiden for en  $x$ -årig, d.v.s. det gennemsnitlige antal år en  $x$ -årig har tilbage at leve i, udfra udtrykket:

$$e(x) = \frac{T(x)}{l(x)} \quad (4.12)$$

<sup>9</sup>Dette bygger på teorien for en stabil befolkning (eng. Stable population), se f.eks. [Keyfitz, 1977, s. 78]. Vi minder om, at en befolkning er stabil (eller stationær), såfremt den naturlige vækst, d.v.s. fødte minus døde, er nul og har været det i cirka 100 år, med det resultat, at befolkningens aldersstruktur helt afspejler størrelsen af de stabile fødsels- og dødsrater.

### 4.3.1 Vurdering af de aldersbetingede sandsynligheder for at dø.

Når størrelserne i overlevelsestavlen konkret skal beregnes er det naturligvis nødvendigt at gøre nogle antagelser om især  $l(x)$ . I praksis beregnes  $l(x)$  ikke for en virkelig kohorte, men for en tænkt syntetisk kohorte, hvis dødelighed er defineret ved de aktuelle dødeligheder for den konkrete befolkning.

Som grundlag for beregningen af overlevelsestavlen ligger der en optælling af befolkningen opdelt på 5-årsaldersgrupper samt en opgørelse over, hvor mange døde der er indenfor hver gruppe i de sidste 5 år. I den forbindelse vil vi gøre opmærksom på, at vi har valgt at se på en befolkning lukket for migration.

Vi vil tage udgangspunkt i størrelsen  $m(x)$ , som er den årlige aldersbetingede dødsrate gældende i den syntetiske kohortes overlevelsestavle. Denne dødsrate bør ikke forveksles med den tilsvarende aldersbetingede dødsrate i en given konkret befolkning, hvor følgende udtryk vil anvendes:

$$M(x) = \frac{D(x)}{K(x)} = \frac{\int_0^5 k(x+t)\mu(x+t)dt}{\int_0^5 k(x+t)dt} \quad (4.13)$$

hvor  $D(x)$  er det observerede årlige antal dødsfald i aldersgruppen  $[x, x+5[$ , og  $K(x)$  angiver den gennemsnitlige befolkning i denne 5-års aldersgruppe i løbet af det år, hvor befolkningsgruppen var udsat for den pågældende dødsrisiko. Normalt bruges befolkningstallet midt i året, d.v.s. den 30.6, som en tilnærmelse til  $K(x)$ . Størrelsen  $k(x)$  i udtryk (4.13) er overlevelsesfunktionen for den konkret observerede befolkning, svarende til størrelsen  $l(x)$  for den syntetiske kohortebefolkning. Bemærk at forskellen mellem  $m(x)$  og  $M(x)$  altså er den, at  $m(x)$  er den årlige aldersbetingede dødelighed, der gælder for den syntetiske kohorte-befolkning fra overlevelsestavlen, mens  $M(x)$  er den tilsvarende værdi, men for en konkret observeret befolkning et givet år<sup>10</sup>. Det er derfor nødvendigt med nogle antagelser om forholdet mellem  $m(x)$  og  $M(x)$ .

Hvis man betragter hver af de  $d(x)$  personer i kohorten, som dør i de næste fem år, har de levet  $x$  hele år plus en del af den sidste 5-årsperiode. Idet vi med  $a(x)$  betegner det gennemsnitlige antal år levet i 5-års intervallet af de personer, der ender med også at dø i dette 5-års interval, da er det muligt at opdele det samlede antal personår, som kohorten lever i aldersintervallet,

<sup>10</sup>Også [Keyfitz, 1977, s. 35] gør opmærksom på denne skellen mellem  $m(x)$  og  $M(x)$ , og at  $M(x) < m(x)$  for voksende befolkninger for aldre større end cirka 10 år.

i antal år levet af dem, der også overlever dette interval, og antal år levet af dem, der dør i aldersintervallet, og følgende må så gælde:

$$L(x) = 5l(x + 5) + a(x)d(x) \quad (4.14)$$

Heraf følger, at:

$$a(x) = \frac{L(x) - 5l(x + 5)}{d(x)} \quad (4.15)$$

Anvendes nu udtryk (4.5), udtryk (4.7) og (4.10) fås efter en del mellemregninger udtrykket:

$$q(x) = \frac{5m(x)}{1 + [5 - a(x)]m(x)} \quad (4.16)$$

Problemet med at vurdere  $q(x)$  drejer sig derfor om at finde værdier for  $a(x)$  og  $m(x)$ , for  $x = 0, 5, 10, \dots$ . Normalt antages det som nævnt, at  $m(x)$  er lig den observerede dødsrate  $M(x)$ , og at dødsfaldene indenfor et interval er ligeligt fordelt over intervallet, både m.h.t. alder og tid, så at  $a(x)$  kan sættes til  $5/2$ . Derfor fås udtrykket:

$$q(x) = \frac{5M(x)}{1 + \frac{5}{2}M(x)} \quad (4.17)$$

Man bør her bemærke, at dette medfører en lineær approximation, hvad angår integrationen af  $l(x)$  over 5-års intervallet i udtryk (4.8).

Det er vigtigt her at gøre opmærksom på, at udgangspunktet for konstruktionen af overlevelsestavlens elementer netop er størrelsen  $q(x)$ , som den er vurderet og fremstår i udtryk (4.17), altså ud fra de **observerede** aldersbetingede dødsrater. Mere herom i det eksempel på en overlevelsestavle som gennemgås i afsnit 4.3.2.

Afslutningsvis vil vi opsummere, at vi nu matematisk har fået defineret de størrelser, der indgår i en overlevelsestavle, og vi gentager for overskuelighedens skyld tavlens elementer nedenfor:

1.  $q(x)$ : Sandsynligheden for at dø indenfor de næste 5 år efter alder  $x$ , d.v.s. den aldersbetingede dødelighed for personer i aldersgruppen  $[x, x + 5[$ .
2.  $l(x)$ : Antal personer i den oprindelige fødselskohorte, der overlever til alder  $x$ .
3.  $d(x)$ : Antal døde i aldersgruppen  $[x, x + 5[$ .

4.  $L(x)$ : Gennemlevet tid for personer i aldersgruppen  $[x, x + 5[$ , eller: Antal personer i live fra eksakt alder  $x$  til eksakt alder  $x + 5$ , eller: Det samlede antal personår levet af kohorten fra eksakt alder  $x$  til eksakt alder  $x + 5$ .
5.  $m(x)$ : Er den årlige aldersbetingede dødsrate. Er ca.  $1/5$  af  $q(x)$ .
6.  $s(x)$ : Er andelen af personer i aldersgruppen  $[x, x + 5[$  der overlever til aldersgruppen  $[x + 5, x + 10[$ .
7.  $T(x)$ : Er det forventede samlede antal personår, som de personer ( $l(x)$ ), der er overlevende fra fødselskohorten  $l(0)$  ved alder  $x$ , har tilbage at leve i.
8.  $e(x)$ : Middellevetiden for  $x$ -årige.

### 4.3.2 Overlevelsestavlen - et konkret eksempel.

Vi gennemgår nu et eksempel på en overlevelsestavle, og på hvordan den læses<sup>11</sup>. Som nævnt er udgangspunktet for konstruktionen af overlevelsestavlens talstørrelser  $q(x)$ -værdierne fundet ud fra udtryk (4.16), samt en udgangskohorte  $l(0)$  på 100000 personer. Med afsæt heri kan resten af tabellens positioner beregnes under anvendelse af de i forrige afsnit fastlagte matematiske sammenhænge mellem de i overlevelsestavlen indgående begreber. Den første af disse sammenhænge er:  $q(x) = d(x)/l(x)$ . Ønsker vi derfor at finde f.eks.  $d(10)$ , anvendes at:  $d(10) = l(10)q(10)$ , og vi får:  $d(10) = 97678 \cdot (0.001508) = 147$ , hvilket altså er antal døde mellem alder 10 og alder 15 år. Man kan nu finde:  $l(15) = l(10) - d(10) = 97678 - 147 = 97531$ . For at finde  $L(x)$ , omskriver vi udtryk (4.14) således:

$$L(x) = 5l(x + 5) + a(x)d(x) =$$

$$5l(x + 5) + 5/2l(x)q(x) = 5l(x + 5) + 5/2l(x)((l(x) - l(x + 5))/l(x)) =$$

$$5l(x + 5) + 5/2l(x) - 5/2l(x + 5) = 5/2(l(x + 5) + l(x)).$$

Vi har her benyttet udtrykkene (4.5) og (4.7), samt at  $a(x) = 5/2$ . Anvendes denne omskrivning af  $L(x)$ , d.v.s. at:

$$L(x) = \frac{5}{2}[l(x + 5) + l(x)], \quad (4.18)$$

<sup>11</sup>Se appendiks C, s. 1.

når vi frem til, at:

$$L(10) = 5/2[l(10) + l(15)] = 5/2[97678 + 97531] = 488023$$

Man kan også finde  $L(10)$  ved følgende resonnement: Hvis vi antager, at de 147 dødsfald fra alder 10 til alder 15 er fordelt ligeligt på 5-årsintervallet, vil de 147 døde i gennemsnit have levet i  $147 \cdot 5/2 = 368$  personår, og de 97531 personer, der overlevede hele 5 årsperioden, vil ialt have levet  $5 \cdot 97531$  personår. Alt i alt ville det samlede antal personår levet af denne kohorte i 5 årsperioden være lig:

$$L(10) = (147) \frac{5}{2} + 57531 = 488023$$

De øvrige udtryk kan nu videre beregnes ved hjælp af de fundne udtryk, f.eks. kan middellevetiden for 75-årige findes ved at udregne:

$$T(75) = L(75) + L(80) + L(85+) = 618000,$$

og dermed kan man udregne middellevetiden for 75-årige:

$$e(75) = \frac{T(75)}{l(75)} = \frac{618000}{60243} = 10.26 \text{ år}$$

### 4.3.3 Modeloverlevelsestavler.

I dette afsnit vil vi beskrive, hvad en modeloverlevelsestavle er. Som navnet antyder, er der tale om en konstrueret overlevelsestavle, og vi vil nedenfor gennemgå de principper, der ligger til grund for denne konstruktion. Der er mindst to situationer, hvor modeloverlevelsestavlerne er nyttige for ikke at sige uundværlige.

For det første er det nødvendigt, når man udarbejder prognoser, at have input for overlevelseshastigheder både 5, 10, 15, 20 år o.s.v. frem i tiden. Sådanne fremtidsdata er man selvsagt ikke i besiddelse af på prognosetidspunktet, så derfor må man ty til teoretiske modeller for dødelighedens udvikling i fremtiden, og derudfra opnå de til prognosen nødvendige tal for overlevelseshastighederne. Det er her modeloverlevelsestavlerne kommer ind i billedet.

Den anden situation opstår, når man skal vurdere et lands dødelighedsforhold ud fra empiriske data, der er ufuldstændige eller mangelfulde, og hvor meningen er, at disse data gerne skulle være helt komplette med henblik på at lave prognoser for landets befolkningsudvikling. I mange udviklingslande er

datamaterialet spredt, både hvad angår antallet af folketællinger samt tidsintervallet imellem dem. Ofte er man også henvist til spørgeskemaundersøgelser af udvalgte aldersgruppers demografiske karakteristika. For at råde bod på denne statistiske mangelfuldhed kan man ved hjælp af modeloverlevelsestavlerne gøre det ufuldstændige kildemateriale "komplet", så det kan anvendes bl.a. i prognosesammenhæng.

Vi gennemgår nu den såkaldte Princeton-model<sup>12</sup>. Coale og Demeny tog udgangspunkt i empiriske data, nemlig 326 faktisk eksisterende overlevelsestavler for begge køn fra en række lande, dog især fra Europa (206 stk.), og tidsmæssigt lokaliseret med 23 tavler fra før 1870, 90 fra perioden 1871-1918, 99 fra 1919-1945, og 114 fra perioden efter 1945. Disse 326 tavler var udvalgt fra et langt større datamateriale. For at komme igennem "nåleøjet" blev der stillet visse krav til datamaterialets fremkomst: a) Det skulle bygge på løbende registreringer fra civile eller kirkelige myndigheder (i Danmark f.eks. kirkebogsregistreringer af fødsler og dødsfald, med angivelse af den døde alder og fødesogn fra 1845), og b) Det skulle desuden bygge på folketællinger foretaget på et bestemt tidspunkt. Dette udelukkede mange overlevelsestavler fra u-lande, hvor basis for overlevelsestavler f.eks. har været to folketællinger indenfor et ikke for stort tidsinterval. Selv om det er muligt at udregne overlevelseshastigheder ud fra disse oplysninger, viser undersøgelser af aldersfordelingen af befolkningerne ved sådanne folketællinger, at det har været nødvendigt med drastiske tilpasninger, før realistiske overlevelseshastigheder har kunne udregnes, hvorfor man kun kan fæste lidt tiltro til overlevelseshastighedernes præcise form i sådanne tilfælde [Coale, 1983, s. 4]. Overlevelsestavler af denne type blev således forkastet, da de ikke kun byggede på rådata, men på efterfølgende tilpasninger. Desuden forkastedes tavler der skønnedes upræcise p.gr.a. krig eller epidemier.

Herefter var fremgangsmåden i konstruktionen af modeloverlevelsestavlerne følgende: Alle  $q(x)$ 'erne fra samtlige 326 overlevelsestavler blev for hver aldersgruppe rangordnet i grupper rækkende fra de laveste til de højeste dødsrater. For hver aldersgruppe havde man nu en rangordnet, grupperet organisering af dødsraterne fra alle 326 empirisk baserede tavler. Foreløbige modeltavler konstrueredes nu ved at samle dødsrater med samme rang i adskilte grupper for alle aldersklasser. Derefter undersøgte afvigelsen mellem de empiriske overlevelsestavlers aldersbetingede dødeligheder og de tilsvarende for de konstruerede foreløbige tavler.

Mønsteret i afvigelserne blev målt som forskellen mellem  $q(x)$  for den empiri-

<sup>12</sup>Udviklet af Coale og Demeny, første gang i 1966 og senere revideret i 1983. Det skal dog nævnes, at FN allerede i 1955 havde konstrueret et sæt modeloverlevelsestavler.

ske tavle og modeltavlen, med samme generelle dødelighedsniveau. Valget af sammenlignings-modeltavle er foretaget på den måde, at man først noterede middellevetiden for nul-årige i modeltavlerne med de samme  $q(x)$ -værdier som den givne empiriske tavle, for  $x = 0, 1, 5, 10, \dots, 75$ . Derefter valgtes den modeltavle, der lå tættest på et gennemsnit af middellevetiderne  $e(0)$  for nul-årige fra disse modeltavler. Dette blev så sammenlignings-modeltavlen.

Afvigelsen  $q(x) - q(x)_{model}$  blev nu afsat i et koordinatsystem med alderen ud af  $x$ -aksen og afvigelsen som funktion af alderen ud af  $y$ -aksen. Hvis afvigelsen er 0, svarer det altså til, at  $q(x) - q(x)_{model}$  er et punkt på  $x$ -aksen.

For alle 326 overlevelsestavler blev der konstrueret sådanne "afvigelsesgrafer"<sup>13</sup>, og herudfra kunne der drages følgende konklusioner:

1. Nogle overlevelsestavler afveg meget fra modeltavlens mønster, især for aldre under 10 år og over 60 år.
2. De største afvigelser fandtes i tavler, hvor kvaliteten i datamaterialet var tvivlsomt, d.v.s. tavler fra f.eks. Vesteuropa fra før 1850, fra Rusland 1897 og 1926, samt tavler fra underudviklede lande i Asien, Latinamerika og Afrika. I de fleste af disse tavler er aldersrapporteringen i folketællingerne upræcis og dødsregistreringen mangelfuld, især hvad angår børnedødeligheden.
3. I de tilfælde, hvor datamaterialet blev anset for at være præcist, er afvigelserne normalt moderate. Et sådant relativt "fejlfrit" datamateriale findes for visse europæiske lande efter 1870, og fra 1900-tallet fra Canada, USA, Australien og New Zealand. Desværre er disse lande kulturelt og på anden måde stærkt beslægtede, og repræsenterer derfor et snævert udvalg af dødelighedsmønstre.

Der var to afvigelsesmønstre i overlevelsestavlerne for den sidste gruppe af lande med små afvigelser, der var basis for at konstruere fire familier af overlevelsestavler, nemlig: a) Den kendsgerning, at afvigelsesmønstrene ofte er ens for overlevelsestavler, der udtrykker dødeligheden for den samme befolkning men til forskellige tidspunkter, samt b) Den kendsgerning, at adskillige grupper af geografisk forbundne folkeslag udviste samme afvigelsesmønstre.

På basis af en undersøgelse af afvigelsesmønstrene i de 326 overlevelsestavler for hvert køn, blev der udarbejdet korrelationsmatricer for forskellige grupper af overlevelsestavler, korrelationer mellem 19 variable, nemlig:  $\log(q(x))$  for

<sup>13</sup>Se appendiks C, s. 2, hvor nogle af disse "afvigelsesgrafer" er vist.

forskellige aldre,  $x = 0, 1, 5, 10, \dots, 75$ , og middellevetiden for 0-årige og 10-årige.

For hvert køn blev der eksperimenteret med 9 forskellige sæt af korrelationer for følgende tavler:

1. Tavler fra før 1870.
2. Tavler fra Rusland og visse Balkan-områder.
3. Tavler fra udvalgte Centraleuropæiske områder.
4. Tavler for Skandinaviske lande.
5. Tavler fra Spanien, Portugal og Syditalien.
6. Tavler fra Schweiz.
7. Tavler fra lande med pålidelige data der ikke er inkluderet i gruppe 3, 4, 5 og 6.
8. Tavler der afspejler dødeligheden, når der findes et stort antal tuberkuloseramte.
9. Nutidige tavler baseret på ret upræcise data fra især Asien, Afrika og Latinamerika.

Af de nævnte 9 områder blev der konstrueret 4 regioner, med hver deres karakteristiske sæt af overlevelsestavler. De 5 andre blev kasseret. De 4 regioner er:

1. North: Denne regions modeloverlevelsestavler er baseret på ni tavler fra Norge, Sverige og Island. De er karakteriseret ved relativ lav spædbørnsdødelighed og ældredødelighed, men af høj voksen dødelighed forårsaget af et usædvanligt højt antal tuberkulose tilfælde.
2. South: Denne region er baseret på 23 tavler fra områder ved Middelhavet: Portugal, Spanien, Sicilien og Syditalien. Der er høj dødelighed under 5 år, især blandt nyfødte, lav voksendødelighed og høj ældredødelighed.
3. East: Dette sæt modeller er dannet ud fra 31 tavler især fra Centraleuropæiske områder, bl.a Østrig, Tyskland, Bayern, Prøjsen, Nord-Italien, Polen og Tjekkoslaviet. Her er kendetegnene høj spædbørnsdødelighed og høj ældredødelighed, i forhold til børne- og voksendødelighed.

4. West: Denne region regnes for at beskrive en eller anden form for gennemsnitsdødelighedsmønster, og er derfor langt den mest benyttede modeltavle. Modellerne er baseret på en stor "rodebunke" bestående af 130 tavler, der anses for præcise, hvad angår data, men som ikke passer ind i de 3 andre grupper. Tavlerne til denne gruppe stammer bl.a. fra: Holland, Finland, Frankrig, England, Japan, Irland, Israel, Australien, Canada og Sydafrika. Iøvrigt er også 11 tavler fra Danmark fra 1895-1955 basis for denne regions modeltavler.

Opsummerende vil vi slutte dette afsnit af med at konstatere, at modeltavlerne kort fortalt er bygget op på basis af regressionsanalyser. For hver aldersgruppe, køn, og region blev der udregnet en regression af formen:

$$q(x) = a + be(10) \quad (4.19)$$

hvorefter koefficienterne efterfølgende blev brugt til at bestemme modeltavlenes dødelighedsrater, d.v.s.  $q(x)$ 'erne. Middellevetiden for 10-årige blev anvendt som den uafhængige variable, da den blev betragtet som værende en god indikator for det generelle dødelighedsniveau, og relativt upåvirket af dødeligheden i andre aldersgrupper. For hver region var slutresultatet et sæt bestående af 24 modeller for hver modelregion og hvert køn, d.v.s. ialt 192 tabeller. Ved revisionen i 1983 blev den øvre aldersgrænse hævet fra 80 til 100 år, og middellevetiden for kvinder hævet fra 77.5 år til 80 år. Således blev der endnu et såkaldt niveau knyttet til hver model, ialt altså 25 niveauer pr. tabel.

#### Modeltavlernes udseende og anvendelse.

Vi vil i dette afsnit kort beskrive opbygningen og anvendelsen af ovennævnte modeloverlevelsestavler, der, som det senere vil fremgå, er af afgørende betydning som leverandør af overlevelsesrate-input, når der udarbejdes befolkningsprognoser. Modeltavlerne præsenteres som nævnt i Coale og Demenys bog: "Regional Model Life Tables and Stable Populations" med 25 niveauer for hvert køn og hver modelregion, altså henholdsvis region North, South, East og West. Et niveau svarer til en given middellevetid for nul-årige. Niveau nr. 1 har middellevetid 20 år for nul-årige, for niveau nr. 25 er  $e(0)$  lig 80 år for kvinder. Mellem hvert niveau er middellevetidsforskellen 2,5 år (for kvinder)<sup>14</sup>.

<sup>14</sup>I appendiks C, s. 3-4 er medtaget henholdsvis niveau 12 og 25 for region West modellen, som vi anvender i kapitel 6, samt niveau 15 og 16, for model West, som der henvises til i prognosen for Indien, 1981, se afsnit 4.5.5.

alder $x$	Procent overlevende til alder $x$
1 uge	94.1
1 måned	90.8
1 år	76.1
2 år	64.3
3 år	56.5
4 år	52.3
5 år	50.1

Tabel 4.2: Overlevelsesserater for børn mellem 0 og 5 år i Gambia.

I tabellen for et givet niveau viser søjlen med  $P(x)$ -værdier overlevelsesseraterne for de enkelte aldersklasser, og disse værdier bruges ved udarbejdelse af befolkningsprognoser. I i-lande vil disse modeldata først indgå efter den første femårsperiode, i u-lande er de ofte inputdata lige fra starten af prognoseperioden. Iøvrigt bruges disse modeltavler hyppigt, når datamaterialet fra et givet land er mangelfuldt, hvilket kan illustreres ved følgende konkrete eksempel:

I landsbyen Keneba i Gambia er der siden 1950 foretaget præcise registreringer af fødte og døde i et samarbejde mellem Gambias regering og British Medical Research Council. I alt observeredes 865 børn. Overlevelsesseraterne fremgår af tabel 4.2.

Ud fra disse begrænsede data kan man så anvende Coale og Demenys tabeller til f.eks. at vurdere middellevetiden for henholdsvis 0- og 5-årige i Keneba.

Ved at sammenholde de empirisk målte værdier med modeltavlerne, findes South-modellen at indeholde de mest oplagte kandidater til det bedste fit, nemlig niveau 3 (mænd), niveau 4 (mænd) og niveau 3 (kvinder). Blandt disse kandidater afgøres det bedste fit som værende det, der giver den mindste kvadratiske forskel mellem målte værdier og modelværdier. Resultaterne er vist i tabel 4.3.

Kvadreres differenserne og summeres de, fås følgende billede:

- South, mænd, level 3: 47413.156
- South, mænd, level 4: 36629.358
- South, kvinder, level 3: 16622.591

Heraf ses, at differenserne i anden potens er mindst for model South, niveau 3, for kvinder, så dette er den modeltavle, der fitter de observerede værdier

Age	Obs.	South level 3(m)		South level 4(m)		South level 3(kv.)	
x	l(x)	l(x)	Diff.	l(x)	Diff.	l(x)	Diff.
1	76100	71056	-5044	73058	-3042	73567	-2533
2	64300	59951	-4349	62645	-1655	61479	-2821
3	56500	54829	-1671	57842	1342	55913	-587
4	52300	52083	-217	55267	2967	52974	74
5	50100	50567	467	53846	3746	51304	1204

**Tabel 4.3:** Tabellen viser de kvadratiske afvigelser mellem målte værdier og værdier fra tre varianter af Coale og Demenys modeltavler - se teksten.

bedst. Går man nu ind i denne modeltavle, kan man yderst til højre under middelevetider aflæse  $e(0)$  og  $e(5)$ . De er henholdsvis 25.00 år for nul-årige og 42.53 år for 5-årige. Den anvendte modeltavle, der fitter de observerede værdier bedst, vil så iøvrigt kunne bruges generelt til at give inputdata til overlevelsismatricen i en prognose for Gambias befolkning.

Dette eksempel er noget kunstigt, idet der kun er brugt data fra barnealderen til at fitte en model. Dette er selvfølgelig i orden, hvis man kun er interesseret i børnedødeligheden. Det ville dog have været rimeligt med enkelte dødelighedsdata fra voksenårene også, idet det ikke kan udelukkes, at forholdet mellem børne- og voksendødelighed i Keneba er afvigende fra, hvad der gælder for samtlige modeltavler.

## 4.4 Migration.

I befolkningsbalanceligningen indgår migrationer, som tidligere nævnt, som en vigtig komponent. Befolkningsbalanceligningen siger nemlig, som vi så i starten af kapitel 3, at:

$$B_t = B_0 + (F - D) + (I - U) \quad (4.20)$$

hvor:

- $B_t$  = befolkningen til tiden  $t$ .
- $B_0$  = befolkningen til tiden 0.
- $F$  = antal fødsler mellem 0 og  $t$ .
- $D$  = antal dødsfald mellem 0 og  $t$ .

- $I$  = antal indvandrede mellem 0 og  $t$ .
- $U$  = antal udvandrede mellem 0 og  $t$ .
- $(F - D)$  kaldes den naturlige befolkningstilvækst.
- $(I - U)$  kaldes vandrings- eller migrationsbalancen.

Spørgsmålet er så, hvor vigtig migrationskomponenten er i en befolkningsprognose. Vi antyder dette ved to eksempler. Først ser vi på Kina med en samlet befolkning i 1990 på 1134 mill. mennesker. Fødselshyppigheden var 22 promille, og den summariske dødelighed var på 7 promille. Dette giver en naturlig befolkningstilvækst på:  $1134 \cdot 0.022 - 1134 \cdot 0.007 = 24.95 - 7.94 = 17.01$  mill., og migrationsbalancen vil, af mange grunde, naturligvis være lille i forhold til dette tal, hvorfor migrationens betydning for Kinas befolkningsudvikling for nuværende vil være minimal. Betragt vi modsat et (lille) land som Danmark, var fødselshyppigheden i 1990 på 12.3 promille, dødeligheden 11.9, mens nettoindvandringen var på 1.6 promille. Med en samlet befolkning på 5146469 betyder det, at den:

- Naturlige befolkningsvækst var på: 2059 personer pr. år
- Vandringsbalancen = Nettoindvandringen = 8234 personer pr. år,

hvilket betyder, at vandringsbalancekomponenten i 1990 tegnede sig for 80 procent af den samlede befolkningstilvækst i Danmark. Vi kan heraf se, at det er af ganske afgørende betydning for at opnå et pålideligt prognoseresultat, at migrationen bliver taget i betragtning. Dette gælder særligt i lande, store som små, hvor den naturlige vækst er minimal eller endog negativ. I den følgende gennemgang af prognosemodellen, den såkaldte kohorte-komponentmetode, har vi imidlertid i første omgang set bort fra migrationselementet, idet vi kun betragter en "single region"-model lukket for migration. Dette har vi valgt for at gøre gennemgangen og opskrivningen af modellen mere overskuelig, idet inddragelse af migration forøger antal index i formlerne, men specielt fordi Verdensbankens model underspiller migrationens betydning, se kapitel 5 og 6.

## 4.5 Kohorte-komponentmetoden.

Vi har i de foregående afsnit fået præsenteret de fleste af de demografiske begreber, og den matematik der binder dem sammen. Vi mener med andre ord at have skabt de matematiske og begrebsmæssige forudsætninger for

at gå i gang med det centrale i modellen, nemlig beskrivelsen af kohorte-komponentmetoden, som er den prognosemetode både Verdensbanken, FN og flere andre bruger. Vi vil først give en formaliseret matematisk beskrivelse af kohorte-komponentmetoden, hvilket vil føre frem til en såkaldt fremskrivningsmatrix. Dernæst vil vi v.h.j.a. et konkret eksempel vise, hvordan principperne anvendes for herved at demonstrere, at metoden er rimelig simpel i sin opbygning.

For at udarbejde en befolkningsprognose kræves følgende:

- En startbefolkning fordelt på køn og alder.
- Nogle overlevelseshastigheder - d.v.s. oplysninger om dødeligheden.
- Tal for de aldersbetingede fertilitetsrater.
- Migrationsoplysninger.

#### 4.5.1 Startbefolkningen.

Med startbefolkningen menes den udgangsbefolkning, som prognosen "tager sit afsæt" i. Det vil, som tidligere nævnt, være yderst hensigtsmæssigt, hvis denne udgangsbefolkning er fundet ved en folketælling, hvor både antal, køn og alder af samtlige borgere er opgjort. Derefter vil man af nemheds hensyn opdele befolkningen i kønsopdelte 5-års aldersgrupper, hvilket iøvrigt kan visualiseres i en såkaldt befolkningspyramide.

Den første aldersgruppe fra  $[0, 5[$  år vil bestå af samtlige observerede personer, hvis alder på folketællingstidspunktet  $t$  var mellem 0 og 4 år, kaldet  $K^t(0)$ . Tilsvarende vil antal observerede personer, der ved folketællingen var mellem 5 og 9 år, benævnes  $K^t(5)$ . Idet  $t$  står for 5-års enhedsintervaller, og  $x = 0, 5, 10, \dots, z - 5$ , vil  $K^t(x)$  altså generelt betegne antal observerede personer i aldersgruppen  $[x, x + 5[$ . Med betegnelsen  $K^{t+1}(5)$ , vil man så kunne betegne antallet af personer i aldersgruppen  $[5, 10[$  år til tiden  $t + 1$ , d.v.s. et tidsinterval af længde 5 år efter prognoseperiodens start.

Med de her definerede betegnelser vil vi nu kunne opstille den observerede

startbefolkning i en søjlematrix:

$$K^{(t)} = \begin{Bmatrix} K^t(0) \\ K^t(5) \\ K^t(10) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ K^t(z) \end{Bmatrix}$$

(4.21)

#### 4.5.2 Overlevelsesratematrixen.

Det næste trin i prognoseprocessen er at få fremskrevet den observerede befolkning  $K^{(t)}$  5 år frem i tiden. Hertil kræves dødeligheds- og fødselsoplysninger. Vi starter med at se, hvordan dødeligheden indgår i prognosen.

Mere generelt er vi egentlig ikke direkte interesseret i dødelighedstallene men derimod i overlevelsesraterne, da det jo er antallet af overlevende personer til næste 5-års periode, vi er interesseret i. Overlevelsesraterne er for den første prognoseperiode hentet enten i overlevelsestavlernes værdier  $s(x)$ , eller i modeltavlernes tilsvarende  $P(x)$ -værdier. Fra den anden 5-års prognoseperiode at regne har man udelukkende modeloverlevelsestavlernes værdier  $P(x)$  til rådighed. Der gælder følgende:

$$K^1(x+5) = K^0(x) \frac{L(x+5)}{L(x)} = K^0(x)s(x), \quad (4.22)$$

hvor størrelsen:

$$s(x) = \frac{L(x+5)}{L(x)},$$

betegner den andel af personer i aldersgruppen  $[x, x+5[$ , der overlever til aldersgruppen  $[x+5, x+10[$ . Denne sammenhæng gælder dog som nævnt kun fuldt ud, såfremt den observerede befolkning har samme overlevelsesforløb indenfor intervallet fra  $[x, x+5[$  som den hypotetiske overlevelsestavlebefolkning, d.v.s. den kontinuerte kurve for  $k(x)$  forløber som  $l(x)$ . Bemærk at prognosematematikken iøvrigt er på den diskrete matematiks grundlag,

idet vi betragter befolkningen på et bestemt tidspunkt med 5 års mellemrum. Mere generelt har vi nu:

$$K^{t+1}(x+5) = s(x)K^t(x), x = 0, 5, 10, \dots, z-5. \quad (4.23)$$

På matrixform kan vi skrive:

$$K^{(t+1)} = SK^{(t)}, \quad (4.24)$$

hvor matricen  $S$  kan kaldes en overlevelsesmatrix, karakteriseret ved at have nuller i første række og sidste søjle og ivoøvrigt har udseende af en diagonalmatrix fra række nr. 2 at regne, med nuller overalt undtagen i diagonalen:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{L(5)}{L(0)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{L(10)}{L(5)} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{L(z)}{L(z-5)} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

Nullerne i første række skyldes, at i denne række kommer de nyfødte ind i billedet, d.v.s. her skal indgå fødselsrater og børnedødelighedsrater (se næste afsnit). Nullerne i sidste søjle giver sig selv ud fra udtrykkene (4.22) og (4.23). At overlevelsesraterne slutter i nederste rækkes næstsidste søjle skyldes, at vi gerne skulle opnå, at den sidste aldersgruppe i populationsmatricen efter 5 års forløb er  $K^{t+1}(z)$ , og denne er jo ifølge udtryk (4.22) givet ved, at:

$$K^{(t+1)}(z) = K^t(z-5) \frac{L(z)}{L(z-5)},$$

d.v.s. vi skal gange næstsidste led i startbefolkningsmatricen med den sidste overlevelsesrate i matricen, og denne skal derfor stå som det næstsidste element i matricens sidste række for, at denne matrixmultiplikation bliver mulig.

For hver 5-års prognoseperiode vil man så kunne skifte de anvendte overlevelsesrater  $s(x)$  eller  $P(x)$  ud med nye fra f.eks. Coale og Demenys modeltavler. Svarer de først anvendte overlevelsesrater til et givet  $e(0)$ , svarende til et givet niveau i modeltavlerne, vil man som regel i næste periode regne med en højere middellevetid, og anvende modeltavlen med en niveauværdi der ligger én højere, og derfor også repræsentere tilsvarende højere overlevelsesrater. Som nævnt mangler vi den første række i matricen. Det er her, fødslerne kommer ind i billedet, hvilket vi vil se nærmere på i det følgende afsnit.

### 4.5.3 Fertilitetsmatricen.

Hvis vi i prognosen udelukkende regnede med matricen i udtryk (4.25), ville vi kun få et overblik over de overlevende fra prognosens initialkohorte, og der ville ikke optræde nogen tilgang.

Der skal altså tages hensyn til det forventede antal fødte spædbørn<sup>15</sup> i løbet af femårsperioden, samt hvor mange af disse der overlever til slutningen af 5-års intervallet. Vi antager, at disse fødsler finder sted ligefordelt over 5-års intervallet, og at  $B(x)$  er antallet af levendefødte pige-spædbørn født i løbet af et år af kvinder i aldersgruppen  $[x, x + 5]$ . Herudfra kan vi nu definere den årlige aldersbetingede fødselshyppighed:

$$F(x) = \frac{B(x)}{K(x)}, \quad (4.26)$$

for alle  $x$  i de fødedygtige aldre. For at finde antallet af nyfødte i løbet af fremskrivningsperioden, multiplicerer vi den netop definerede størrelse  $F(x)$  med det gennemsnitlige antal kvinder i de dertil svarende fødedygtige aldre. En hyppigt anvendt tilnærmelse til dette gennemsnit er den aritmetiske middelværdi af begyndelses- og slutbefolkningen i hvert af de aktuelle aldersgrupper. Anvendes dette samt definitionen i udtryk (4.23), vil størrelsen:

$$\left[ \frac{K^{(t)}(x) + K^{(t+1)}(x)}{2} \right] 5F(x) \quad (4.27)$$

være det samlede antal fødte i 5-årsintervallet  $[t, t + 1]$ <sup>16</sup>, født af kvinder i alderen  $[x, x + 5]$ . Anvendes udtryk (4.23), d.v.s.:

$$K^{(t+1)}(x) = K^{(t)}(x - 5)s(x - 5),$$

kan udtryk (4.27) omskrives til:

$$\frac{5}{2} [K^{(t)}(x) + K^{(t)}(x - 5)s(x - 5)] F(x), \quad (4.28)$$

for  $x = \alpha, \alpha + 5, \dots, \beta - 5$ , hvor  $\alpha$  og  $\beta$  er multipla af 5, og afgrænser de fødedygtige aldersgrupper. Det samlede antal fødsler i løbet af de 5 år findes nu ved at summere udtryk (4.28) over alle de fødedygtige aldersgrupper:

$$\sum_{x=\alpha}^{\beta-5} \frac{5}{2} [K^{(t)}(x) + K^{(t)}(x - 5)s(x - 5)] F(x), \quad (4.29)$$

<sup>15</sup>Vi betragter kun fødte pigebørn i denne forbindelse.

<sup>16</sup> $t$  nummererer her femårsintervaller.

Antal overlevende af disse fødsler  $B$  ved slutningen af 5-årsperioden er nu:

$$B(L(0)/5l(0)) = BL(0)/5, \text{ da } s(0) = L(0)/5l(0),$$

idet  $l(0)$  i denne sammenhæng sættes til 1 og ikke 100000, som vi tidligere opererede med, og  $L(0)$  er så tilsvarende  $1/100000$  af det tidligere anvendte  $L(0)$ . Dette fører frem til, at efter de første 5 år af prognosen vil antal personer i aldersgruppen  $[0, 5[$  være lig med:

$$K^{(t+1)}(0) = \frac{L(0)}{2} \left\{ \sum_{x=\alpha}^{\beta-5} [K^{(t)}(x) + K^{(t)}(x-5)s(x-5)]F(x) \right\}, \quad (4.30)$$

Vi mangler nu blot at få organiseret udtryk (4.30) således, at vi kan opstille en fødselsmatrix  $B$  med nuller på alle pladser undtagen i første række, og denne matrix skal så multipliceres med startbefolknings-søjlevektoren  $K^{(t)}$ . Vi skal med andre ord arrangere udtryk (4.30) på en sådan måde, at hvert summationsled kun indeholder et enkelt element af vektoren  $K^{(t)}$ . Dette kan gøres ved at ændre den nedre summationsgrænse fra  $x = \alpha$  til  $x = \alpha - 5$ , og lade  $F(x)$  og  $K^{(t)}$  bytte plads. Denne reorganisering fører frem til:

$$K^{(t+1)}(0) = \sum_{x=\alpha-5}^{\beta-5} \left\{ \frac{L(0)}{2} [F(x) + s(x)F(x+5)] \right\} K^{(t)}(x) = \sum_{x=\alpha-5}^{\beta-5} b(x)K^{(t)}(x) \quad (4.31)$$

Fødselsmatrixen  $B$  vil nu for  $\alpha = 10$  komme til at bestå af summen af de led, der står i klammen i udtryk (4.31)<sup>17</sup>, og disse led vil figurere i første række i

<sup>17</sup>Vi tjekker betydningen af at ændre den nedre summationsgrænse: Indsættes  $x = \alpha$  i udtryk (4.30) fås første led til:

$$K^{(t)}(\alpha)F(\alpha) + K^{(t)}(\alpha-5)s(\alpha-5)F(\alpha)$$

Indsættes tilsvarende  $x = \alpha - 5$  i udtryk (4.31), fås første led til:

$$F(\alpha-5)K^{(t)}(\alpha-5) + s(\alpha-5)K^{(t)}(\alpha-5)F(\alpha)$$

Sammenligner vi, ses det, at første multiplikationsled er forskelligt, men medtages et led til i udtryk (4.31), d.v.s. også  $x = \alpha$ , vil vi yderligere få leddene:

$$K^{(t)}(\alpha)F(\alpha) + s(\alpha)K^{(t)}(\alpha)F(\alpha+5),$$

så da  $F(\alpha-5) = 0$ , har vi nu opnået, at de første to led er ens, men nu er der så kommet et ekstra led til, og sådan vil det fortsætte indtil  $x = \beta - 5$ , hvor det vil vise sig, at ændringen af summationsgrænserne ikke har ændret på resultatet.

matricen:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{L(0)}{2l(0)} \left[ \frac{L(10)}{L(5)} F(10) \right] & \frac{L(0)}{2l(0)} \left[ F(10) + \frac{L(15)}{L(10)} F(15) \right] & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Vi er i denne matrix vendt tilbage til at sætte  $l(0) = 100000$ , således at vi direkte kan anvende overlevelsestavlerne værdier for  $l(0)$  og  $L(0)$ . Bemærk desuden, at søjle nr. 1 repræsenterer aldersklassen  $[5, 10[$  år, søjle nr. 2 aldersklassen  $[10, 15[$  år o.s.v..

For hver ny prognoseperiode kan man så udskifte værdierne for de aldersbetingede fertilitetsrater  $F(x)$  og overlevelsesraterne  $s(x) = L(x+5)/L(x)$ , i overensstemmelse med de antagelser man har, hvad angår de aldersbetingede fertilitets- og overlevelsesrater. Vi er nu i stand til at præsentere den færdige fremskrivningsmatrix, dog uden migrationselementet.

#### 4.5.4 Fremskrivningsmatricen.

Den færdige fremskrivningsmatrix kan nu findes ved matrixsummation og -multiplikation, således at:

$$K^{(t+1)} = \{S + B\} K^{(t)} = G K^{(t)} \quad (4.32)$$

hvor matricen  $G$  har følgende udseende:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & \frac{L(0)}{2l(0)} \left[ \frac{L(10)}{L(5)} F(10) \right] & \frac{L(0)}{2l(0)} \left[ F(10) + \frac{L(15)}{L(10)} F(15) \right] & \cdots & 0 \\ \frac{L(5)}{L(0)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{L(10)}{L(5)} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Fremskrivningsmatricen får herefter dette udseende:

$$K^{(t+1)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{L(0)}{2l(0)} \left[ \frac{L(10)}{L(5)} F(10) \right] & \frac{L(0)}{2l(0)} \left[ F(10) + \frac{L(15)}{L(10)} F(15) \right] & \cdots & 0 \\ \frac{L(5)}{L(0)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{L(10)}{L(5)} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^t(0) \\ K^t(5) \\ K^t(10) \\ \vdots \\ K^t(z) \end{pmatrix}$$

Den her gennemgåede matrix er som tidligere nævnt en "single region"-model lukket for migration.

Derimod er det selvfølgelig meningen, at begge køn skal repræsenteres i den færdige fremskrivningsmatrix. Dette gøres ved at indføre begrebet kønskvoten,  $s$ , der angiver antal fødte drengbørn pr. 100 fødte pigebørn. Denne kønskvote, der varierer lidt fra verdensdel til verdensdel, ligger normalt omkring 105, d.v.s. der normalt fødes 105 drengbørn for hver 100 fødte pigebørn. Hvis man nu forudsætter såkaldt kvindelig dominans, d.v.s. at alle fødsler tillægges kvindekønnet, da skal antal fødte drenge være lig  $s$  gange det fødte antal piger, eller rettere, da vi ønsker antallet af drengbørn i aldersgruppen  $[0, 5[$  år lig  $s(0)$ . Disse drengbørn skal så "overleves" ned gennem matrixen ud fra overlevelseshastighederne for drengbørn, der iøvrigt er måleligt forskellige fra pigernes tilsvarende overlevelseshastigheder. Drengenes/mændenes overlevelseshastighedsmatrix kaldes nedenfor for  $S'$ , og deres tilsvarende startbefolkningsvektor kaldes  $K^{(t)'$ . Hankønnetts fremskrivningsmatrix kaldes tilsvarende for  $K^{(t+1)'}$ . Den færdige kønsopdelte fremskrivningsmatrix<sup>18</sup> ser derefter således ud:

$$\begin{Bmatrix} K^{(t+1)} \\ K^{(t+1)'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B + S & 0 \\ sB & S' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} K^{(t)} \\ K^{(t)'} \end{Bmatrix} \quad (4.33)$$

Hermed har vi gjort rede for kohorte-komponentmetoden beregnet til befolkningsfremskrivning, og går nu videre med et konkret eksempel.

#### 4.5.5 Et konkret eksempel - Indien.

Vi vil nu gennemgå et konkret eksempel på anvendelsen af fremskrivningsmatrixen, og forklare hvordan inputdatamaterialet fremkommer. I eksemplet vil vi fremskrive Indiens kvindelige befolkning til 1986 med udgangspunkt i data fra folketællingen i 1981. Datamaterialet hertil ses i tabel 4.4.

Størrelsen  $P(x)$  er overlevelseshastighederne, hentet fra Coale og Demenys model-overlevelsestabule, West, niveau 15<sup>19</sup>, svarende til en middellevetid for nulårige,  $e(0)$ , på 55 år ( $P(0)$  er dog beregnet, se s. 65).

Den kvindelige ASFR står for de aldersbetingede fertilitetskvotienter. De fertile aldersgrupper ses i tabellen at ligge i aldersintervallet  $[15, 50[$  år. Fremskrivningsmatrixens første række vil starte med 2 nuller, der repræsenterer

<sup>18</sup>I [Keyfitz, 1977, s. 208] er vist et udskrevet eksemplar af en sådan kønsopdelte fremskrivningsmatrix.

<sup>19</sup>Se appendiks C, s. 4.

aldersgruppe	1981 bef.	$P(x)$	Kvindelige ASFR
0-4 år	47498.2 mill.	0.95138	-
5-9 år	44715.1	0.98696	-
10-14 år	39465.4	0.98523	-
15-19 år	33163.6	0.97995	0.0436
20-24 år	28482.3	0.97562	0.1242
25-29 år	25072.7	0.97226	0.1127
30-34 år	21734.6	0.96853	0.0795
35-39 år	18950.9	0.96417	0.0468
40-44 år	16452.8	0.95807	0.0236
45-49 år	13960.4	0.94649	0.0115
50-54 år	11321.4	0.92763	-
55-59 år	9200.8	0.89713	-
60-64 år	7466.9	0.84991	-
65-69 år	5612.3	0.77968	-
70 +	7676.8	-	-

Tabel 4.4: Indien: Befolkningstal, 1981, overlevelsesrater  $P(x)$  og aldersbetingede fertilitetsrater for kvinder.

aldersgrupperne  $[5, 10[$  år og  $[10, 15[$  år. Som det tredje element i første række kommer antal nyfødte i aldersgruppen  $[15, 20[$  år:

$$\frac{L(0)}{2l(0)} \left[ \frac{L(15)}{L(10)} F(15) \right] = \frac{448589}{200000} (0.98523 \cdot 0.0436) = 0.09635, \text{ hvor}$$

$$P(10) = \frac{L(15)}{L(10)} = \frac{414658}{420874} = 0.98523$$

hvor  $L(x)$ -værdierne  $L(10)$  og  $L(15)$  også er hentet fra Coale/Demeny.

Tallet for  $L(0)$  findes v.h.j.a. Coale/Demenys modeltavle, West 15, således:

$$L(0) = \frac{1}{2} \cdot (100000 + 90606) + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (90606 + 86037) = 448589 \quad (4.34)$$

Det fjerde element i matricens første række, der angiver antallet af fødte i aldersgruppen  $[20, 25[$  år er tilsvarende:

$$\frac{L(0)}{2l(0)} \left[ F(15) + \frac{L(20)}{L(15)} F(20) \right] = \frac{448589}{200000} (0.0436 + 0.97995 \cdot 0.1242) = 0.37078$$

Størrelsen  $L(0)$  skulle ifølge det tidligere gennemgåede udregnes ved hjælp af udtryk (4.18), således:

$$L(x) = \frac{5}{2}[l(x+5) + l(x)], \text{ der giver: } L(0) = \frac{5}{2}[86037 + 100000] = 465000,$$

hvor værdierne  $l(5)$  og  $l(0)$  ligeledes er hentet fra model West, niveau 15. Den værdi, der er anvendt for  $L(0)$  ovenfor er, som det ses,  $L(0) = 448589$  og ikke 465000. Dette skyldes en vigtig tilføjelse i Coale/Demenys modeltavler i forhold til de observerede overlevelsestavler. I Coale/Demenys modeltavler er der tilføjet en række for aldersgruppen  $[0, 1[$  år (nul-årige) og  $[1, 5[$  år i stedet for blot at operere med aldersgruppen  $[0, 5[$  år under et. Dette har stor betydning, især i u-lande, da dødeligheden i det første leveår, spædbørnsdødeligheden, her er meget stor, mens den allerede falder til markant lavere niveauer i aldersgruppen  $[1, 5[$  år. Udtrykket (4.18), der bygger på, at antal døde i aldersgruppen  $[0, 5[$  år er ligefordelt i hele 5-årsintervallet, giver derfor ret misvisende resultater, da der i virkeligheden er færre i de sidste fire aldersgrupper fra  $[1, 5[$  år på grund af den markant høje spædbørnsdødelighed, end hvis man antog ligefordelte dødsfald i hele aldersgruppen  $[0, 5[$  år. Den første rækkes øvrige elementer udregnes efter samme opskrift indtil aldersgruppen  $[45, 50[$  år, hvorefter resten af rækkens elementer atter er nul. I de øvrige af matricens rækker forekommer kun et enkelt element forskelligt fra nul. I anden række er det første element:

$$\frac{L(5)}{L(0)} = \frac{426435}{448589} = 0.95138$$

hvor  $L(0)$  er beregnet som i udtryk (4.34) og ikke direkte aflæst i modeltavlen. Fra og med række 3 og til den sidste række vil overlevelsesraterne direkte aflæses i modeltavlen  $P(x)$ -værdier, således f.eks.  $P(5) = L(10)/L(5) = 0.98696$ , og  $P(10) = L(15)/L(10)$  og så fremdeles. Opstillet med nogle af de ovenfor angivne tal antager den konkrete fremskrivningsmatrix for Indiens kvindelige befolkning herefter følgende udseende:

$$\begin{pmatrix} 52057 \\ 45188 \\ 44132 \\ 38882 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.09635 & 0.37078 & \dots & 0 \\ 0.95138 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0.98696 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0.98523 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 47498 \\ 44715 \\ 39465 \\ 33164 \\ \vdots \end{pmatrix}$$



## Kapitel 5

# Fremskrivningerne i Verdensbankens model.

Siden 1977 har Verdensbanken hvert år udarbejdet både kortsigtede og langsigtede befolkningsprognoser blandt andet for at kunne forudsige arbejdskraftstørrelse, efterspørgsel efter uddannelse, karakteren og omfanget af sundhedsservice, behov for udvikling af infrastrukturen og generelle forbrugsbehov [Bos, 1994, s. 3].

Hovedtendensen i befolkningsudviklingen på globalt plan er i følge befolkningsprognosen fra 1994-95 [Bos, 1994], at jordens samlede befolkningstal vil nå 6 mia. inden år 2000, og på trods af at antallet af fødsler på verdensplan kun stiger moderat, vil den nuværende aldersstruktur sikre en høj absolut stigning i de kommende årtier. Således forudsiges befolkningstallet at være 7 mia. i 2011, 8 mia. i 2023, 9 mia. i 2039 og 10 mia. i 2060. Europa vil have færre mennesker i 2100 end i 1990, og Afrika vil være det sted, hvor befolkningstallet vokser hurtigst, og vil også være den eneste verdensdel, hvor tallet stiger procentuelt i forhold til hele jordens befolkning.

I modellen er landene inddelt på tre måder. Dels i indkomstgrupper (lav, lavere middel, øvre middel, høj), dels i fertilitets transitionsgrupper (før-transitionel, transitionel, sen-transitionel), dels geografisk på kontinenter (og en vis underinddeling af disse)<sup>1</sup>. Inddelingen i indkomstgrupper er baseret på BNP pr. indbygger i U.S. dollars, således at lavindkomstgruppen er 675 eller mindre, lavere-middel er 676-2695, øvre-middel 2696-8355, og høj 8356 og mere [Bos, 1994, s. 43-44]. Inddelingen i transitionsgrupper er baseret på størrelsen af den samlede fertilitet TFR, således at for den før-transitionelle er TFR større end 4.5, for den transitionelle gruppe er TFR mellem 4.5 og

---

<sup>1</sup>Denne inddeling strukturerer tabellerne i [Bos, 1994, s. 18-521].

2.5, og for den sen-transitionelle er TFR mindre end 2.5 <sup>2</sup> [Bos, 1994, s. 45-46].

Prognosen for 1994-95 indeholder oplysninger både efter ovenstående opdeling og for de enkelte lande for befolkningstallet, fertilitets- og dødsrater, middellevetid og det samlede befolkningstal fordelt på alder og køn. Tallene er beregnet med fem års mellemrum frem til 2035, og med 25 års mellemrum frem til 2150.

Udgangspunktet for 1994-95 prognosen er året 1990 og perioden 1990-94. Befolkningstallene for 1990 fås fra de seneste folketællinger. For Europas vedkommende findes tallene for de fleste lande hos Eurostat. For lande hvor der ikke eksisterer nye og troværdige folketællinger, bruges tallene fra FN's befolkningsprognose 1992. Oplysninger om fertilitet og dødelighed fås fra FN's befolkningsprognose, de enkelte landes publikationer, rapporter fra U.S. kontoret for folketællinger, Eurostat og Verdensbanken selv<sup>3</sup>.

Som det er fremgået af gennemgangen af kohorte-komponentmetoden, og herunder fremskrivningsmatricen, i kapitel 4; er fremskrivningen af fertilitet og dødelighed det centrale i en befolkningsprognosemodel, så vi vil derfor nu se nærmere på, hvordan disse to størrelser mere specifikt indgår i Verdensbankens model<sup>4</sup>.

## 5.1 Fremskrivning af fertilitet.

Modellen bygger som tidligere nævnt på en grundlæggende antagelse om, at alle lande på et eller andet tidspunkt gennemgår en udvikling fra en høj samlet fertilitet TFR til en temmelig lav fertilitet jævnfør kapitel 3. På baggrund af materiale om TFR for perioden 1980-90 har man undersøgt, hvordan faldet i TFR udvikler sig i de forskellige transitionsstadier [Bos, 1990, s. 8-10].

En overgang fra det før-transitionelle stadium til det transitionelle stadium siges at være begyndt, hvis et land enten har oplevet et fald i TFR på mindst 0.5 point i løbet af en femårsperiode, eller hvis TFR allerede er under 4.5

<sup>2</sup>I 1990 lå TFR på verdensplan mellem 1.4 (f.eks. Italien) og 8 (f.eks. Rwanda) jævnfør [Bos, 1990, s. 5].

<sup>3</sup>I [Bos, 1994, s. 47-54] findes en detaljeret oversigt for hvert enkelt land med angivelse af kildemateriale for befolkningstallet 1990, fertiliteten 1990-95, dødeligheden 1990-95 og befolkningstallet fordelt på alder og køn for 1990.

<sup>4</sup>Modellen, der er brugt til udarbejdelse af prognosen for 1994-95, er baseret på de metoder til beregning af fertilitet og dødelighed, som er beskrevet i [Bos, 1989] og [Bos, 1990].

efter et mere gradvist fald [Bos, 1990, s. 5]. Det sen-transitionelle stadium er defineret ved, at TFR er 1 point over reproduktionstallet eller mindre<sup>5</sup>. Det er altså størrelsen af den samlede fertilitet, der bestemmer, hvilket transitionsstadium det enkelte land befinder sig i på et givet tidspunkt<sup>6</sup>.

For lande i det før-transitionelle stadium antager man i modellen, at TFR fremover vil være konstant, selvom fertiliteten vil være tilbøjelig til at svinge en smule i et snævert interval. For disse lande har det vist sig, at overgangen til en udvikling med mindre fertilitet ikke har kunne forudsiges med udgangspunkt i socioøkonomiske faktorer. Disse lande antages i stedet for at begynde en overgang til mindre fertilitet i femårsperioden efter, at den kombinerede middellevetid for mænd og kvinder er nået 50 år<sup>7</sup>. Nogle få lande spås ikke at nå en middellevetid på 50 år indenfor de næste 30 år blandt andet på grund af krige og hungersnød. I disse få tilfælde sættes overgangen til mindre fertilitet til at starte i 2005 [Bos, 1990, s. 17].

Man har i forbindelse med udarbejdelsen af modellen forsøgt at forudsige faldet i fertiliteten i de tre første femårsperioder ved hjælp af regressionsanalyse, idet man har forsøgt at bruge nogle socioøkonomiske indikatorer fra Verdensbankens data som forklarende variable. Det drejer sig blandt andet om spædbørnsdødeligheden IMR ved starten af overgangen, ændringen af IMR i den følgende femårsperiode, procentdelen af kvinder i skolesystemet<sup>8</sup>, TFR ved starten af overgangen [Bos, 1990, s. 10].

I overgangen til transitionsstadiet er fertilitetens fald baseret på tallet i den foregående femårsperiode, fordi det antages i modellen, at overgangen allerede er startet i den periode. Hvis den gennemsnitlige årlige ændring i TFR i den foregående femårsperiode kaldes  $\Delta_{t-5}TFR$ , beregnes den årlige forandring i løbet af overgangen i den næste femårsperiode på følgende måde

$$\Delta_t TFR = -0.05 + 0.5 \cdot \Delta_{t-5} TFR$$

ændringen må dog mindst være - 0.073 og højst - 0.210. Disse tal fremkom-

<sup>5</sup> Disse stadier svarer til de fem stadier, vi gjorde rede for i starten af kapitel 3 i forbindelse med den demografiske transitionsmodel, således at det før-transitionelle stadium svarer til fase I og til dels fase II, idet dødeligheden i fase II er faldende, mens fertiliteten endnu ikke er begyndt at falde i den fase, det transitionelle stadium svarer til fase II og III, og endelig svarer det sen-transitionelle til fase IV og V.

<sup>6</sup> Se eksempler på udviklingen i TFR i appendiks C, s. 6-7.

<sup>7</sup> Nogle undersøgelser har vist, at der ikke har fundet noget fald i fertiliteten sted i noget udviklingsland, før middellevetiden er nået op omkring 53 år i mindst 5 år. Undersøgelserne beskriver denne tærskel som en nødvendig, men ikke tilstrækkelig betingelse for et begyndende fertilitetsfald [Bos, 1990, s. 13].

<sup>8</sup> Hvilket betyder i sekundær skolen, som omfatter mellem- og gymnasieskolen, hvor eleverne normalt er mellem 12 og 17 år.

mer som resultat af en større empirisk undersøgelse, som konkluderer, at de gælder generelt (dog opereres der ind imellem med 0.06 og 0.24 i stedet). Hvis beregningen imidlertid ikke holder, fordi overgangen lige er startet, bruges et gennemsnitligt årligt fald i TFR på 0.06 for den første femårsperiode i overgangen (idet overgangen i gennemsnit antages at starte midt i en femårsperiode) og 0.12 årligt for de følgende perioder. Som det fremgår, bruges de 0.12 således som en middelværdi, idet ændringen altså ikke må være lavere end det halve, og ikke større end det dobbelte.

I det sen-transitionelle stadium nærmer TFR sig som tidligere nævnt reproduktionstallet. I dette stadium opererer modellen med fire mulige forløb afhængig af, hvordan faldet i fertiliteten iøvrigt har udviklet sig<sup>9</sup>:

1. Der anvendes en eksponentiel funktion på TFR's fald fra 1 point over reproduktionstallet, indtil at selve reproduktionstallet er nået. Denne udvikling antages at vare 15 år.
2. I situationer hvor faldet i TFR har været usædvanligt langsomt, antages den samme udvikling derimod at vare 20 år.
3. I situationer hvor TFR vedvarende laver hurtige fald, antages det i modellen, at TFR falder mere i en periode (generelt bevæger den sig under reproduktionstallet), dernæst er den konstant i den næste periode, for endelig at bevæge sig tilbage til reproduktionstallet,
4. Når overgangsfasen er afsluttet, og TFR er under reproduktionstallet, antages den at være på det niveau i to femårsperioder for derefter gradvist at vende tilbage til reproduktionstallet (lineært til 2030) [Bos, 1994, s. 15].

Der findes således ingen objektive kriterier til at fastlægge, hvornår en fertilitetstransition med sikkerhed er tilendebragt. I nogle lande falder fertiliteten til under reproduktionstallet, i andre lande lige omkring tallet<sup>10</sup>, samtidig med at TFR til stadighed vil svinge lidt.

I forbindelse med beregningerne på de ovenfor beskrevne fire mulige forløb, skal der først estimeres et omtrentligt år, hvor reproduktionsniveauet nås [Bos, 1990, s. 18]. Hvis året, hvor TFR = 3.15 nås, er givet, kan det antal år, der vil gå, før reproduktionsniveauet nås, beregnes ved hjælp af følgende udtryk

<sup>9</sup>De fire mulige forløb er resultat af en analyse af den historiske udvikling i mange lande.

<sup>10</sup>Det laveste niveau ligger mellem 1.3 og 2.4.

$$15[1 - \ln(TFR/3.15)/\ln(2.15/3.15)]$$

Herefter beregnes TFR ved hjælp af følgende udtryk, som er baseret på den kvindelige middellevetid  $e_{(k)}$  i reproduktionsåret:

$$TFR_{NRR=1} = 6.702 - 0.1107 \cdot e_{(k)} + 0.0006592 \cdot e_{(k)}^2$$

Først er altså året, hvor reproduktionstallet nås, beregnet for at kunne bestemme middellevetiden for kvinder i reproduktionsåret, derefter er TFR beregnet ved hjælp af ovenstående udtryk under hensyntagen til, hvilket af de fire mulige udviklingsforløb der er tale om.

Lande med TFR mellem 1.75 og 3.15, og som har oplevet et relativt hurtigt fald, antages at ville falde yderligere i den næste femårsperiode. Hurtige fald er i denne sammenhæng fald fra 3.15 til 2.15 på 12 år eller mindre. For disse lande, som gennemgår det tredje af de fire beskrevne udviklingsforløb, kan TFR beregnes efter følgende udtryk, hvor betingelsen dog er, at TFR ikke kan ligge under 1.75 [Bos, 1990, s. 18]:

$$TFR_1 = \exp[\ln(TFR_0) + 5 \cdot \ln(1.75/2.75)/15]$$

Den aldersspecifikke fertilitet bestemmes for alle tre stadier i fertilitetstransitionen på samme måde afhængigt af TFR. Der opereres med to grundlæggende forløb for den aldersspecifikke fertilitet, nemlig når TFR er større end 6, og når TFR er mindre end eller lig med 3<sup>11</sup>. Det viser sig, at når TFR er over 6, er en større del af fødslerne fordelt blandt yngre og ældre kvinder, imodsætning til det lavere niveau for TFR hvor fødslerne er koncentreret i et snævrere aldersinterval<sup>12</sup> [Bos, 1994, s. 15].

De fremgangsmåder, der her er beskrevet til at fremskrive fertiliteten, kan i princippet bruges på alle lande, og de kræver et forholdsvist begrænset datamateriale. Metoderne bygger som sagt på analyser af de seneste tendenser i udviklingen af fertiliteten.

## 5.2 Fremskrivning af dødeligheden.

Den forventede middellevetid og spædbørnsdødelighedstallet udgør tilsammen en væsentlig bedre beskrivelse af dødeligheden end den summariske dødelighed (antal døde pr. 1000 indbyggere), og der findes samtidig tilstrækkeligt med datamateriale om disse to størrelser, som kan danne baggrund for

<sup>11</sup>For værdier mellem 3 og 6 fås aldersfordelingen ved interpolation mellem de to forløb.

<sup>12</sup>Se figuren i appendiks C, s. 7 nederst.

fremskrivninger. Selvfølgelig kunne man opnå et bedre billede af fremtiden ved at bruge alders- og årsagsspecifikke tal for dødeligheden, men datamaterialet er her mere sparsomt, og fremskrivningerne derfor mere usikre [Bos, 1989, s. 1].

Den fremgangsmåde, der bliver anvendt i modellen til at fremskrive dødeligheden, er således blevet udviklet med udgangspunkt i en analyse af middellevetid og spædbørnsdødelighed i tilgængeligt materiale for de enkelte lande [Bos, 1994, s. 15]. Datamaterialet for tidligere udviklinger af forøgelsen for den forventede middellevetid analyseres med henblik på at finde en funktion, der afspejler disse udviklinger. Herefter inddrages spædbørnsdødeligheden i forbindelse med valg af overlevelsestavler, som vi gjorde nærmere rede for i kapitel 4. Fremskrivningerne bruger overlevelsestavler med en maksimum middellevetid for kvinder og mænd på henholdsvis 90 og 83.3 år<sup>13</sup>.

Overlevelsestavlerne er, som tidligere nævnt i kapitel 4, valgt fra Coale-Demeny modellerne [Coale, s. 18-19], som skaffer os de fremskrevne middellevetider og spædbørnsdødelighedstallene for de første tre femårsperioder.

Først vælges et niveau for overlevelsestavlerne for at få det ønskede tal for spædbørnsdødeligheden. Dødstal op til 14 år tages fra denne overlevelsestavle. Derefter vælges et andet niveau for overlevelsestavlerne for at give tal for 15 år og op efter, således at det ønskede niveau for middellevetiden opnås. Coale-Demeny modellerne omfatter, som tidligere nævnt, fire såkaldte familier (Nord, Syd, Øst og Vest), og der vælges den familie, som minimerer forskellen mellem de to valgte niveauer. For de følgende femårsperioder anvendes middellevetiden kun til at bestemme niveauer, og Vest-familien bliver konsekvent brugt [Bos, 1994, s. 17].

### 5.2.1 Fremskrivning af middellevetid.

Datamaterialet, som modellen bygger på, når det drejer sig om den forventede middellevetid fordelt på køn, er taget fra en publikation fra FN's sekretariat<sup>14</sup>, som blandt andet er baseret på de overlevelsestavler, der blev brugt af Coale-Demeny, på FN's database for udviklingslande (1986) og på WHO's overlevelsestavler [Bos, 1989, s. 4].

Først forsøges det at tilpasse udviklingen over tid i ovenstående data ved hjælp af en logistisk transformation, som indfanger langsommere stigninger

<sup>13</sup>Disse tal er senere korrigeret opad.

<sup>14</sup>United Nations Secretariat: Sex differentials in life expectancy and mortality in developed countries: An analysis by age groups and causes of death from recent and historical data. Population Bulletin of the United Nations 25:65-107. New York 1988.

i middellevetiden på høje niveauer såvel som de meget lave niveauer<sup>15</sup> [Bos, 1989, s. 5].

Der laves regressionsanalyser for at forudsige ændringer i middellevetiden ud fra forrige ændring af denne og forskellige socioøkonomiske indikatorer så som BNP pr. indbygger, procentdelen af kvinder i skolesystemet, kvindelig arbejdskraft deltagelse m.m..

Middellevetiden fremskrives fra år 0 til år  $t$  ved hjælp af en logistisk funktion over tid af formen [Bos, 1990, s. 15-16]:

$$e_t = k_0 + \frac{k}{[1 + \exp[\text{logit}(e_0) + r \cdot t]]}$$

hvor

$$\text{logit}(e_0) = \log_e \frac{(k_0 + k - e_0)}{(e_0 - k_0)}$$

Det er karakteristisk for denne logistiske funktion, at den stiger hurtigst fra et niveau omkring 50 år og langsommere ved højere niveauer.

Minima ( $k_0$ ) for de logistiske funktioner for begge køn antages at være 20 år, og maksima ( $k_0 + k$ ) antages at være 90 år for kvinder og 83.3 for mænd. Ændringstallet ( $r$ ) for den logistiske funktion varierer fra land til land.

For den første femårsperiode (1985-90) beregnes ændringstallet ( $r_1$ ) ud fra ændringstallet i den forrige femårsperiode ( $r_0$ ) og procentdelen af kvinder i sekundærskolen ( $s_0$ ) ved hjælp af følgende udtryk:

$$r_1 = 0.00379 + 0.723 \cdot r_0 - 0.000254 \cdot s_0$$

for kvinder, og

$$r_1 = 0.01159 + 0.885 \cdot r_0 - 0.000318 \cdot s_0$$

for mænd<sup>16</sup>.

I modellen er der opstillet grænser for ændringstallet i de enkelte femårsperioder, så det ikke kan være større end -0.017, som vil betyde et langsomt

<sup>15</sup>Der er blevet forsøgt transformation med andre funktioner, så som kvadratrod, kubikrod, logaritme- og eksponentialfunktioner, men de tilpasser ikke materialet så godt som en logistisk transformation.

<sup>16</sup>I de få tilfælde hvor ændringstallet for den forrige femårsperiode er påvirket af ekstraordinære omstændigheder, anvender man tallet for den forrige tiårsperiode.

fald i dødeligheden, og ikke mindre end -0.053, som vil betyde et hurtigt fald i dødeligheden.

For den anden femårsperiode beregnes ændringstallet som en funktion af ændringstallet for den første femårsperiode på følgende måde<sup>17</sup>:

$$r_2 = -0.007 + 0.7 \cdot r_1$$

Som det er fremgået, fremskrives middellevetiden således ved hjælp af en logistisk funktion, som blandt andet afhænger af det såkaldte ændringstal, som beregnes på baggrund af analyser af historisk materiale om udviklingen i middellevetiden<sup>18</sup>.

### 5.2.2 Fremskrivning af spædbørnsdødeligheden.

Først skal det afklares, hvilken funktion der bedst modsvarer udviklingen i spædbørnsdødeligheden. Man forsøgte sig også her med blandt andet kvadratrod, kubikrod, og logaritmefunktion, men en logistisk funktion i stil med den for den forventede middellevetid fungerede bedst, - den passede nemlig blandt andet godt med data på lave niveauer<sup>19</sup>.

Herefter defineredes minimum og maksimum for funktionen. To minima blev valgt, som svarede til det laveste spædbørnsdødeligheds niveau<sup>20</sup> i Coale-Demeny overlevelsestavlerne (Vest familien), henholdsvis 3 og 6 pr. tusind. Der valgtes et maksimum på 200 pr. tusind. Dette tillader spædbørnsdødeligheden at falde hurtigst, når det har nået omkring 100, som groft svarer til det niveau på hvilket, den forventede middellevetid stiger hurtigst [Bos, 1989, s. 15].

Ændringstallet i funktionen mellem femårsperioder blev beregnet på lande. Ændringstallet for hver af de første tre femårsperioder beregnes ved hjælp af følgende udtryk:

$$r_t = 0.0275 + 0.5 \cdot r_{t-1}$$

men med den begrænsning, at tallet skal ligge mellem 0.024 og 0.130. Alle data i hele den omhandlede periode blev herefter sammenholdt og udgjorde

<sup>17</sup>På tilsvarende måde beregnes ændringstallet for den tredje periode med udgangspunkt i tallet for den anden, og så fremdeles.

<sup>18</sup>I appendiks C, s. 8 ses en grafisk afbildning af fremskrivninger af middellevetiden i fire væsentligt forskellige lande, udarbejdet v.h.j.a. FN og Verdensbankens modeller (i forskellige versioner).

<sup>19</sup>Netop de lave niveauer gav problemer med flere af de andre funktioner [Bos, 1989, s. 14-15].

<sup>20</sup>Kombineret for mænd og kvinder.

grundlaget for bud på henholdsvis en langsom, middel og hurtig udvikling af ændringen. På denne baggrund kunne der så udarbejdes grafer, der illustrerer det årlige fald i spædbørnsdødeligheden på de forskellige niveauer i forskellige modeller<sup>21</sup> [Bos, 1989, s. 16].

Der blev foretaget regressionsanalyse for at kunne forudsige ændringstallet i den logistiske funktion ved at bruge det tidligere ændringstal og de samme socioøkonomiske indikatorer som i forbindelse med middellevetiden.

### 5.2.3 Dødelighed forårsaget af AIDS.

Ved brug af en epidemiologisk model udviklet af Bulatao<sup>22</sup>, og ligninger der sammenkæder aktuel og fremtidig HIV infektion estimeres den fremtidige dødelighed.

Disse ligninger anvendes på lande med et måleligt niveau af HIV infektion og giver prognoser for det forventede antal år, der tabes p.gr.a. AIDS dødelighed. Antal af tabte år trækkes fra de prognosticerede ikke-AIDS udviklinger frem til 2020-25, hvorefter dødeligheden gradvist finder tilbage til det forventede niveau i 2050 under en ikke-AIDS situation.

Bos, Bulatao, Massiah og Vu påpeger selv, at der her er en række antagelser, der er kritiske [Bos, 1994, s. 17]. De peger på antagelsen om, at udbredelsen af virus forudses at blive halveret i hvert år efter 2005, som den mest kritiske.

## 5.3 Fremskrivning af migration.

Modellens fremskrivninger af nettomigrationen for femårsperioden frem til år 2000 er de tal, der er udarbejdet af Arnold<sup>23</sup>. Tallene er udarbejdet, således at de totalt giver 0 for hele verden.

Efter år 2000 antages antallet af nettomigranter at nærme sig 0 lineært i hvert land, enten med udgangspunkt i ændringen fra 1990-95 til 1995-2000, eller en ændringsgrad som vil betyde, at antallet bliver 0 i 2025-30.

<sup>21</sup>I appendiks C, s. 9 ses graferne for fire væsentligt forskellige lande, udarbejdet v.hj.a. FN og Verdensbankens modeller (i flere versioner).

<sup>22</sup>R. Bulatao: The Bulatao Approach: Projecting the Demographic Impact of the HIV Epidemic Using Standard Parameters, i United Nations/WHO, 1991, s. 90-104.

<sup>23</sup>F. Arnold: Revised Estimates and Projections of International Migration. Policy, Planning and Research Working Paper 275, World Bank Washington D.C. 1989.

## 5.4 Afrunding.

Vi har hermed gjort rede for de mere specifikke fremskrivninger af fertilitet og dødelighed i Verdensbankens model. Disse fremskrivninger skal som sagt ses i snæver sammenhæng med den mere generelle gennemgang af det matematiske grundlag for beregningerne på fertilitet og dødelighed i kapitel 4, og som en del af den måde som fremskrivningsmatricen arbejder på.

I det følgende kapitel vil vi forholde os mere analytisk til modellen, og også fremlægge betragtninger om evaluering af denne.

## Kapitel 6

# Analyse af Verdensbankens model.

I kapitel 2 gjorde vi rede for de centrale faser i modelleringsprocessen. Typisk vil udgangspunktet være en beskrivelse af det problem, der skal modelleres, og en kortlægning af problemets relation til omgivelserne. Dernæst skal de væsentligste elementer kvantificeres og beskrives matematisk, for derefter at omformes til et edb-program ved hjælp af et programmeringssprog. Der foretages edb-kørsler med modellen, og resultaterne analyseres. Dernæst forestår en lang proces, hvor resultaterne af modelkørslerne løbende giver anledning til justering af beskrivelsen af virkeligheden, de matematiske udtryk i modellen og edb-koden. Derefter foregår den egentlige løbende evaluering af modellens resultater.

Vi har ikke haft edb-koden til Verdensbankens model til rådighed i forbindelse med vores arbejde med modellen. Vores arbejde med modellen har derfor måttet koncentrere sig om, dels et generelt niveau hvor det matematiske grundlag for modeller af Verdensbankens type har været i centrum (kapitel 4), dels et specifikt niveau hvor de konkrete fremskrivninger i Verdensbankens model har været i fokus (kapitel 5). I forlængelse af ovenstående har vi derfor heller ikke haft mulighed for at foretage selvstændige kørsler med modellen, hvor enten mål for fremtidige befolkningstal kunne opstilles, eller scenarier med bestemte vækstrater kunne afprøves, men vi har måttet nøjes med resultaterne af andres kørsler.

Ovenstående forhold sætter selvfølgelig nogle begrænsninger, når modellen skal analyseres kritisk. Hertil kommer, at udviklingen af Verdensbankens model bygger på en cirka 50 årig lang tradition for udvikling, justering og evaluering af denne type af modeller. Samtidig fremstår det demografiske grundlag

for modellen som et herskende paradigme, som modelbyggerne tager for givet, og vi har ikke været i nærheden af en international debat, hvor væsentlige elementer i paradigmet problematiseres.

Disse forhold afstikker rammerne for vores modelkritik. Det ville selvfølgelig have været væsentlig lettere, hvis der enten havde været tale om en mere ufærdig model, som ikke byggede på så meget erfaring og ikke var så gennemprøvet, eller hvis der havde været tale om flere markante og konkurrerende teoretiske positioner indenfor det analyserede genstandsfelt.

Efter disse indledende bemærkninger vil vi give et kort rids af kapitlet. I det første afsnit vil vi fremhæve nogle træk, som gælder for de globale befolkningsprognoser som sådan. Dernæst vil vi karakterisere Verdensbankens model ved hjælp af nogle af de begreber, som vi præsenterede i kapitel 2. Disse begreber vil også strukturere den følgende kritik i tre punkter, nemlig kritik af modellens grundantagelser (forholdet mellem model og teori), kritik af tilpasningerne til virkeligheden (systemafgrænsningen), og endelig en kritik af modellens matematisering. Afslutningsvis vil vi give to eksempler på evaluering af modeller af Verdensbankens type.

## 6.1 Om globale befolkningsprognoser.

Der er i princippet mange måder at håndtere modelleringen af befolkningsudviklingen på, men nogle få dominerer. Lee skelner mellem tre tilgange i forbindelsen med udarbejdelse af en global befolkningsprognosemodel [Lee, 1991, s. 48-49], nemlig

1. Ekstrapolation med udgangspunkt i de foregående år, for eksempel ved hjælp af en lineær eller eksponentiel funktion.
2. En historisk model hvor de udviklede landes demografiske historie opfattes som en prototype for udviklingslandenes senere udvikling.
3. En behavioristisk indfaldsvinkel hvor teorier om økonomiske og sociale forhold inddrages til forståelsen af befolkningsudviklingen.

Som vi tidligere har set, kan ekstrapolation ved hjælp af funktioner have mening over korte perioder, men også føre til katastrofale resultater, når tidshorisonten er lidt længere. Som vi har set i kapitel 4, afspejler de dominerende modeller, nemlig både Verdensbankens og FN's, den historiske udvikling i form af modeltavlerne. Den sidste af de tre skitserede tilgange underbetones

voldsomt i de eksisterende modeller, som vi senere skal komme lidt mere ind på.

Det er åbenlyst, at fremtidige befolkningstal afhænger af en lang række faktorer af social, økonomisk og teknologisk art, hvoraf nogle tilsyneladende er vanskelige at tage højde for i modellerne, men det må så i det mindste forlanges, at modelløren gør rede for, hvor fejlkilderne i prognoserne ligger henne.

Idéen med prognoserne er ikke kun at fremskrive de aktuelle tendenser i befolkningsudviklingen, men lige så meget at sige noget om, hvor stort befolkningstallet bliver under forskellige eksplicit formulerede antagelser. Frejka [Lutz, 1994, s. 13] peger på følgende forskellige formål med prognoserne:

- at demonstrere korte og mere langsigtede implikationer af alternative fertilitets og dødeligheds tendenser,
- at demonstrere hvilken tendens der skal udvikle sig for at opnå en befolkning af en ønsket størrelse og med særlige strukturelle karakteristika,
- at demonstrere forskellige strukturelle implikationer (f.eks. aldersfordeling) af bestemte fertilitets og dødeligheds tendenser for større regioner og aldersgrupper,
- at demonstrere konsekvenserne af påtænkte politiske interventioner.

Det er mest almindeligt at lave prognoser om et lands samlede befolkning, men ofte kan nogle specifikke befolkningsgrupper være mere interessante afhængigt af formålet med prognosen, - eksempelvis befolkningen fordelt på alder og køn, mennesker i den produktive alder, skolesøgende børn og pensionister.

Tidligere udarbejdede man prognoser på helt op til 200 år, men i dag rækker de fleste prognoser kun mellem 30 og 50 år frem i tiden.

Som vi har set, er det en grundlæggende antagelse bag de fleste prognoser, at der i det lange løb vil udvikles lav fertilitet og lav dødelighed på en sådan måde, at befolkningstallet stagnerer eller direkte falder, hvilket vi vil komme lidt mere ind på senere [Lutz, 1994, s. 9].

De fleste globale befolkningsprognoser i de sidste 25 år bygger på en slags teoretisk ramme, således at de mulige indvirkninger på ændringer i adfærd, social, økonomisk eller politiske udviklinger forsøges formidlet ved

hjælp af denne ramme. Prognoserne bruger de bedst tilgængelige data, og er komponent-prognoser.

Lee har foretaget en kritisk analyse af de langsigtede befolkningsprognoser, som bl.a. indeholder overvejelser over demografiens bidrag til forudsigelserne, redegørelse for de teorier som prognoserne bygger på, og refleksioner over graden af usikkerhed på prognoserne [Lee, 1991, s. 64-67]. Lee mener blandt andet, at der i flere af de globale befolkningsprognoser mangler en systematisk og eksplicit formuleret teoretisk ramme. Vi vil komme ind på nogle af disse kritikpunkter i det følgende.

## 6.2 Karakteristik af Verdensbankens model.

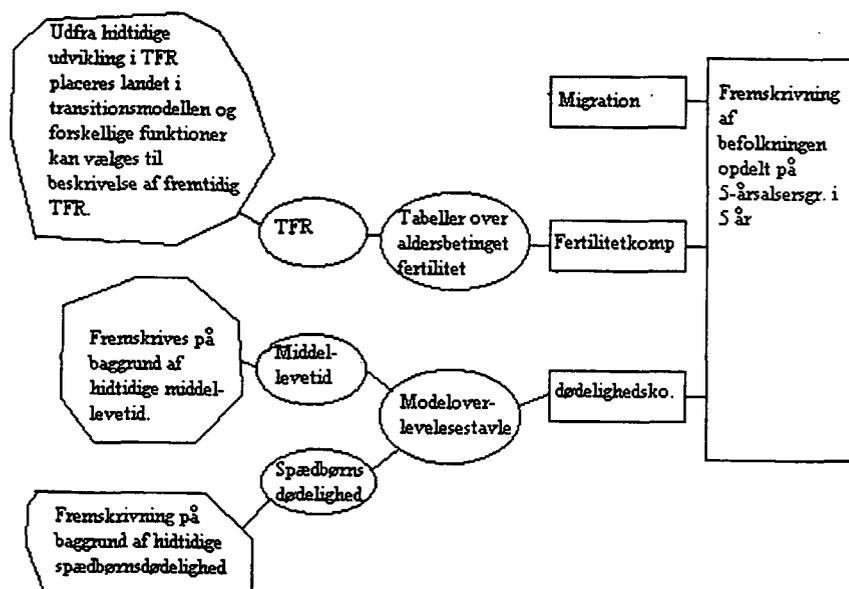
Med udgangspunkt i begreberne fra kapitel 2 vil vi i dette afsnit forsøge at karakterisere Verdensbankens model nærmere ud fra tre forskellige vinkler, nemlig formålet med modellen, modellens indre relationer og modellens relation til virkeligheden.

### 6.2.1 Formålet med modellen.

Det primære formål med Verdensbankens model er jo at foretage så præcise fremskrivninger af verdens befolkning, opdelt på lande, som muligt. Disse fremskrivninger vil formentlig danne baggrund for beslutninger, som Verdensbanken skal tage angående lån eller andre former for økonomisk støtte til de enkelte lande. Uden at vi konkret kan dokumentere det, må man formode, at modellens resultater blandt andet danner baggrund for formulering af betingelser, f.eks. fødselsbegrænsningsprogrammer, som Verdensbanken stiller for at yde kredit.

Af det ovenstående følger, at Verdensbankens model er en forudsigende model (prognose). Modellen skal på en indirekte facon anvendes foreskrivende. Med dette mener vi, at modellen ikke af sig selv foreskriver handlinger, men at fortolkningen af dens resultater indgår som en del af grundlaget for Verdensbankens handlinger, og at resultaterne formentlig indgår som et argument i forhandlinger med låntagerlande.

Skovsmose taler om teknologiske eller videnskabelige interesser bag en model. Han hæfter sig ved, at nogle modeller er en del af en teknologisk erkendeprocess, hvor handlingsaspektet har en væsentlig betydning. Dette i modsætning til videnskabelige interesser, hvor hensigten er at bibringe en større erkendelse



Figur 6.1: Skitse over modellen.

på et givet område. Som det fremgår af det ovenstående, er Verdensbankens model teknologisk, fordi den skal bruges af Verdensbanken i dens varetagelse af sine interesser.

### 6.2.2 Modellens indre relationer.

Modellen består af funktions- og regneudtryk, der kan beskrive fertilitets- og dødelighedsudviklingen på baggrund af viden om landenes indplacering i transitionsmodellen, hvilket igen gøres på baggrund af deres hidtidige fertilitets- og dødelighedsudvikling. Dette bruges som input til tavler/tabeller, der opdeler fertilitets- og dødelighedsudviklingen på aldergrupper. Disse elementer i modellen er som oftest fremkommet ved regressionsanalyse, men i nogle tilfælde er det blot et gæt uden en egentlig empirisk analyse. Der er ofte anvendt logistiske funktioner, logitfunktioner eller potensrækker.

Af ovenstående udtrages simple rater til lineær fremskrivning (5 år af gangen) af befolkningen opdelt på lande og 5-års aldersgrupper. Dette er formuleret på matrix-form (fremskrivningsmatricen), selvom denne form formentlig ikke finder anvendelse ved oversættelse til en computeralgoritme.

Modellen kobler altså udviklingen i de enkelte landes hidtidige befolkningstal til udviklingen i fertilitet og dødelighed, hvorefter der kobles til det fremtidige

befolkningstal.

Modellen er deterministisk, idet ovenstående relationer er simple deterministiske ligninger. Der er således ikke gjort noget specielt for at inddrage det stokastiske element i prognosen. Dette kunne f.eks. være sket ved at bestemme fordelingsfunktioner for hvert element i fremskrivningsmatricen.

Modellen er diskret på tre måder. For det første ved fremskrivningen i tid. Den foretages i skridt på hver 5 år. For det andet ved opdelingen af befolkningen i 5-års aldersgrupper. For det tredje ved opdelingen af befolkningen i lande. Man kan af flere grunde undre sig over, at modellen er diskret. Dels er opdelingen i 5 års aldersgrupper og 5 års tidsskridt grov, og man kan forestille sig, at det giver problemer med nøjagtigheden, hvilket vi vil vende tilbage til i et senere afsnit, dels foretages der mange omstændelige matematiske krumspring indenfor demografien, for at relatere diskrete funktioner til kontinuerte. I den forbindelse kan man undre sig over, at man ikke tager skridtet fuldt ud og arbejder med en kontinuert model.

### 6.2.3 Modellens relation til virkeligheden.

Det virkelighedsfelt, som Verdensbankens model søger at modellere, er ret simpelt. Det er simpelthen verdens fremtidige befolkningstal fordelt på lande, køn og alder. Man har valgt et meget reduceret syn på virkelighedsfeltet, idet man næsten har set helt bort fra de kulturelle, økonomiske og psykosociale mekanismer, som vil påvirke fertilitet og dødelighed.

Modellen bygger, som tidligere nævnt, på transitionsmodellen. Hvis man tager udgangspunkt i den brede betydning, som begrebet teori er brugt i i kapitel 2, kan man godt sige, at det er en form for element i en teori. Der gøres brug af demografiske teknikker (f.eks. overlevelsestavler og kohortekomponentmetoden), som ganske vist spiller en vis rolle i systemafgrænsningsprocessen<sup>1</sup>, men som er matematiske metoder som i sig selv afspejler en forkortning af virkelighedsfeltet, idet de bevæger sig helt udenom det egentlige problem - at fremskrive fertilitet og dødelighed. Fremskrivningerne foretages jo ved hjælp af relationer, som er fremkommet på rent empirisk baggrund uden nogen mere samlet form for teoretisk refleksion. Alt i alt må modellen derfor siges at være empirisk funderet, selvom der er ansatser til teoriunderbygning i transitionsmodellen og de demografiske teknikker. Disse vil dog slet ikke kunne leve op til Jensens strenge krav til teoretiske modeller jævnfør kapitel 2.

---

<sup>1</sup>Her tænkes på, at teknikkerne anlægger et syn på virkelighedsfeltet, hvor man ser på fertilitet og dødelighed.

## 6.3 Kritik af modellens grundantagelser.

I denne sammenhæng vil vi forholde os til to problemstillinger, nemlig dels befolkningsudviklingens afhængighed af historiske og samfundsmæssige forhold, dels transitionsmodellen som forudsætning for de mest udbredte globale befolkningsprognosemodeller, og påstanden om udviklingen frem mod et stabilt befolkningstal.

### 6.3.1 Befolkningsudviklingen betragtes isoleret.

Det er karakteristisk for Verdensbankens prognosemodel, at den bygger på en fremskrivning af befolkningstallets historiske udvikling, og at økonomiske og samfundsmæssige forhold, så som for eksempel ressourceproblematikken, ikke er direkte afspejlet i modellen.

I en situation hvor grænserne for markedsøkonomiens vækst og udnyttelsen af naturressourcerne fremstår mere og mere tydelig, er det derfor relevant at stille følgende spørgsmål [Lee, 1991, s. 52]:

- Vil økonomiske signaler (priser, lønninger m.m.) i tilstrækkelig grad afspejle de knappe ressourcer, som opstår på baggrund af befolkningsvæksten over det næste halve eller hele århundrede?
- Hvis økonomien signalerer ressourceknaphed, hvordan vil befolkningen så reagere?
- Hvis økonomien ikke signalerer disse ressourceproblemer, hvordan vil disse problemer så ramme befolkningen?

På grund af den stigende ressourceknaphed kan udviklingsmønstrene i befolkningstallet fremover formodes at adskille sig væsentligt fra tidligere historiske perioder, og behovet for at disse ændrede samfundsmæssige vilkår indgår mere direkte i modellen, er derfor åbenlyst.

### 6.3.2 Stabilitets problematikken.

Vi har set, at Verdensbankens model bygger på den såkaldte transitionsmodel, hvis centrale pointe blandt andet er, at fertiliteten antages at falde til reproduktionsniveauet, og at befolkningens størrelse derefter ikke vil ændre sig nævneværdigt. Man kan spørge, om denne antagelse er rimelig.

Transitionsmodellen afspejler en konstateret udvikling for mange i-lande, men vi har ikke set en egentlig argumentation for modellen i den forstand, at modellen også skulle have gyldighed for andre samfundstyper på andre historiske tidspunkter, og man kunne i forlængelse her af spørge, om man for eksempel ikke kunne forestille sig mere markante fald i fertiliteten, end dem modellen afspejler?

Det springende punkt er imidlertid om u-landene automatisk vil følge den samme udvikling i fertilitet og dødelighed som i-landene, - en forestilling som transitionsmodellen bygger på. Det synes at være tilfældet for nogle lande i Sydøstasien, men for store dele af Afrika findes der ingen tegn på en sådan udvikling. Der kan man sige, at i-landene har understøttet befolkningsekspllosionen, idet medicinsk hjælp og vaccinationsprogrammer betyder, at flere lever længere<sup>2</sup>, men i-landene har ikke samtidigt understøttet en samfundsmæssig og økonomisk udvikling, som kunne betyde et fald i fertiliteten.

En påstand om en stagnation af befolkningstallet på længere sigt er således vanskelig at underbygge, men for at specielt landene i Afrika skal kunne gennemløbe en tilsvarende fertilitets- og dødelighedsudvikling som i-landene, kan man i hvert fald sige, at det kræver økonomiske og samfundsmæssige strukturændringer og igangsættelse af familieplanlægningsprogrammer.

## 6.4 Kritik af tilpasningerne til virkeligheden.

Som vi har set bygger en prognosemodel, som alle andre modeller, på nogle forsimplinger af virkeligheden. Disse forsimplinger, der hører til modellens systemafgrænsning, kan være årsag til væsentlig usikkerhed i prognoseresultaterne. Vi vil i dette afsnit fokusere på nogle af de væsentlige kilder til usikkerhed, nemlig modellens geografiske udgangspunkt, modeloverlevelsestavlerne og modellens migrations- og AIDS-antagelser.

### 6.4.1 Modellens geografiske udgangspunkt - lande eller regioner.

Verdensbankens befolkningsprognosemodel bygger på enkeltlande, altså selvstændige nationalstater, og summen af disses befolkningstal i prognosen ender op med at udgøre prognoseresultatet for hele verdensbefolkningen. Det er

---

<sup>2</sup>Vi har således allerede set et væsentligt mere markant fald i dødeligheden i visse u-lande, end det som typisk afspejles i transitionsmodellen.

ikke sådan, at der også er foretaget en selvstændig global prognose byggende på globale gennemsnitstal for fertilitet, dødelighed og (migration), og med efterfølgende afstemning i forhold til det aggregerede resultat for enkeltlandene, med henblik på opnåelse af konsistens mellem de to resultater.

Der ville også opstå problemer ved at udarbejde en sådan global prognose byggende på gennemsnitstal. Problemer som også opstår, når man udarbejder prognoser for et enkelt land og dets delbefolkninger, f.eks. befolkningerne i kommuner og amter, eller, i et stort land som USA, inkonsistens mellem den nationale befolkningsprognose og de 50 delstaters befolkninger. Disse problemer kan deles op i to, som vi efterfølgende vil se nærmere på, nemlig dels usikkerheder der opstår som følge af heterogene delbefolkningers naturlige vækstkomponenter, altså fertilitet og dødelighed, dels usikkerheder der angår migrationer.

Problemet med valg af geografisk niveau består i, hvorvidt den valgte geografiske enhed repræsenterer en i demografisk henseende homogen befolkning, hvad enten der er tale om en enkeltnation, en kommune, et amt, en delstat, eller for den sags skyld hele Verden. Foretager man en befolkningsfremskrivning for en nation med en heterogen befolkningssammensætning, hvor de demografiske parametre for delbefolkningerne er vidt forskellige, da vil resultatet blive forskelligt afhængigt af, om man beregner ud fra nationale gennemsnitstal eller ud fra delbefolkningernes demografiske parametre, i denne forbindelse fødsels- og dødelighedstal.

Eksempler på lande, med befolkninger der er demografisk inhomogene, er f.eks. lande som Sydafrika og USA, hvor den sorte befolkning har højere fertilitet end den hvide befolkning. Tilsvarende forskelle gælder for den indianske kontra den hvide befolkning i Bolivia og Peru, og for den fattige kontra den rige befolkning i lande som Indien og Brasilien. Forskellen i tallene opstår, fordi befolkningsgruppen med den højeste vækstrate i en inhomogen befolkning vil udgøre en stadig større andel af den samlede befolkning, et forhold der ikke kommer til udtryk, når man kun regner med nationale gennemsnitsvækstrater, hvor delbefolkningernes andele af totalbefolkningen anses for konstante. Lutz angiver som eksempel [Lutz, 1994, s. 26], at det giver en forskel på 50 procent i prognoseresultatet, såfremt man opdeler Verden i seks delregioner, i forhold til hvad resultatet giver, hvis man betragter Verden som en region<sup>3</sup>.

<sup>3</sup>Et konkret eksempel: I Sydafrika var landets naturlige vækstrate, d.v.s. ( $F - D$ ), i 1990 på 24 promille. Den sorte befolkning, der udgjorde cirka 31 mill. i 1990, havde en vækstrate på 27.1 promille, mens den hvide befolkning, der udgjorde cirka 5 millioner, havde en vækstrate på cirka 5 promille. Forudsættes uændrede vækstrater frem til 2020, giver en

Selv om befolkningers inhomogenitet således kan spille en ret afgørende rolle for prognoseresultatet<sup>4</sup>, er det dog ikke klart, hvor meget man skal underopdele en befolkning for at undgå problemet<sup>5</sup>. En yderligere underopdeling vil bl.a. skabe problemer med datamaterialet, der for øjeblikket er lettest tilgængeligt på landeniveau.

Også hvad angår migrationselementet, har det en betydning, hvilket geografisk niveau man opererer med i prognosen. Regnes med enkeltlande, som i Verdensbankens prognose, vil en samtidig fremskrivning for Verdens mere end 150 lande blive meget besværlig, især hvad angår fastlæggelse af migrationsmatricer<sup>6</sup>, der jo skal tage hensyn til alle typer af komplekse migrationsmønstre imellem disse lande indbyrdes<sup>7</sup>.

For bl.a. at minimere betydningen af en intens migrationstrafik mellem et stort antal enkeltlande, samt de prognosemæssige fejlkilder dette kunne lægge grunden til, har IIASA<sup>8</sup> netop foreslået en multistatsmodel, således at betydningen af migrationen bliver væsentlig mindre.

Det synes logisk, at migrationselementet i en sådan prognose bliver lettere at håndtere. På den anden side forekommer en sådan storopdeling i homogene landegrupper at gå imod det før beskrevne princip om opdeling i stadig mindre regioner for at mindske betydningen af forskelle i delbefolkningers naturlige vækstrater. Den type inhomogenitet der består i, at der indenfor et land er store forskelle på rig og fattig, og af denne grund stor forskel i

---

simpel eksponentiel fremskrivning en befolkning på 73.3 millioner, hvis man anvender den nationale gennemsnitsvækstrate, og 74.9 millioner, hvis man anvender subpopulationernes respektive vækstrater og adderer deres respektive prognoseresultater.

<sup>4</sup>[Keyfitz, 1977, s. 14-18] giver yderligere konkrete eksempler på, samt en teoretisk udredning af, betydningen af inhomogene delbefolkninger i et land.

<sup>5</sup>Se [Lutz, 1994, s. 26].

<sup>6</sup>I [Rogers, 1975] er migrationsmatricer anvendt til udarbejdelse af såkaldte multiregionale projektmatrixer.

<sup>7</sup>Hvilket ifølge [Lutz, 1994, s. 27] netop er begrundelsen for, at Verdensbanken (og FN) i deres prognoser nedtoner betydningen af migrationen, se kapitel 5.

<sup>8</sup>The Institute for Applied Systems Analysis (IIASA), Laxenburg, Østrig. IIASA's prognose er, i modsætning til andre prognoser, ikke bygget på de enkelte lande, men på en opdeling af verden i 12 regioner, d.v.s. geografiske områder, hvor befolkningsforholdene i den enkelte region er rimeligt ensartet. Ekspertter med særligt kendskab til de enkelte regioner sættes til at udarbejde analyser med henblik på at estimere, hvordan fertilitet, dødelighed og migration minimalt og maksimalt udvikler sig i fremtiden.

Herefter operationaliseres de synspunkter, som eksperterne udtrykker, og der udarbejdes scenarier for de tre parametre med henholdsvis en høj og en lav værdi, altså i alt 8 scenarier. I forlængelse heraf udarbejdes så et særligt scenarium, som kombinerer de tre centrale antagelser, som i alle tilfælde er gennemsnittet af de høje og lave værdier. Prognosen udarbejdes på baggrund af en multiregional kohorte-komponentmodel med femårige aldersgrupper. Året 1990 er udgangspunktet og baseret på FN's data.

fødselshyppighed og dødelighed mellem disse grupper, bliver fortsat ikke opfanget, hvis homogenitetsopdelingen, som i IIASA's tilfælde, især omfatter landegrupper, der udgør et sammenhængende geografisk område, eller er homogene hvad angår udviklingsniveau, etnisk, kulturel og historisk baggrund.

### 6.4.2 Kritik af modeloverlevelsestavlerne.

Kritikken mod Coale og Demenys modeller tager udgangspunkt i, at modellerne næsten udelukkende er bygget på datamateriale fra Europa, således at det er det europæiske dødelighedsmønster, der især afspejles i modeltavlerne, og at mange u-landes dødelighedsmønster måske ikke præcist nok er dækket ind i udvalget af modeltavler, idet dødsårsager, sygdomsmønstre samt kulturelle forhold kan være meget forskellige fra dem i Europa.

Endvidere er det fremført som kritikpunkt, at de fire regions-modeltavler giver for ringe dækningsgrad med hensyn til at kunne indfange diversiteten af dødelighedsmønstre i denne del af verden. Ofte vil ingen af de fire Coale og Demeny modeller nemlig fitte et observeret mønster tilfredsstillende. For eksempel afspejles forholdet mellem børne- og spædbørnsdødeligheden i Vestafrika ikke tilstrækkeligt præcist i Coale og Demenys modeltavler. Brass konstaterer<sup>9</sup> direkte, at Coale og Demeny-modellerne i hvertfald ikke afspejler dødelighedsmønstrene i følgende lande: Tyrkiet, Rusland, Bulgarien, Guyana, Mauritius og Malaysia, og derfor gør Brass sig til talsmand for, at logit-systemet er et mere fleksibelt system end modeloverlevelsestavlerne<sup>10</sup>.

### 6.4.3 Kritik af modellens migrationsantagelser.

Verdensbanken opererer som nævnt i kapitel 5 med, at migrationen bliver nul kort ind i næste århundrede. Denne antagelse forekommer, på basis af erfaringerne fra 1990'erne, at være meget urealistisk, idet antallet af økonomisk betingede migrationer, migrationer som følge af krige og borgerkrige, samt migrationer med basis i miljøødelæggelse, har antaget et stadigt stigende omfang. Verdensbanken begrundet ikke deres migrationsantagelser, men de ligger m.h.t. grundopfattelse i forlængelse af en udvikling svarende til den demografiske transitionsmodel, altså at en "kaotisk udvikling" normaliseres, d.v.s. alle de demografiske "bomber" afmonteres, idet der forudsættes en positiv økonomisk og social udvikling også i u-landene, - hvilket der dog ikke er meget, der tyder på i øjeblikket, ihvertfald ikke i Afrika.

<sup>9</sup>I følge [Newell, 1988].

<sup>10</sup>Se [Coale, 1983] og [Newell, 1988], - om logitmodeller, se appendiks B.

I betragtningerne vedrørende Verdensbankens vurdering af den fremtidige migration er der dog muligvis også taget hensyn til de toneangivende politiske strømninger i i-landene, og set alene på den baggrund giver den lavt satte migration lidt mere mening. Helhedsindtrykket er dog, at nedtoningen af migrationens betydning er urealistisk, og måske i højere grad skyldes hensynet til rent regnetekniske forhold, idet det er en kompliceret sag at håndtere migrationsmatricerne i en prognose.

#### 6.4.4 Kritik af modellens AIDS-antagelser.

Som det er beskrevet i kapitel 5, opererer Verdensbanken med, at antallet af nye AIDS-tilfælde halveres hvert år efter år 2005. Den anvendte epidemiologiske model kan dog kun bruges på lande med et måleligt HIV-infektionsniveau, hvilket kun gør modellen brugbar på i-lande.

I i-landene, bl.a. i Danmark, er antallet af årlige AIDS-dødsfald tilsyneladende toppet, primært p.gr.a. en massiv forebyggelsesindsats, og med den nuværende forskningsindsats in mente forekommer det i høj grad realistisk, at der indenfor 5-10 år også vil være en medicinsk løsning på problemet. Er en sådan vaccinations-løsning først tilgængelig i i-landene, viser erfaringerne, at den også hurtigt kan komme u-landene til gode, bl.a. via WHO<sup>11</sup>. Da prisniveauet for en eventuel AIDS-vaccine imidlertid ikke kendes, og vaccinen ikke er udviklet endnu, må det dog alt i alt konkluderes, at Verdensbankens AIDS-antagelser er behæftet med rimelig stor usikkerhed.

### 6.5 Kritik af modellens matematisering.

I dette afsnit vil vi beskrive nogle af de fejkilder, der opstår i relation til matematiseringsprocessen<sup>12</sup>. Blandt andet af hensyn til datatilgængeligheden er det nødvendigt med nogle forkortninger omkring de i modellen indgående formler. Disse simplifikationer er nødvendige for overhovedet at kunne udarbejde en global model, men de repræsenterer også en modificering af virkeligheden, således at modellen ikke helt afspejler virkelighedens verden.

<sup>11</sup>WHO, World Health Organisation, FN's sundhedsorganisation.

<sup>12</sup>Jævnfør kapitel 2.

### 6.5.1 Kontinuert kontra diskret matematik i modellen.

Som det er fremgået bygger kohorte-komponentmetoden på fremskrivning af befolkninger i aldersgrupper på 5 år. Stort set alle inputværdier i kohorte-komponentmatricen er udarbejdet som gennemsnit af værdier målt med 5 års mellemrum, det være sig overlevelseshæder som fertilitetsrater. Dette betyder, at prognosen er baseret på diskret og ikke kontinuert matematik.

Dødelighedsfunktionen  $\mu(x)$  og den tilsvarende overlevelseshæderfunktion  $l(x)$  må i virkelighedens verden betragtes som tæt på kontinuerede funktioner. For at vurdere betydningen af at gå fra en kontinuert virkelighed til en diskret opbygget model af denne, kan vi se på et eksempel fra Danmark, der kan belyse dele af problemstillingen.

I Danmark er risikoen for at dø relativ høj fra 0-1 år, derefter er dødsrisikoen forsvindende lille indtil cirka 40 års alderen, hvorefter den igen er stigende. Overlevelseshæderkurven vil derfor, med en middellevetid for kvinder på 77.8 år i 1993-94, være næsten vandret i perioden fra 1-40 år, derefter kraftigt nedadgående. Kurven for  $l(x)$ <sup>13</sup> danner i aldersgruppen over 40 år en konkav bueform<sup>14</sup>. Forbinder man to punkter med 5-års afstand på en konkav bueform fås en linie, der i hele intervallet vil ligge under den konkave bue. Arealet mellem linien og buen repræsenterer den akkumulerede forskel i gennemlevet tid  $L(x)$ . Arealet mellem den kontinuerede og konkave  $l(x)$ -kurve er nemlig den præcist gennemlevede tid i løbet af et femårsinterval, mens arealet under den rette linie der forbinder intervalendepunkterne er en lineær approximation af den af befolkningen gennemlevede tid i løbet af 5-års perioden. De overlevelseshæder der opereres med i overlevelseshæder og modeloverlevelseshæder er

<sup>13</sup>Strengt taget bør vi kalde overlevelseshæderfunktionen for den konkrete befolkning for  $k(x)$  og ikke  $l(x)$ , idet vi har reserveret denne betegnelse til at være den stabile overlevelseshæderbefolknings overlevelseshæderfunktion. I det afsnit vi er i gang med her, prøver vi netop på at vurdere, hvilken forskel der er mellem en konkret befolkning med en tænkt kontinuert overlevelseshæderfunktion, altså så tæt på virkeligheden man kan komme, og en overlevelseshæderfunktion der bygger på approximationer v.h.j.a. gennemsnitsværdier af diskret observerede værdier, med 5 års mellemrum, af  $k(x)$ . Dette svarer til, at vi i modellen opererer med en stykkevis lineær kontinuert approximation til den virkelige  $k(x)$ -overlevelseshæderfunktion. Da vi imidlertid ikke kender den virkelige  $k(x)$ -funktion imellem 5-års intervalendepunkterne, har vi ikke mulighed for matematisk at operere med den, og for ikke yderligere at komplicere gennemgangen, bruger vi lidt ukritisk betegnelsen  $l(x)$  også om den konkrete befolknings overlevelseshæderfunktion.

<sup>14</sup>I appendiks A: Middellevetid og dødelighed, figur A.1 er angivet overlevelseshæderfunktionen  $l(x)$  i forskellige typer af lande. Danmarks  $l(x)$ -kurve svarer til kurven med den lave H-værdi. Overlevelseshæderfunktionen for Danmark er i detaljer vist i appendiks C, s. 12-14. Som det fremgår af graferne viser det sig, at den er konveks i aldersintervallet  $[0, 5]$ , især mellem  $[0, 1]$ . Desuden er overlevelseshæderfunktionen konveks i aldersintervallet  $[85, 100]$ .

netop udregnet som et forhold mellem approximationer af gennemlevet tid for to på hinanden følgende 5-års aldersklasser:  $s(x) = L(x+5)/L(x)$ . Argumentationen ovenfor gælder selvfølgelig også såfremt  $l(x)$ -kurven er konveks. Da vil det approximerende trapez blot ligge over  $l(x)$ -kurven.

Nu forholder det sig faktisk sådan, at vi har mulighed for at vurdere usikkerheden ved at anvende denne approximation for gennemlevet tid, idet Danmarks Statistik i deres overlevelsestavler opererer med 1-års aldersklasser<sup>15</sup> i stedet for modellens 5-års aldersklasser. Dette giver derfor mulighed for at beregne overlevelseshastigheder ud fra lineære approximationer baseret på 1 års aldersklasser, hvorved vi kommer tættere på den virkelige verdens kontinuerte  $l(x)$ -kurve. Disse tal kan vi så sammenligne med en opgørelse baseret på 5-års aldersklasser. Resultatet af denne sammenligning fremgår af søjle 4 og 5 i tabel 6.1. Som et eksempel på beregningsproceduren udregner vi nedenfor først overlevelseshastigheden ud fra 1-års intervaller (tæt på kontinuert overlevelseskurve):

$$s(70)_1 = \frac{L(75)}{L(70)} = \frac{\frac{1}{2}l(75) + \dots + l(77) + \dots + \frac{1}{2}l(80)}{\frac{1}{2}l(70) + \dots + l(72) + \dots + \frac{1}{2}l(75)} = \frac{297509}{357809} = 0.83147$$

Beregnet ud fra gennemsnittet af værdier med 5-års mellemrum (d.v.s. diskret) svarende til beregningsmetoden i standard-overlevelsestavler og modeloverlevelsestavler, fås:

$$s(70)_5 = \frac{L(75)}{L(70)} = \frac{\frac{5}{2}(l(75) + l(80))}{\frac{5}{2}(l(70) + l(75))} = \frac{118439}{142646} = 0.83030$$

Beregningen af  $s(x)_1$  og  $s(x)_5$  bygger begge på integration v.h.j.a. trapezmetoden<sup>16</sup>. Den procentvise afvigelse mellem  $s(70)_1$  og  $s(70)_5$  er 0.141%. På tilsvarende måde udregnes:

$$s(75)_1 = 0.74049 \quad \text{og} \quad s(75)_5 = 0.73928$$

svarende til en afvigelse på 0.163%. Det ses, at afvigelsen i dette aldersområde opfører sig som forventeligt, altså at den "kontinuerte" overlevelseshastighed  $s(x)_1$  systematisk er højere end den diskrete  $s(x)_5$ . Undersøger vi tilsvarende overlevelseshastighederne for de midaldrende aldersgrupper, hvor  $l(x)$ -kurven er nærmest retlinet, må vi forvente en god overensstemmelse mellem "kontinuert"

<sup>15</sup>Se appendiks C, s. 5, Danmarks Statistik: Dødelighedstavle for Danmark for årene 1993-94.

<sup>16</sup>Arealet af et trapez er  $A_T = h \cdot \frac{1}{2}(a + b)$ , hvor  $a$  og  $b$  er længden af de parallelle sider og  $h$  afstanden mellem dem. Ved beregning af approximationen  $s(x)_1$  er  $h$  derfor lig 1, og  $a = l(x)$  og  $b = l(x+1)$ . Ved beregning af  $s(x)_5$  er  $h$  lig 5, og  $a = l(x)$  og  $b = l(x+5)$ .

$s(x)$	C/D, $e(0) = 77.5$	C/D, $e(0) = 80.0$	$e(0)_1 = 77.78$	$e(0)_5 = 77.78$
$s(0)$	0.99803	0.99924	0.99844	0.99643
$s(5)$	0.99902	0.99945	0.99926	0.99924
$s(10)$	0.99851	0.99908	0.99909	0.99899
$s(15)$	0.99757	0.99847	0.99847	0.99858
$s(20)$	0.99675	0.99829	0.99826	0.99819
$s(25)$	0.99624	0.99827	0.99754	0.99750
$s(30)$	0.99560	0.99783	0.99587	0.99577
$s(35)$	0.99366	0.99651	0.99263	0.99260
$s(40)$	0.99046	0.99316	0.98818	0.98785
$s(45)$	0.98510	0.98646	0.98090	0.97883
$s(50)$	0.97771	0.97368	0.97001	0.96941
$s(55)$	0.96550	0.95261	0.95154	0.95113
$s(60)$	0.94096	0.91873	0.92434	0.92401
$s(65)$	0.89789	0.86305	0.88788	0.88683
$s(70)$	0.82197	0.77320	0.83147	0.83030
$s(75)$	0.71929	0.65807	0.74049	0.73928
$s(80)$	0.56394	0.50061	0.59991	0.60671
$s(85)$	0.38000	0.32535	0.42731	0.44593
$s(90)$	0.19868	0.16457	0.26231	0.27473

**Tabel 6.1:** Sammenligning af overlevelsesser udregnet ud fra henholdsvis 5-års og 1-års aldersklasser.

Forklaring til tabellens søjler:

- Søjle 1:  $s(x)$  = Overlevelsesser.
- Søjle 2: Overlevelsesser fra Coale/Demenys overlevelsestavle, Model North, niveau 24,  $e(0) = 77.5$  år, kvinder.
- Søjle 3: Overlevelsesser fra Coale/Demenys overlevelsestavle, Model West, niveau 25,  $e(0) = 80.0$  år, kvinder.
- Søjle 4: Overlevelsesser beregnet for Danmark, kvinder,  $e(0) = 77.78$  år (1993-94) ud fra 1-års aldersklasser:

$$s(x)_1 = \frac{L(x+5)}{L(x)} = \frac{\frac{1}{2}l(x+5) + \dots + l(x+7) + \dots + \frac{1}{2}l(x+10)}{\frac{1}{2}l(x) + \dots + l(x+3) + \dots + \frac{1}{2}l(x+5)}$$

- Søjle 5: Overlevelsesser beregnet for Danmark, kvinder,  $e(0) = 77.78$ , år (1993-94) ud fra 5-års aldersklasser:

$$s(x)_5 = \frac{L(x+5)}{L(x)} = \frac{\frac{5}{2}(l(x+10) + l(x+5))}{\frac{5}{2}(l(x) + l(x+5))}$$

og diskret. F.eks er:  $s(35)_1 = 0.99263$ , og  $s(35)_5 = 0.99260$ , hvilket giver en afvigelse på kun 0.003%, helt som forventeligt. Undersøges endelig på tilsvarende måde  $s(0)_1$  og  $s(0)_5$  fås henholdsvis 0.99844 og 0.99643, - en afvigelse på 0.201%, en væsentlig større forskel end for gruppen af midaldrende.

Opsummerende kan vi konkludere følgende angående sammenligningen af søjle 4 og 5 i tabel 6.1.: Der hvor  $l(x)$ -kurven krummer mest, d.v.s. i den første aldersgruppe samt i de ældre aldersklasser over 40 år, er afvigelsen i tallene størst, mens den er forsvindende lille i aldersgrupperne i intervallet  $[5, 40]$  år.

Desuden ses, at overlevelseshastighederne  $s(x)_1 > s(x)_5$  i aldersintervallet  $[0, 75]$  (undtaget er dog  $s(15)$ ), mens  $s(x)_1 < s(x)_5$  i de tre sidste aldersgrupper, hvor %-afvigelsen iøvrigt har ret høje værdier. Dette vil vi forklare ved, at  $l(x)$ -kurven i disse aldersgrupper nærmere beskriver en konveks bue, og ikke en konkav, som den gør i de øvrige aldersgrupper i intervallet  $[5, 75]$ <sup>17</sup>.

Resultatet af undersøgelsen viser, at det har en vis betydning at gå fra kontinuert til diskret matematik i modellen. Det viser sig ved udregning, at  $l(50)_1 = 94965$  og  $l(50)_5 = 94519$  personer, hvilket vil sige en forskel på 446 pr. 100000 personers udgangskohorte, eller 0,45%. Dette repræsenterer måske nok umiddelbart en ringe fejlkilde, men da den involverer de føde-dygtige aldre, har den også betydning for de reproduktive aldersgruppers antal og dermed på fødselsniveauet. Tilsvarende udregnes  $l(80)_1 = 44291$  og  $l(80)_5 = 43836$ , altså en forskel på 455 pr. 100000 personers udgangskohorte ( $l(0)$ ), altså en afvigelse på 0.46%, for hele perioden hvor  $s(x)_1 > s(x)_5$ , d.v.s. fra  $[0, 80[$  år. Betragter vi endelig det samlede resultat efter anvendelse af  $s(90)$  fås  $l(95)_1 = 2978$  og  $l(95)_5 = 3258$ , hvilket er en afvigelse på 280 personer pr. 100000, en slutforskel på 0,28% på totalresultatet, hvor altså

<sup>17</sup>I vores konkrete detailundersøgelse af kurven, der viser Danmarks overlevelseshastighed, har vi fundet følgende resultater:

1.  $s(x)_1 > s(x)_5$ , når kurven går fra at være konveks i intervallet  $[x, x + 5[$  til at være retlinet i det efterfølgende interval  $[x + 5, x + 10[$ . Det forklarer, at  $s(0)_1 > s(0)_5$ .
2.  $s(x)_1 > s(x)_5$ , når kurven i begge intervaller  $[x, x + 5[$  og  $[x + 5, x + 10[$  er konkav. Det forklarer, at  $s(x)_1 > s(x)_5$  i intervallet  $[5, 75[$ .
3.  $s(x)_1 < s(x)_5$ , når kurven går fra retlinet eller konkav i intervallet  $[x, x + 5[$  til konveks i det efterfølgende interval  $[x + 5, x + 10[$ . Det forklarer, at  $s(85)_1 < s(85)_5$ .
4.  $s(x)_1 < s(x)_5$ , når kurven i begge intervallerne  $[x, x + 5[$  og  $[x + 5, x + 10[$  er konveks. Det forklarer, hvorfor  $s(90)_1 < s(90)_5$  og tilsvarende  $s(95)_1 < s(95)_5$ .

At det forholder sig sådan, har vi også eftervist ved at fitte forskellige kontinuerte polynomiefunktioner til de ovennævnte aldersintervaller, og demonstreret, at udsagnene ovenfor også gælder på et mere generelt plan. Vi har dog ikke givet et egentligt bevis herfor.

$l(95)_5 > l(95)_1$ , altså giver den lineære approximation baseret på anvendelse af 5-årsaldersgrupper et marginalt større samlet prognoseresultat i forhold til en tættere på kontinuert approximation baseret på 1-års aldersgrupper.

Bemærk, at de her omtalte overlevelsesserater ikke konkret indgår i modellen, der jo overalt opererer med modeltavlernes overlevelsesserater. Eksemplet viser blot, at modeltavlernes  $P(x)$ -værdier, der jo er konstrueret som  $s(x)_5$ -værdierne i ovennævnte eksempel, også arver en fejlkilde hidrørende fra at gå fra kontinuert til diskret, som vi netop viste ovenfor.

En anden usikkerhedsfaktor udspringer af, at dødelighedsfunktionen ændrer sig indenfor et 5-års interval. Dødeligheden bliver lavere og overlevelsesseraten også af denne grund større, end hvis man kun opererede med gennemsnit af værdier målt hvert 5'te år. Mere generelt er dette en følge af, at dødeligheds-/overlevelsessfunktionen altså både afhænger af alder og af kalendertid. Begge disse forhold kommer ikke til udtryk i de anvendte approximationer af gennemlevet tid. Overlevelsesseraten regnes konstant i hver 5-års periode, idet dødeligheden regnes konstant i hver 5-års periode. Også den befolkning, der forudsættes udsat for de givne dødsrater, regnes for konstant i 5-årsperioden.

Nu gælder det jo for kohorte-komponentmetoden, at overlevelsesseraterne er hentet fra Coale/Demenys modeltavler. Disse tavlers  $P(x) = s(x)$ -værdier er som nævnt beregnet ud fra 5-års aldersklasser. For de første 3 femårsperioder er i prognosen for Danmark anvendt North-modellen, se søjle 2 i tabel 6.1, for de efterfølgende femårsperioder er anvendt model West, se søjle 3.

Sammenligner vi nu de ud fra 1-års aldersklasser beregnede  $s(x)$ -værdier i søjle 4, eller de tilsvarende for fem-årsaldersklasser i søjle 5 for Danmark, med modeltavlesøjlerne 2 og 3 kan man spore en langt mere markant forskel i overlevelsesseraterne, en forskel der ikke kun kan forklares ved, at  $e(0)$  for de danske kvinder er 0.28 år højere end Coale/Demenys modelkvinder i f.eks. søjle 2. Det er nemlig iøjenfaldende, at såfremt man i stedet betragter Coale/Demenys tavle, West, niveau 25, med  $e(0) = 80.0$  år, da ses meget markant for de ældre aldersgrupper<sup>18</sup>, også generelt lavere overlevelsesserater<sup>19</sup>, selv om niveauet for middellevetid nu er 2.22 år højere for modeltavlekvinderne end for de danske kvinder. Betydningen heraf må være, at modeltavlerne udgør en markant fejlkilde i modellen, især i lande med høj middellevetid og derfor stor andel af befolkningen over 65 år (i Danmark er

<sup>18</sup>Som det ses, gælder dette også for North-modeltavlen i søjle 2, altså markant lavere overlevelsesserater i de ældre aldersgrupper.

<sup>19</sup>I de aldersgrupper, hvor North- og West-modellerne har højere  $s(x)$ -værdier end de danske i søjle 4 og 5, er der tale om procentuelt små afvigelser, hvorimod afvigelserne derimod er store, og derfor samlet mere betydningsfulde, i de ældre aldersgrupper.

det 15%). Dertil skal føjes, at når middellevetiden er stigende i i-landene, er det især som følge af lavere dødelighed blandt de ældre<sup>20</sup>. Det er oplagt ud fra tallene i tabel 6.1, at fejlen accelererer kraftig, når man efter den tredje 5-års prognoseperiode begynder ensidigt at anvende West-modellen. Bemærk iøvrigt her, at hvad angår værdien  $s(0)$ , afviger tallene i modeltavlesøjlerne 2 og 3 kun marginalt fra tallene i søjle 4 og 5. Den lave afvigelse her, hvor  $l(x)$ -funktionen som nævnt også krummer stærkt, skyldes uden tvivl, at Coale/Demenys modeltavler også har særlige overlevelseshastigheder for spædbørn, d.v.s. børn mellem nul og 1 år, og de har jo netop en langt større dødelighed end de efterfølgende fire aldersgrupper, så her er Coale/Demeny opmærksom på, at overlevelseshastigheden udregnet efter den sædvanlige diskrete metode:  $s(x) = L(x + 5)/L(x)$ , giver en for stor fejl såfremt aldersgruppen fra  $[0, 5[$  ikke underopdeles i aldersgrupperne  $[0, 1[$  og  $[1, 5[$ .

Sammenligner man nu Danmarks Statistiks prognose for Danmarks befolkning med Verdensbankens prognose, begge for år 2030, er resultaterne følgende:

- Danmarks Statistik: 5493900 indbyggere
- Verdensbanken: 5213000 indbyggere

altså en forskel på 280000. Fejkilderne beskrevet ovenfor angående overlevelseshastighedernes størrelse, især dem hidrørende fra modeltavlerne og deres konstruktion, samt den lavt vurderede migration<sup>21</sup> i Verdensbankens model, virker begge som mulige og sandsynlige forklaringsvariable til prognoseforskellen på de 280000 personer.

## 6.6 Metoder til evaluering af modellens prognoseresultater.

Vi har både i kapitel 1 og 2 været inde på mulige metoder til evaluering af en models resultater. Vi nævnte, at empiribaserede modeller naturligvis må evalueres som en enkeltstående model, hvorimod teoribaserede modeller også kan evalueres som led i evalueringen af en samlet teori. De fleste modeller er naturligvis en blanding. Verdensbankens befolkningsprognosemodel er

<sup>20</sup>Se Danmarks Statistik: Befolkningens bevægelser, 1994, tabel 30: Middellevetider for udvalgte aldersgrupper, 1931-1990. Også børn og unge har haft overgennemsnitligt stigende middellevetider.

<sup>21</sup>Jævnfør afsnit 5.3.

overvejende en empiribaseret model med transitionsmodellen som et fælles teorielement med andre lignende modeller.

Befolkningsprognosemodeller forsøger at sige noget om fremtiden, hvilket af gode grunde sætter visse grænser for en konfrontation af modellernes resultater med virkeligheden. I mangel af bedre er man derfor henvist til blandt andet at analysere, hvordan modellerne har været i stand til at forudsige befolkningstallet på forskellige fortidige tidspunkter, og at sammenligne modellernes resultater med andre befolkningsmodellers resultater.

Da vi altså ikke har nogen mulighed for at evaluere modellens fremtidige prognoser, vil vi nedenfor inddrage et eksempel på hver af de to nævnte typer af evaluering, nemlig dels en historisk analyse, dels en komparativanalyse.

### 6.6.1 Keyfitz' historiske analyse.

Demografer ved naturligvis, at der er en grænse for, hvor præcist fremtiden kan estimeres, og en nærmere analyse af fortiden kan fortælle os lidt mere om den grænse. Således viser en undersøgelse af 1123 prognoser udarbejdet i perioden 1939-68 for perioden 1950-80, at jo yngre prognosen er jo mindre er afvigelsen fra det virkelige befolkningstal, og at den gennemsnitlige kvadratiske afvigelse var 0.53 [Keyfitz, 1981, s. 583].

I et forsøg på at komme om bag disse tal, har Keyfitz lavet en mere detaljeret undersøgelse af FN's prognosemodel<sup>22</sup>. Han undersøgte 810 prognoser fordelt på perioderne 1958, 1963 og 1968<sup>23</sup>, og fandt at den kvadratiske afvigelse faldt fra 0.555 i 1958 til 0.357 i 1968, og at den gennemsnitligt lå på 0.476.

Keyfitz skelner imellem tre mulige måder at fortolke resultaterne på:

1. Fremtiden vil være lige så omskiftelig som fortiden, og da nutidens demografiske metoder ikke er bedre end tidligere, vil den kvadratiske afvigelse også fremover ligge omkring 0.5.
2. Nutidige prognoser vil højst have lige så stor usikkerhed, som de yngste prognoser i undersøgelsen, hvilket vil sige at den kvadratiske afvigelse vil svare til de 0.357 fra 1968.

<sup>22</sup>FN udarbejder hver gang henholdsvis en lav, middel og høj variant, og det er middelvarianten, der her undersøges.

<sup>23</sup>Det bør bemærkes, at FN's prognosemodel selvfølgelig løbende har været under udvikling, således at det ikke er helt den samme model, der har været brugt i de tre perioder.

3. Afvigelsen sidst i 1960'erne udgør  $\frac{2}{3}$  af den sidst i 1950'erne, derfor vil afvigelsen sidst i 1970'erne også udgøre  $\frac{2}{3}$  af den sidst i 1960'erne, og vil på det tidspunkt derfor være 0.24.

Keyfitz lægger sig ikke entydigt fast på en af de tre fortolkningsmåder, men konkluderer videre, at prognosernes usikkerhed næsten er uafhængig af den tidsperiode, over hvilken estimatet er lavet, hvilket jo er nok så interessant [Keyfitz, 1981, s. 585]. Han påpeger dog, at usikkerheden kan være lidt forskellig for rige i forhold til fattige lande, for store i forhold til små lande, og afhængigt af hvilket kontinent landet er placeret i, men at disse afvigelser har en sekundær betydning, og at de dybest set har noget at gøre med den stigningstakt, hvormed en befolkning vokser, idet usikkerheden er større, jo hurtigere befolkningen vokser.

Endelig nævner Keyfitz som et resultat af sine undersøgelser, at hvis man sammenligner fortidige prognoser udarbejdet på baggrund af simple geometriske funktioner og FN's prognoser, så er usikkerheden i alle tilfælde mindst for FN's prognoser.

På baggrund af Keyfitz' historiske undersøgelse kan vi konstatere, at FN's befolkningsprognoser har været rimeligt realistiske, samtidig med at der tilsyneladende har været en tendens til, at præcisionen er blevet større med tiden. Analysen dækker imidlertid en historisk periode, som ikke har anfægtet modellens præmis om en glidende evolutionær samfundsøkonomisk udvikling, så hvis en sådan analyse skal kunne bruges til at sige noget om fremtidige prognoser, kræver det ligeledes en periode, hvor der ikke sker revolutionerende ændringer, som vil afspejle sig i fertilitets- og dødelighedsudviklingen.

### 6.6.2 Sammenligning af IIASA, FN og Verdensbankens prognoser.

De toneangivne prognosemodeller tegner det samme billede af befolkningsudviklingen frem til år 2030. For det første vil verdens befolkning blive ved med at vokse. For det andet vil den regionale fordeling af verdens befolkning ændre sig væsentligt, idet de industrialiserede lande vil komme til at udgøre en mindre og mindre del af verdens befolkning, hvorimod Afrikas befolkning vil vokse hurtigt. For det tredje vil verdens befolkning blive ældre, idet middellevetiden vil stige.

I følge Verdensbankens seneste prognose vil verdens befolkning i år 2000 være ca. 6 milliarder mennesker, og samtidig regner man med en fordobling frem til år 2150. Flere prognoser opererer med, at der vil være en tendens

til stagnation omkring 12 milliarder, men tidspunktet er der væsentlig større usikkerhed omkring, - det svinger fra 2050 til 2150.

Nedenfor skal vi give et eksempel på sammenligning af prognoser fra flere forskellige globale befolkningsprognosemodeller.

Som tidligere nævnt dominerer tre organisationer det at lave mellem- og langtidsprognoser for nationale, regionale og globale befolkninger, nemlig FN, Verdensbanken og det amerikanske kontor for folketællinger. De tre organisationer har et løbende samarbejde, så deres prognoser er derfor ikke uafhængige af hinanden. Endvidere er Verdensbanken og FN's model den samme modeltype, og de bruger ret ens data. Eksemplet nedenfor er IIASA's sammenligning af deres egne prognoseresultater for verdens samlede befolkning år 2030 med FN og Verdensbankens<sup>24</sup> [Lutz, s. 419-421].

IIASA's ni scenarier er samlet til tre, således at de kan sammenlignes med FN's (1993) middel, lav og høj variant, og Verdensbankens (1992) enlige variant<sup>25</sup>.

IIASA:

middel: 8.955 mia., lav: 8.093 mia., høj: 9.871 mia.

FN:

middel: 8.472 mia., lav: 7.852 mia., høj: 9.080 mia.

Verdensbanken:

8.345 mia.

Som det fremgår, giver IIASA's middel-prognose en noget større verdensbefolkning end både FN og Verdensbankens (ca. 6 procent), som er ret ens. Dette skyldes især, at IIASA vurderer faldet i fertiliteten i udviklingslandene til at blive noget langsommere end både FN og Verdensbanken. Endvidere afspejler IIASA's tre prognoser en noget større usikkerhed end FN's, hvilket er en naturlig konsekvens af de antagelser om usikkerheden på fertilitet, dødelighed<sup>26</sup> og migration<sup>27</sup>, som har været udgangspunktet. Ud over de forskellige vurderinger af fertilitet, dødelighed og migration skyldes forskellene selvfølgelig også, at FN og Verdensbanken fremskriver et land af gangen (single regional), hvorimod IIASA jo opdeler verden i otte regioner og fremskriver disse samtidig (multi regional).

<sup>24</sup>Principperne, der ligger til grund for IIASA's prognoser, er omtalt tidligere.

<sup>25</sup>Udgangspunktet for IIASA's prognose er 1990, og der anvendes data fra FN (1993).

<sup>26</sup>Specielt giver udbredelsen af AIDS særligt i Afrika anledning til usikkerhed i vurderingen af dødeligheden.

<sup>27</sup>Udviklingen i migrationsmønstret udviser mindre kontinuitet end udviklingen i fertilitet og dødelighed [Lutz, s. 399].

Det er som sagt ikke her meningen at gå nærmere i detaljer med præmisserne for de tre prognoser, men blot bruge sammenligningen som illustration af en måde at evaluere en prognosemodel på. Svagheden ved denne sammenligning er iøvrigt, at IIASA's model også har væsentlige fællestræk med de to andre, både i forhold til grundlæggende antagelser og metode, nemlig transitionsmodellen og kohorte-komponentmetoden, men også opfattelsen af sammenhængen mellem ressourcer, forurening, samfundsøkonomisk udvikling og så befolkningsudviklingen. Derfor ville sammenligningsgrundlaget selvfølgelig være nok så interessant med en model med en væsentlig anderledes indfaldsvinkel til disse sammenhænge.

## 6.7 Afrunding.

Vi har i kapitlet søgt at gå bag om Verdensbankens model for, ved hjælp af nogle af de begreber og overvejelser vi introducerede i kapitel 2, at sætte fokus på nogle af modellens svagheder.

Efter at have fremhævet hvilke karaktertræk der gælder for befolkningsprognosemodeller i almindelighed, gav vi en mere specifik karakteristik af Verdensbankens model med hensyn til formål, relation til virkeligheden og modellens indre relationer. Herefter fulgte kapitlets tre centrale afsnit (6.3 - 6.5), hvor vi formulerede en række problematiseringer af henholdsvis modellens grundantagelser, systemafgrænsning og matematisering. For til sidst at pege på to mulige måder at evaluere en befolkningsprognosemodel på.

Som det er fremgået, har vi løbende konkluderet på hvert enkelt af de problematiserede punkter, hvilket vi derfor ikke vil gentage her.

# Kapitel 7

## Konklusion og perspektivering.

Vi har i kapitel 6 konkluderet på hver enkelt af de formulerede kritikpunkter af Verdensbankens model. Vi har derfor valgt at undlade at gå mere detaljeret ind i alle disse delkonklusioner i dette sidste kapitel, men blot formulere nogle præciseringer til projektets struktur og konklusionen på hovedproblemstillingen. Herudover vil vi knytte nogle kommentarer til et par af de mere overordnede problemstillinger, der har været berørt i projektet. Afslutningsvis vil vi så give et par bud på naturlige opgaver i forbindelse med et eventuelt videre arbejde med Verdensbankens befolkningsprognosemodel.

### **Om strukturen i projektet.**

Som det er fremgået, har vi forsøgt at indarbejde en klar indre sammenhæng mellem de enkelte kapitler. Vi startede med at slå fast, hvad vi mener med en matematisk model, og fik præciseret en række begreber, som har relevans, når der diskuteres modellering. Herudover var pointen i kapitel 2, at vi udstyrede læseren med nogle centrale problemstillinger om det at modellere, med nogle kriterier til at inddele modeller i nogle hovedtyper, og med beskrivelsen af nogle områder, hvor modelleringsprocessen typisk er kritisk.

Herefter var det naturligt at give et nøjere signalement af den del af virkeligheden, som Verdensbankens model forsøger at simulere. Dette virkelighedsfelt (genstandsfelt) gav vi et indtryk af ved dels at præsentere befolkningsbalanceligningen, dels ved at præsentere en række måder at beskrive befolkningens vækst på.

Således udrustet med begreber og metodiske ledetråde til forståelse af modelleringsprocessen og en vis indsigt i virkelighedsfeltets særlige karakter var

læseren klar til en mere systematisk præsentation af struktur og indhold i Verdensbankens befolkningsprognosemodel.

Sidste del af projektet bestod så i at forsøge at anvende nogle af begreberne om modelleringsprocessen fra kapitel 2, samt detailindsigten i både virkelighedsfeltet og selve modellen, til en nærmere analyse af Verdensbankens model. I kapitel 6 forsøgte vi derfor at demonstrere, hvordan modelbegreberne både kunne være med til at strukturere analysen og anvise områder, hvor det kunne være relevant at sætte ind med en mere konkret kritik af modellen.

Gangen i projektet skulle således på en naturlig måde binde modelbegreber, virkelighedsfeltet, modellens struktur og indhold og selve analysen sammen.

### **Om hovedproblemstillingen.**

Som det er fremgået af kapitel 1, har vi opdelt projektets hovedproblemstilling i to dele.

Den første del beskæftiger sig med, hvordan Verdensbankens befolkningsprognosemodel er opbygget og fungerer. Dette har vi forklaret og diskuteret temmelig fyldestgørende i kapitlerne 4, 5 og 6.

Den anden del af hovedproblemstillingen handler om, hvilken troværdighed vi kan tillægge modellen. Der lægges altså op til en vurdering af, dels om de valg, der er foretaget i forbindelse med modellens grundlag og selve modelleringen, er rimelige, dels om usikkerheden på både modellens inputparametre og prognoseresultater er af en sådan karakter, så modellens resultater vil kunne sige noget meningsfyldt om den fremtidige befolkningsudvikling.

Vurderingen af usikkerheden foregår jo altid på nogle bestemte præmisser. Vores udgangspunkt har været at tage præmisserne for Verdensbankens model for pålydende og så på den baggrund påpege, hvor modellen er kritisk. Som det er fremgået af kapitel 6, er det især følgende områder:

- Manglende inddragelse af socioøkonomiske faktorer direkte i modellen,
- transitionsmodellen som grundlag for udviklingen af fertilitet og dødelighed i visse u-lande,
- opdelingen i lande, regioner m.m.,
- anvendelse af dødelighedsmønsteret i modeloverlevelsestavlerne på visse u-lande,

- antagelserne om at effekten af migration og AIDS helt forsvinder,
- forkortningerne i at anvende diskret matematik.

Det er vanskeligt at vurdere effekten af de ovenstående faktorer op mod hinanden, men det er oplagt, at der er forskel på, hvilke faktorer der påvirker usikkerheden på prognoserne mest, afhængigt af hvilket land der er tale om. For eksempel har vi set, at migrationen formodentlig også fremover vil have en forholdsvis stor indflydelse på befolkningstallets udvikling i Danmark, mens AIDS formodentlig vil blive ved med at have en afgørende indflydelse på dødeligheden i visse afrikanske lande langt ind i det næste århundrede.

På baggrund af vores analyse og resultaterne af evalueringer af denne type af modeller må vi konkludere, at det har mening at udarbejde prognoser over befolkningstallets udvikling på mellemlangt sigt, hvilket vil sige 30-40 år frem i tiden. Imidlertid vil det også være naturligt i forlængelse af analysen at pege på, hvilke ændringer der kunne foretages i modellen med henblik på at gøre usikkerheden på prognoserresultaterne mindre:

- Verdensbanken må eksplicit vurdere den usikkerhed, som valgene i systemafgrænsningen og matematiseringen har på prognoserresultaterne,
- mere direkte indarbejde effekterne af den samfundsøkonomiske udvikling specificeret i forhold til de enkelte landes udviklingsstade,
- modificere transitionsmodellens gyldighed for visse u-lande,
- anvende dødelighedsmønstre på u-landene, som i højere grad afspejler deres situation,
- specificere antagelserne om migration og AIDS på hvert enkelt land, idet der jo er store forskelle,
- bevæge sig fra anvendelsen af diskret matematik over mod kontinuert matematik,
- lave mere end én prognose, - for eksempel tre ligesom FN's høj, lav og middel variant.

Endelig kunne det være interessant at sammenligne Verdensbankens prognoserresultater med resultaterne fra en model, hvis udgangspunkt var et radikalt opgør med vækstsamfundet og rovdriften på naturgrundlaget. Det ville formodentlig medføre lidt andre proportioner på vurderingen af prognosernes usikkerhed.

### Om modeller.

En gængs opfattelse af arbejdet med opbygningen af en model er, at udgangspunktet må være at indfange de centrale elementer i det virkelighedsfelt, som skal modelleres. Perspektivet i det videre modelleringsarbejde er herefter at bygge lag på lag på modellen, således at den afspejler flere og flere af genstandsfeltets nuancer. Målet bliver således ofte ubevidst en model, som i så stor udstrækning som muligt svarer til den måde, virkeligheden fremstår på.

Resultatet kan ofte blive en meget kompliceret og svært overskuelig model, men også en model som det vil være svært at arbejde med i praksis, blandt andet fordi edb-kørslerne vil være meget langsommelige.

En sådan fremgangsmåde kunne man kalde en form for induktiv metode. Som alternativ til denne kunne man tage det stik modsatte udgangspunkt, nemlig at søge at begribe virkelighedsfeltets egentlige væsenskarakter bag de umiddelbare fremtrædelsesformer, og dernæst koncentrere sig om at implementere denne i en model. På den måde vil man på forhånd have valgt en del aspekter af virkelighedsfeltets fremtrædelser fra, og ikke specielt søgt at udvikle en model som umiddelbart afspejlede virkelighedsfeltet, men man ville få en væsentligere simpleret og mere funktionel model, vis resultater modsvarede virkelighedsfeltets basale dynamikker.

I det praktiske modelleringsarbejde behøver de to indfaldsvinkler imidlertid ikke at udelukke hinanden, men vil ofte erstatte hinanden i forskellige faser af modelleringsprocessen.

### Om interesser.

Også i forbindelse med Verdensbankens model trænger det klassiske spørgsmål om forholdet mellem eksperter/videnskaben og politikere/beslutningstagere sig på. Her ligger den klassiske forestilling om videnskaben som værdineutral og dermed objektiv ofte gemt.

Der er klart, at Verdensbanken alene i kraft af sin særlige konstitution repræsenterer nogle bestemte objektive interesser. I hvilken udstrækning disse i praksis vil blive tilgodeset afhænger jo af de konkrete aktiviteter, som Verdensbanken sætter i værk, - disse handlinger afspejler altså nogle subjektive interesser.

For os er der ikke vandtætte skodder mellem videnskab og politik, ligesom det står os klart, at videnskaben således indeholder et subjektivt element. De

eksperter, der har udarbejdet modellen for Verdensbanken, arbejder naturligvis ikke i 'lufttomt rum', men på et grundlag som blandt andet afspejler Verdensbankens økonomiske, politiske og erkendelsesmæssige interesser.

Således ligger der både et subjektivt element i ekspertens egen holdning, til det han laver, og i rekvirentens krav til eksperten. Hvordan disse interesser artikulerer sig i konkrete tilfælde, er selvfølgelig meget forskelligt, men i Verdensbankens tilfælde absolut en undersøgelse værd.

### **Perspektiv for et videre arbejde.**

Det har været overordentlig givende for os at afgrænse vores problemstilling til at dreje sig om en enkelt model/modeltype og vel og mærke en model af et sådant omfang, at det har været realistisk at få et godt overblik over hele modellen, samtidig med at vi har kunnet gå i dybden med alle de centrale dele af modellen.

Vi vil dog her afslutningsvis pege på nogle områder, som vi har berørt perifert, og som ligger ud over dette projekts rammer, men som det ville være naturligt at se nærmere på i et videre analysearbejde af modellen, og som ville kunne bidrage til yderligere at kvalificere grundlaget for en vurdering af modellen.

Vi har kun behandlet antagelser om migration og AIDS sporadisk, men det ville være oplagt at se nærmere på, dels hvordan disse størrelser rent faktisk er indarbejdet i fremskrivningerne af befolkningstallet, dels hvordan disse fremskrivninger kunne se ud, hvis modellens antagelser modificeres.

Ligeledes ville det være oplagt at se nøjere på modeloverlevelsestavlerne, dels for at få mere styr på detaljerne i den måde de er konstrueret på, dels for at kunne bedømme hvordan de indflyder på usikkerheden på prognoseresultaterne, og endelig for at kunne pege på alternativer til disse tavler.

Vi har kritiseret modellen for ikke direkte at afspejle centrale socioøkonomiske faktoreres indflydelse på udviklingen i befolkningstallet. Imidlertid postulerer udviklerne af modellen, at de i en meget indirekte form for eksempel har inddraget bruttonationalproduktet pr. indbygger og den procentvise andel af kvinder i skolesystemet. Det ville være naturligt at forsøge nærmere at afdække, hvordan det helt konkret er gjort og afklare de mere præcise begrænsninger i dette.

I forlængelse af vores diskussioner over forholdet mellem diskret og kontinuert matematik kunne man gå videre med at overveje en model, som byggede på

kontinuert matematik, og som indeholdt stokastiske elementer i form af en mere systematisk analyse af usikkerhed.

I forbindelse med en evaluering af modellen har vi måttet nøjes med at henvise til andres historiske og komparative analyser af tilsvarende modeller. Det kunne være spændende at lave en tilsvarende historisk analyse af Verdensbankens prognoseresultater. Endvidere ville det have relevans at teste modellen nøjere gennem egne kørsler med den, således at konsekvenserne af variationer i inputparametrene kunne kortlægges, - altså en egentlig følsomhedsanalyse.

Vi har i projektet flere gange nævnt spørgsmålet om Verdensbankens økonomiske og politiske interesser, men det har ligget udenfor projektets rammer at se nærmere på det spørgsmål. Det ville imidlertid været interessant, på baggrund af en samfundsvidenskabelig analyse af Verdensbanken og dens aktiviteter, at få afdækket disse interesser, og dernæst få afklaret i hvor høj grad disse interesser har påvirket, dels de valg der er blevet foretaget i løbet af modelleringsprocessen, dels den måde som modellen og dens prognoseresultater bruges på.

# Litteraturoversigt

## **Andersen [1995]:**

Andersen, B. m.fl.: Magt og modeller. Om den stigende anvendelse af edb-modeller i de politiske beslutninger. Teknologirådets rapporter 1995/4.

## **Avula [1984]:**

Avula, X. m.fl. (red.): Mathematical Modelling in Science and Technology. The fourth international conference. Zurich 1983. Pergamon Press 1984.

## **Avula [1987]:**

Avula, X. m.fl. (red.): Mathematical Modelling in Science and Technology. The fifth international conference. Berkeley USA 1985. Pergamon Press 1987.

## **Blum [1989a]:**

Blum, W. og Niss, M.: Mathematical Problemsolving, Modelling, Applications and Links to other Subjects. - State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. IMFUFA-tekst nr. 183. RUC 1989.

## **Blum [1989b]:**

Blum, W. m.fl. (red.): Applications and Modelling in Learning and Teaching Mathematics. Chichester 1989.

**Blum [1991]:**

Blum, W. m.fl. (red.): Teaching of Mathematical Modelling and Applications.

Chichester 1991.

**Booss-Bavnbeek [1989]:**

Booss-Bavnbeek, B. m.fl.: Vurdering af matematisk teknologi.

IMFUFA-tekst nr. 164. RUC 1989.

**Bos [1989]:**

Bos, E. m.fl.: Protecting Mortality for All Countries.

Working Papers. Population and Human Resources Department.

The World Bank dec. 1989.

**Bos [1990]:**

Bos, E. og Bulatao, R.A.: Projecting Fertility for All Countries.

Working Papers. Population and Human Resources Department.

The World Bank sept. 1990.

**Bos [1994]:**

Bos m.fl.: World Population Projections 1994-95 Edition.

Estimates and Projections with Related Demographic Statistics.

Published for The World Bank The John Hopkins University Press, Baltimore, U.S.A. 1994.

**Coale [1983]:**

Coale, A.J. og Demeny, P.: Regional Model Life Tables and Stable Populations. Second Edition.

Academic Press 1983.

**Danmarks Statistik [1994]:**

Danmarks Statistik: Befolkningens bevægelser.

København 1994.

**Davis [1991]:**

Davis, K.: Population and Resources: Fact and Interpretation, i  
Davis, K. og Bernstam, M. (red.): Resources, Environment and Population:  
Present Knowledge, Future Options.  
Oxford University Press 1991, s. 1-21.

**Dræby [1995]:**

Dræby, C. m.fl.: ADAM under figenbladet, - et kig på en samfundsvidenska-  
belig model.  
IMFUFA-tekst nr. 299. RUC 1995.

**Halli [1992]:**

Halli, S.S. og Vaninadha Rao, K.: Advanced Techniques of Population  
Analysis.  
New York 1992.

**Hansen [1996]:**

Hansen, N.S., Iversen, C., Troels-Smith, K.: Modelkompetencer, - udvikling  
og afprøvning af et begrebsapparat.  
IMFUFA-tekst nr. 321. RUC 1996.

**Hermann [1982]:**

Hermann, K. og Niss, M.: Beskæftigelsesmodellen i SMEC III, - en autentisk  
matematisk model.  
København 1982.

**Jensen [1980]:**

Jensen, J.H. (red.): Om matematiske modeller.  
IMFUFA-tekst nr. 26. RUC 1980.

**Keyfitz [1977]:**

Keyfitz, N.: Applied Mathematical Demography.  
John Wiley and Sons 1977.

**Keyfitz [1981]:**

Keyfitz, N.: The Limits of Population Forecasting.  
Population and Development Review 7, no. 4 (dec. 1981), s. 579-593.

**Keyfitz [1991]:**

Keyfitz, N.: Toward a Theory of Population-Development Interaction, i  
Davis, K. og Bernstam, M. (red.): Resources, Environment and Population:  
Present Knowledge, Future Options.  
Oxford University Press 1991, s. 295-314.

**Lee [1974]:**

Lee, R.D.: Forecasting Births in Post-Transition Populations: Stochastic  
Renewal with Serially Correlated Fertility.  
Journal of the American Statistical Association, vol. 69, september 1974, s.  
607-617.

**Lee [1991]:**

Lee, R.D.: Long-Run Global Population Forecasts: A Critical Appraisal, i  
Davis, K. og Bernstam, M. (red.): Resources, Environment and Population:  
Present Knowledge, Future Options.  
Oxford University Press 1991, s. 44-71.

**Lutz [1994]:**

Lutz, W. (red.): The Future Population of the World. What can we assume  
today?  
London 1994.

**Matthiessen [1970]:**

Matthiessen, P.C.: Teoretisk demografi.  
Københavns Universitet 1970.

**Matthiessen [1984]:**

Matthiessen, P.C.: Befolkningens vækst - årsager og konsekvenser.  
København 1984.

**Meyer [1987]:**

Meyer, W.J.: Concepts of Mathematical Modeling.  
Singapore 1987.

**Newell [1988]:**

Newell, C.: Methods and Models in Demography.  
Belhaven Press 1988.

**Niss [1987]:**

Niss, M.: Applications and Modelling in the Mathematics Curriculum - State and Trends.

International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, vol. 18, no. 4, s. 487-505.

**Rogers [1975]:**

Rogers, A.: Introduction to Multiregional Mathematical Demography.

John Wiley and Sons 1975.

**Skovsmose [1989]:**

Skovsmose, O.: Models and reflective knowledge.

Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 89/1, s. 3-8.

**Skovsmose [1990]:**

Skovsmose, O.: Ud over matematikken.

Viborg 1990.

**Skovsmose [1994]:**

Skovsmose, O.: Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education.

Kluwer Academic Publishers 1994.

**Stoto [1983]:**

Stoto, A.A.: The Accuracy of Population Projections.

Journal of the American Statistical Association, vol. 78, march 1983, s. 13-20.

**UN [1995]:**

UN: World Population Prospects. The 1994 Revision.

United Nations New York 1995.



# Appendiks A

## Middellevetid og dødelighed.

Vi vil i dette appendiks give en mere uddybende matematisk gennemgang og analyse af sammenhængen mellem dødelighed og middellevetid, en sammenhæng som man gør stærkt brug af i forbindelse med overlevelsestavler, herunder modeloverlevelsestavler.

### Sammenhængen mellem dødelighedsændringer og ændringer i middellevetid.

Som det er fremgået er overlevelsestavlen en kunstig størrelse, hvor man regner med statistiske værdier af de aldersbetingede dødeligheder. I relation til udarbejdelsen af en befolkningsprognose må det imidlertid være relevant at betragte den situation, at dødelighederne ikke er konstante m.h.t. alder og tid, men vil variere på en eller anden måde. I det følgende vil vi gennemgå den matematik, der skal i spil, når der opereres med at dødeligheden ændrer sig over tid og alder, især vil vi sætte focus på sammenhængen mellem dødelighedsændringer og middellevetidsændringer<sup>1</sup>.

Vi forudsætter en given begyndelsesfordeling af dødeligheden fordelt på alder, d.v.s. den aldersbetingede dødelighed, og vil nu betragte to tilfælde, hvor vi ændrer på dødeligheden  $\mu(x)$ , først med konstant ændring  $\delta$  i alle aldersgrupper, derefter med en proportional ændring i alle aldersgrupper.

---

<sup>1</sup>Dette afsnit bygger især på [Keyfitz, 1977].

### Konstant dødelighedsændring.

Hvis man lægger en fast størrelse  $\delta$  til dødeligheden i alle aldersklasser, vil sandsynligheden for at overleve til alder  $x$  ifølge udtryk (3.4) blive:

$$\exp\left[-\int_0^x [\mu(t) + \delta] dt\right] = e^{-\delta x} l(x) \quad (\text{A.1})$$

Man ser altså, at sandsynligheden for at overleve til alder  $x$  ændres med faktoren  $e^{-\delta x}$ . Den nye middellevetid for 0-årige,  $e(0)^*$ , bliver derfor:

$$e(0)^* = \int_0^{\omega} e^{-\delta x} l(x) dx \quad (\text{A.2})$$

For at finde virkningen på middellevetiden af at ændre de aldersbetingede dødeligheder med  $\delta$  finder vi den afledede  $\frac{de(0)^*}{d\delta}$ :

$$\frac{e(0)^*}{d\delta} = -\int_0^{\omega} x e^{-\delta x} l(x) dx = -x_m e(0) \quad (\text{A.3})$$

Integralet er her evalueret i  $\delta = 0$ , hvor  $x_m$  er gennemsnitalderen for den stationære befolkning. For små værdier af  $\delta$  fås nu:

$$\begin{aligned} \Delta e(0) &\doteq -x_m e(0) \delta \Leftrightarrow \\ \frac{\Delta e(0)}{e(0)} &\doteq -x_m \delta. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Det fremgår heraf, at den relative middellevetidsændring er lig minus ændringen i dødsraten ganget med gennemsnitsalderen for overlevelsestavle befolkningen. Antages det f.eks. at middellevetiden er 70 år, og at  $\delta = -0.001$  (der så skal fratrækkes dødeligheden  $\mu(x)$  i alle aldre), og at gennemsnitsalderen er 35 år, da vil:

$$\frac{\Delta e(0)}{e(0)} = (35)(0.001) = 0.035$$

pr. år, og stigningen i middellevetid vil derfor blive  $(0.035)(70) = 2.45$  år.

### Dødelighedsændring proportional med nuværende dødelighedsniveau i alle aldre.

Hvis man i stedet antager, at dødsraten  $\mu(x)$  multipliceres med  $1 + \delta$ , vil den nye dødelighedsfunktion  $\mu^*(x)$  kunne udtrykkes:

$$\mu^*(x) = (1 + \delta)\mu(x),$$

og den nye sandsynlighed for at overleve til alder  $x$  vil så kunne udtrykkes:

$$l^*(x) = \exp\left(-\int_0^x \mu^*(t) dt\right) = \exp\left(-\int_0^x (1 + \delta)\mu(t) dt\right) = (l(x))^{1+\delta} \quad (\text{A.5})$$

hvoraf følger, at den nye middellevetid for en 0-årig er:

$$e^*(0) = \int_0^\omega l(t)^{1+\delta} dt \quad (\text{A.6})$$

Dette resultat kan nu anvendes på den specielle funktion:

$$\mu(x) = \frac{\mu_0}{\omega - x}$$

Hvis vi integrerer og tager eksponentialfunktionen fås:

$$l(x) = \left[1 - \left(\frac{x}{\omega}\right)\right]^{\mu_0}$$

Integrerer vi herefter dette udtryk, får vi:

$$e(x) = \frac{(\omega - x)}{(\mu_0 + 1)}$$

og derefter:

$$\frac{e^*(0)}{e(0)} = \frac{\int_0^\omega l(t)^{1+\delta} dt}{\int_0^\omega l(t) dt} = \frac{\mu_0 + 1}{\mu_0(1 + \delta) + 1} \quad (\text{A.7})$$

Hvis dødeligheden i alle aldre stiger med  $\delta$ , så falder  $e^*(0)$ , som vist i ovenstående udtryk (A.7) med noget mindre end  $\delta$ . For mænd sammenlignet med kvinder er  $\delta$  ca. 0.43, og  $\mu_0$  er ca. 0.30. Da vil ifølge udtryk (A.7) forholdet  $\frac{e(0)}{e^*(0)}$  være lig  $1.43/1.30 = 1.10$ . Hvis vi integrerer den reciprokke til middellevetiden som værende lig overlevelsestavlens dødsrate, betyder det altså, at et overskud på 43 procent i alle aldersbetingede dødsrater resulterer i et overskud på 10 procent i overlevelsestavlens generelle dødsrate. Dette gælder, når  $\mu(x)$  beskriver en hyperbel.

Generelt gælder der dog, at en proportionel ændring af  $\mu(x)$  ikke helt så nemt resulterer i en ændring af middellevetiden  $e(0)$ , så det er nødvendigt at bruge differentialregning til at konstruere en konstant, der kan være nyttig ved beskrivelsen af overlevelsestavler. For at finde virkningen af en lille ændring  $\delta$  på middellevetiden, søger vi den afledede af højresiden i udtryk (A.6) med hensyn til  $\delta$ . Dette resulterer i udtrykket:

$$\frac{de^*(0)}{d\delta} = \int_0^\omega [\ln(l(t))] l(t)^{1+\delta} dt \quad (\text{A.8})$$

Den herved fremkomne størrelse har den egenskab, at den ikke kan være positiv, eftersom  $l(t)$  ikke kan være større end 1, da  $l(t)$  jo var sandsynligheden for at leve til år  $t$ . I en omegn af  $\delta = 0$  fås nu:

$$\frac{\Delta e^*(0)}{e(0)} \doteq \frac{\int_0^\omega [\ln(l(t))]l(t)dt}{\int_0^\omega l(t)dt} \delta = -H\delta, \quad (\text{A.9})$$

Hvor størrelsen  $H$  er lig minus gennemsnitsværdien af  $\ln(l(t))$  vægtet med  $l(t)$ . Størrelsen  $H$  kaldes iøvrigt ofte for entropien. Forholdet mellem integralerne i udtryk (A.9) er negativt, da tælleren er negativ, så  $H$  er positiv.

Man kan forestille sig, at  $H$  var lig nul, hvis al dødelighed var koncentreret ved et bestemt alderstrin. Antag f.eks. at alle levede netop til de blev 70 år, og alle så døde netop ved denne alder, da ville  $l(t)$  være lig 1 for alle aldre op til 70 år, og dens logaritme ville være lig nul. Det andet yderpunkt opstår, hvis dødeligheden antages at være ens i alle aldre. Da ville der gælde, at:  $l(x) = e^{-\mu x}$ ,  $e(x) = \frac{1}{\mu}$ , d.v.s., en konstant, og

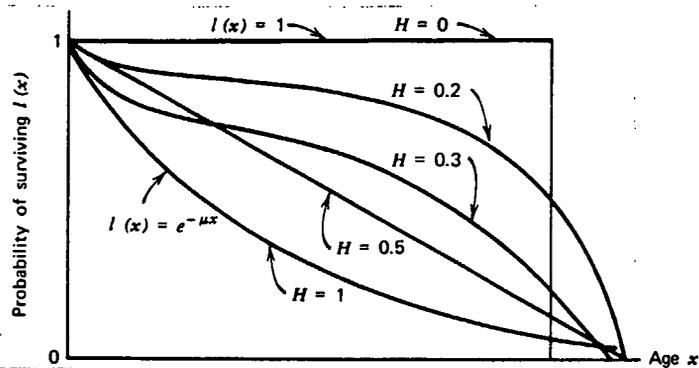
$$\frac{\Delta e^*(0)}{e(0)} \doteq \frac{\int_0^\omega [\log(l(t))]dt}{\int_0^\omega l(t)dt} \delta = \frac{\int_0^\infty -\mu t e^{-\mu t} dt}{\frac{1}{\mu}} \delta = -\delta. \quad (\text{A.10})$$

I dette tilfælde er  $H = 1$ , og de proportionale ændringer i dødsraterne resulterer i samme ændringer i middellevetiden, dog selvfølgelig i modsat retning. Hvis  $H = 1$ , og dødsraterne i alle aldre forøges med en procent, da ville middellevetiden formindskes med en procent. Er  $l(x)$  lig en ret linie, vil  $H = 1/2$ . Figur A.1 viser sammenhængen mellem  $l(x)$  og  $H$  ved forskellige dødelighedsforløb<sup>2</sup>.

### Konstanten $H$ .

For lande med en middellevetid for 0-årige på omkring 70 år, har  $H$  cirka-værdier på 0.2 for mænd og 0.15 for kvinder. Størrelsen  $H$  udtrykker på en simpel måde overlevelseskurven  $l(x)$ 's konkavitet. Formindskes dødeligheden, vil en større og større andel af dødsfaldene finde sted mellem 60 og 70 årsalderen, og værdien af  $H$  vil hermed formindskes. Formindskes dødeligheden til i-landsniveau tenderer alle til at dø omkring den samme alder, og en proportional dødeligheds-forbedring i alle aldre får mindre og mindre betydning på middellevetiden. Hvis man f.eks. ved, at der om to lande, eller to køn, gælder, at forholdet mellem middellevetiderne i de to lande/køn er kendt, da

<sup>2</sup>Bemærk at figur A.1 netop illustrerer forskellige overlevelsestavlers dødelighedsforløb, hvor i-landenes overlevelseskurve vil have den laveste  $H$ -værdi.



**Figur A.1:** Sammenhængen mellem overlevelsesfunktionen  $l(x)$  og konstanten  $H$ .

kan man tilnærme forholdet mellem de aldersbetingede dødsrater. Antages dette forhold at være lig  $1 + \delta$  og ens for alle aldre, da gælder ligningen:

$$\frac{e^*(0)}{e(0)} = \frac{\int_0^\omega l(t)^{1+\delta} dt}{\int_0^\omega l(t) dt} \quad (\text{A.11})$$

Betragtes dette udtryk nu som en funktion af  $\delta$ , altså f.eks.  $f(\delta)$ , og Taylorudvikler vi denne, fås:  $f(\delta) = f(0) + \delta f'(0)$ , hvor vi på forhånd ved, at  $f'(0) = -H$ . Herved kan ovenstående derefter omformes til:

$$\frac{e^*(0)}{e(0)} = 1 - \delta H \quad (\text{A.12})$$

Antager vi f.eks. at  $e^*(0)/e(0) = 1.10$ , da vil følgende gælde:

$$\frac{e^*(0)}{e(0)} = 1.10 = \frac{\int_0^\omega l(t)^{1+\delta} dt}{\int_0^\omega l(t) dt} = 1 - \delta H \quad (\text{A.13})$$

Hvis vi f.eks. tildeler  $H$  værdien 0.20, får vi en ligning med  $\delta$  som den ubekendte:  $1.10 = 1 - (\delta)(0.20)$ , og hermed:

$$\delta = \frac{1 - 1.10}{0.20} = -0.50$$

Konklusionen heraf er, at en befolkning med en 10 procent højere middellevetid har dødsrater, der er 50 procent lavere.

Vi har i dette afsnit set, at dødelighedsfunktionen har forskelligt udseende i forskellige typer af lande, samt set, at de forskellige typer af dødelighedsfunktioner også influerer på, hvilke middellevetidsændringer der fremkommer.



## Appendiks B

### Logitmodeller.

Mens modeloverlevelsestavlerne især var udviklet på basis af empirisk materiale, har logit-systemet den fordel, at det er baseret på en matematisk relation. Det er et såkaldt to-parametersystem. Coale og Demenys modeller er for så vidt også et to-parametersystem, idet man både vælger en region og et niveau, når man vælger en model. Da man kun kan vælge 4 regioner, betragtes det imidlertid ikke som et rigtig to-parametersystem.

Det centrale i logit-transformationen er, at det er en transformation, nemlig af tal  $p$  mellem 0 og 1 til tal mellem plus og minus uendelig, idet:

$$\text{Logit}(p) = \frac{1}{2} \log_e \left( \frac{1-p}{p} \right) \quad (\text{B.1})$$

Det ses, at logit-funktionen omdanner en proportion mellem to tal til et andet tal, nemlig logit-værdien af det ene af dem,  $p$ . Logit-funktionen ses at have følgende egenskaber: Den har funktionsværdier mellem plus og minus uendelig for  $p$  henholdsvis lig 0 og 1, og værdien 0 når  $p = 1/2$ <sup>1</sup>.

Værdien  $l(x)$  i overlevelsestavlerne vil, såfremt udgangskohorte-populationen sættes til 1, netop være den andel af kohorten, der overlever til år  $x$ . Det vil derfor være muligt at tage logitværdier af disse tal, da de altid ligger mellem 0 og 1.

Brass opdagede i 1971 følgende interessante sammenhæng<sup>2</sup>. Hvis man har to overlevelsestavler, og tager logitværdierne af deres  $l(x)$ -værdier, da vil forholdet mellem de to sæt logitværdier være bemærkelsesværdig tæt på at være lineært, forstået på den måde, at hvis man i et koordinatsystem afsætter

---

<sup>1</sup>Logit-funktionens graf er vist i appendiks C, s. 10.

<sup>2</sup>I følge [Newell, 1988].

en række punkter med x-koordinaten lig den ene tavles logitværdier, og y-værdien lig den anden tavles tilsvarende logitværdier, ordnet efter alderstrin, da vil de afsatte punkter tilnærmelsesvis ligge på en ret linie (nær yderpunkterne giver det dog ikke altid en ret linie).

Ligningen for en ret linie er som bekendt:

$$y = a + bx \quad (\text{B.2})$$

Dette betyder nu, at det er muligt at beskrive et sæt af  $\text{logit}(l(x))$ -værdier ved hjælp af et andet sæt  $\text{logit}(l(x))$ -værdier samt nogle passende værdier af konstanterne  $a$  og  $b$ . Det er med andre ord muligt, ud fra en standard overlevelsestavle, at skabe en hel række af hertil relaterede tavler ved blot at variere  $a$  og  $b$ . Derfor kaldes de heraf frembragte modeller også for relationstabeller.

Normalt anvendes de græske bogstaver  $\alpha$  og  $\beta$  for  $a$  og  $b$ . Kaldes  $\text{logit}(l(x))$  for  $Y(x)$ , og logitværdierne for standardtavlen for  $Y_s(x)$ , da kan ligningen for den rette linie skrives:

$$Y(x) = \alpha + \beta Y_s(x) \quad (\text{B.3})$$

Det er principielt muligt at vælge hvilken som helst standardtavle, men det er kutyme at vælge tavler med et slags gennemsnits-dødelighedsmønster. I praksis bruges to slags standardtavler, kaldet General og African<sup>3</sup>.

Disse to standardtavler er identiske efter år 10, men i den afrikanske model er børnedødeligheden i forhold til spædbørnsdødeligheden højere end i General-modellen. Betydningen af konstanterne  $\alpha$  og  $\beta$  er følgende: Ændres  $\alpha$ , vil dødelighedsniveauet ændres, svarende til at skæringspunktet med y-aksen vil forrykkes. Ændres derimod  $\beta$ , er det forholdet mellem børne- og voksendødelighed, der ændres på, svarende til at liniens hældningskoefficient ændres. Er  $\alpha = 0$ , og  $\beta = 1$ , er  $Y(x) = Y_s(x)$ , så disse værdier er neutralværdierne. Disse værdier er ensbetydende med middellevetider for 0-årige på ca. 45 år. Sættes  $\alpha = + 0.8$  fås  $e(0)$  til ca. 18 år, mens sættes  $\alpha = - 1.5$  fås  $e(0) = 79$  år. Derfor ligger de realistiske  $\alpha$ -værdier mellem  $+ 0.8$  og  $- 1.5$ , således at en høj positiv værdi for  $\alpha$  svarer til en høj dødelighed i forhold til standardtavlen, men en lav negativ værdi svarer til et lavt dødelighedsniveau i forhold til standardtavlen. For  $\beta$  gælder, at værdierne ligger fra ca. 0.6 til 1.4.

De lave værdier giver linien lav hældning, svarende til høj spædbørns- og børnedødelighed og lav voksendødelighed i forhold til standardtavlen. En høj  $\beta$ -værdi giver en stejl hældning, svarende til lav spædbørns- og børnedødelighed og høj voksendødelighed i forhold til standarden.

<sup>3</sup>Se appendiks C, s. 11.

Anvendelsen af logit-modellerne i praksis foregår nu på følgende måde. Logitværdierne for de observerede  $l(x)$ -værdier, der iøvrigt i praksis for f.eks. u-lande kan bestå blot af nogle enkelte værdier og ikke et komplet sæt, indplottes i et koordinatsystem med logitværdierne for standardtavlen, således at x-koordinaten er standardtavlen logitværdier, og y-værdien er den observerede tavles logitværdier af  $l(x)$ -værdierne. Herved fås en række punkter, hvortil der f.eks. ved lineær regression kan fittes en linie, hvor  $\alpha$  og  $\beta$ -værdierne så bestemmes. Derefter indsættes de således fundne værdier af  $\alpha$  og  $\beta$  i en ligning svarende til udtryk (B.3):

$$Y_{obs}(x) = \alpha + \beta Y_s(x). \quad (\text{B.4})$$

Derved bestemmes de fittede logitværdier  $Y_{obs}(x)$ , og tages så anti-logitværdier heraf ved anvendelse af udtryk (B.1), da fås de fittede  $l(x)$ -værdier, der udgør den søgte modeloverlevelsestavle.

Afslutningsvis er fordelene ved Brass' to-parameter logitmodel-overlevelsestavle system, at det ikke er baseret på empiriske målinger, men på en matematisk formel der sætter en tavle i forhold til en anden. Systemet er desuden mere fleksibelt end Coale og Demeny-tabellerne, idet det er et egentligt to-parametersystem, der tillader modellering af langt flere dødelighedsmønstre<sup>4</sup>.

---

<sup>4</sup>Afsnittet om logitmodeller er især baseret på [Newell, 1988] og [Halli, 1992].



## Appendiks C

Tabeller og figurer.

Table 2.1 Single-Region Life Table: United States Females, 1968

Age, $x$	$q(x)$	$l(x)$	$d(x)$	$L(x)$	$m(x)$	$s(x)$	$T(x)$	$e(x)$
0	0.021427	100,000	2,143	494,643	0.004332	0.988264	7,436,654	74.37
5	0.001834	97,857	179	488,838	0.000367	0.998329	6,942,011	70.94
10	0.001508	97,678	147	488,021	0.000302	0.997742	6,453,173	66.07
15	0.003010	97,531	294	486,919	0.000603	0.996664	5,965,152	61.16
20	0.003662	97,237	356	485,295	0.000734	0.996010	5,478,233	56.34
25	0.004319	96,881	418	483,358	0.000866	0.994821	4,992,938	51.54
30	0.006044	96,462	583	480,855	0.001212	0.992309	4,509,580	46.75
35	0.009349	95,880	896	477,157	0.001879	0.988267	4,028,725	42.02
40	0.014140	94,983	1,343	471,558	0.002848	0.982253	3,551,568	37.39
45	0.021405	93,640	2,004	463,189	0.004327	0.973719	3,080,010	32.89
50	0.031265	91,636	2,865	451,016	0.006352	0.962069	2,616,821	28.56
55	0.044813	88,771	3,978	433,908	0.009168	0.944908	2,165,805	24.40
60	0.065854	84,793	5,584	410,004	0.013619	0.916220	1,731,897	20.43
65	0.102969	79,209	8,156	375,654	0.021712	0.873784	1,321,893	16.69
70	0.152131	71,053	10,809	328,240	0.032931	0.800900	946,240	13.32
75	0.254497	60,243	15,332	262,888	0.058321	0.693757	617,999	10.26
80	0.375655	44,912	16,871	182,380	0.092506	0.947098	355,112	7.91
85+	1.0	28,040	28,040	172,732	0.162335	—	172,732	6.16

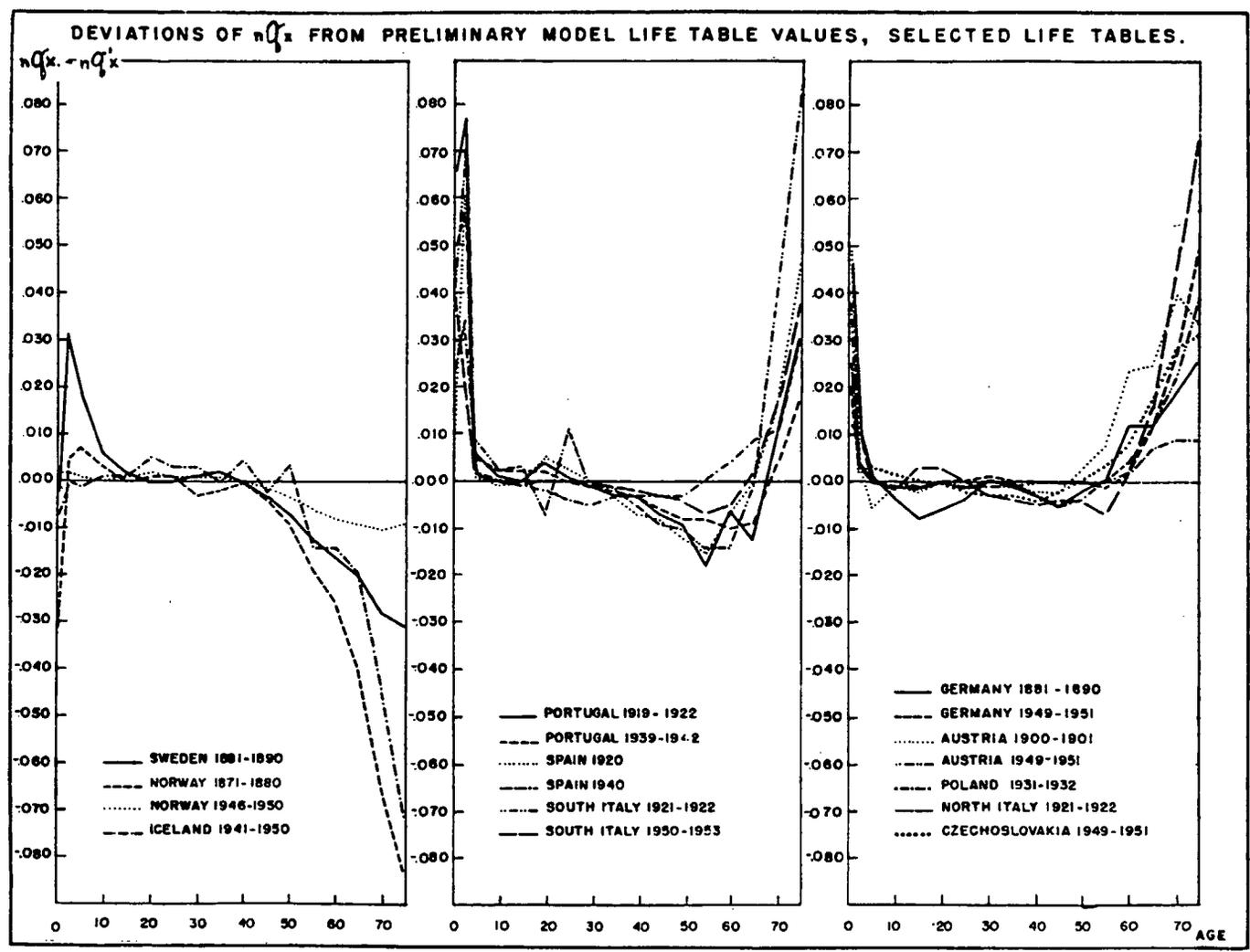


FIGURE 1. Deviations of mortality rates in three regional collections of life tables ( $nq_x$ ) from mortality rates in a preliminary model life table ( $nq_x^*$ ). Selected tables for females.

FEMALES									
Age(x)	1000 q(x)	d(x)	1000 m(x)	l(x)	L(x)	P(x)	T(x)	e(x)	Age(x)
0	132.25	13225	144.69	100000	91404.	0.83896 (1)	4750000.	47.500	0
1	83.06	7208	21.97	86775	328078.	0.93573 (2)	4658596.	53.686	1
5	24.28	1932	4.92	79567	392523.	0.97994	4330518.	54.426	5
10	18.94	1470	3.82	77635	384647.	0.97794	3937995.	50.724	10
15	25.51	1943	5.16	76165	376162.	0.97122	3553347.	46.653	15
20	32.41	2406	6.58	74222	365337.	0.96561	3177186.	42.806	20
25	36.61	2629	7.45	71816	352772.	0.96110	2811848.	39.153	25
30	41.48	2870	8.46	69187	339050.	0.95627	2459076.	35.542	30
35	46.27	3068	9.46	66318	324225.	0.95136	2120026.	31.968	35
40	51.34	3247	10.53	63249	308453.	0.94523	1795802.	28.392	40
45	58.67	3520	12.07	60002	291560.	0.93247	1487349.	24.788	45
50	77.72	4390	16.15	56481	271871.	0.91091	1195788.	21.171	50
55	102.44	5336	21.55	52091	247651.	0.87608	923917.	17.736	55
60	149.84	7006	32.29	46755	216963.	0.82407	676266.	14.464	60
65	209.17	8314	46.50	39749	178793.	0.75034	459304.	11.555	65
70	305.14	9592	71.50	31435	134155.	0.63884	280511.	8.923	70
75	430.57	9405	109.74	21843	85703.	0.49964	146356.	6.700	75
80	583.37	7256	169.45	12438	42821.	0.34468	60653.	4.876	80
85	749.66	3885	263.21	5182	14760.	0.19250	17832.	3.441	85
90	888.16	1152	405.52	1297	2841.	0.07981	3073.	2.369	90
95	968.73	141	619.78	145	227.	0.02072 (3)	232.	1.596	95
100	1000.00	5	945.62	5	5.	0.0	5.	1.058	100

MALES									
Age(x)	1000 q(x)	d(x)	1000 m(x)	l(x)	L(x)	P(x)	T(x)	e(x)	Age(x)
0	155.99	15599	174.20	100000	89549.	0.81679 (1)	4450415.	44.504	0
1	83.94	7085	22.22	84401	318844.	0.93430 (2)	4360866.	51.668	1
5	23.61	1825	4.78	77316	381563.	0.98108	4042022.	52.279	5
10	17.18	1297	3.46	75491	374345.	0.97938	3660459.	48.488	10
15	24.42	1812	4.94	74195	366625.	0.97076	3286114.	44.290	15
20	34.59	2503	7.03	72383	355906.	0.96379	2919489.	40.334	20
25	38.04	2658	7.75	69879	343018.	0.95932	2563583.	36.686	25
30	43.65	2934	8.92	67221	329064.	0.95258	2220565.	33.034	30
35	51.68	3322	10.60	64287	313461.	0.94269	1891501.	29.423	35
40	63.74	3886	13.15	60965	295496.	0.92966	1578040.	25.885	40
45	77.98	4451	16.20	57079	274710.	0.91070	1282544.	22.470	45
50	102.60	5400	21.58	52627	250178.	0.88344	1007834.	19.150	50
55	133.42	6301	28.51	47228	221017.	0.84357	757656.	16.043	55
60	185.20	7580	40.65	40927	186443.	0.78593	536640.	13.112	60
65	252.46	8419	57.45	33347	146531.	0.70832	350197.	10.502	65
70	348.51	8688	83.70	24928	103791.	0.59517	203666.	8.170	70
75	478.53	7772	125.81	16241	61774.	0.45230	99875.	6.150	75
80	625.08	5294	189.47	8469	27940.	0.30818	38101.	4.499	80
85	780.85	2479	287.93	3175	8611.	0.16827	10161.	3.200	85
90	904.51	629	434.39	696	1449.	0.06858	1550.	2.228	90
95	973.60	65	651.01	66	99.	0.01779 (3)	101.	1.523	95
100	1000.00	2	974.73	2	2.	0.0	2.	1.026	100

(1) P(birth), (2) P(0-4), (3) T(100)/T(95)

MODEL WEST

LIFE TABLES

LEVEL 25  
FEMALES

Age(x)	1000 q(x)	d(x)	1000 m(x)	l(x)	L(x)	P(x)	T(x)	e(x)	Age(x)
0	4.45	445	4.47	100000	99583.	0.99544 (1)	8000000.	80.000	0
1	0.32	32	0.08	99555	398138.	0.99965 (2)	7900417.	79.358	1
5	0.24	24	0.05	99522	497547.	0.99979	7502279.	75.383	5
10	0.21	21	0.04	99499	497444.	0.99971	7004732.	70.400	10
15	0.38	38	0.08	99478	497300.	0.99953	6507288.	65.414	15
20	0.57	57	0.11	99440	497066.	0.99933	6009988.	60.438	20
25	0.78	77	0.16	99384	496733.	0.99907	5512922.	55.471	25
30	1.09	109	0.22	99306	496272.	0.99858	5016189.	50.512	30
35	1.78	176	0.36	99198	495567.	0.99750	4519917.	45.565	35
40	3.28	325	0.66	99022	494329.	0.99508	4024350.	40.641	40
45	6.70	661	1.34	98697	491897.	0.99098	3530022.	35.766	45
50	11.55	1132	2.32	98036	487461.	0.98433	3038125.	30.990	50
55	20.18	1956	4.08	96904	479824.	0.97296	2550663.	26.322	55
60	34.63	3288	7.04	94948	466848.	0.94991	2070839.	21.810	60
65	67.43	6181	13.94	91660	443465.	0.90527	1603992.	17.499	65
70	126.45	10809	26.92	85479	401454.	0.82337	1160527.	13.577	70
75	229.32	17123	51.80	74670	330544.	0.71510	759072.	10.166	75
80	362.56	20865	88.27	57547	236373.	0.55917	428528.	7.447	80
85	538.55	19756	149.47	36683	132171.	0.37542	192156.	5.238	85
90	735.07	12443	250.76	16927	49619.	0.19541	59984.	3.544	90
95	897.85	4026	415.27	4484	9696.	0.06456 (3)	10365.	2.311	95
100	1000.00	458	684.52	458	669.	0.0	669.	1.461	100

MALES

Age(x)	1000 q(x)	d(x)	1000 m(x)	l(x)	L(x)	P(x)	T(x)	e(x)	Age(x)
0	7.11	711	7.16	100000	99334.	0.99270 (1)	7664660.	76.647	0
1	0.58	58	0.15	99289	397018.	0.99927 (2)	7565326.	76.195	1
5	0.61	60	0.12	99231	495989.	0.99945	7168308.	72.239	5
10	0.57	57	0.11	99171	495717.	0.99908	6672319.	67.281	10
15	1.30	129	0.26	99114	495260.	0.99847	6176602.	62.318	15
20	1.77	175	0.35	98985	494504.	0.99829	5681342.	57.396	20
25	1.63	161	0.33	98810	493660.	0.99827	5186838.	52.493	25
30	1.83	180	0.37	98648	492808.	0.99783	4693178.	47.575	30
35	2.55	251	0.51	98468	491738.	0.99651	4200369.	42.657	35
40	4.51	443	0.90	98217	490024.	0.99316	3708631.	37.759	40
45	9.39	918	1.89	97775	486670.	0.98646	3218607.	32.919	45
50	18.08	1751	3.65	96857	480081.	0.97368	2731937.	28.206	50
55	35.40	3367	7.20	95106	467446.	0.95261	2251856.	23.677	55
60	60.86	5983	12.54	91738	445292.	0.91873	1784410.	19.451	60
65	104.82	9031	22.07	86155	409102.	0.86305	1339118.	15.543	65
70	175.83	13561	38.41	77124	353077.	0.77320	930016.	12.059	70
75	282.05	17928	65.67	63564	272999.	0.65807	576939.	9.077	75
80	422.30	19272	107.27	45636	179653.	0.50061	303940.	6.660	80
85	596.40	15723	174.83	26364	89935.	0.32535	124287.	4.714	85
90	776.95	8267	282.53	10640	29260.	0.16457	34351.	3.228	90
95	916.34	2175	451.62	2373	4815.	0.05419 (3)	5091.	2.145	95
100	1000.00	199	719.59	199	276.	0.0	276.	1.390	100

LIFE TABLES

MODEL WEST

FEMALES

LEVEL 15

Age(x)	1000 q(x)	d(x)	1000 m(x)	l(x)	L(x)	P(x)	T(x)	e(x)	Age(x)
0	93.94	9394	100.23	100000	93723.	0.88827 (1)	5500000.	55.000	0
1	50.44	4570	13.04	90606	350411.	0.96015 (2)	5406277.	59.668	1
5	15.84	1363	3.20	86037	426435.	0.98696	5055865.	58.764	5
10	12.27	1039	2.47	84674	420874.	0.98523	4629430.	54.674	10
15	17.52	1465	3.53	83635	414658.	0.97995	4208556.	50.321	15
20	22.85	1877	4.62	82170	406343.	0.97562	3793899.	46.171	20
25	26.07	2093	5.28	80292	396437.	0.97226	3387556.	42.190	25
30	29.59	2314	6.00	78199	385440.	0.96853	2991118.	38.250	30
35	33.56	2546	6.82	75885	373312.	0.96417	2605678.	34.337	35
40	38.38	2815	7.82	73338	359936.	0.95807	2232366.	30.439	40
45	45.93	3239	9.39	70523	344843.	0.94649	1872431.	26.550	45
50	62.12	4180	12.81	67284	326389.	0.92763	1527588.	22.704	50
55	84.21	5314	17.55	63104	302768.	0.89713	1201199.	19.035	55
60	124.95	7221	26.58	57790	271621.	0.84991	898431.	15.546	60
65	181.22	9164	39.70	50569	230854.	0.77968	626810.	12.395	65
70	272.06	11265	62.59	41405	179991.	0.67179	395956.	9.563	70
75	395.30	11915	98.54	30140	120916.	0.53600	215965.	7.165	75
80	548.57	9998	154.27	18226	64810.	0.37687	95049.	5.215	80
85	719.79	5922	242.46	8228	24425.	0.21715	30238.	3.675	85
90	869.32	2004	377.86	2305	5304.	0.09357	5813.	2.521	90
95	961.42	290	583.66	301	496.	0.02538 (3)	509.	1.690	95
100	1000.00	12	899.34	12	13.	0.0	13.	1.112	100

MALES

Age(x)	1000 q(x)	d(x)	1000 m(x)	l(x)	L(x)	P(x)	T(x)	e(x)	Age(x)
0	111.96	11196	121.04	100000	92499.	0.87123 (1)	5181577.	51.816	0
1	51.45	4569	13.32	88804	343117.	0.95835 (2)	5089079.	57.307	1
5	15.99	1347	3.23	84235	417472.	0.98714	4745961.	56.342	5
10	11.75	974	2.36	82888	412105.	0.98540	4328489.	52.221	10
15	17.74	1453	3.58	81915	406086.	0.97873	3916385.	47.811	15
20	25.16	2025	5.09	80462	397450.	0.97382	3510298.	43.627	20
25	27.31	2142	5.53	78437	387045.	0.97086	3112848.	39.686	25
30	31.18	2379	6.33	76295	375766.	0.96585	2725803.	35.727	30
35	37.46	2769	7.63	73916	362935.	0.95791	2350037.	31.793	35
40	47.30	3365	9.68	71147	347658.	0.94647	1987102.	27.930	40
45	60.62	4109	12.49	67782	329046.	0.92922	1639444.	24.187	45
50	82.49	5252	17.18	63673	305757.	0.90386	1310397.	20.580	50
55	112.25	6558	23.73	58420	276362.	0.86632	1004640.	17.197	55
60	159.82	8289	34.62	51862	239420.	0.81209	728278.	14.042	60
65	224.14	9767	50.23	43574	194429.	0.73695	488858.	11.219	65
70	317.37	10730	74.88	33807	143285.	0.62633	294429.	8.709	70
75	444.50	10258	114.31	23078	89743.	0.48664	151143.	6.549	75
80	593.49	7608	174.21	12820	43673.	0.33687	61400.	4.790	80
85	754.89	3934	267.39	5211	14712.	0.18945	17728.	3.402	85
90	888.78	1135	407.32	1277	2787.	0.08008	3015.	2.361	90
95	967.63	137	615.90	142	223.	0.02168 (3)	228.	1.606	95
100	1000.00	5	929.88	5	5.	0.0	5.	1.075	100

FEMALES

LEVEL 16

Age(x)	1000 q(x)	d(x)	1000 m(x)	l(x)	L(x)	P(x)	T(x)	e(x)	Age(x)
0	82.31	8231	87.36	100000	94213.	0.90267 (1)	5750000.	57.500	0
1	41.57	3815	10.68	91769	357120.	0.96722 (2)	5655787.	61.630	1
5	13.37	1176	2.69	87954	436538.	0.98899	5298667.	60.243	5
10	10.38	901	2.09	86779	431731.	0.98743	4862129.	56.029	10
15	14.96	1285	3.01	85878	426305.	0.98281	4430398.	51.589	15
20	19.63	1661	3.96	84593	418978.	0.97899	4004092.	47.334	20
25	22.53	1869	4.56	82932	410174.	0.97595	3585114.	43.230	25
30	25.73	2086	5.21	81063	400310.	0.97247	3174940.	39.166	30
35	29.52	2332	5.99	78977	389291.	0.96820	2774630.	35.132	35
40	34.35	2633	6.98	76646	376911.	0.96205	2385339.	31.122	40
45	41.98	3107	8.57	74013	362609.	0.95081	2008429.	27.136	45
50	57.34	4065	11.79	70906	344773.	0.93277	1645820.	23.211	50
55	78.60	5254	16.34	66841	321593.	0.90359	1301047.	19.465	55
60	117.35	7227	24.87	61587	290589.	0.85787	979454.	15.904	60
65	172.55	9380	37.63	54360	249287.	0.78879	688865.	12.672	65
70	261.81	11776	59.89	44980	196636.	0.68198	439578.	9.773	70
75	384.50	12767	95.20	33204	134101.	0.54725	242943.	7.317	75
80	537.60	10987	149.71	20437	73386.	0.38715	108842.	5.326	80
85	710.11	6710	236.19	9450	28411.	0.22523	35456.	3.752	85
90	863.01	2364	369.46	2739	6399.	0.09820	7045.	2.572	90
95	958.88	360	572.65	375	628.	0.02700 (3)	646.	1.721	95
100	1000.00	15	885.23	15	17.	0.0	17.	1.130	100

MALES

Age(x)	1000 q(x)	d(x)	1000 m(x)	l(x)	L(x)	P(x)	T(x)	e(x)	Age(x)
0	99.16	9916	106.25	100000	93332.	0.88680 (1)	5412230.	54.122	0
1	43.08	3881	11.09	90084	350069.	0.96464 (2)	5318897.	59.044	1
5	13.89	1197	2.80	86203	427723.	0.98880	4968829.	57.641	5
10	10.28	874	2.07	85006	422932.	0.98709	4541105.	53.421	10
15	15.77	1327	3.18	84132	417474.	0.98110	4118174.	48.949	15
20	22.35	1851	4.52	82805	409581.	0.97682	3700700.	44.692	20
25	24.11	1951	4.88	80954	400086.	0.97429	3291119.	40.654	25
30	27.49	2172	5.57	79002	398000.	0.96981	2891033.	36.594	30
35	33.21	2551	6.75	76831	378030.	0.96244	2501233.	32.555	35
40	42.44	3153	8.67	74279	363830.	0.95144	2123202.	28.584	40
45	55.48	3946	11.40	71127	346163.	0.93468	1759372.	24.736	45
50	76.60	5146	15.91	67181	323552.	0.90987	1413210.	21.036	50
55	106.00	6576	22.34	62034	294390.	0.87308	1089658.	17.565	55
60	152.26	8444	32.85	55459	257026.	0.81990	795268.	14.340	60
65	215.67	10140	48.12	47014	210736.	0.74557	538241.	11.448	65
70	307.96	11356	72.28	36874	157118.	0.63577	327506.	8.882	70
75	434.22	11081	110.93	25519	99891.	0.49712	170387.	6.677	75
80	583.66	8427	169.70	14438	49658.	0.34590	70496.	4.883	80
85	746.60	4488	261.28	6011	17177.	0.19627	20837.	3.467	85
90	883.60	1346	399.22	1523	3371.	0.08389	3661.	2.403	90
95	965.59	171	605.36	177	283.	0.02300 (3)	289.	1.633	95
100	1000.00	6	916.39	6	7.	0.0	7.	1.091	100

1) P(birth), (2) P(0-4), (3) T(100)/T(95)

Tabel 39.

## Dødelighedstavle for årene 1993-1994

Life table for the years 1993-1994

Alder	Mænd			Kvinder			Alder	Mænd			Kvinder		
	Overlevende	Aldersklassens døds-hyppighed <sup>1</sup>	Middellevetid <sup>2</sup>	Overlevende	Aldersklassens døds-hyppighed <sup>1</sup>	Middellevetid <sup>2</sup>		Overlevende	Aldersklassens døds-hyppighed <sup>1</sup>	Middellevetid <sup>2</sup>	Overlevende	Aldersklassens døds-hyppighed <sup>1</sup>	Middellevetid <sup>2</sup>
	1	2	3	4	5	6		1	2	3	4	5	6
0 år .....	100 000	653	72,53	100 000	504	77,78	50 år .....	92 424	581	25,68	95 527	406	29,84
1 år .....	99 347	48	72,01	99 496	56	77,17	51 år .....	91 888	608	24,83	95 139	435	28,96
2 år .....	99 299	28	71,04	99 441	36	76,22	52 år .....	91 329	650	23,98	94 725	463	28,08
3 år .....	99 271	23	70,06	99 405	26	75,24	53 år .....	90 735	729	23,13	94 287	516	27,21
4 år .....	99 248	21	69,08	99 380	16	74,26	54 år .....	90 074	839	22,30	93 800	565	26,35
5 år .....	99 227	24	68,09	99 364	17	73,27	55 år .....	89 318	903	21,48	93 270	610	25,49
6 år .....	99 203	20	67,11	99 347	16	72,29	56 år .....	88 512	966	20,68	92 701	709	24,65
7 år .....	99 183	21	66,12	99 331	11	71,30	57 år .....	87 657	1 106	19,87	92 044	770	23,82
8 år .....	99 162	20	65,14	99 320	17	70,31	58 år .....	86 687	1 300	19,09	91 335	813	23,00
9 år .....	99 142	13	64,15	99 303	15	69,32	59 år .....	85 560	1 420	18,33	90 592	928	22,19
10 år .....	99 130	11	63,16	99 288	11	68,33	60 år .....	84 345	1 595	17,59	89 752	1 056	21,39
11 år .....	99 119	15	62,16	99 278	17	67,34	61 år .....	83 000	1 824	16,87	88 805	1 125	20,61
12 år .....	99 103	19	61,17	99 261	18	66,35	62 år .....	81 486	1 981	16,17	87 805	1 210	19,84
13 år .....	99 084	20	60,18	99 244	16	65,36	63 år .....	79 872	2 103	15,49	86 743	1 330	19,08
14 år .....	99 064	31	59,20	99 228	15	64,37	64 år .....	78 193	2 256	14,81	85 590	1 478	18,33
15 år .....	99 033	44	58,21	99 213	16	63,38	65 år .....	76 429	2 532	14,14	84 325	1 643	17,59
16 år .....	98 990	52	57,24	99 197	21	62,39	66 år .....	74 493	2 898	13,49	82 940	1 768	16,88
17 år .....	98 939	62	56,27	99 175	20	61,40	67 år .....	72 334	3 149	12,88	81 473	1 920	16,17
18 år .....	98 878	72	55,30	99 156	25	60,41	68 år .....	70 057	3 413	12,29	79 909	2 078	15,48
19 år .....	98 806	90	54,34	99 130	44	59,43	69 år .....	67 666	3 749	11,70	78 248	2 204	14,80
20 år .....	98 717	91	53,39	99 087	38	58,45	70 år .....	65 129	3 981	11,14	76 524	2 340	14,12
21 år .....	98 627	80	52,44	99 050	27	57,48	71 år .....	62 536	4 401	10,58	74 733	2 656	13,45
22 år .....	98 548	81	51,48	99 023	30	56,49	72 år .....	59 784	4 878	10,04	72 748	2 956	12,80
23 år .....	98 468	91	50,52	98 994	32	55,51	73 år .....	56 868	5 360	9,53	70 598	3 103	12,18
24 år .....	98 378	90	49,57	98 963	31	54,53	74 år .....	53 819	5 795	9,04	68 407	3 340	11,55
25 år .....	98 289	93	48,61	98 932	34	53,54	75 år .....	50 701	6 302	8,57	66 122	3 746	10,93
26 år .....	98 198	102	47,66	98 899	42	52,56	76 år .....	47 505	6 926	8,11	63 645	4 185	10,34
27 år .....	98 097	101	46,71	98 857	41	51,58	77 år .....	44 215	7 404	7,68	60 982	4 446	9,77
28 år .....	97 998	105	45,75	98 817	42	50,60	78 år .....	40 941	8 047	7,25	58 270	4 939	9,20
29 år .....	97 895	109	44,80	98 775	48	49,62	79 år .....	37 647	8 648	6,84	55 392	5 552	8,65
30 år .....	97 788	120	43,85	98 728	50	48,65	80 år .....	34 391	9 362	6,44	52 317	6 012	8,13
31 år .....	97 670	134	42,90	98 679	53	47,67	81 år .....	31 171	10 447	6,06	49 172	6 756	7,62
32 år .....	97 540	153	41,96	98 626	61	46,70	82 år .....	27 915	11 425	5,71	45 850	7 590	7,13
33 år .....	97 391	163	41,02	98 566	59	45,73	83 år .....	24 726	12 321	5,38	42 370	8 353	6,68
34 år .....	97 232	170	40,09	98 507	70	44,75	84 år .....	21 679	13 240	5,06	38 831	9 242	6,24
35 år .....	97 067	184	39,16	98 438	87	43,78	85 år .....	18 809	14 442	4,76	35 242	9 972	5,83
36 år .....	96 888	201	38,23	98 352	101	42,82	86 år .....	16 092	15 516	4,48	31 728	11 403	5,42
37 år .....	96 693	218	37,30	98 253	119	41,86	87 år .....	13 596	16 553	4,21	28 110	12 900	5,05
38 år .....	96 482	244	36,38	98 136	118	40,91	88 år .....	11 345	17 826	3,95	24 484	13 830	4,72
39 år .....	96 246	272	35,47	98 020	128	39,96	89 år .....	9 323	19 585	3,70	21 098	15 248	4,40
40 år .....	95 984	307	34,57	97 894	164	39,01	90 år .....	7 497	21 026	3,47	17 881	16 650	4,10
41 år .....	95 689	313	33,67	97 734	176	38,07	91 år .....	5 921	21 754	3,26	14 903	18 024	3,82
42 år .....	95 390	289	32,78	97 562	183	37,14	92 år .....	4 633	23 621	3,03	12 217	19 759	3,55
43 år .....	95 114	308	31,87	97 384	201	36,21	93 år .....	3 538	25 537	2,82	9 803	22 179	3,30
44 år .....	94 821	334	30,97	97 187	207	35,28	94 år .....	2 635	28 976	2,61	7 629	23 864	3,10
45 år .....	94 504	359	30,07	96 986	244	34,35	95 år .....	1 871	31 705	2,47	5 808	25 142	2,92
46 år .....	94 165	381	29,18	96 749	277	33,44	96 år .....	1 278	32 630	2,39	4 348	27 144	2,73
47 år .....	93 806	421	28,28	96 481	302	32,53	97 år .....	861	32 505	2,30	3 168	27 930	2,56
48 år .....	93 411	498	27,40	96 190	331	31,62	98 år .....	581	32 941	2,17	2 283	30 322	2,37
49 år .....	92 946	561	26,54	95 871	359	30,73	99 år .....	390	38 183	1,99	1 591	34 083	2,18

<sup>1,2</sup> Se note 1 og 2 til tabel 38.

TRANSLATION. See table 38.

Figure 1a. Trends in Total Fertility

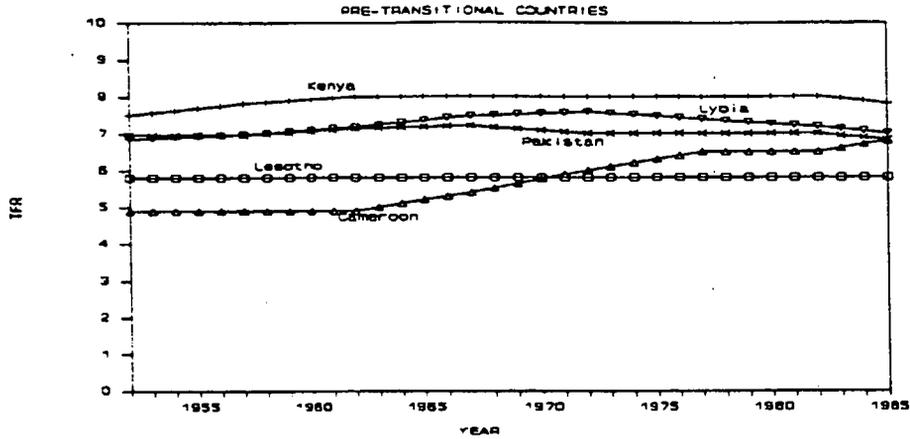


Figure 1b. Trends in Total Fertility

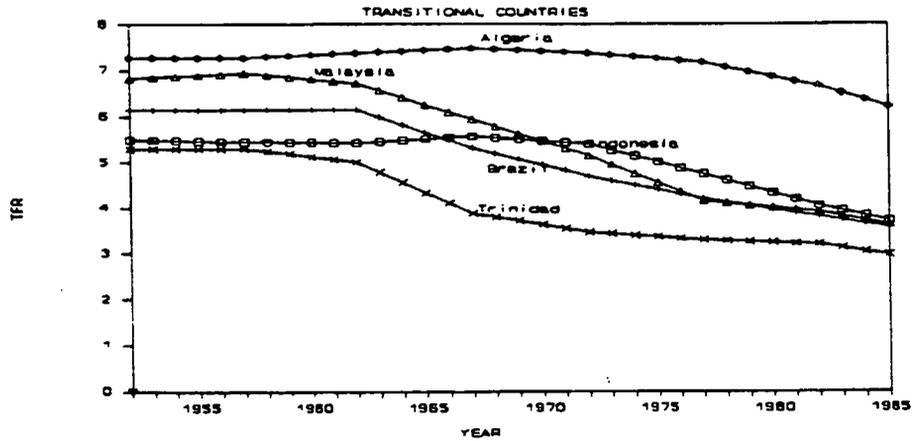


Figure 1c. Trends in Total Fertility

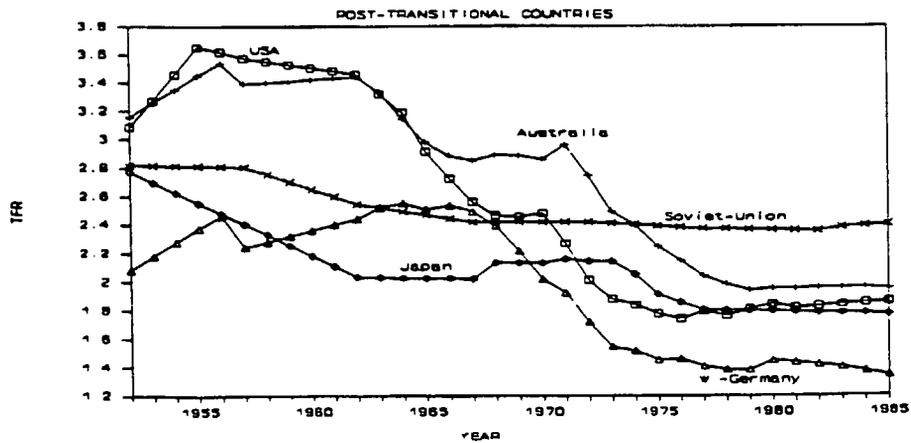


Figure 5. Slow, medium, and rapid trends in total fertility

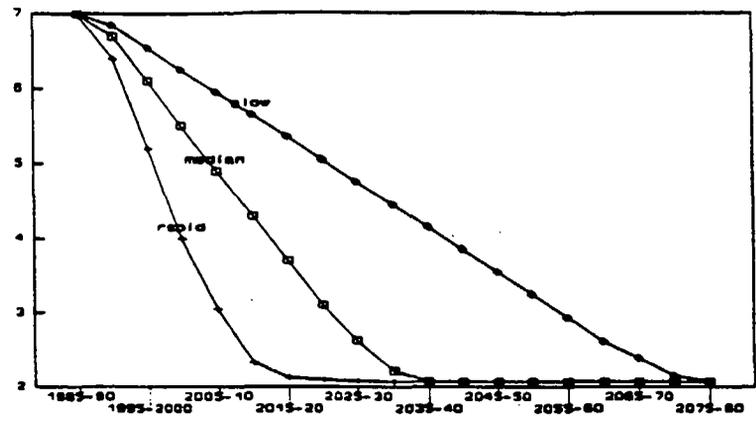


Figure 6. Total fertility trends applied at the end of the fertility transition

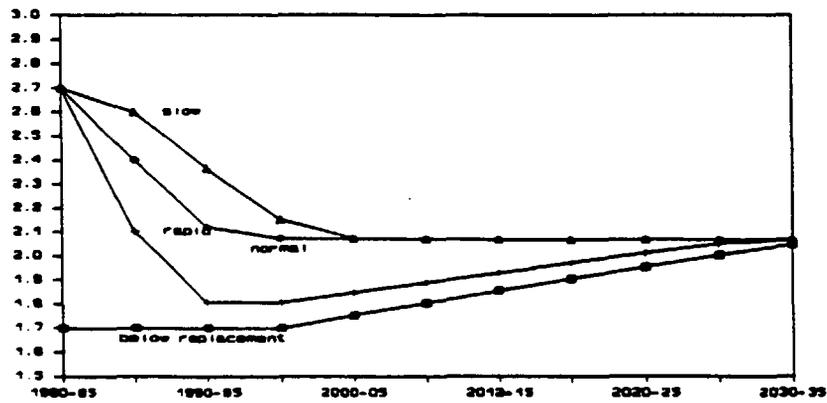


Figure 7. Percentage of total fertility assigned to each age group, by level of total fertility

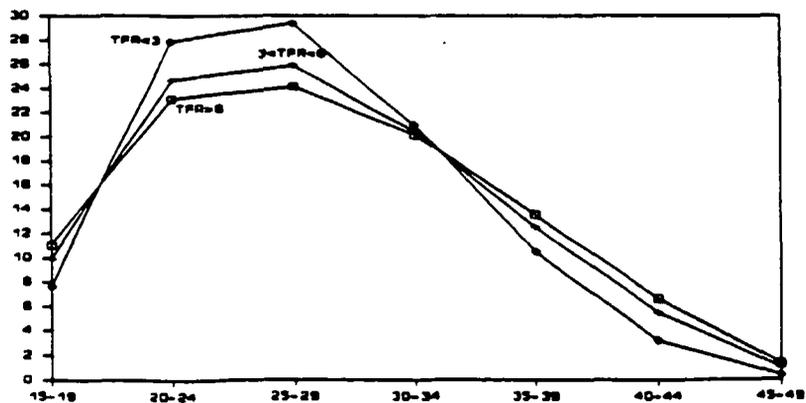
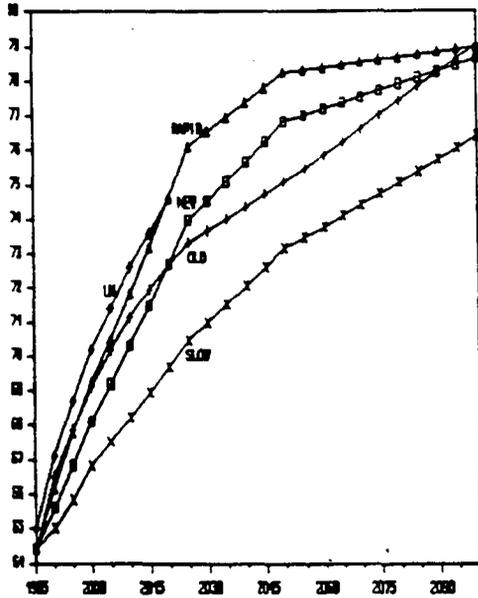
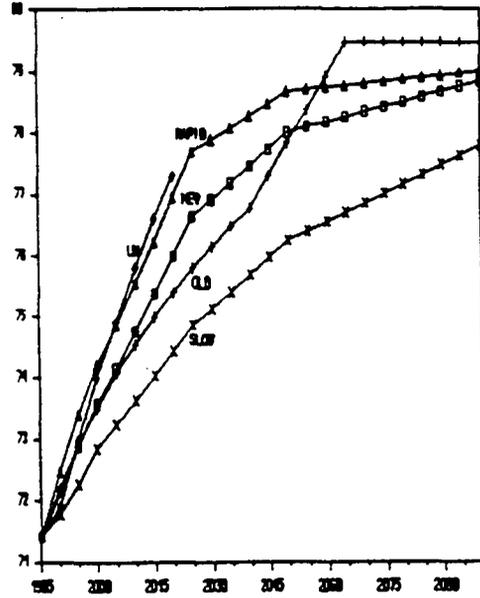


Figure 4 (continued)  
 Life expectancy in years projected by different models, selected countries,  
 1985-2100

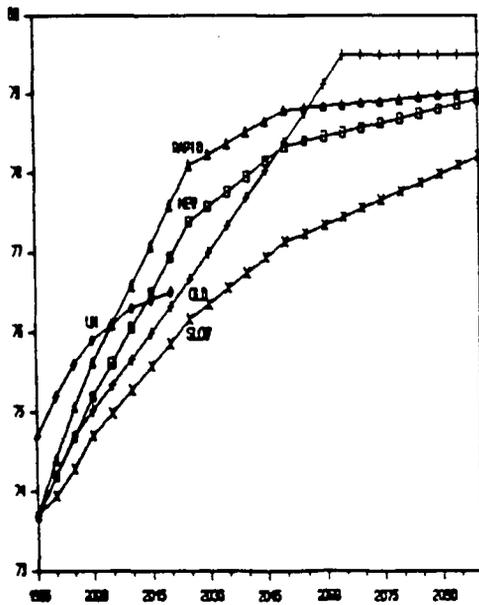
THAILAND



POLAND



COSTA RICA



NORWAY

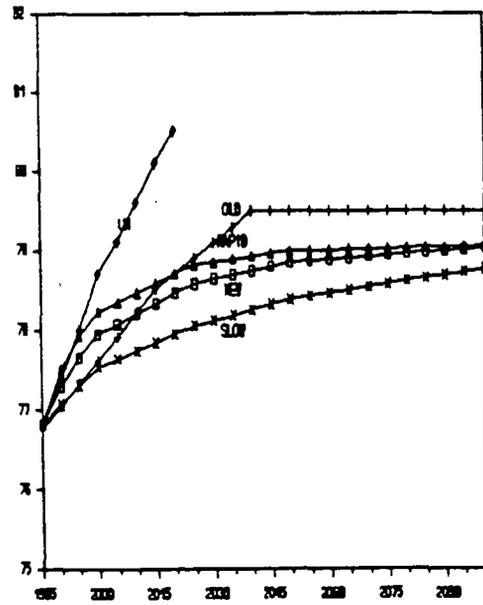
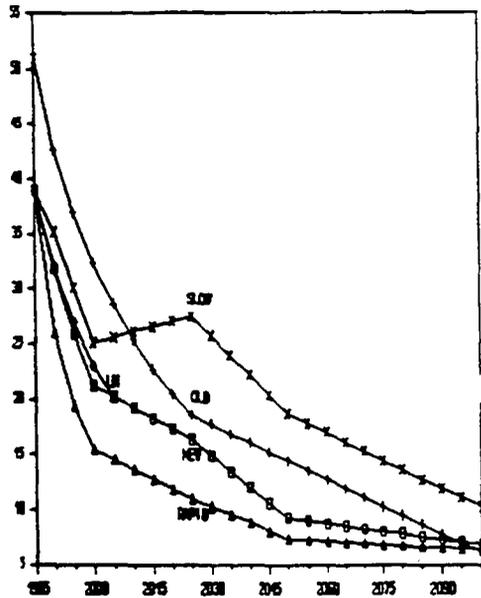
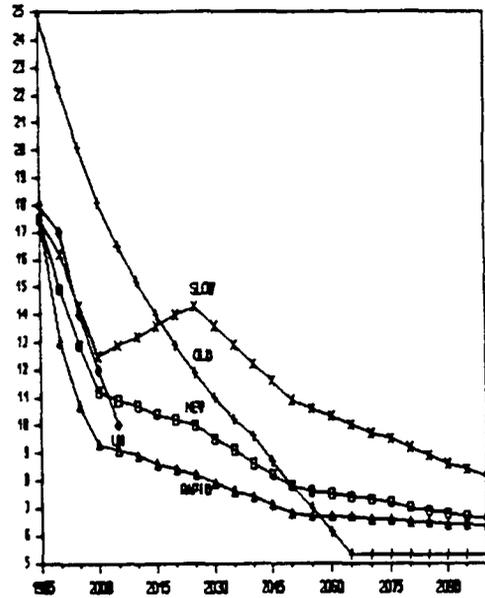


Figure 5 (continued)  
 Infant mortality rate per thousand projected by different models,  
 selected countries, 1985-2100

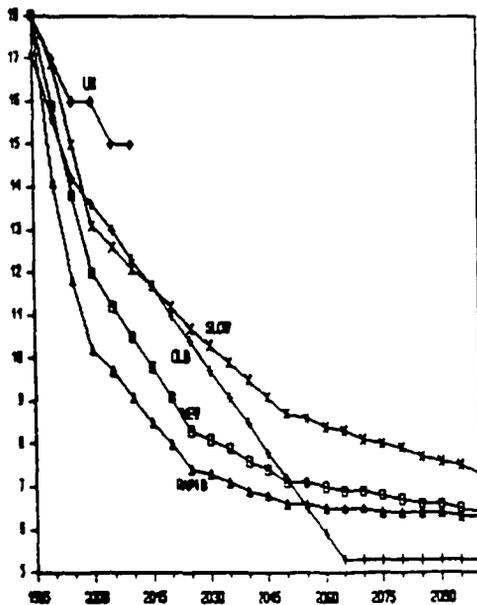
THAILAND



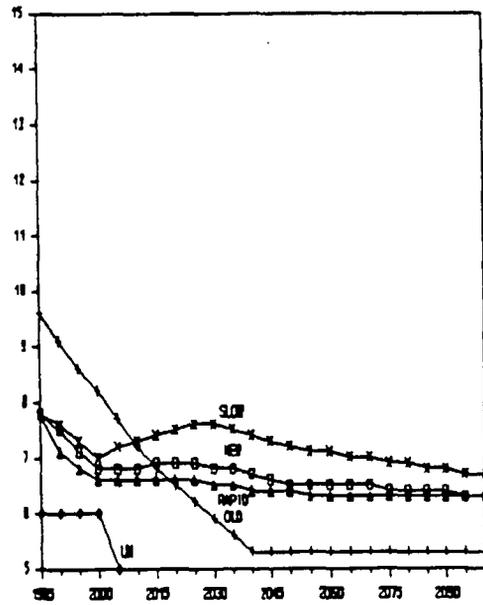
POLAND



COSTA RICA



NORWAY



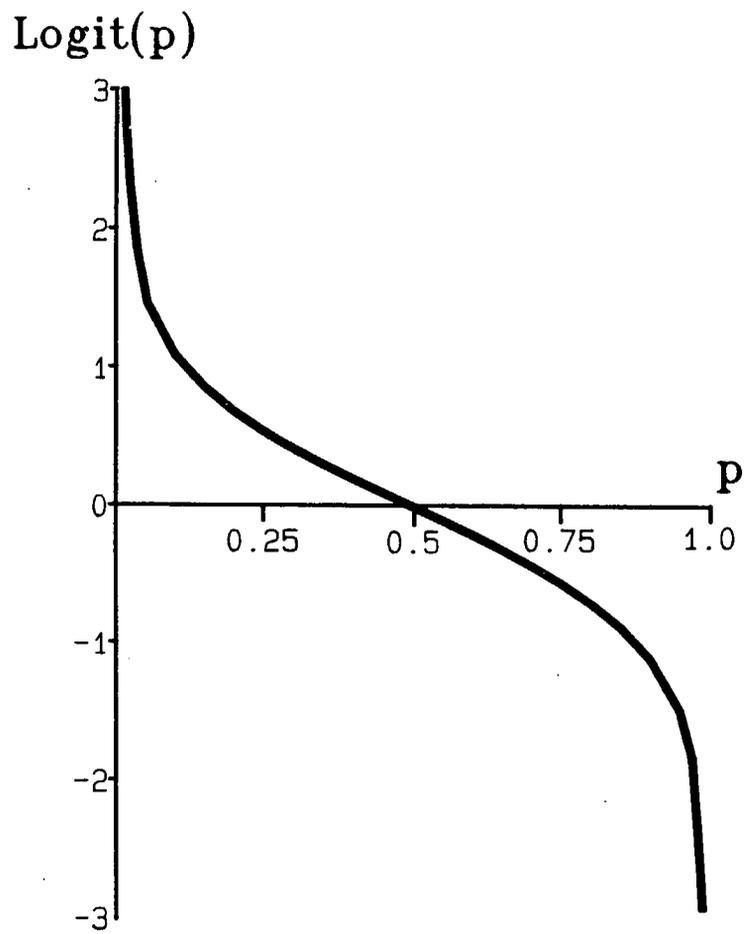


Figure 13.2 The logit transformation

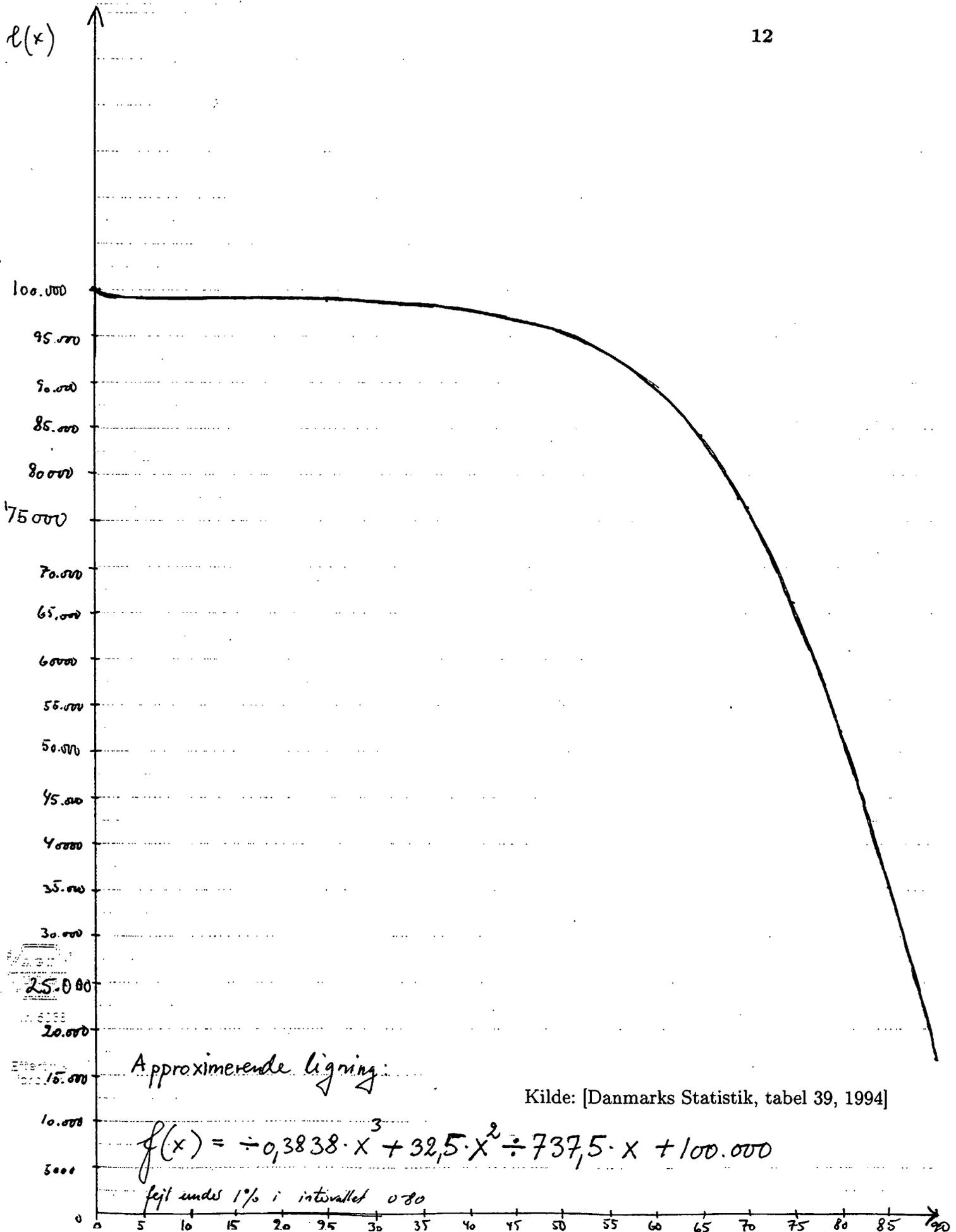
Table 13.1 General and African Standard life table  $l_x$ s and logits

General Standard			African Standard		
$x$	$l_x$	$Y_x(x)$	$x$	$l_x$	$Y_x(x)$
0	1.0000		0	1.0000	
1	0.8499	-0.8670	1	0.8802	-0.9972
2	0.8070	-0.7153	2	0.8335	-0.8053
3	0.7876	-0.6553	3	0.8101	-0.7253
4	0.7762	-0.6218	4	0.7964	-0.6820
5	0.7691	-0.6016	5	0.7863	-0.6514
10	0.7502	-0.5498	10	0.7502	-0.5498
15	0.7362	-0.5131	15	0.7362	-0.5131
20	0.7130	-0.4551	20	0.7130	-0.4551
25	0.6826	-0.3829	25	0.6826	-0.3829
30	0.6525	-0.3150	30	0.6525	-0.3150
35	0.6223	-0.2496	35	0.6223	-0.2496
40	0.5898	-0.1817	40	0.5898	-0.1817
45	0.5535	-0.1073	45	0.5535	-0.1073
50	0.5106	-0.0212	50	0.5106	-0.0212
55	0.4585	0.0832	55	0.4585	0.0832
60	0.3965	0.2100	60	0.3965	0.2100
65	0.3210	0.3746	65	0.3210	0.3746
70	0.2380	0.5818	70	0.2380	0.5818
75	0.1516	0.8611	75	0.1516	0.8611
80	0.0768	1.2433	80	0.0768	1.2433
85	0.0276	1.7810	85	0.0276	1.7810
90	0.0059	2.5634	90	0.0059	2.5634
95	0.0006	3.7090	95	0.0006	3.7090
100	0.0000		100	0.0000	

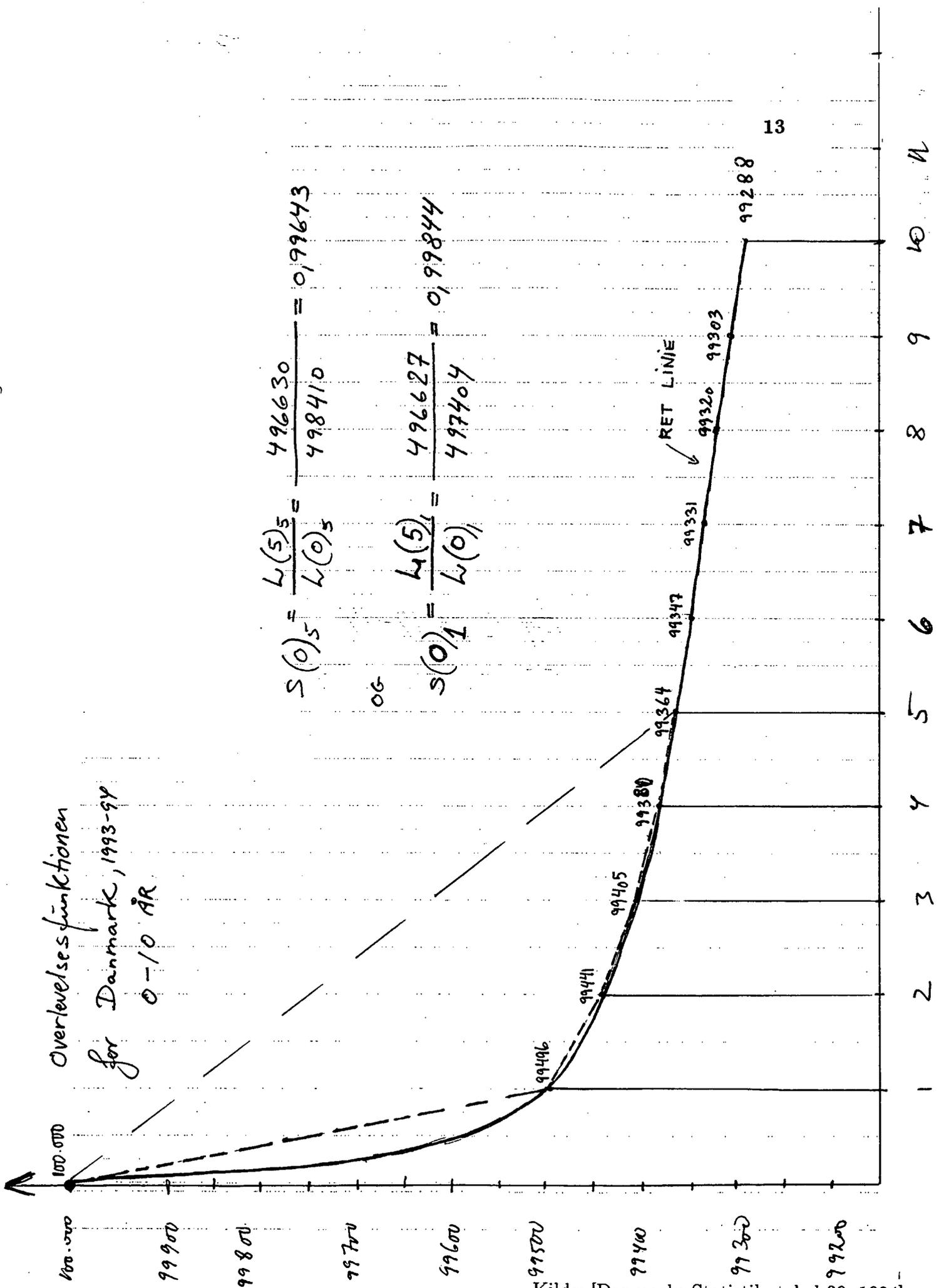
Source: Carrier and Hobcraft (1973). (These are the smoothed and extended versions of the original standards.)

Overlevelsesfunktionen  $l(x)$   
for Danmark, 1993-94, Kvinder  $e(0) = 77,78$  ÅR

12



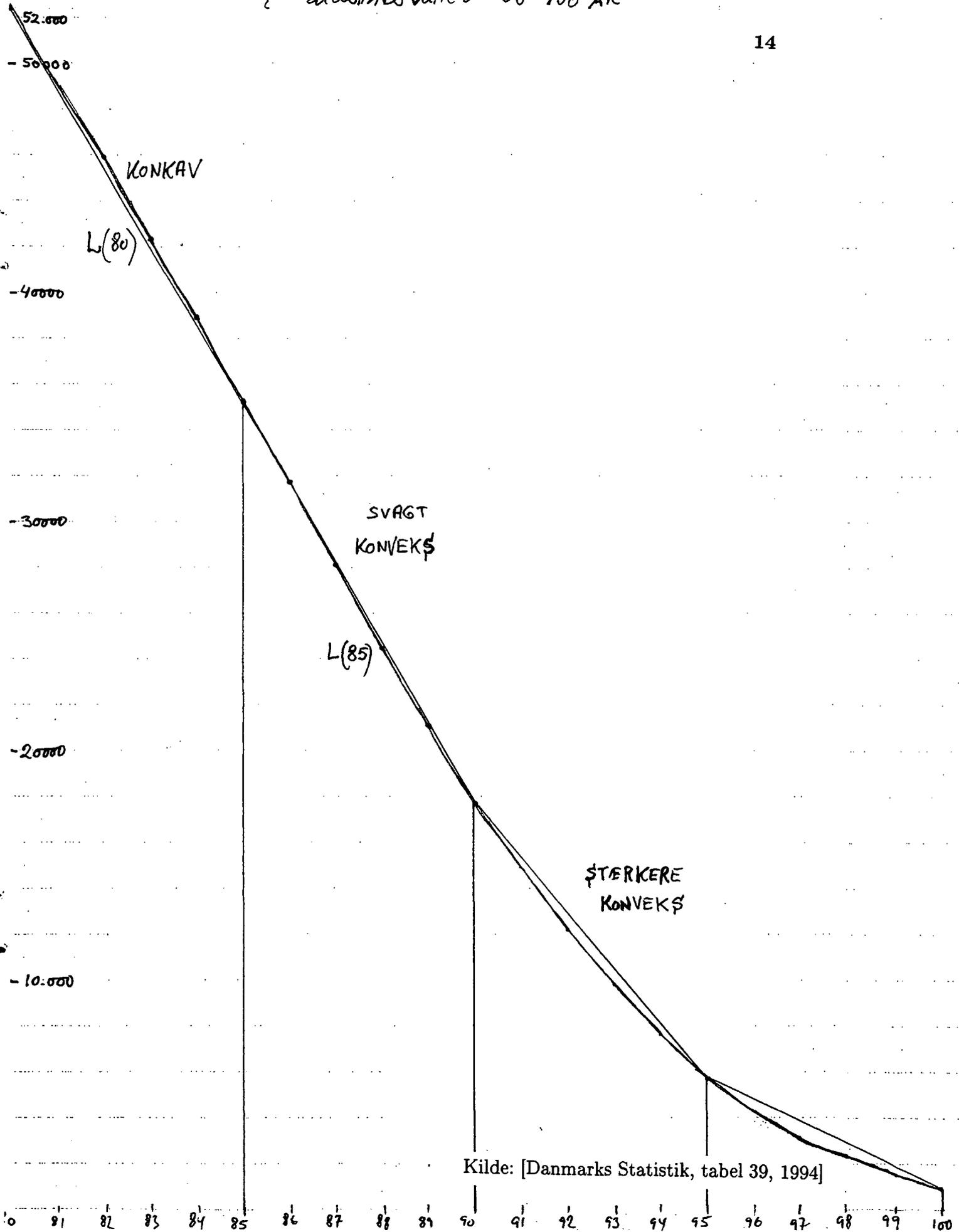
Overlevelsesfunktioner  
for Danmark, 1993-94  
0-10 ÅR



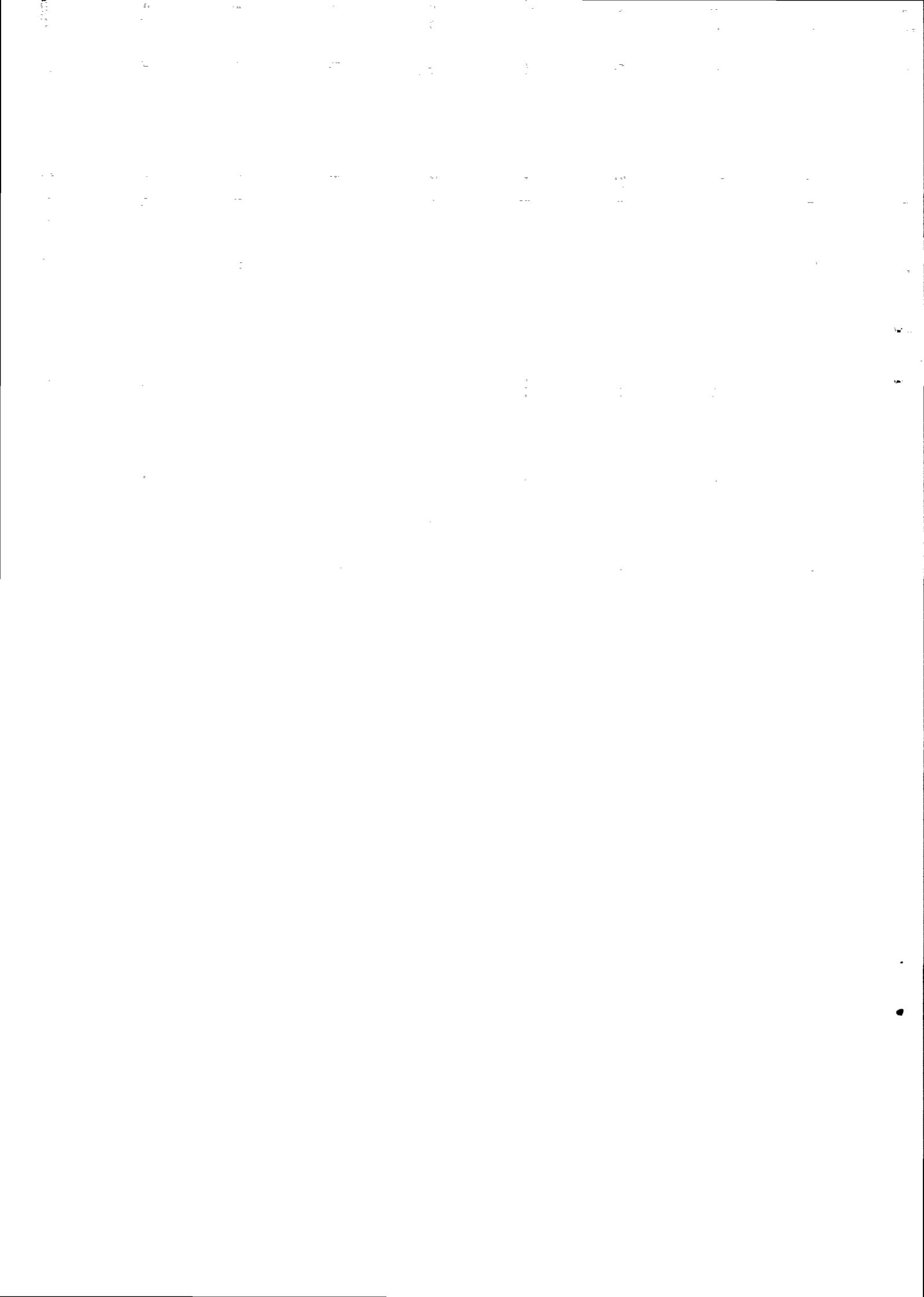
Kilde: [Danmarks Statistik, tabel 39, 1994]

Overlevelsesfunktioner for  
Danmark, 1993-94 - kvinder  
i aldersintervallet 80-100 år

14



Kilde: [Danmarks Statistik, tabel 39, 1994]



Liste over tidligere udkomne tekster  
tilsendes gerne. Henvendelse herom kan  
ske til IMFUFA's sekretariat  
tlf. 46 75 77 11 lokal 2263

- 227/92 "Computersimulering og fysik"  
af: Per M.Hansen, Steffen Holm,  
Peter Maibom, Mads K. Dall Petersen,  
Pernille Postgaard, Thomas B.Schrøder,  
Ivar P. Zeck  
Vejleder: Peder Voetmann-Christiansen
- 228/92 "Teknologi og historie"  
Fire artikler af:  
Mogens Niss, Jens Høyrup, Ib Thiersen,  
Hans Hedal
- 229/92 "Masser af information uden betydning"  
En diskussion af informationsteorien  
i Tor Nørretranders' "Mærk Verden" og  
en skitse til et alternativ baseret  
på andenordens kybernetik og semiotik.  
af: Søren Brier
- 230/92 "Vinklens tredeling - et klassisk  
problem"  
et matematisk projekt af  
Karen Birkelund, Bjørn Christensen  
Vejleder: Johnny Ottesen
- 231A/92 "Elektrondiffusion i silicium - en  
matematisk model"  
af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund,  
Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen  
Vejledere: Johnny Ottesen, H.B.Hansen
- 231B/92 "Elektrondiffusion i silicium - en  
matematisk model" Kildetekster  
af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund,  
Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen  
Vejledere: Johnny Ottesen, H.B.Hansen
- 232/92 "Undersøgelse om den simultane opdagelse  
af energiens bevarelse og isærdeles om  
de af Mayer, Colding, Joule og Helmholtz  
udførte arbejder"  
af: L.Arleth, G.I.Dybkjær, M.T.Østergård  
Vejleder: Dorthe Posselt
- 233/92 "The effect of age-dependent host  
mortality on the dynamics of an endemic  
disease and  
Instability in an SIR-model with age-  
dependent susceptibility  
by: Viggo Andreassen
- 234/92 "THE FUNCTIONAL DETERMINANT OF A FOUR-DIMENSIONAL  
BOUNDARY VALUE PROBLEM"  
by: Thomas P. Branson and Peter B. Gilkey
- 235/92 OVERFLADESTRUKTUR OG POREUDVIKLING AF KOKS  
- Modul 3 fysik projekt -  
af: Thomas Jessen
- 
- 217/92 "Two papers on APPLICATIONS AND MODELLING  
IN THE MATHEMATICS CURRICULUM"  
by: Mogens Niss
- 218/92 "A Three-Square Theorem"  
by: Lars Kadison
- 219/92 "RUPNOK - stationær strømning i elastiske rør"  
af: Anja Boisen, Karen Birkelund, Mette Olufsen  
Vejleder: Jesper Larsen
- 220/92 "Automatisk diagnosticering i digitale kredsløb"  
af: Bjørn Christensen, Ole Møller Nielsen  
Vejleder: Stig Andur Pedersen
- 221/92 "A BUNDLE VALUED RADON TRANSFORM, WITH  
APPLICATIONS TO INVARIANT WAVE EQUATIONS"  
by: Thomas P. Branson, Gestur Olafsson and  
Henrik Schlichtkrull
- 222/92 On the Representations of some Infinite Dimensional  
Groups and Algebras Related to Quantum Physics  
by: Johnny T. Ottesen
- 223/92 THE FUNCTIONAL DETERMINANT  
by: Thomas P. Branson
- 224/92 UNIVERSAL AC CONDUCTIVITY OF NON-METALLIC SOLIDS AT  
LOW TEMPERATURES  
by: Jeppe C. Dyre
- 225/92 "HATMODELLEN" Impedansspektroskopi i ultrarent  
en-krystallinsk silicium  
af: Anja Boisen, Anders Gorm Larsen, Jesper Varmer,  
Johannes K. Nielsen, Kit R. Hansen, Peter Bøggild  
og Thomas Hougaard  
Vejleder: Petr Viscor
- 226/92 "METHODS AND MODELS FOR ESTIMATING THE GLOBAL  
CIRCULATION OF SELECTED EMISSIONS FROM ENERGY  
CONVERSION"  
by: Bent Sørensen

- 236a/93 INTRODUKTION TIL KVANTE HALL EFFEKTEN  
af: Anja Boisen, Peter Bøggild  
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen  
Erland Brun Hansen
- 236b/93 STRØMSSAMMENBRUD AF KVANTE HALL EFFEKTEN  
af: Anja Boisen, Peter Bøggild  
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen  
Erland Brun Hansen
- 237/93 The Wedderburn principal theorem and Shukla cohomology  
af: Lars Kadison
- 238/93 SEMIOTIK OG SYSTEMEGÆNSKABER (2)  
Vektorbånd og tensorer  
af: Peder Voetmann Christiansen
- 239/93 Valgsystemer - Modelbygning og analyse Matematik 2. modul  
af: Charlotte Gjerrild, Jane Hansen, Maria Hermannsson, Allan Jørgensen, Ragna Clauson-Kaas, Poul Lützen  
Vejleder: Mogens Niss
- 240/93 Patologiske eksempler. Om sære matematiske fisks betydning for den matematiske udvikling  
af: Claus Dråby, Jørn Skov Hansen, Runa Ulsøe Johansen, Peter Meibom, Johannes Kristoffer Nielsen  
Vejleder: Mogens Niss
- 241/93 FOTOVOLTAISK STATUSNOTAT 1  
af: Bent Sørensen
- 242/93 Brovedligeholdelse - bevar mig vel  
Analyse af Vejdirektoratets model for optimering af broreparationer  
af: Linda Kyndlev, Kare Fundal, Kamma Tulinus, Ivar Zeck  
Vejleder: Jesper Larsen
- 243/93 TANKEEKSPERIMENTER I FYSIKKEN  
Et 1.modul fysikprojekt  
af: Karen Birkelund, Stine Sofia Korremann  
Vejleder: Dorthe Posselt
- 244/93 RADONTRANSFORMATIONEN og dens anvendelse i CT-scanning  
Projektrapport  
af: Trine Andreassen, Tine Guldager Christiansen, Nina Skov Hansen og Christine Iversen  
Vejledere: Gestur Olafsson og Jesper Larsen
- 245a+b/93 Time-Of-Flight målinger på krystallinske halvledere  
Specialerapport  
af: Linda Szkotak Jensen og Lise Odgaard Gade  
Vejledere: Petr Viscor og Niels Boye Olsen
- 246/93 HVERDAGSVIDEN OG MATEMATIK - LÆREPROCESSER I SKOLEN  
af: Lena Lindenskov, Statens Humanistiske Forskningsråd, RUC, IMFUFA
- 247/93 UNIVERSAL LOW TEMPERATURE AC CONDUCTIVITY OF MACROSCOPICALLY DISORDERED NON-METALS  
by: Jeppe C. Dyre
- 248/93 DIRAC OPERATORS AND MANIFOLDS WITH BOUNDARY  
by: B. Booss-Bavnbek, K.P.Wojciechowski
- 249/93 Perspectives on Teichmüller and the Jahresbericht Addendum to Schappacher, Scholz, et al.  
by: B. Booss-Bavnbek  
With comments by W.Abikoff, L.Ahlfors, J.Cerf, P.J.Davis, W.Fuchs, F.P.Gardiner, J.Jost, J.-P.Kahane, R.Lohan, L.Lorch, J.Radkau and T.Söderqvist
- 250/93 EULER OG BOLZANO - MATEMATISK ANALYSE SET I ET VIDENSKABSTEORETISK PERSPEKTIV  
Projektrapport af: Anja Juul, Lone Michelsen, Tomas Højgård Jensen  
Vejleder: Stig Andur Pedersen
- 251/93 Genotypic Proportions in Hybrid Zones  
by: Freddy Bugge Christiansen, Viggo Andreassen and Ebbe Thue Poulsen
- 252/93 MODELLERING AF TILFÆLDIGE FÆNOMENER  
Projektrapport af: Birthe Friis, Lisbeth Helmgård Kristina Charlotte Jakobsen, Marina Mosbæk Johannessen, Lotte Ludvigsen, Mette Hass Nielsen
- 253/93 Kuglepakning  
Teori og model  
af: Lise Arleth, Kåre Fundal, Nils Kruse  
Vejleder: Mogens Niss
- 254/93 Regressionsanalyse  
Materiale til et statistikkursus  
af: Jørgen Larsen
- 255/93 TID & BETINGET UAFHÆNGIGHED  
af: Peter Harremoës
- 256/93 Determination of the Frequency Dependent Bulk Modulus of Liquids Using a Piezoelectric Spherical Shell (Preprint)  
by: T. Christensen and N.B.Olsen
- 257/93 Modellering af dispersion i piezoelektriske keramikker  
af: Pernille Postgaard, Jannik Rasmussen, Christina Specht, Mikko Østergård  
Vejleder: Tage Christensen
- 258/93 Supplerende kursusmateriale til "Lineære strukturer fra algebra og analyse"  
af: Mogens Brun Heefelt
- 259/93 STUDIES OF AC HOPPING CONDUCTION AT LOW TEMPERATURES  
by: Jeppe C. Dyre
- 260/93 PARTITIONED MANIFOLDS AND INVARIANTS IN DIMENSIONS 2, 3, AND 4  
by: B. Booss-Bavnbek, K.P.Wojciechowski

- 261/93 OPGAVESAMLING  
Bredde-kursus i Fysik  
Eksamensopgaver fra 1976-93
- 262/93 Separability and the Jones  
Polynomial  
by: Lars Kadison
- 263/93 Supplerende kursusmateriale til  
"Lineære strukturer fra algebra  
og analyse" II  
af: Mogens Brun Heefelt
- 264/93 FOTOVOLTAISK STATUSNOTAT 2  
af: Bent Sørensen
- 
- 265/94 SPHERICAL FUNCTIONS ON ORDERED  
SYMMETRIC SPACES  
To Sigurdur Helgason on his  
sixtyfifth birthday  
by: Jacques Faraut, Joachim Hilgert  
and Gestur Olafsson
- 266/94 Kommensurabilitets-oscillationer i  
laterale supergitre  
Fysikspeciale af: Anja Boisen,  
Peter Bøggild, Karen Birkelund  
Vejledere: Rafael Taboryski, Poul Erik  
Lindelof, Peder Voetmann Christiansen
- 267/94 Kom til kort med matematik på  
Eksperimentarium - Et forslag til en  
opstilling  
af: Charlotte Gjerrild, Jane Hansen  
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek
- 268/94 Life is like a sewer ...  
Et projekt om modellering af aorta via  
en model for strømning i kloakrør  
af: Anders Marcussen, Anne C. Nilsson,  
Lone Michelsen, Per M. Hansen  
Vejleder: Jesper Larsen
- 269/94 Dimensionsanalyse en introduktion  
metaprojekt, fysik  
af: Tine Guldager Christiansen,  
Ken Andersen, Nikolaj Hermann,  
Jannik Rasmussen  
Vejleder: Jens Højgaard Jensen
- 270/94 THE IMAGE OF THE ENVELOPING ALGEBRA  
AND IRREDUCIBILITY OF INDUCED REPRE-  
SENTATIONS OF EXPONENTIAL LIE GROUPS  
by: Jacob Jacobsen
- 271/94 Matematikken i Fysikken.  
Opdaget eller opfundet  
NAT-BAS-projekt  
vejleder: Jens Højgaard Jensen
- 272/94 Tradition og fornyelse  
Det praktiske elevarbejde i gymnasiets  
fysikundervisning, 1907-1988  
af: Kristian Hoppe og Jeppe Guldager  
Vejledning: Karin Beyer og Nils Hybel
- 273/94 Model for kort- og mellemdistanceløb  
Verifikation af model  
af: Lise Fabricius Christensen, Helle Pilemann,  
Bettina Sørensen  
Vejleder: Mette Olufsen
- 274/94 MODEL 10 - en matematisk model af intravenøse  
anæstetikas farmakokinetik  
3. modul matematik, forår 1994  
af: Trine Andreasen, Bjørn Christensen, Christine  
Green, Anja Skjoldborg Hansen. Lisbeth  
Helmgard  
Vejledere: Viggo Andreasen & Jesper Larsen
- 275/94 Perspectives on Teichmüller and the Jahresbericht  
2nd Edition  
by: Bernhelm Booss-Bavnbek
- 276/94 Dispersionsmodellering  
Projektrapport 1. modul  
af: Gitte Andersen, Rehannah Borup, Lisbeth Friis,  
Per Gregersen, Kristina Vejre  
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek
- 277/94 PROJEKTARBEJDSPÆDAGOGIK - Om tre tolkninger af  
problemorienteret projektarbejde  
af: Claus Flensted Behrens, Frederik Voetmann  
Christiansen, Jørn Skov Hansen, Thomas  
Thingstrup  
Vejleder: Jens Højgaard Jensen
- 278/94 The Models Underlying the Anaesthesia  
Simulator Sophus  
by: Mette Olufsen(Math-Tech), Finn Nielsen  
(RISØ National Laboratory), Per Føge Jensen  
(Herlev University Hospital), Stig Andur  
Pedersen (Roskilde University)
- 279/94 Description of a method of measuring the shear  
modulus of supercooled liquids and a comparison  
of their thermal and mechanical response  
functions.  
af: Tage Christensen
- 280/94 A Course in Projective Geometry  
by Lars Kadison and Matthias T. Kromann
- 281/94 Modellering af Det Cardiovasculære System med  
Neural Puls kontrol  
Projektrapport udarbejdet af:  
Stefan Frello, Runa Ulsøe Johansen,  
Michael Poul Curt Hansen, Klaus Dahl Jensen  
Vejleder: Viggo Andreasen
- 282/94 Parallelle algoritmer  
af: Erwin Dan Nielsen, Jan Danielsen,  
Niels Bo Johansen

- 283/94 Grænser for tilfældighed  
(en kaotisk talgenerator)  
af: Erwin Dan Nielsen og Niels Bo Johansen
- 284/94 Det er ikke til at se det, hvis man ikke  
lige ve' det!  
Gymnasie matematikkens begrundelsesproblem  
En specialrapport af Peter Hauge Jensen  
og Linda Kyndlev  
Vejleder: Mogens Niss
- 285/94 Slow coevolution of a viral pathogen and  
its diploid host  
by: Viggo Andreasen and  
Freddy B. Christiansen
- 286/94 The energy master equation: A low-temperature  
approximation to Bässler's random walk model  
by: Jeppe C. Dyre
- 287/94 A Statistical Mechanical Approximation for the  
Calculation of Time Auto-Correlation Functions  
by: Jeppe C. Dyre
- 288/95 PROGRESS IN WIND ENERGY UTILIZATION  
by: Bent Sørensen
- 289/95 Universal Time-Dependence of the Mean-Square  
Displacement in Extremely Rugged Energy  
Landscapes with Equal Minima  
by: Jeppe C. Dyre and Jacob Jacobsen
- 290/95 Modellering af uregelmæssige bølger  
Et 3. modul matematik projekt  
af: Anders Marcussen, Anne Charlotte Nilsson,  
Lone Michelsen, Per Mørkegaard Hansen  
Vejleder: Jesper Larsen
- 291/95 1st Annual Report from the project  
LIFE-CYCLE ANALYSIS OF THE TOTAL DANISH  
ENERGY SYSTEM  
an example of using methods developed for the  
OECD/IEA and the US/EU fuel cycle externality study  
by: Bent Sørensen
- 292/95 Fotovoltaisk Statusnotat 3  
af: Bent Sørensen
- 293/95 Geometridiskussionen - hvor blev den af?  
af: Lotte Ludvigsen & Jens Frandsen  
Vejleder: Anders Madsen
- 294/95 Universets udvidelse -  
et metaprojekt  
Af: Jesper Duelund og Birthe Friis  
Vejleder: Ib Lundgaard Rasmussen
- 295/95 A Review of Mathematical Modeling of the  
Controlled Cardiovascular System  
By: Johnny T. Ottesen
- 296/95 RETIKULER den klassiske mekanik  
af: Peder Voetmann Christiansen
- 297/95 A fluid-dynamical model of the aorta with  
bifurcations  
by: Mette Olufsen and Johnny Ottesen
- 298/95 Mordet på Schrödingers kat - et metaprojekt om  
to fortolkninger af kvantemekanikken  
af: Maria Hermannsson, Sebastian Horst,  
Christina Specht  
Vejledere: Jeppe Dyre og Peder Voetmann Christiansen
- 299/95 ADAM under figenbladet - et kig på en samfunds-  
videnskabelig matematisk model  
Et matematisk modelprojekt  
af: Claus Dræby, Michael Hansen, Tomas Højgård Jensen  
Vejleder: Jørgen Larsen
- 300/95 Scenarios for Greenhouse Warming Mitigation  
by: Bent Sørensen
- 301/95 TOK Modellering af træers vækst under påvirkning  
af ozon  
af: Glenn Møller-Holst, Marina Johannessen, Birthe  
Nielsen og Bettina Sørensen  
Vejleder: Jesper Larsen
- 302/95 KOMPRESSORER - Analyse af en matematisk model for  
aksialkompressorer  
Projektrapport af: Stine Bøggild, Jakob Hilmer,  
Pernille Postgaard  
Vejleder: Viggo Andreasen
- 303/95 Masterlignings-modeller af Glasovergangen  
Termisk-Mekanisk Relaksation  
Specialrapport udarbejdet af:  
Johannes K. Nielsen, Klaus Dahl Jensen  
Vejledere: Jeppe C. Dyre, Jørgen Larsen
- 304a/95 STATISTIKNOTER Simple binomialfordelingsmodeller  
af: Jørgen Larsen
- 304b/95 STATISTIKNOTER Simple normalfordelingsmodeller  
af: Jørgen Larsen
- 304c/95 STATISTIKNOTER Simple Poissonfordelingsmodeller  
af: Jørgen Larsen
- 304d/95 STATISTIKNOTER Simple multinomialfordelingsmodeller  
af: Jørgen Larsen
- 304e/95 STATISTIKNOTER Mindre matematisk-statistisk opslagsværk  
indeholdende bl.a. ordforklaringer, resuméer og  
tabeller  
af: Jørgen Larsen

- 305/95 The Maslov Index:  
A Functional Analytical Definition  
And The Spectral Flow Formula  
By: B. Booss-Bavnbek, K. Furutani
- 306/95 Goals of mathematics teaching  
Preprint of a chapter for the forthcoming International Handbook of Mathematics Education (Alan J. Bishop, ed)  
By: Mogens Niss
- 307/95 Habit Formation and the Thirdness of Signs  
Presented at the semiotic symposium  
The Emergence of Codes and Intensions as a Basis of Sign Processes  
By: Peder Voetmann Christiansen
- 308/95 Metaforer i Fysikken  
af: Marianne Wilcken Bjerregaard, Frederik Voetmann Christiansen, Jørn Skov Hansen, Klaus Dahl Jensen, Ole Schmidt  
Vejledere: Peder Voetmann Christiansen og Petr Viscor
- 309/95 Tiden og Tanken  
En undersøgelse af begrebsverdenen Matematik udført ved hjælp af en analogi med tid  
af: Anita Stark og Randi Petersen  
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek
- 
- 310/96 Kursusmateriale til "Lineære strukturer fra algebra og analyse" (E1)  
af: Mogens Brun Heefelt
- 311/96 2nd Annual Report from the project  
LIFE-CYCLE ANALYSIS OF THE TOTAL DANISH ENERGY SYSTEM  
by: Hélène Connor-Lajambe, Bernd Kuemmel, Stefan Krüger Nielsen, Bent Sørensen
- 312/96 Grassmannian and Chiral Anomaly  
by: B. Booss-Bavnbek, K.P. Wojciechowski
- 313/96 THE IRREDUCIBILITY OF CHANCE AND THE OPENNESS OF THE FUTURE  
The Logical Function of Idealism in Peirce's Philosophy of Nature  
By: Helmut Pape, University of Hannover
- 314/96 Feedback Regulation of Mammalian Cardiovascular System  
By: Johnny T. Ottesen
- 315/96 "Rejsen til tidens indre" - Udarbejdelse af a + b et manuskript til en fjernsynsudsendelse + manuskript  
af: Gunhild Hune og Karina Goyle  
Vejledere: Peder Voetmann Christiansen og Bruno Ingemann
- 316/96 Plasmaoscillation i natriumklynger  
Specialerapport af: Peter Meibom, Mikko Østergård  
Vejledere: Jeppe Dyre & Jørn Borggreen
- 317/96 Poincaré og symplektiske algoritmer af: Ulla Rasmussen  
Vejleder: Anders Madsen
- 318/96 Modelling the Respiratory System  
by: Tine Guldager Christiansen, Claus Dråby  
Supervisors: Viggo Andreassen, Michael Danielsen
- 319/96 Externality Estimation of Greenhouse Warming Impacts  
by: Bent Sørensen
- 320/96 Grassmannian and Boundary Contribution to the -Determinant  
by: K.P. Wojciechowski et al.
- 321/96 Modelkompetencer - udvikling og afprøvning af et begrebsapparat  
Specialerapport af: Nina Skov Hansen, Christine Iversen, Kristin Troels-Smith  
Vejleder: Morten Blomhøj
- 322/96 OPGAVERSAMLING  
Bredde-Kursus i Fysik 1976 - 1996
- 323/96 Structure and Dynamics of Symmetric Diblock Copolymers  
PhD Thesis  
by: Christine Maria Papadakis
- 324/96 Non-linearity of Baroreceptor Nerves  
by: Johnny T. Ottesen
- 325/96 Retorik eller realitet ?  
Anvendelser af matematik i det danske Gymnasiums matematikundervisning i perioden 1903 - 88  
Specialerapport af Helle Pilemann  
Vejleder: Mogens Niss
- 326/96 Bevisteorier  
Eksemplificeret ved Gentzens bevis for konsistensen af teorien om de naturlige tal  
af: Gitte Andersen, Lise Mariane Jeppesen, Klaus Frovin Jørgensen, Ivar Peter Zeck  
Vejledere: Bernhelm Booss-Bavnbek og Stig Andur Pedersen
- 327/96 NON-LINEAR MODELLING OF INTEGRATED ENERGY SUPPLY AND DEMAND MATCHING SYSTEMS  
by: Bent Sørensen
- 328/96 Calculating Fuel Transport Emissions  
by: Bernd Kuemmel

329/96 The dynamics of cocirculating influenza strains conferring partial cross-immunity and

A model of influenza A drift evolution

by: Viggo Andreasen, Juan Lin and Simon Levin

330/96 LONG-TERM INTEGRATION OF PHOTOVOLTAICS INTO THE GLOBAL ENERGY SYSTEM

by: Bent Sørensen

331/96 Viskøse fingre

Specialerapport af:

Vibeke Orlien og Christina Specht

Vejledere: Jacob M. Jacobsen og Jesper Larsen

---

332/97 ANOMAL SWELLING AF LIPIDE DOBBELTLAG

Specialerapport af:

Stine Sofia Korremann

Vejleder: Dorthe Posselt

333/97 Biodiversity Matter

an extension of methods found in the literature on monetisation of biodiversity

by: Bernd Kuemmel

334/97 LIFE-CYCLE ANALYSIS OF THE TOTAL DANISH ENERGY SYSTEM

by: Bernd Kuemmel and Bent Sørensen

335/97 Dynamics of Amorphous Solids and Viscous Liquids

by: Jeppe C. Dyre