

TEKST NR 32

1980

POLYMERE STOFFERS VISKOELASTISKE EGENSKABER

BELYST VED HJÆLP AF
MEKANISKE IMPEDANSMÅLINGER OG
MØSSBAUEREFFEKTMÅLINGER.

CRILLES BACHER
PREBEN JENSEN

VEJLEDERE:
NIELS BOYE OLSEN
PEDER VOETMANN CHRISTIANSEN

TEKSTER fra

IMFUFA

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES
FUNKTIONER I UNDERSVINGNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

- 1/78 "TANKER OM EN PRAKSIS" - et matematikprojekt
Anne Jensen, Marianne Kesselhahn, Lena Lindenskov og Nicolai Lomholt.
Vejleder: Anders Madsen.
- 2/78 "OPTIMERING" - Menneskets forøgede beherskelsesmuligheder af natur og samfund.
Projektrapport af Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen, Gert Kreinø og
Peter H. Lassen. Vejleder: Bernhelm Booss
- 3/78 "Opgavesamling", breddekursus i fysik.
Lasse Rasmussen, Aage Bonde Kræmmer, Jens Højgaard Jensen.
- 4/78 "Tre essays" - om matematikundervisning, matematiklæreruddannelsen og
videnskabsrindalismen.
Mogens Niss.
- 5/78 "BIBLIOGRAFISK VEJLEDNING til studiet af DEN MODERNE FYSIKS HISTORIE"
Helge Kragh.
- 6/78 "Nogle artikler og debatindlæg om - læreruddannelse og undervisning i fysik,
og - de naturvidenskabelige fags situation efter studenteroprøret"
Karin Beyer, Jens Højgaard Jensen, Bent C. Jørgensen.
- 7/78 "Matematikkens forhold til samfundsøkonomien"
B.V. Gnedenko.
- 8/78 "DYNAMIK OG DIAGRAMMER". Introduktion til energy-bond-graph formalismen.
Peder Voetmann Christiansen.
- 9/78 "OM PRAKSIS' INDFLYDELSE PÅ MATEMATIKKENS UDVIKLING"
Motiver til Kepler's: "Nova Stereometria Doliorum Vinarioum"
Projektrapport af Lasse Rasmussen.
Vejleder: Anders Madsen.
-
- 10/79 "TERMODYNAMIK I GYMNASIET"
Projektrapport af Jan Christensen og Jeanne Mortensen
Vejledere: Karin Beyer og Peder Voetmann Christiansen.
- 11/79 "STATISTISKE MATERIALER"
red. Jørgen Larsen.
- 12/79 "Lineære differentialligninger og differentialligningssystemer"
Mogens Brun Heefelt.
- 13/79 "CAVENDISH'S FORSØG I GYMNASIET". Projektrapport af Gert Kreinø.
Vejleder: Albert Chr. Paulsen.
- 14/79 "Books about Mathematics: History, Philosophy, Education, Models, System
Theory, and Works of Reference etc.: A Bibliography".
Else Høyrup.
- 15/79 "STRUKTUREL STABILITET OG KATASTROFER i systemer i og udenfor
termodynamisk ligevægt". Specialeopgave af Leif S. Striegler.
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen.

INDHOLDSFORTEGNELSE.

0. Indledning	0
1. Teori, model virkelighed	2
1.1. Indledning	2
1.2. Videnskabsteoretisk udgangspunkt	3
1.3. Modeller	6
1.4. Matematik som legitimerende instrument	11
2. Energibåndsteknikken	13
2.1. Klassifikation af de variable	14
2.2. Det basale byggesæt	15
2.3. Om energibåndsteknikken	23
3. Responseteori	25
3.1. Indbyrdes sammenhæng mellem responsefunkt.	30
3.2. Regneregler for responsefunktioner	31
3.3. Komplekse, frekvensafhængige responsefkt.	33
3.4. Sammenhæng mellem de komplekse responsefkt.	37
3.5. Regneregler for de komplekse responsefkt.	37
4. Viskoelastiske stoffer	40
4.1. Indledning	40
4.2. Grundlæggende egenskaber ved modellerne	40
4.3. Shearforsøg	44
4.4. Konstitututive ligninger for forskellige stoffer	45
4.5. Elementimpedanser	49
4.6. Lydimpedanser	51
4.7. Maxwell- og Voigtmodeller	52
4.8. Videreudvikling	54
5. Opsamling på del I	64
6. Eksperimentelt forløb	67
7. Makroskopiske mekaniske impedansmålinger	69
7.1. Matematisk beskrivelse	70
7.2. Eksperimentel opstilling	75
7.3. Måleprocedure	83
8. Bestemmelse af responsefunktioner i seje væsker til tider omkring 10^{-8} s.	89
8.1. Bestemmelse af den atomare breddefunktion	89
8.2. Sammenhæng mellem atomare responsefunkti- ner og elementresponsefunktioner	95
8.3. Partikelresponsefunktion og elementrespon- sfunktion	102
8.4. Beskrivelse af Mössbauerekspertmentet	107
9. Resultater	111
9.1. Mekaniske impedansmålinger	111
9.2. Mössbauereffektmålinger	114
9.3. Sammenstilling af resultaterne	118
10. Afslutning	120

Appendix	122
I. Bestemmelse af de målte impedanser i de rheologiske målinger	122
II. Usikkerhed på størrelser ved de mekaniske impedansmålinger	126
III. Beregning af variansen på bestemmelsen af $F_D(t)$	137
IV. Absorptionsliniefordeling	141
V. Numerisk behandling af Mössbauerdataene	143
VI. Resultater	146
VII. Program til behandling af Mössbauerdataene	164
Litteraturliste	173

0. INDLEDNING.

Dette speciale er et produkt af vores arbejde med forskellige stoffers viscoelastiske egenskaber og modeller til beskrivelse af disse. Dette arbejde har haft mange aspekter. Dels har det givet os anledning til en del eksperimentelt arbejde, som vi ikke tidligere har koncentreret os om, - dels har det helt alment givet os anledning til at overveje anvendelsen af modeller inden for forskellige områder, - og endelig har vi konkret i forhold til væskedynamikken haft lejlighed til at arbejde med specifikke modeller.

Specialet er opbygget i 10 kapitler. I kapitel 1 giver vi en oversigt over, hvorledes vi ser de forskellige modeller forholder sig til henholdsvis teorien, virkeligheden og erken-delsen. Til dette formål har det været nødvendigt at foretage en præcisering af begrebet model og forsøge en klassifikation af modeltyper. Vi føler som kommende gymnasielærere, at det er vigtigt at vide, hvilken status, de teorier og eksperimenter har, som vi - hvad enten vi vil det eller ej - nødvendigvis skal docere til eleverne.

I kapitel 4 beskæftiger vi os med konkret udvikling af modeller for viscoelastiske stoffer, herunder overvejelser over, på hvilken måde modeludviklingen (om udviklingen af en model har givet en større fysisk erkendelse om stofferne) er sket.

Da vi i kapitel 4 gør brug af diagramsproget energibåndsteknikken samt lineær responseteori, har vi i kapitel 2 og kapitel 3 gennemgået og diskuteret disse to "værktøjer" i et omfang, der muliggør en forståelse af kapitel 4.

I del II (kapitel 6-10) redegøres for det eksperimentelle arbejde.

De mekaniske målinger af et polymert stofs viscoelastiske egenskaber er omtalt i kapitel 7, mens beskrivelsen af og redegørelsen for muligheden for at bestemme stoffets viscoelastiske egenskaber til af størrelsesordenen 10^{-8} sekund ved hjælp af Mössbauereffekten er henlagt til kapitel 8.

I kapitel 9 præsenteres og diskuteres resultaterne af disse målinger i relation til de i kapitel 4 omtalte modeller. Som det vil fremgå af kapitel 10 har det væsentligste formål for os været at efterprøve, om det ved hjælp af Mössbauereffekten er muligt at bestemme viscoelastiske egenskaber for visse stoffer til tider omkring 10^{-8} sekund.

Visse tekniske udledninger er henlagt til appendix'erne I-VII, som findes bagst i rapporten.

Kapitler og afsnit er indiceret ved arabiske tal (f.eks. afsnit 8.3). Ligninger er nummereret fortløbende i hvert kapitel, således at lign 10 elier blot (10) betyder ligning 10 i det pågældende kapitel. Henvises der i et kapitel til en ligning i et andet kapitel angives kapitelnummeret foran linningsnummeret. Lign 7.3. betyder altså ligning 3 i kapitel 7. Tilsvarende er figurerne indiceret.

1. TEORI, MODEL, VIRKELIGHED.

1.1 Indledning.

I dette kapitel vil vi koncentrere os om at indplacere modelbegrebet - både matematiske modeller og modeller generelt - i sammenhæng med teori- og videnskabsudvikling i al almindelighed og erkendelsesudviklingen.

Denne afgrænsning betyder, at vi ikke vil behandle en række grundlæggende videnskabsteoretiske og -historiske spørgsmål, som en total beskrivelse af en enkelt videnskabsgrens udvikling ville kræve. Vi vil således ikke tage stilling til eksistensen af almene love indenfor naturvidenskaben (f.eks. naturdialektikken), og vi vil ej heller i dette projekt foretage metodiske og konkrete analyser af videnskabens historiske udvikling. Vi indleder kapitlet med en kort oversigt over én måde at anskue naturvidenskabelige og matematiske teoriers status på, bl.a at diskutere deres indbyrdes forhold og ved at afgrænse naturvidenskaber som videnskaber om naturen, i modsætning til andre videnskaber (f.eks samfundsvidenskaberne, der er videnskaber om samfundet)¹.

¹ Uden at ville forsøge at skabe 'teorien' for naturvidenskaben ligger denne opfattelse af nødvendigheden af en adskillelse også til grund for Tor Nørretranders údtalelse: "Det er under senkapitalismen blevet bydende nødvendigt at konstruere en teori om naturvidenskaberne, - en *naturvidenskabsteori*. En sådan må nødvendigvis omgribe naturvidenskaberne i deres helhed, som økonomske, politiske, ideologiske og historiske faktorer. Denne teori teori findes ikke. Den kan ikke udledes *alene* af kritikken af den politiske økonomi, for naturvidenskaberne handler om naturen, og selvom deres erkendelse f.eks. er samfundsmæssigt sat, handler den om naturen og ikke om samfundet." (Nørretranders, 1976, s.15).

1.2 Videnskabsteoretisk udgangspunkt.

Den videnskabelige forskningsproces tager sit udgangspunkt i tre elementer: på den ene side i den virkelighed, som er videnskabens objekt, på den anden side i den videnskabelige teori, som danner grundlaget for forskningen, og på den tredie side de redskaber, som er til rådighed for forskeren til beskrivelse af data og teori.

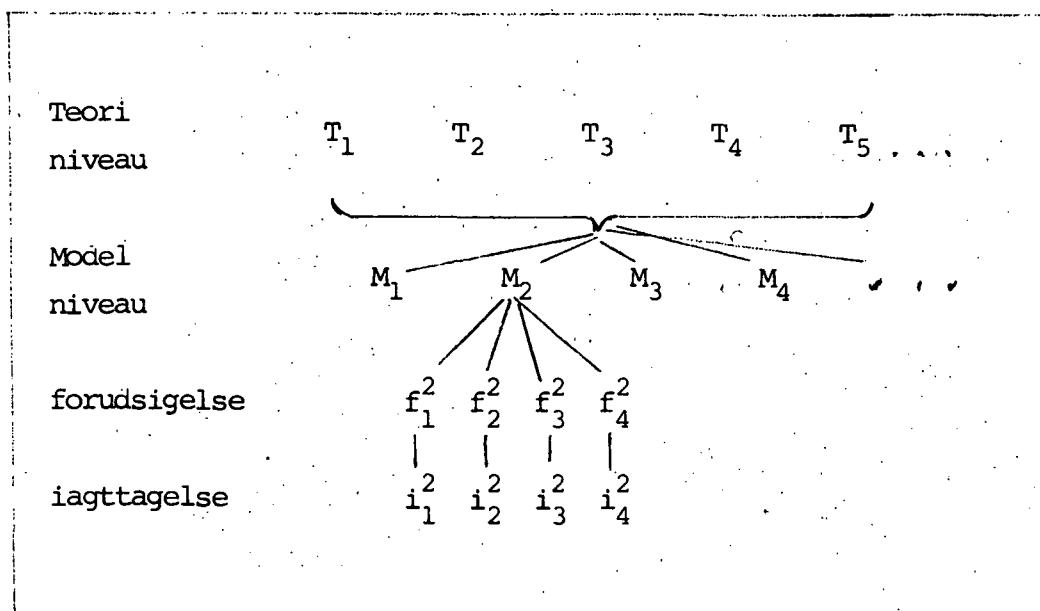
Et system i metodelæren, som leverer en sammenhæng mellem iagttagelser af virkeligheden og teorier, er det såkaldte hypotetisk-deduktive system. I gennem videnskabsteoriens historie (se Jensen, 1973, s.148 ff.) har denne måde at opfatte forholdet imellem iagttagelser og teorier være diskuteret voldsomt. Vi vil bruge systemet som udgangspunkt for vores beskrivelse, men dermed ikke erklære os enig i, at et problem er videnskabeligt kun når det passer ind i denne struktur (som Popper og Hempel ville gøre det) (Jensen, 1973, s.168).

Mellem teorien på den ene side, som grundlæggende må bestå af en række modsigelsesfrie påstande om mekanismer i virkeligheden, der ikke er blevet falsificeret¹, og virkeligheden på den anden side er et niveau, som vi vil kalde modelniveauet². Ved hjælp af modellerne kan en række forudsigelser om virkeligheden gøres - i over ensstemmel-

¹ At en teori ikke direkte kan verificeres skyldes, at en teori og en iagttagelsessituation godt kan forenes med et korrekt iagttagelsesresultat, selv om iagttagelsessituationen (f.eks. en måleopstilling) og teorien er forkerte. Er nemlig A teorien, B iagttagelsessituationen og C iagttagelsesresultatet vil udsagnet 'hvis A og B så C' være logisk sandt, selvom A og B er falske.

² Andre benævner det 'afledede generelle teoremer' eller 'invari-
ansniveau'. Henholdsvis Næss, 1967, 160 og Næss & Galtung, 1969, s.159

se med teorierne, og ved en iagttagelse kan en model opstilles, som kan forsøges indpasset i teorierne - evt. med en inddraget af andre og uventede teorier eller ved en reformering af teorien.



Den egentlige forbindelse mellem teorien og virkeligheden¹ opnås i det videnskabelige eksperiment - den måde, det tilrettelægges på, og de data, som opnås.

Det må slås fast, at der i princippet eksisterer to forskellige typer af data, som, selvom de begge kan siges at være iagttagelsesresultater, er principielt forskellige derved, at den ene type data er opnået gennem planlagte eksperimenter, og den anden type er indsamlet uden eksperimentel baggrund.

"F.eks er tidsrækker i økonomi og samfundsvideoskaberne eksempler på ikke-eksperimentelle data. Økonomen er sædvanligvis i den situation, at han kun kan observere det økonomiske system, og sjældent i en situation, hvor han kan lede planlagte eksperimenter. Et andet problem ved analysen af økonomiske tidsrækker er, at de oftest kun

¹ Den materielle virkelighed opfatter vi som alt materielt. Naturen er en del af denne materielle virkelighed, som også omfatter laboratorievirkeligheden, som ofte er unaturlig.

indeholder få observationer. Det er derfor usædvanligt svært at kontrollere om en given stokastisk model giver et godt fit til data'ene."...

"På den anden side er det i ingenør- og fysikvidenskaberne sådan, at tidsintervallet hvori de nødvendige data skal indsamles er meget mindre, så tidsrækker som indeholder mange værdier kan etableres. Tilmeld er det muligt, at gentage eksperimenter under samme betingelser, så gyligheden af analysen og af forskellige modeller kan efterprøves." (Jenkins & Watts, 1968, s.3)

Det skal tilføjes her, at der findes teorier inden for naturvidenskaberne, som har et ligeså kompliceret forhold til sine data, som samfundsvideeskaberne - f.eks biologien (i hver fald arvelighedsbiologien og udviklingslæren), geologien og astrofysikken.

Men de eksperimenter - og dermed de data -, som er resultatet af eksperimentelt videnskabeligt arbejde, er ikke tilfældige data. Videnskabsarbejderen designer oftest et eksperiment på baggrund af nogle forudsigelser - datasættet skal kunne indpasses i en model, som er i overensstemmelse med den herskende teoretiske forståelse. "Oftest", fordi netop anomalier, og dermed ofte første led i kæden på en videnskabelig revolution (se Kuhn, 1973), ikke kan planlægges.

I den forstand, vi her beskriver teorier, er der tale om teorier indenfor realvidenskaberne. Dette skal ses i modsætning til teorier indenfor formalvidenskaberne, der er teorier, som ikke i sig selv beskriver noget i den materielle verkelighed; eller som Arne Næss udtrykker det :

"Et deduktivt system (formalvidenskabeligt) viser, at hvis noget er tilfældet, så er noget andet med logisk nødvendighed også tilfældet, mens et hypotetisk-deduktivt

system siger 1) at noget er tilfældet og 2) at dette med logisk nødvendighed følger af en gruppe grundsætninger".
(Næss, 1967, s.165)

Denne opdeling betyder, at matematikken i almindelighed bliver en formalvidenskab. I det hypotetisk-deduktive system vil vi bruge matematikken - og energibåndsteknikken, som vi senere skal vende tilbage til - som et redskab til at beskrive¹ modeller og teorier i realvidenskaben (hos os fysikken).

I det følgende vil vi nøjere gå ind på en præcisering af vores opfattelse af, hvad modeller er, og i hvilken sammenhæng forskellige typer af modeller indgår i den videnskabelige praksis på.

1.3 Modeller.

Når man vil forklare egenskaber ved et system, er det nødvendigt at udvælge visse dele af systemet som værende hovedbæreren af egenskaberne. "At tro, at man ved at foretage en minutøs beskrivelse af det valgte system kan sikre sig en forståelse af det fænomen, vi undersøger, er absurd. Ethvert system i den materielle virkelighed er så mangfoldigt og karakteriseret af så mange relationer mellem dets enkelte dele, at ethvert forsøg på at give en udtømmende beskrivelse af det vil være dømt til at mislykkes." (Jensen, 1973, s.108).

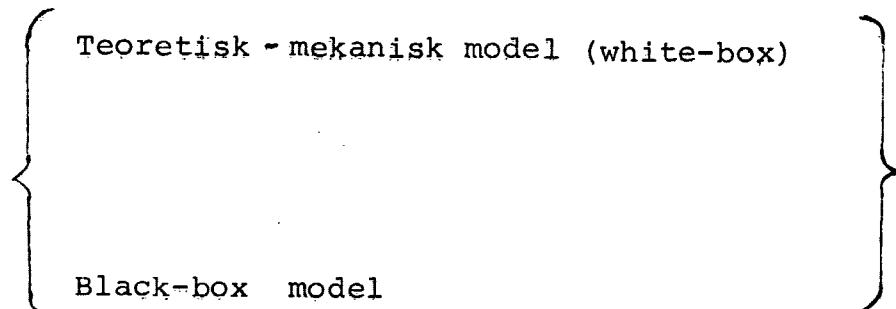
¹ Det er relevant at adskille den materielle virkelighed fra begrebet om den materielle virkelighed og måden at beskrive den materielle virkelighed på. Uanset hvilken forståelse vi har af virkeligheden eksisterer den. Det vil ikke sige at vi ikke kan påvirke virkeligheden i og med vores teori om den, men en række grundlæggende mekanismer står ikke til at ændre. Som et eksempel på dette kan vi nævne, at vores erkendelse om atomernes struktur er en forudsætning for fabrikation af atom- og brintbomber, som radikalt kan ændre vores materielle virkelighed. På den anden side kan vi ikke forvente at kerne- eller gravitationskræfternes natur ændres, fordi vi sprænger samtlige atom- og brintbomber af.

Man antager derfor, at der er en række forhold og egenskaber ved systemet, som man kan se bort fra; man "abstraherer fra disse, danner en model af systemet med det formål at beskrive de egenskaber og tilstande ved det, der kan forklare, hvorledes det udvikler sig, hvorledes det giver sig udtryk i bestemte fænomener." (Jensen, 1973, s.109).

I modeldannelsen indgår der ofte ud over abstraktionerne antagelser om egenskaber eller sammenhænge i modellen. Værdien af disse antagelser skal så prøves ved konfrontation med den eksperimentelle praksis.

Da modelbegrebet i sig selv er meget vidtfavnende, er det hensigtsmæssigt at kunne skelne mellem forskellige slags modeller.

De forskellige modeltyper vil efter vor mening kunne indplaceres i følgende modelhierarki



Den nedre ende beskrives af blackbox-modeller, som kun omhandler ydre træk ved systemet. En blackbox-model vil f.eks kunne beskrive, hvorledes et system vil reagere på et givet stimulus, uden at kunne redegøre for nogle indre træk ved systemet, som er skyld i denne adfærd.

Modellerne i den øverste ende af hierakiet kaldes af Uffe Juul Jensen for teoretisk - mekaniske modeller, idet disse i modsætning til blackbox-modellerne også skal kunne gøre rede for, hvilke sammenhænge og mekanismer (heraf ordet mekanisk), der ligger til grund for systemets op-

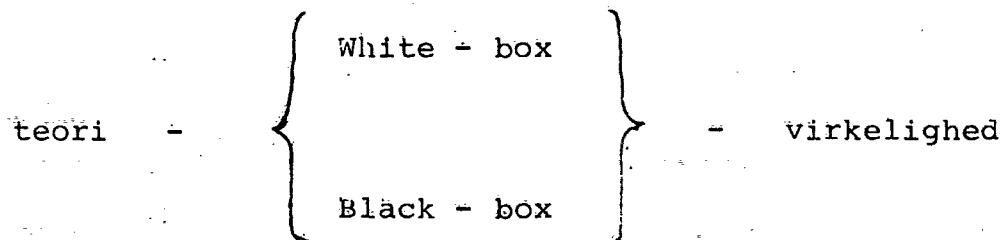
førsel.

Det er oplagt, at mange modeller vil ligge et sted i-mellem disse to yderpunkter, og at der i arbejdet med modellerne kan ske en udvikling af dem.

Som det også fremgår af Uffe Juul Jensen's "definitioner" er skellet mellem model og teori ikke skarp. Vi mener, at en teori udtaler sig om et bredere område end en model og så at sige indeholder beskrivelser af, hvorledes det vil være hensigtsmæssigt at danne modeller af specifikke systemer. En teori omhandler altså mere generelle emner end en model, der oftest vil være dannet med et specifikt genstandsområde for øje. Dette afspejles også i Uffe Juul Jensens behandling af forholdet mellem "generelle teorier" og "teoretiske modeller" (som han også kalder for "specifikke teorier"):

"Generelle teorier som f.eks. den klassiske mekanik og systemteori repræsenterer ikke specifikke områder af virkeligheden som f.eks Keplers teori om Marsbanen og Harvey's teori om blodkredsløbet; men naturligvis kan også sådanne generelle teorier anvendes på specifikke områder: mekanikken til beskrivelse af et specifikt mekanisk system og systemteorien til beskrivelse af et specifikt kybernetisk system. Man kan her tale om, at de generelle teoriers sprog anvendes på specielle områder. At dette er muligt er imidlertid udtryk for den metafysiske kendsgerning, at de specielle systemer har de metafysiske karakteristika, som de generelle teorier dækker." (Jensen, 1973, s.202).

For at illustrere forholdet teori - model - virkelighed vil vi opstille følgende skema:



Dette skal forstås således, at der altid, når man konfronterer teorien med virkeligheden, være en model tilstede, og således at der i arbejdet med at forstå specifikke virkelighedsområder også altid dannes modeller, som skal indplacere teorien for genstandsområdet.

I arbejdet med opstilling og udvikling af modeller er det oplagt, at der sker en ständig vekselvirkning og konfrontation mellem teori, model og virkelighed. I dette arbejde spiller analogier også en vigtig rolle. "En nærliggende måde at søge en forståelse af fænomener, der ikke uden videre kan beskrives inden for vor normale erfaring, er at opfatte dem som analoge med velkendte fænomener." (Jensen, 1973, s.118). Man kan opdele analogier i to forskellige former. Hvis de fænomener, man betragter som analoge, har visse materielle eller geometriske træk fælles, kaldes analogien substantiel. Hvis egenskaberne blot korresponderer, f.eks hvis de beskrives ved samme matematiske udtryk, kaldes analogien formel.

Når analogier benyttes i modeldannelsen, skal man være sig bevidst, at det er analogier. Hvis man f.eks siger, at et elastisk stof kan beskrives analogt til beskrivelsen af en fjeder, betyder det ikke, at der sidder substantielle fjedre i det elastiske stof. Fjederbeskrivelsen tydeliggør ved hjælp af vores kendskab til fjedre, egenskaber ved elastiske stoffer.

I næver forbindelse med analogierne er også de diagrammer, man undertiden præsenterer modellerne i. I disse diagrammer er det vigtigt, at elementerne, som indgår i mo-

dellerne, på en overskuelig måde repræsenterer de indgående objekter i modellerne. Det er med andre ord vigtigt at lægge et stykke arbejde i udvælgelsen af de tegn, som et diagram skal opbygges af.

Indenfor forskellige fagområder findes vidt forskellige måder, at benævne givne begreber, og mange tegn- og diagramsystemer er udviklet til at beskrive specifikke modeller og teorier. Således har man indenfor elektroteknikken et veludviklet tegnsystem, ligesom et sådant eksisterer indenfor kemien og økologien. Vi vil i det følgende argumentere for (og senere gennemgå et specifikt tegnsystem), at tegn kan klassificeres på tre måder. Enten som ikoner, som symboler eller som indices¹.

Ikoner vil vi opfatte som idealiserede billeder af visse virkligt eksisterende fænomener. Disse billeder skal være entydige og deres tydning må ikke være afhængig af andre konventioner, end deres definition giver udtryk for. Ikonet er altså primært et forhold imellem iagttageren eller brugeren og så tegnet selv.

Symbolet vil vi derimod opfatte som et tegn, hvor selve udformningen af tegnet er underordnet - men hvor vi til gengæld så er afhængig af, at vi for hver gang vi bruger et symbol (typisk bogstaver) må angive, hvad dette symbol betegner. Her er tegnet altså underordnet og primært bliver et symbol en sag mellem iagttageren/fortolkeren og objektet som iagttages.

Indices inaføres som en slags tegn, som uanset iagttagernes eksistens eksisterer. Disse tegn bruges til at skelne mellem objekter af samme type.

¹ Om en sådan inddeling skriver Gullvåg i en bog om C.S. Peirce: "Peirce skelner mellem tre slags tegn efter hvordan de refererer til deres objekter: ikoner (som har en *real lighed* med sit objekt), index (som har en kausal forbindelse med sit objekt) og symbol (som har en konventionel vedtaget forbindelse med sit objekt)" (Gullvåg, 1972, s.29).

Et tegn foret givet fænomen eller objekt kan karakteriseres ved hjælp af de her indførte 3 typer af rene tegn. Oftest vil et bestemt tegn have træk af alle 3 elementer, men i et givet tegnsystem vil man kunne karakterisere forskellige tegn som hørende mere til den ene klasse end til en anden.

1.4 Matematik som legitimerende instrument.

Vi vil på dette sted påpege, at anvendelsen af matematik (eller andre formelle modelsprog) til beskrivelse af modeller, kan få den konsekvens (tilsigtet eller utilsigtet fra modelbyggerens side), at mange mennesker (måske især dem, der ikke har fået nogen særlig matematisk uddannelse) ikke kan vurdere kvaliteten af de udsagn, en given model producerer.

Der er f.eks. stor forskel på kvaliteten af udsagnene "en TV-satellit skal placeres i en bane 42200 km over jorden, hvis den til enhver tid skal stå over samme sted set fra jorden" og "sandsynligheden for at et A-kraftuheld indtræffer inden for ét år er 0,0000001".

Selvom begge udsagn er fremkommet ved hjælp af manipulationer med matematiske relationer og udtryk, er udsagnet om A - kraftværkerne langt mere uhøldbart end udsagnet om TV-satelitten. Dette bygger på flere forhold. For det første bygger A - kraftberegningerne på langt mere idealiserede modeller end satelitmodellerne, og desuden er idealiseringerne i A - kraftmodellen af en principiel anderledes karakter end i satelitmodellen. Forskellen er, at det i satelitmodellen er muligt at vurdere størrelsen af de fejl, man begår ved at lave de idealiseringer, der indgår i denne model (f.eks at antage Jorden som kugleformet), mens dette ikke er tilfældet for A - kraftmodellen. Dette skyldes, at den første model er en teoretisk-mekanisk model, mens den anden ligger langt nærmere blackbox-modellen - man kan kalde det en simulationsmodel. (se f. eks. Jensen 1980).

Afgørende forskel er der også på de to modellers reproducerbarhed. De teoretiske overvejelser, der ligger til grund for beregning af satellittens bane bygger på et utal af observationer af lignende systemer, mens et A-kraftuheld ikke synes fornuftigt at eksperimentere med.

Hvis man ikke er sig disse forskelle bevidst, kan modeller, som i høj grad bygger på politiske og ideologiske forudsætninger og afgrænsninger, bruges til at legitimere beslutninger, idet man kan give det indtryk, at disse beslutninger er underbygget af en matematisk model.

De modeller vi vil behandle i det følgende, er modeller, som ikke direkte kan legitimere politiske beslutninger, omend modelredskabet anvendt på andre områder formentlig vil kunne rumme denne fare.

2. ENERGIBÅNDSTEKNIKKEN.

Som nævnt i det foregående kapitel spiller matematik en stor rolle for modelbygningsarbejdet. Det kan opfattes som værende et redskab eller sprog for beskrivelse af strukturer og mekanismer i modeller.

I det følgende vil vi give en beskrivelse af energibåndsteknikken, der kan opfattes som et sprog eller modelredskab parallelt til matematik, men adskiller sig fra dette ved at have en mere ikonisk karakter. Dette skulle gøre teknikken mere umiddelbart forståelig, idet teknikkens byggelementer mere end matematikkens symboler refererer til det objekt i virkeligheden, som modeleres. Samtidig opfylder energibåndsteknikken det krav, at den som modelredskab kan beskrive mange forskellige typer af systemer.

Et andet særtræk ved energibåndsteknikken er, at kausaliteten i en dynamisk struktur fremtræder tydeligt i en energibåndsmodel. I modsætning til et sæt matematiske ligninger, som er fuldstændig akausale, kan man, ud fra en energibåndsmodel se den orden, hvori nogle variable fastsætter værdierne af andre.

Om energibåndsmodeller og deres forhold til de matematiske ligninger skriver P.V.Christiansen bl.a. følgende:

"En energibåndsmodel optræder som sidste fase i den ikoniske del af modelopstillingen og danner bindeleddet til de symbolske dynamiske ligninger. Når energibåndsmodellens generelle ikoner er stillet rigtigt op, frembringes den symbolske udgave af modellen rutinemæssigt ved hjælp af teknikkens spilleregler. Ganske vist kan der ud fra en ikonisk energibåndsmodel laves mere end ét ligningssystem, fordi man har frihed til at vælge orienteringen i hvert enkelt energibånd; men alle disse ligningssystemer vil være ekvivalente, idet de beskriver det samme objekt." (Christiansen, 1978, s.82).

2.1 Klassifikation af variable.

Vi vil her gå ud fra den påstand, at alle variable, der optræder i den klassiske fysik, kan inddeltes i følgende typer:

" x-type, som skifter fortegn ved tidsvending.

o-type, som er uændrede ved tidsvending."

(Christiansen, 1978, s.5)

" Betragtningen om "vending af tidens retning" er et heuristisk princip, som kan være svært at anvende, hvis ikke systemets variable er anskuelige "med det blotte øje". For et anskueligt system kan man blot optage en film af detsudvikling og så bagefter i ro og mag køre filmen både forlæns og baglæns. Ser vi på en bestemt scene i filmen, for eksempel en måge, der flyver forbi et tårn, og sammenligner forlæns- og baglæns-versionen, vil vi straks se, at mågens hastighed skifter fortegn, og derfor er en x-variabel, medens positionen er uændret og derfor en o-variabel. Hvis filmen sættes i stå, forsvinder alle x-variable. Et af antikkens berømte paradoxer, formuleret af Zenon: "pilen kan aldrig nå sit mål, da den hviler i hvert punkt af sin bane" kan ses som udtryk for, at man på den tid ikke havde opdaget x-variablene som en nødvendig ingrediens i beskrivelsen af dynamiske forløb." (Christiansen, 1979, s.9).

Endvidere opdeles de variable i rate- og levelvariable, idet vi antager, at " alle problemer af dynamisk art leder til bevægelsesligninger af typen

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{R}(\bar{L}, t),$$

hvor \bar{L} kaldes levelvariabel og \bar{R} ratevariabel." (Christiansen, 1978, s.1)

Således er de variable, vi vil arbejde med, blevet inddelt i 4 hovedtyper :

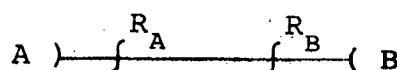
x-levels, o-levels, x-rates og o-rates.

Energibåndsteknikkens værktøj, det basale byggesæt, består af en række elementer, hvoraf vi kort vil gennemgå 12, som tilsammen er i stand til at beskrive ethvert linært system. (Christiansen, 1978, s.22).

2.2 Det basale byggesæt.

Det første element, vi vil behandle, er energibåndet.

Energibåndet defineres som det bindeled, hvor igennem to systemer kan vekselvirke, eller sagt med andre ord, udveksle energi.



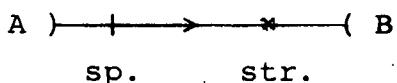
Indførelsen af energibåndet begrundes fysisk i den påstand, at energioverførelsen pr.tidsenhed mellem to systemer A og B kan beskrives ved hjælp af et produkt af to ratevariabler R_A og R_B , således at den ene ratevariabel er input til system A (R_A) og samtidig output fra system B, mens den anden ratevariabel R_B er input til system B og samtidig output fra system A.

På ikonet for energibåndet (stregen) vil vi markere input-ratevariablen for et bestemt system nærmest dette system.

En væsentlig egenskab ved energioverførelsen mellem A og B er, at den har en retning i rummet, fra A til B eller omvendt. Der skal derfor indføres et tegn på energibåndet, som angiver orienteringen, f.eks en pil.

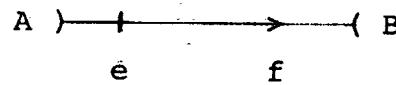
Da ratevariablene enten tilhører x- eller o-typen, og da energioverførelsen pr.tidsenhed, $W = R_A \cdot R_B$, er en x-variabel, må de to energibåndsvariable R_A og R_B opfylde, at den ene må være en x-rate- og den anden en o-ratevariabel.

Vi vil generelt betegne x-rates som strømme, f, og o-rates som spændinger, e, og vi kan derfor fremstille et "forbedret" ikon af vekselvirkningsbåndet ved at ange spændinger med | og strømme ved × som f.eks.



Ovenfor redegjorde vi for, at fordi energistrømmen er en x-variabel, må netop én af de to ratevariable være en x-variabel. På samme måde må det gælde, at én af ratevariablene må have en orientering, fordi energistrømmen har en orientering. En afgørelse af, om det er strømmen eller spændingen, der skal tillægges orientering ".... hænger på et studium af de måleforskrifter, som gør sig gældende for strømme og spændinger i forskellige energetiske medier. Ser vi f.ex. på elektrisk energioverføring ved én spændingsførende ledning og en jordforbindelse, så er det helt åbenbart strømmen, som har "retning i rum", fordi den måles med et amperemeter, som indsættes "på langs" i ledningen. Spændingen i derimod, måles "på tværs" med et voltmeter, som indsættes mellem ledning og jord. Strømme er "gennem-variable", medens spændinger er "tværvariable". (Christiansen, 1978, s.15). Vi vil derfor tillægge strømmen orienteringen og påstå, at hvis den samme fysiske situation kan beskrives med to forskellige orienteringer af energibåndet, skal et skift i orientering forbindes med et fortegnsskift på det symboliske udtryk for strømmen.

Da strømmen både er bærer af "orientering i rum" og "orientering i tid", kan vi som ikon for strømmen bruge en pil (krydset og pilen "smelter" sammen til en pil). Som eksempel på det endelige tegnsystem for energibåndet anføres



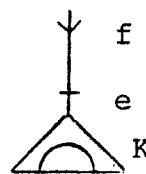
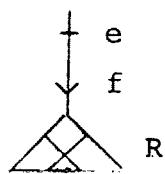
Abstraktionen "et energibånd dækker over mange forskellige sider af den fysiske virkelighed, svarende til energiens mange forskellige fremtrædelsesformer. Et mekanisk energibånd kan f.ex. være en vægtstang, en roterende aksel, eller en drivrem mellem to hjul. Coaxial-kabler, mikrobølgeledere og optiske fibre er elektromagnetiske energibånd. Desuden har vi dampører, hydrauliske rør, og varmtvandsledninger, hvori energitransporten er ledsaget af en stoftransport." (Christiansen, 1978, s.11).

Energibåndets formål er at overføre energi. Overførelsen af energi sker mellem de 3 elementer kilder, lække og lagre.

Kilder er enten strøm- eller spændingskilder med hhv. strøm- og spændingsoutput. En kilde er karakteriseret ved, at outputtet er uafhængigt af inputtet. Ikonerne for de 2 typer kilder er



Lække kan kun dissipere energi. En læk kan enten have strøm- eller spændingsoutput. Outputtet fra lækken (alt-så hhv. spænding og strøm) er proportional med inputtet. En læk angives således :



$$\text{strømlæk, } e = R \cdot f \quad , \quad \text{spændingslæk, } f = K \cdot e$$

Parameteren R for strømlæk kaldes modstanden, mens parameteren K for en spændingslæk kaldes ledningsevnen.

Level-variablene optræder i forbindelse med oplagring af energi, som beskrives ved hjælp af lagrene. Da der er to slags level-variable, er der også to slags lagre, et X-lager for kinetisk energi og et O-lager for potentiel energi. Level-variablene fremkommer som integralet af inputvariablene, som jo er rate-variable, over tiden.

Kaldes inputvariablen ϕ og outputvariablen γ , gælder:

$$\frac{dL}{dt} = \phi$$

Men energistrømmen $\frac{dE}{dt}$ er netop produktet af strømmen og spændingen, så

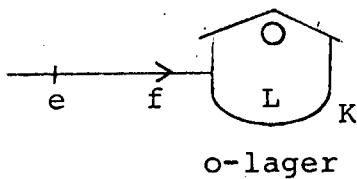
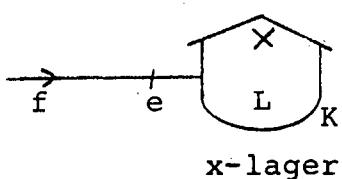
$$\frac{dE}{dt} = \phi \cdot \gamma$$

Heraf fås: $\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dL} \cdot \frac{dL}{dt} = \frac{dE}{dL} \cdot \phi = \gamma \cdot \phi$, dvs $\gamma = \frac{dE}{dL}$.

Vi vil fremover udelukkende beskæftige os med lagre, hvor der er en lineær sammenhæng mellem levelvariablen og outputvariablen. Da $L = 0$ medfører $\gamma = 0$, fås for et lineært lager:

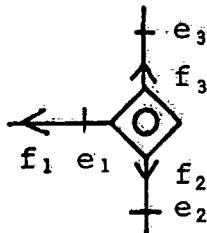
$$L = K \cdot \gamma = K \cdot \frac{dE}{dL} \quad \text{dvs} \quad E(L) = \frac{1}{2K} \cdot L^2$$

K kaldes lagerkapaciteten. Ikonerne for de 2 typer lineære lagre er



Ofte vil vi have brug for at forbinde flere end to elementer med energibånd i en energibåndsmodel. Til dette formål indføres samlere. Samlerne er enten strøm- eller spændingssamlere, afhængigt af om strøm eller spænding er den samme i alle energibånd tilknyttet samleren.

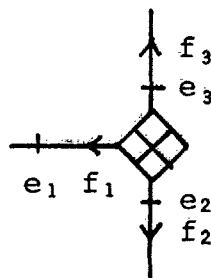
En spændingssamler har ikonet



Der gælder $e_1 = e_2 = e_3$, og $f_1 + f_2 + f_3 = 0$

(bemærk, at der kun er ét spændingsinput til en spændingssamler).

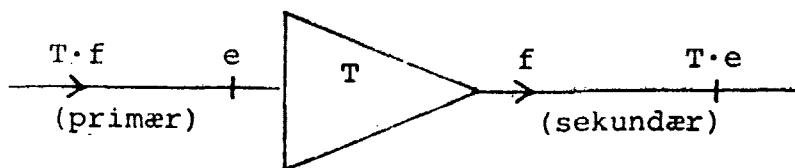
Ikonet for en strømsamler er



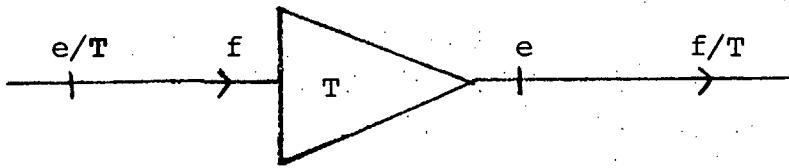
og der gælder $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ og $f_1 = f_2 = f_3$.

Ud over de nu nævnte 9 elementer indgår der desuden 3 lidt mere avancerede elementer i det basale byggesæt. Disse er en transformator, en strømgyrator (x-gyrator) og en spændingsgyrator (o-gyrator). Vi vil her kun give ikonerne og definitionerne af elementerne, mens en nøjere gennemgang er givet hos P.V.Christiansen (1978). Blot skal det nævnes at gyratorer f. eks. bruges i modeler, til skildring af den magnetiske kraft på en strømførende ledning (Lorentz-kraften).

Transformatoren har ikonet

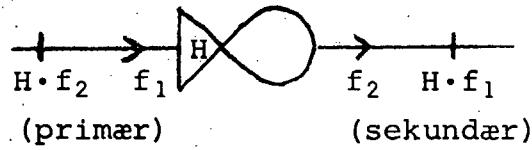


hvor T kaldes omsætningsforholdet, defineret som forholdet mellem primær- og sekundærstrøm (eller mellem sekundær- og primærspænding). En skelnen mellem O - og X -transformator er ikke nødvendig, da transformatoren også kan opskrives som



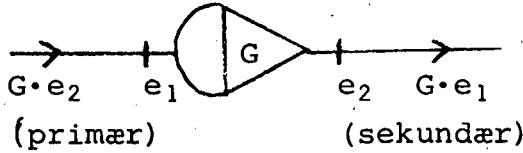
(Bemærk, at T defineres på samme måde som før).

x-gyratoren har ikonet



H kaldes også her for omsætningsforholdet, og det defineres som forholdet mellem sekundærspænding og primærstrøm (altså et forhold mellem spænding og strøm).

o-gyratoren har ikonet



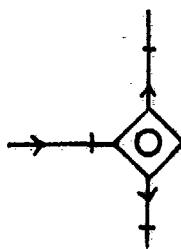
Her defineres omsætningsforholdet G som forholdet mellem sekundærstrøm og primærspænding.

Inden vi afslutter præsentationen af energibåndsteknikkens basale byggesæt, vil vi vende tilbage til samlerne igen.

For en o-samler er samlerrelationerne

$$e_1 = e_2 = e_3 \text{ og } f_1 + f_2 + f_3 = 0.$$

Vendes orienteringen i en gren (f.eks. l), får vi

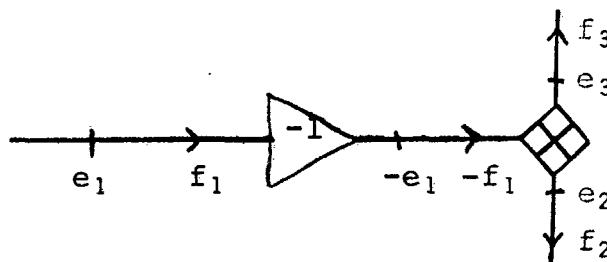


$e_1 = e_2 = e_3$ og $f_1 = f_2 + f_3$,
hvilket ofte er nyttigt.

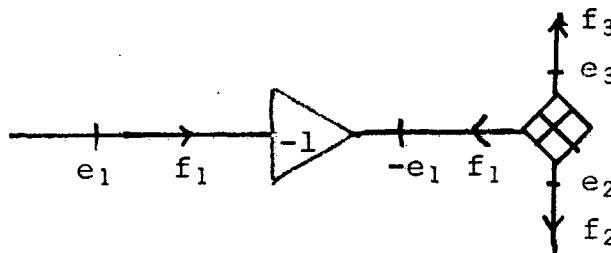
For x-samleren gælder

$$f_1 = f_2 = f_3 \text{ og } e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

Hvis vi ønsker en tilsvarende relation som for o-samleren kan vi sætte en transformator med $T = -1$ (en symmetrisk transformator) ind i gren 1 :

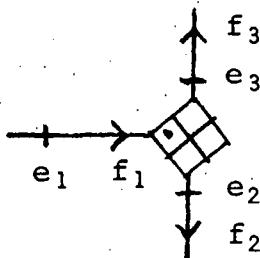


hvilket er det samme som



$$\text{hvor } f_1 = f_2 = f_3 \text{ og } e_1 = e_2 + e_3.$$

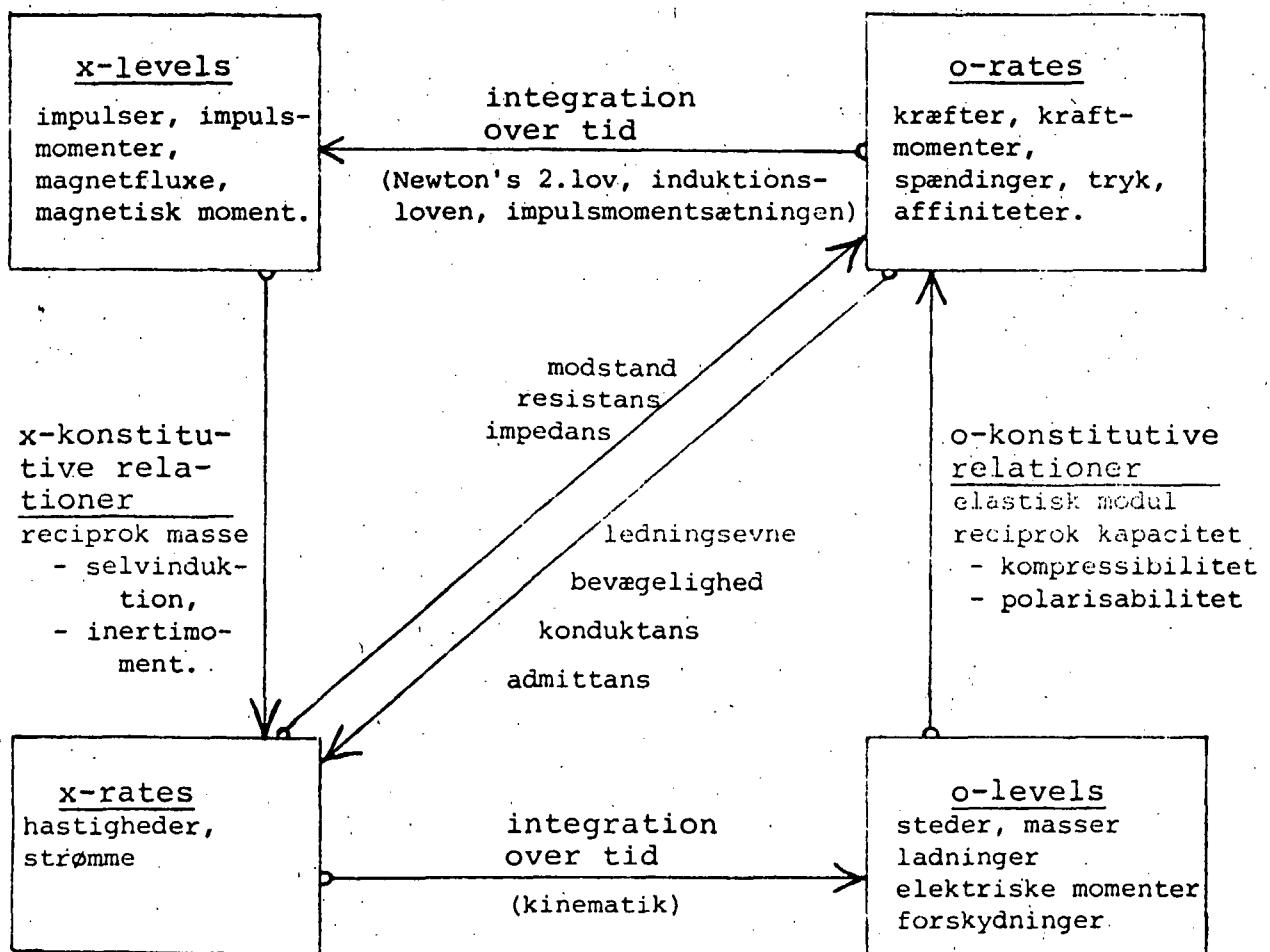
I stedet for den lidt klodsede måde at symbolisere denne specielle krydssamler på, lader man transformatoren smelte sammen med samleren til et \cdot , således at ikonet bliver



Vi vil ikke her uddybe indholdet i energibåndsteknikken videre, men henvise interesserede til Christiansen, (1978).

Vi vil afslutte afsnittet om energibåndsteknik med at gengive et skema over hovedtyperne af de variable, sammen med de relationer, som kan opstilles mellem dem.

(Christiansen, 1978, s. 7)



2.3 Om energibåndsteknikken.

Som det før er nævnt, danner en energibåndsmodel et bindelede mellem den ikoniske diagramformige del af modelopstillinger og de symbolske, matematiske ligninger.

At præsentere modeller på diagramform er ikke særlig nyt eller epokegørende. "Inden for de fleste discipliner er der i forvejen udviklet mere eller mindre standardiserede diagramsprog, som f.eks elektriske diagrammer med ikoner for kondensatorer, transformatorer og modstande; rheologiske med ikoner for fjedre og stempler; økologiske energy-flow diagrammer, hvor energistrømme til forskellige "nicher" afbildes som kanaler, hvis bredde er proportional med energistrømmen." (Christiansen, 1978, s.25).

Det, der adskiller energibåndsteknikken fra disse diagramsprog er, at energibåndsteknikken ikke omhandler en specifik disciplin, men er et generelt diagramsprog, som har visse lovmæssigheder fra den fysiske virkelighed indbygget. "Energibåndsteknikkens semiotiske system kan opfattes som et metasprog for sådanne diagramteknikker, som gør det muligt at fremhæve analoge træk ved systemer inden for de forskellige discipliner. Sagt på en anden måde: energibåndsteknikken er et referencesprog for analog programmering.

Her tænkes ikke specielt på analogregnemaskiner, men på simulation ved analoge systemer i almindelighed." (Christiansen, 1978, s.25).

Endvidere spiller det ikoniske element en vigtig rolle i energibåndsteknikken, idet "det mest naturlige udviklingsforløb af en modelopstilling er at starte i det ikoniske og ende i det symbolske. Det betyder ikke nødvendigvis at ikoniske modeller er mindreværdige i forhold til de symbolske, men der har været en kraftig tendens, især i matematikken og den teoretiske fysik, til at forsømme det ikoniske lag, og dette forhold har ført til megen forvirring og

frustration. Energibåndsteknikken kan opfattes som en mod-sat rettet tendens, der søger at formalisere og standar-disere brugen af ikoner med det formål at bevidstgøre hele vejen fra den eksperimentelle indføling med objektet til den teoretiske symbolmanipulation. Fordelen ved denne metode er bl.a., at det bliver lettere at forstå symboler-nes betydning, når de optræder i forbindelse med ikonis-ke diagrammer."(Christiansen, 1978, s.12)

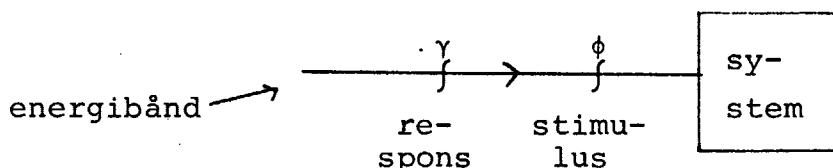
Energibåndsteknikken skal altså ses som et forsøg på udvikling af en teknik, der på en gang gør modelbygnings-arbejdet lettere, og samtidig have indbygget forestil-lingsbilleder, som gør de udviklede modeller lettere at forstå.

3. RESPONSETEORI.

Vi behandlede i kap.1 et modelhierarki, hvis nedre ende bestod af "black-box"-modeller. Vi vil i dette afsnit beskrive en teori, som udtales sig om disse modeller, og som endvidere kan anvise nogle veje til opstilling af forbedrede og mere indholdsrike modeller. Denne teori kaldes responseteorien.

I behandlingen af responseteorien vil vi benytte den før- omtalte energibåndsteknik, hvis ikoniske karakter også her vil være til stor nytte. Endvidere vil vi indskrænke os til at beskæftige os med systemer, som netop har ét energibånd til "omverdenen". Gennem dette energibånd kan vi så i en given eksperimentel situation påvirke systemet med et stimulus og iagttage, hvorledes systemet responderer på denne stimulus. Vi udfører altså et såkaldt stimulus-response-forsøg på systemet for her igennem at prøve at klarlægge eller beskrive, hvad der gømmer sig "inden i" systemet.

Skematisk ser situationen således ud :



I visse situationer er man udelukkende interesseret i at kende systemets responseegenskaber, mens dets "indre" opbygning betragtes som fuldstændig irrelevant. Sådanne systemer møder man ofte i vor teknologisk avancerede dagligdag.

I andre situationer er man også interesseret i systemets indre struktur og derfor i opstilling af modeller for denne indre struktur. Hvis vi eksempelvis har opstillet en energibåndsmodel (en model opbygget af energibåndsteknikkens byggesten), der har de samme responseegenskaber som

systemet, siger vi, at systemet er reticuleret. I denne reticulationsproces spiller responseteorien også en vigtig rolle.

Vi vil i det følgende kun beskæftige os med systemer, som er tidshomogene (systemernes egenskaber afhænger ikke af den absolute tid, men kun af tidsforskelle), og hvori sammenhængen mellem stimulus og respons kan beskrives ved en lineær operator.

Grundene til at gøre disse antagelser er naturligvis den pragmatiske, at de forsimpler teorien meget, og at en meget stor del af de systemer, man møder i væskedynamikken tilnærmelsesvis opfylder betingelserne. Man skal imidlertid være opmærksom på, at man har lavet disse antagelser, således at man, når teorien bruges i den eksperimentelle praksis, skal overveje, om antagelserne er opfyldt.

Under antagelse af linearitet og tidshomogenitet kan det vises, at responset $\gamma(t)$ kan beskrives ved stimulus $\phi(t)$ gennem sammenhængen

$$(1) \quad \gamma(t) = \int_{-\infty}^t \phi(\tau) R(t-\tau) d\tau,$$

hvor $R(x)$ kaldes responsefunktionen hørende til stimulus af typen ϕ (f.eks. spænding) og response af typen γ (f.eks strøm). Responsefunktionen er en "karakteristisk" funktion for systemet, som er uafhængig af udseendet af stimulus og response.

Vi vil i denne sammenhæng benytte differentiationsmåret lidt "let", idet vi vil tillade stimulus at have et endeligt antal punkter, hvori det ikke er kontinuert differentielabel, men hvor differentialkvotienten så kan beskrives ved hjælp af Dirac's deltafunktion $\delta(t)$.

Vi har før omtalt, at variablene tilknyttet selve energibåndet kaldes spænding (e) og strøm (f). Ud over disse variable viser det sig i mange situationer praktisk også at kunne anvende de tidsintegrerede energibåndsværiable som stimulus og response. Den integrerede spænding kaldes impulsen $p(t)$, og den integrerede strøm kaldes forskydningen $q(t)$. Vi har altså, at

$$(2) \quad p(t) = \int_{-\infty}^t e(\tau) d\tau$$
$$q(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$$

Da $p(t)$ er fremkommet som integralet af $e(t)$, vil $p(t)$ være en X-levelvariabel, og da $q(t)$ er fremkommet som integralet af $f(t)$, vil $q(t)$ være en O-levelvariabel.
(Se s. 22)

Dette forandrer imidlertid ikke de kausale forhold ved systemet. Enten har systemet strøminput og dermed spændingsoutput, eller også har det spændingsinput og dermed strømoutput. Responcefunktionerne kan derfor også inddeles i to klasser.-- Hvis systemet har strøminput, er stimulus enten strøm eller forskydning, og response er enten spænding eller impuls. Hvis systemet har spændingsinput, er stimulus enten spænding eller impuls, og response er enten strøm eller forskydning. Der er således 4 responcefunktioner i hver klasse, og deres navne og tilhørende symboler fremgår af nedenstående skema.

re- sponse sti- mulus	forskydning q (o-l)	strøm f (x-r)	spænding e (o-r)	impuls p (x-l)
forskydning q (o-l)			stivhed modulus G	level- modstand impedans Z_l
strøm f (x-r)			rate- modstand impedans Z_r	træghed inertans M
spænding e (o-r)	føjelighed krybefunktion J	bevægelighed ledningsevne admittans Y_r	bevægelighed ledningsevne admittans Y_r	
impuls p (x-l)	level- bevægelighed ledningsevne admittans Y_l	lethed F		

Semiotisk-semantisk skema over de simple responsefunktioner.

Navngivningen er foretaget på grundlag af kausaliteten og ud fra betragtninger over de fysiske dimensioner. Som det ses af skemaet har responsefunktionen hørende til stimulus p og response q samme betegnelse som responsefunktionen hørende til stimulus e og response f (nemlig admittans). Dette skyldes, at disse responsefunktioner har samme dimension, og for tidshomogene systemer faktisk er identiske. Der er altså for os ingen grund til at skelene mellem rate- og level-admittanser, og de vil begge få betegnelsen Y. Samme situation gælder i den anden kausale klasse for responsefunktionerne kaldet impedanser.

Inden vi går videre, vil vi se på, hvorledes de response-

funktioner defineret herover kan indgå i konkrete eksperimentelle opstillinger.

Antag, at vort stimulus er givet ved en Heavisidefunktion (enhedsstepfunktionen) defineret ved

$$E(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } t > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{for } t = 0 \\ 0 & \text{for } t < 0 \end{cases}$$

hvilket med meget god tilnærmelse kan opnås eksperimentelt (med kræfter, elektriske generatorer osv.).

Vi har således $\phi(t) = E(t)$
 $\dot{\phi}(t) = \delta(t)$

Responset $\gamma(t)$ er så givet ved

$$\gamma(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau)R(t-\tau)d\tau \Rightarrow \underline{\gamma(t) = R(t)}$$

Responsefunktionen er således direkte givet ved responset, og er derfor god i beskrivelsen af systemers egenskaber.

For de fleste systemer gælder, at de vil optræde med en given kausalitet i den ydre port. De 3 responsefunktioner, der hører til denne kausalitet, kaldes de egentlige responsefunktioner (Christiansen, 1979, s.17). Imidlertid kan man ofte eksperimentelt tvinge eller påtrykke systemet en anden kausalitet, eller hvis systemets indre struktur er kendt (en white-box), formelt behandle systemet, som om kausaliteten var den modsatte. De responsefunktioner, som bestemmes på denne måde kaldes de uegentlige responsefunktioner.

Den egentlige matematiske responseteorি er formulert for de egentlige responsefunktioner, idet behandlingen af de

uegentlige responsefunktioner kræver brug af en "funktion", som er endnu mere singulær end deltafunktionen $\delta(t)$, nemlig dens afledede, den ikke-integrable $\dot{\delta}(t)$. (Christiansen, 1979, s.17).

3.1 Indbyrdes sammenhæng mellem responsfunktionerne.

Responsefunktionerne F og Y er som omtalt pr.definition givet ved

$$f(t) = \int_{-\infty}^t F(t-\tau) \dot{p}(\tau) d\tau \quad \text{og}$$
$$q(t) = \int_{-\infty}^t Y(t-\tau) \dot{p}(\tau) d\tau$$

Vi har videre, at

$$q(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$$

Derfor gælder, at

$$\int_{-\infty}^t Y(t-\tau) \dot{p}(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^x F(x-\tau) \dot{p}(\tau) d\tau dx$$

Da F og Y er uafhængige af stimulus, men er karakteristiske funktioner for den undersøgte model, kan vi vælge $p(t)$ frit. Vælges $p(t) = E(t)$ dvs.

$$\dot{p}(t) = \delta(t) \quad \text{fås}$$

$$\int_{-\infty}^t Y(t-\tau) \delta(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^x F(x-\tau) \delta(\tau) d\tau dx$$

og dermed relationen

$$(3) \quad Y(t) = \int_0^t F(x) dx, \quad t > 0,$$

idet responsefunktionen er 0 på den negative halvakse.

På lignende måde findes

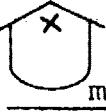
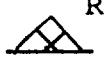
$$(3') \quad \begin{aligned} J(t) &= \int_0^t Y(x) dx \\ Z(t) &= \int_0^t G(x) dx \\ M(t) &= \int_0^t Z(x) dx \end{aligned}$$

Som det ses, er relationerne mellem funktioner indenfor samme kausale klasse simple integralrelationer. Derimod findes ingen simple metoder til at komme fra den ene klasse til den anden.

3.2 Regneregler for responsfunktionerne.

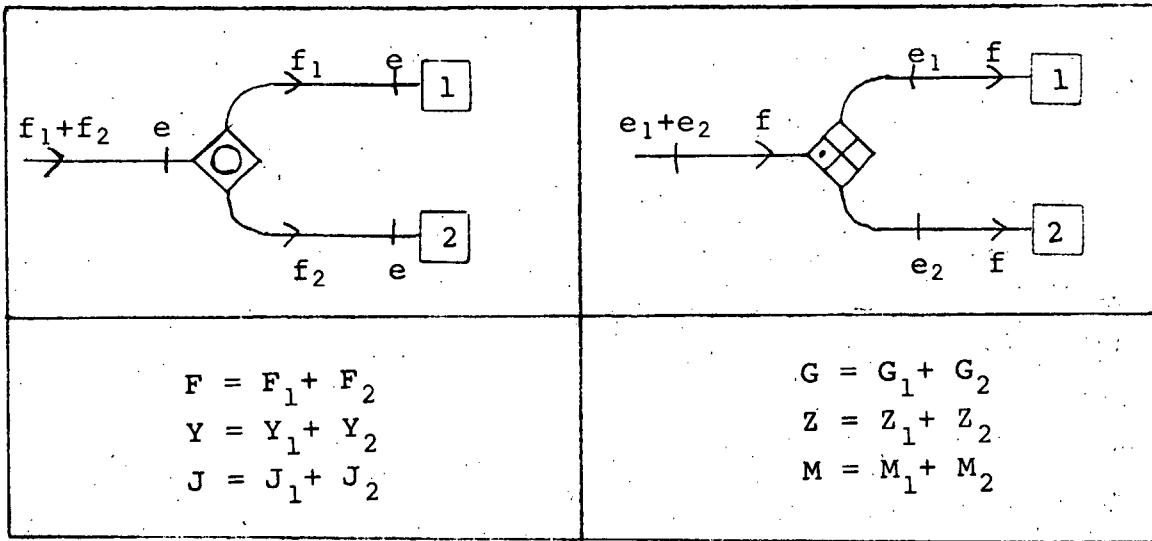
Som vi tidligere har været inde på, er en "vigtig opgave for energibåndsteknikken i forbindelse med den lineære responseteori at simulere et forelagt black-box system ved en passende kombination af de basale ikoner" (Christiansen, 1979, s.31). For at kunne lave denne retikulation, er det nødvendigt at kende responsfunktionerne for de fundimentale byggelementer læsse og lagre, samt regnereglerne for sammensætning af disse gennem samlere, transformatorer og gyratorer. Vi vil ikke her udlede disse regler, men henvise til Christiansen, 1979, 1.1.4. Vi vil blot angive resultaterne på skematisk form.

Lagre og lække

	lethed F(t)	bevægelighed Y(t)	føjelighed J(t)	stivhed G(t)	modstand Z(t)	træghed M(t)	
	$\frac{1}{m}$	$\frac{t}{m}$	$\frac{t^2}{2m}$	$2m\delta'(t)$	$2m\delta(t)$	m	
	$2C\delta'(t)$	$2C\delta(t)$	C	$\frac{1}{C}$	$\frac{t}{C}$	$\frac{t^2}{2C}$	
	$\frac{2}{R}\delta(t)$	$\frac{1}{R}$	$\frac{t}{R}$	$2R\delta(t)$	R	$R \cdot t$	

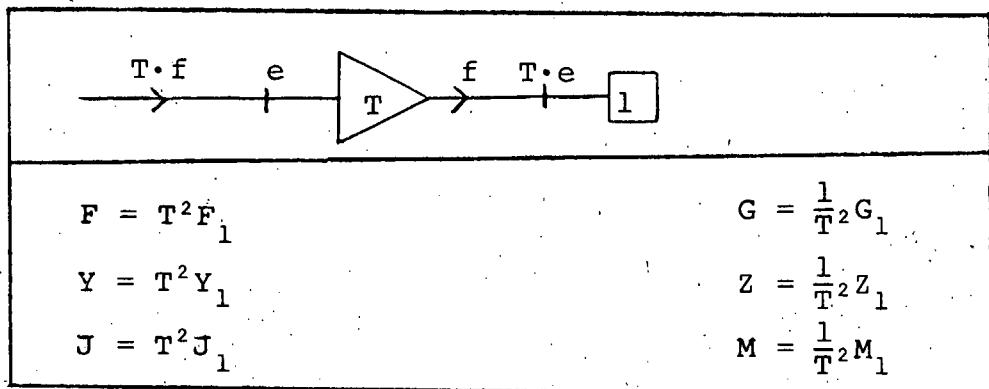
Ikonerne er vist på samme side som de egentlige responsfunktioner. (Bemærk, at der kan optræde ikke-integrable responsefunktioner i de ugentlige responsefunktioner).

Samlere.

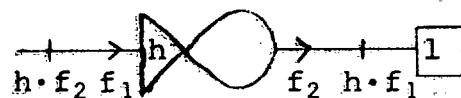
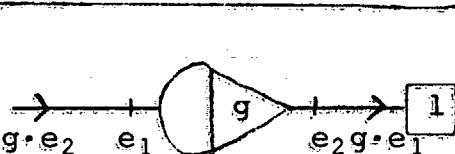


Som det ses, giver o-samlere kun relationer for F , Y og J , mens x-samlere kun giver relationer mellem G , Z og M . Der findes ingen simple relationer for de resterende responsefunktioner, så det er ofte en uhyre vanskelig opgave at bestemme responsefunktioner for sammensatte systemer på denne måde. (Vi skal senere komme til metoder, der kommer ud over dette problem.)

Transformatorer.



Gyratorer



$$F = g^2 G_1$$

$$Y = g^2 Z_1$$

$$J = g^2 M_1$$

$$G = \frac{1}{g^2} F_1$$

$$Z = \frac{1}{g^2} Y_1$$

$$M = \frac{1}{g^2} J_1$$

$$F = \frac{1}{h^2} G_1$$

$$Y = \frac{1}{h^2} Z_1$$

$$J = \frac{1}{h^2} M_1$$

$$G = h^2 F_1$$

$$Z = h^2 Y_1$$

$$M = h^2 J_1$$

3.3 Komplekse, frekvensafhængige responsfunktioner.

Vi har før omtalt, at man ofte i den eksperimentelle praksis benytter Heaviside enhedsfunktionen som stimulus. Et andet standardstimulus, som bringer responsteorien på en endnu mere brugervenlig form, er de harmoniske funktioner. "Som et hovedresultat opnås, at de integral- og differentialequationer, som optræder ved bestemmelse af de tidsafhængige responsfunktioner for sammensatte energibåndsmøller, kan erstattes med algebraiske ligninger. Til gengæld bliver den reelle fysiske tid erstattet med en knap så anskuelig kompleks frekvens, og responsfunktionen bliver selv kompleks." (Christiansen, 1979, s.59).

Det standardsignal, vi i teorien vil bruge, er af formen

$$(4) \quad \phi_s(t) = \tilde{\phi}_s e^{st},$$

hvor s og $\tilde{\phi}_s$ er komplekse tal.

Dette skyldes dels, at disse funktioner udgør et fuldstændigt sæt, og dels, at responset på et sådant signal vil tilhøre samme klasse og endda være proportional med stimulus, dvs. s -værdien for stimulus og response er den samme ($\gamma_s(t) = \tilde{\gamma}_s e^{st}$). (For nøjere uddybning, se Christiansen, 1979, s. 60 ff).

Hvis $\phi_s(t)$ skal være stimulus for et reelt fysisk system, lægger det imidlertid et bånd på s . Vi opspalter s på følgende måde :

$$(5) \quad s = \epsilon - i\omega$$

Hvis $\phi_s(t)$ skal være et stimulus, skal $\phi_s(t)$ forsvinde for $t \rightarrow -\infty$. ϵ skal altså være positiv.

s kaldes Laplace-frekvensen,

ϵ - tilkoblingsparameteren og

ω - frekvensen.

I praksis, hvor stimulus ofte er et sinusvarierende signal, går man til grænsen $\epsilon = 0$. Man skal imidlertid være opmærksom på, at signalet skal kobles til på en eller anden måde, idet systemet skal have været uforstyrret i den fjerne fortid. Vi indfører samtidig en notation, der betyder, at variable med " \sim " afhænger af s , mens variable med " \wedge " afhænger af ω , idet vi er gået til grænsen $\epsilon = 0$.

Vi udregner nu responset $\gamma_s(t)$ på et stimulus $\phi_s(t) = \tilde{\phi}_s e^{st}$:

$$\gamma_s(t) = \int_{-\infty}^t R(t-\tau) \tilde{\phi}_s e^{s\tau} d\tau,$$

hvor $R(x)$ er responsefunktionen hørende til stimulus ϕ og response γ .

$$\begin{aligned}\gamma_s(t) &= \int_{-\infty}^t R(t-\tau) \tilde{\phi}_s e^{s\tau} d\tau \\ &= s \tilde{\phi}_s e^{st} \int_{-\infty}^t R(t-\tau) e^{-s(t-\tau)} d\tau \\ &= s \tilde{\phi}_s e^{st} \int_0^\infty R(\tau) e^{-s\tau} d\tau \\ &= \phi_s(t) s \int_0^\infty R(\tau) e^{-s\tau} d\tau\end{aligned}$$

Det ses, at forholdet mellem response og stimulus har den tidsuafhængige værdi

$$(6) \quad \tilde{R}(s) = s \int_0^\infty R(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

Denne funktion, som i almindelighed er kompleks, kaldes den komplekse responsefunktion hørende til stimulus $\phi_s(t)$ og response $\gamma_s(t)$. Den fås af den "tidslige" responsefunktion $R(t)$ ved formlen

$$\tilde{R}(s) = s L[R(t), s],$$

hvor L er den såkaldte Laplace-transformation.

Vi kan nu lave et skema over de komplekse responsefunktioner, som svarer til det på side 28 angivne skema over de tidslige responsefunktioner.

re- sponse stimulus	forskydning q	strøm f	spænding e	impuls p
forskydning q			stivhed \tilde{G}	impedans \tilde{Z}
strøm f			impedans \tilde{Z}	træghed \tilde{M}
spænding e	føjelighed \tilde{J}	admittans \tilde{Y}		
impuls p	admittans $\tilde{\Psi}$	lethed \tilde{F}		

Da responsefunktionerne er fremkommet som simple forhold mellem response og stimulus, vil det rent formelt gælde, at

$$(7) \quad \tilde{Z}(s) = \frac{1}{\tilde{Y}(s)}, \quad \tilde{M}(s) = \frac{1}{\tilde{F}(s)} \quad \text{og} \quad \tilde{G}(s) = \frac{1}{\tilde{J}(s)}$$

Det skal imidlertid huskes, at hvis G eller F er uegentlige responsefunktioner, kan $G(t)$ (eller $F(t)$) have en ikke-integrabel singularitet. Vi kan i disse tilfælde blot bruge ovenstående formler til definition af de komplekse responsefunktioner.

Som vi har set, er der simple relationer mellem de to responsefunktionsklasser i de komplekse funktioner, mens der ikke findes sådanne i de tidsafhængige responsefunktioner.

3.4 Sammenhæng mellem de komplekse responsefunktioner.

Ligesom vi på side 30 fandt sammenhænge mellem de tidslige responsefunktioner, vil vi her udlede de tilsvarende for de komplekse responsefunktioner.

Vi har

$$(8) \quad \tilde{Y}(s) = \frac{\tilde{q}_s(t)}{\tilde{p}_s(t)} = \frac{\tilde{q}_s}{\tilde{p}_s} = \frac{1}{s} \frac{\tilde{f}_s}{\tilde{p}_s} = \frac{1}{s} \tilde{F}(s), \text{ idet}$$

$$\tilde{F}(s) = \frac{\tilde{f}_s}{\tilde{p}_s} \quad \text{og} \quad \tilde{q}_s = \frac{1}{s} \tilde{f}_s$$

På lignende måde findes

$$(8') \quad \tilde{J}(s) = \frac{1}{s} \tilde{Y}(s), \quad \tilde{Z}(s) = \frac{1}{s} \tilde{G}(s) \quad \text{og} \quad \tilde{M}(s) = \frac{1}{s} \tilde{Z}(s).$$

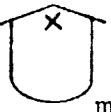
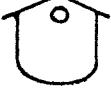
Resultatet er, at hvor de tidslige responsefunktioner skal integreres, skal de komplekse blot divideres med s.

Da der ligeledes eksisterer de ovenfor viste simple relationer mellem responsefunktionerne i de 2 kausale klasser, bliver det meget enkelt at komme rundt mellem de komplekse responsefunktioner.

3.5 Regneregler for de komplekse responsefunktioner.

Vi vil i lighed med de tidslige responsefunktioner give regneregler for de komplekse responsefunktioner.

Lagre og lække

	$\tilde{F}(s)$	$\tilde{Y}(s)$	$\tilde{J}(s)$	$\tilde{G}(s)$	$\tilde{Z}(s)$	$\tilde{M}(s)$	
	$\frac{1}{m}$	$\frac{1}{ms}$	$\frac{1}{ms^2}$	ms^2	ms	m	.
	Cs^2	Cs	C	$\frac{1}{C}$	$\frac{1}{Cs}$	$\frac{1}{Cs^2}$	
	$\frac{1}{R}$	$\frac{s}{R}$	$\frac{1}{R}$	$\frac{1}{Rs}$	R	$\frac{R}{s}$	

Samlere.

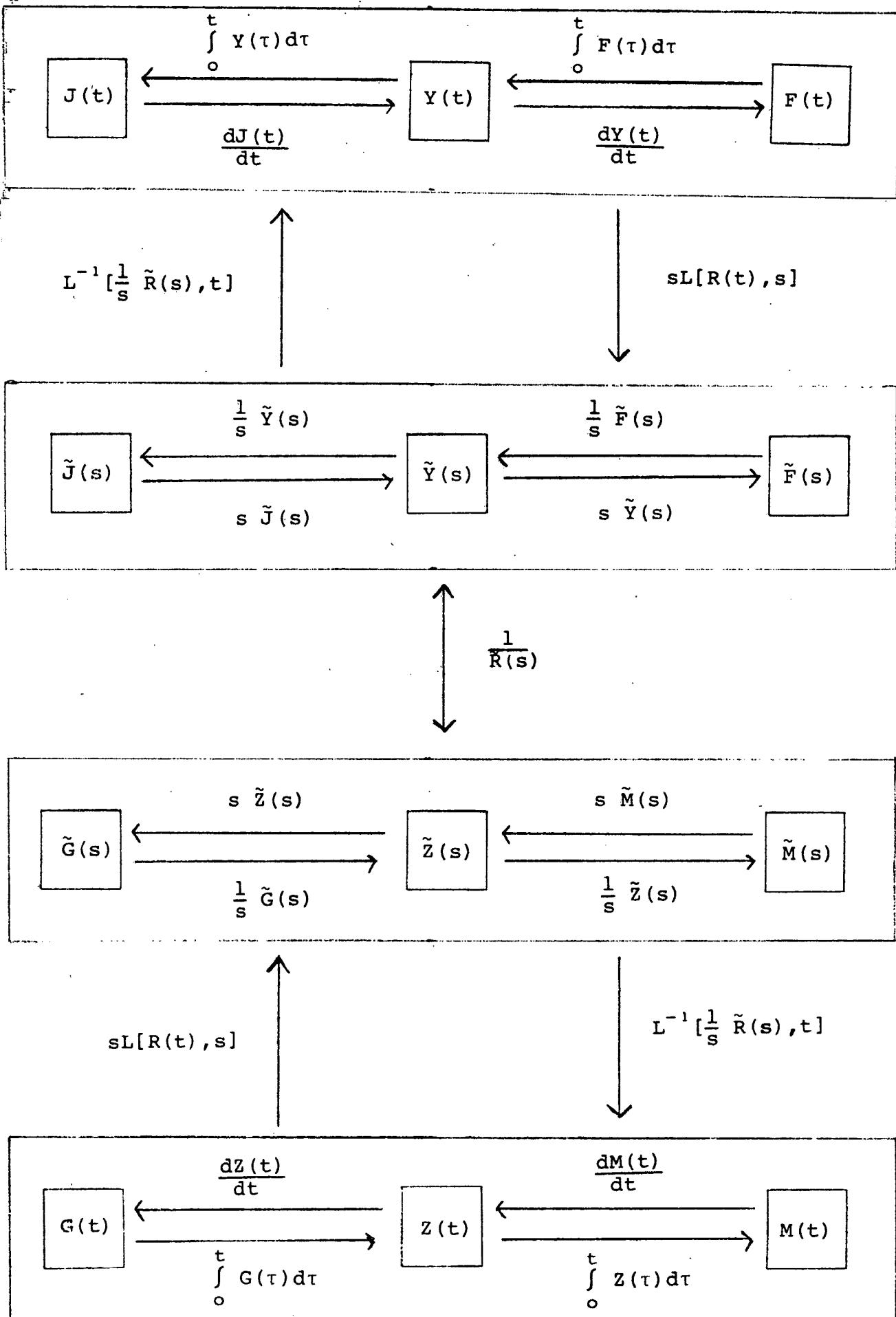
$\tilde{F} = \tilde{F}_1 + \tilde{F}_2$ $\tilde{Y} = \tilde{Y}_1 + \tilde{Y}_2$ $\tilde{J} = \tilde{J}_1 + \tilde{J}_2$ $\frac{1}{\tilde{G}} = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}$ $\frac{1}{\tilde{Z}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$ $\frac{1}{\tilde{M}} = \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}$	$\tilde{G} = \tilde{G}_1 + \tilde{G}_2$ $\tilde{Z} = \tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2$ $\tilde{M} = \tilde{M}_1 + \tilde{M}_2$ $\frac{1}{\tilde{F}} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2}$ $\frac{1}{\tilde{Y}} = \frac{1}{Y_1} + \frac{1}{Y_2}$ $\frac{1}{\tilde{J}} = \frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2}$

Der er altså samllerrelationer for alle responsfunktionerne, hvilket gør behandlingen af sammensatte systemer umådelig meget enklere.

Transformatorer og gyratorer.

Regnereglerne for transformatorer og gyratorer er de samme som i tidsbilledet.

Som afslutning på responseteorien, angiver vi et skeema, som viser, hvordan man kommer rundt i systemet af både tidslige og komplekse responsfunktioner.



4. Viskoelastiske stoffer.

4.1. Indledning

Vi vil i dette kapitel vise, hvorledes de modelovervejelser og - redskaber, vi har beskrevet i det foregående, kan indgå i et konkret område, nemlig behandlingen af viskoelastiske stoffer. Der er i dag ingen almindeligt accepteret model for, hvorledes disse stoffers viskoelastiske egenskaber skal forklares, og som stemmer overens både med teori og eksperimentelle resultater. Til korte tider ($\approx 10^{-13}$ s) forsøger man at lade enkelte atomers opførsel simulere under antagelse af hvilke kræfter, der virker imellem atomerne. Disse simulations-modeller kan ikke anvendes til beskrivelse af stoffernes opførsel til tider, der er "lange" (dvs. $> 10^{-8}$ s). Ejheller vil kvantemekanikken kunne anvendes til beskrivelse af stofferne til disse "langt" tider, idet det vil være praktisk umuligt at løse Schrödingerligningen for de indgående størrelser.

Som navnet siger har viskoelastiske stoffer både viskøse (væskeagtige) og elastiske (faststofagtige) egenskaber.

I realiteten er der næsten ingen stoffer, som under alle omstændigheder udelukkende udviser elastiske eller væskeagtige egenskaber. De fleste væsker vil for hurtige påvirkninger i et lille tidsinterval udvise elastiske egenskaber, mens mange tilsvareladende faste stoffer vil flyde, hvis de påvirkes over tilstrækkelig lange tider. Man kan faktisk sige, at langt den overvejende del af alle stoffer er viskoelastiske.

4.2 Grundlæggende egenskaber ved modellerne.

Et kendetege ved de modeller, vi her vil opstille over viskoelastiske stoffer, er, at det er kontinuumsmodeller. Vi kan således tillæge ethvert punkt i rummet en masse-

tæthed ρ og en hastighed \vec{v} . Selvom vi på denne måde ikke betragter stofferne som sammensat af enkeltdele, betyder det ikke, at vi ikke kan forsøge at forklare de indgående effekter ud fra f.eks. molekulære betragtninger.

Kontinuumsbetragtningerne på stofferne giver følgende 2 centrale bevarelsesligninger :

1) Massebevarelse (kontinuitetsligningen),

$$(1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \cdot \vec{v}) = 0$$

2) Impulsbevarelse (bevægelsesligningen),

$$(2) \quad \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = \vec{f} + \operatorname{div} \bar{\sigma}$$

hvor \vec{f} er volumenkræfter virkende på stoffet (f.eks. gravitation) og $\bar{\sigma}$ er spændingstensoren (se senere). Vi sætter pr.definition

$$(\operatorname{div} \bar{\sigma})_i \equiv \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_k}$$

Spænding og deformation.

En væsentlig del af arbejdet med at opbygge modeller over viskoelastiske stoffer består i at forklare sammenhængen mellem spændinger i stoffet og de tilhørende deformations ved specifikke eksperimenter.

Beskrivelsen af stoffets spænding (kraft pr. arealenhed) og deformation sker via 2.ordens tensorer.

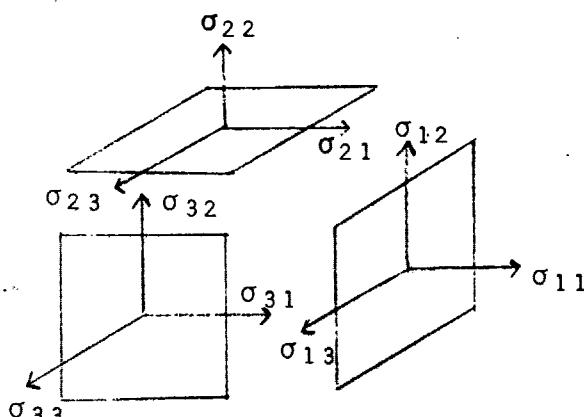


FIG.1: Spændingstensorens komponenter.

Spændingen i et punkt udtrykkes ved hjælp af spændingstensoren $\bar{\sigma}$, der angiver spændingerne gennem 3 på hinanden vinkelrette overflader : (se figur foregående side)

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

σ_{ij} angiver den j'te spændingskomponent, virkende på en plan vinkelret på i-retningen. Fortegnene på spændingskomponenterne skal vælges således, at de angiver den spænding, som stoffet på den positive side af planen påvirker stoffet på den negative side med.

Kendes spændingstensoren, kan spændingen $\vec{\sigma}_n$ gennem en vilkårlig flade med normalvektor \vec{n} bestemmes af (se f. eks. Jensen 1977) :

$$(3) \quad \vec{\sigma}_n = \bar{\sigma} \vec{n}$$

Det gælder, at $\bar{\sigma}$ er symmetrisk.

Deformationen i et punkt beskrives ved hjælp af deformationstensoren $\bar{\gamma}$. Den angiver de relative ændringer i dimensioner og vinkler af en infinitesimal terning omkring punktet :

$$\bar{\gamma} = \begin{pmatrix} 2\frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & 2\frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & 2\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

hvor \vec{u} er forskydningsvektoren angivet ved

$$\vec{u} = \vec{x} - \vec{x}_o,$$

hvor \vec{x} er stedvektoren for punktet under forskydningen og \vec{x}_o stedvektoren for punktet før forskydningen.

$\bar{\gamma}$ er symmetrisk.

Sammenhængen mellem deformations- og spændingstensorerne kaldes konstitutive ligninger. De konstitutive ligninger er i modsætning til bevægelses- og kontinuitetsligningerne stofspecifikke. Det er derfor de konstitutive relationer, der skal søges, hvis man vil vide mere om, hvordan de fysiske egenskaber af det givne stof fremtræder.

Antagelser.

For at lette modelbygningsarbejdet (og for overhovedet at kunne overskue det) gør vi følgende antagelse:

- 1) De konstitutive sammenhænge er lineære, dvs.

$$\bar{\sigma} = L(\bar{\gamma}) ,$$

hvor L er en lineær operator.

Denne antagelse har vist sig at holde for mange stoffer, hvis spændingen og deformationen er tilstrækkelig små. (En meget tungtvejende grund til at antage sammenhænge for lineære er, at man herved kan anvende den lineære responseteori.)

- 2) Virkningerne fra volumenkræfter (gravitationskraften, mm) og fra inertIELLE effekter (at massedelene skal accelereres op i hastighed i et endeligt tidsrum) antages for neglegible. SåLænge volumenkræfterne er så små, at vi stadig er i den lineære grænse, og når volumenkræfter er konstante under forsøget, har de ingen betydning.

Endvidere er de stoffer, vi vil betragte, isotrope, dvs stoffet har ikke i sig selv foretrukne retninger, således at der i de eksperimentelle opstillinger ikke skal tages hensyn til, hvorledes stoffet vender.

4.3 Shear - forsøg.

I det eksperimentelle arbejde har vi valgt at arbejde med en bestemt type forsøg, såkaldte shear-forsøg, som er karakteriseret ved at sporet af deformationstensoren er lig 0 ($\text{sp}(\gamma) = 0$) - dvs der er ingen rumfangsændrende deformationer.

Som et eksempel på et særligt simpelt shearforsøg, hvor tensorerne er simple, og hvor tensorelementerne ikke afhænger af positionen i stoffet (deformationerne er homogene), kan man betragte en kasseformet klump stof, hvor to modstående sider er forskudt stykket Δx :

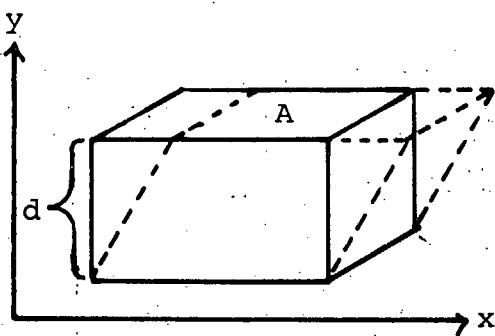


FIG.2: Shearforskydning af en stofklump.

I dette tilfælde er

$$\bar{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{12} & 0 \\ \gamma_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{xy} & 0 \\ \gamma_{yx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ og}$$

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da $\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \gamma$ og $\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \sigma$ (pga. symmetrien af tensorerne) bliver den konstitutive ligning reduceret til en skalær relation

$$\sigma = L(\gamma).$$

Da vi endvidere ved, at $\gamma_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}$, hvor \vec{u} er forskydningsvektoren, og da $\vec{u} = (u, 0, 0)$ fås

$$\sigma = L\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

σ_{yx} er kraften over en flade vinkelret på y-aksen, dvs.
at $\sigma = \frac{F}{A}$, hvor F er kraften på fladen og A er fladens
areal.

Ved det simple shearforsøg bliver den konstitutive lig-
ning derfor

$$\frac{F}{A} = L \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad \text{eller rettere}$$

(4) $\frac{F(t)}{A} = L \left(\frac{\partial u(t)}{\partial y} \right) .$

Under de omtalte forsøgsbetingelser sker der ingen
rumfangsændrende deformationer; stoffets massetæthed
 ρ er derfor konstant. Kontinuitetsligningen får da
følgende udseende:

(5) $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$

Da vi ser bort fra volumenkræfter og inertielle effek-
ter, får bevægelsesligningen udseendet:

(6) $\rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \text{div } \vec{\sigma}$

4.4 Konstitutive ligninger for forskellige stoffer.

A) Newtonsk væske.

En af de første, som angav en konstitutiv relation for
væske var Newton, som opstillede følgende hypotese :

"Modstanden, som skyldes mangel på smørelse i væskedele-
ne, er, alt andet lige, proportional med den hastighed,
som væskedelene forskydes fra hinanden med."

(Motte, 1934, s. 385)

I vort shearforsøg kan dette udtrykkes

$$(7) \quad \frac{F}{A} = \eta \frac{\partial v}{\partial y}$$

hvor proportionalitetskonstanten η kaldes viskositeten.

Da $v = \frac{\partial u}{\partial t}$, fås

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right), \text{ og dermed}$$

$$\frac{F}{A} = \eta \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \Rightarrow \sigma = \eta \cdot \dot{\gamma}$$

For en newtonsk væske bliver operatoren L_N virkende på $\dot{\gamma}$ altså

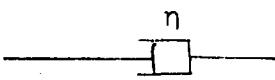
$$L_N = \eta \frac{\partial}{\partial t}$$

Integratorer den konstitutive ligning fås (se fig. 2.)

$$(8) \quad F = \frac{A}{d} \eta v$$

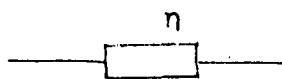
Denne relation mellem kraft og hastighed kan "ikoniseres" på flere måder; konstanten $\frac{A}{d}$, som kun har med den eksperimentelle geometri at gøre, er udeladt :

1)



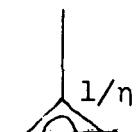
(et stempel fra det rheologiske byggesæt)

2)



(en modstand fra det elektriske byggesæt)

3)



(en læk fra energibåndsbyggesættet).

B) Hooke'sk faststof.

Hvis emnet i vor forsøgsopstilling består af et ideelt elastisk (fast) stof, vil det adlyde Hooke's lov: spændingen er proportional med deformationen af stoffet, dvs

$$\frac{F}{A} = G \frac{\partial u}{\partial y}$$

Proportionalitetsfaktoren G kaldes **stivheden**.

Den konstitutive ligning for et Hooke'sk faststof kan altså skrives

(9) $\sigma = G \cdot \gamma$

således, at operatoren L_H virkende på γ bliver en simpel multiplikationsoperator

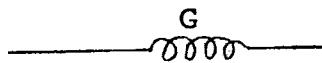
$$L_H = (G \cdot)$$

Integreres den konstitutive ligning fås (se fig.2)

(10) $F = \frac{A}{d} G \Delta x$

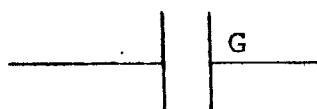
Denne relation mellem kraft og forskydning har følgende ikoner fra de 3 byggesæt; vi har igen udeladt den rent geometriske konstant $\frac{A}{d}$:

1)



(en fjeder fra det rheologiske byggesæt).

2)



(en kondensator fra det elektriske byggesæt).

3)



(et lager fra energibåndsteknikken).

Behov for et mere generelt L .

Med den store diversitet af stoffer, der findes, er det klart, at de to foregående modeller ofte er utilstrækkelige. Vi må derfor ud fra eksperimentelle og teoretiske overvejelser søge at bestemme et mere generelt, men stadig lineært, L til udtrykket

$$\sigma(t) = L(\gamma(t))$$

Den situation, vi befinder os i, er, at vi har et stof, som vi i en bestemt eksperimentel opstilling kan give et stimulus, og så iagttage, hvorledes stoffet responderer. Den indre dynamik af stoffet er os ukendt; vi har altså en blackbox, vi vil søge at reticulere. Det vil derfor være oplagt her at inddrage den lineære responseteori, som vi har omtalt tidligere.

For at kunne benytte den lineære responseteori skal det fastlægges, hvilke variable, der skal bruges som stimulus og response. Som nævnt i kap.2 opererer vi med 4 sådanne variable, nemlig strøm (x-rate), spænding (o-rate), forskydning (o-level) og impuls (x-level). Desuden skal de variable vælges således, at strøm gange spænding giver energioverførsel pr.tidsenhed.

En oplagt måde at vælge stimulus- og responsevariablene på i vort konkrete tilfælde er derfor at lade spændingen σ være o-rate og deformationen γ være o-level (det viser også, at navnene er valgt rimeligt). Det følger heraf, at $\dot{\gamma}$ er x-rate og integralet af σ er x-level. På denne måde er de betingelser, der er stillet til energibåndsvariablene (orientering, tidsvending, dimension), opfyldt.

Via responseteorien fås sammenhængen mellem deformation og spænding gennem de i kap.3 omtalte responsefunktioner. F.eks.er

$$(11) \quad \sigma(t) = \int_{-\infty}^t G(t-\tau) \dot{\gamma}(\tau) d\tau ,$$

hvor $G(t)$ er stivhedsfunktionen.

Problemet med at bestemme den lineære operator L overgår derved til problemet med at bestemme de forskellige responsefunktioner. Dette er en stor fordel, da bestemmelsen af responsefunktionerne ligger meget tættere op af den experimentelle praksis end bestemmelsen af L .

4.5 Elementimpedanser.

Vi vil her med energibåndsteknikkens hjælp gøre nogle modelovervejelser over stoffernes opbygning.

Den kasseformede klump stof, der indgår i shearforsøget, opdeles i n lag af tykkelsen $\Delta y = \frac{d}{n}$.

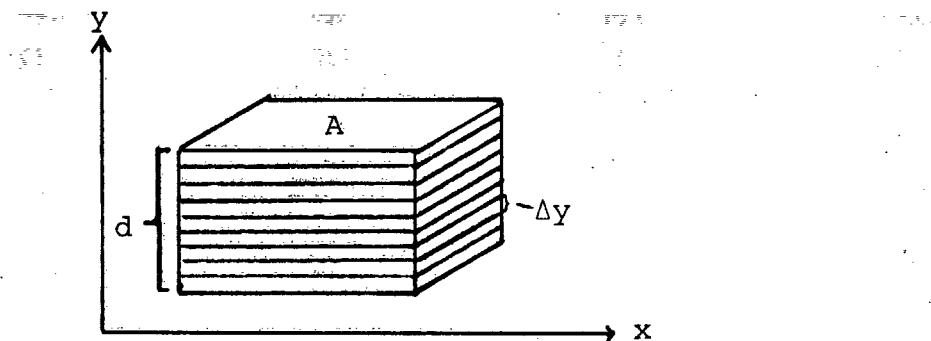


FIG.3: Stofklumpen inddelt i segmenter af tykkelsen Δy .

Stoffet opfattes, som om det bestod af en række lag indeholdende massen $\rho A \Delta y$, som vekselvirker med hinanden gennem en række elementer (se modellen herunder), der tillægges de viskoelastiske egenskaber.

Vi vil kalde $\tilde{Z}(s) = \frac{\sigma}{\dot{Y}}$ for stoffets elementimpedans og $\tilde{Z}_g(s) = \frac{F}{\Delta u}$ for segmentimpedansen. (F er kraften der virker på overfladen af segmentet, mens Δu er forskydningen af segmentet.)

Forskydningen Δu af segmentet i afstanden y i forhold til segmentet i afstanden $y + \Delta y$ er givet ved:

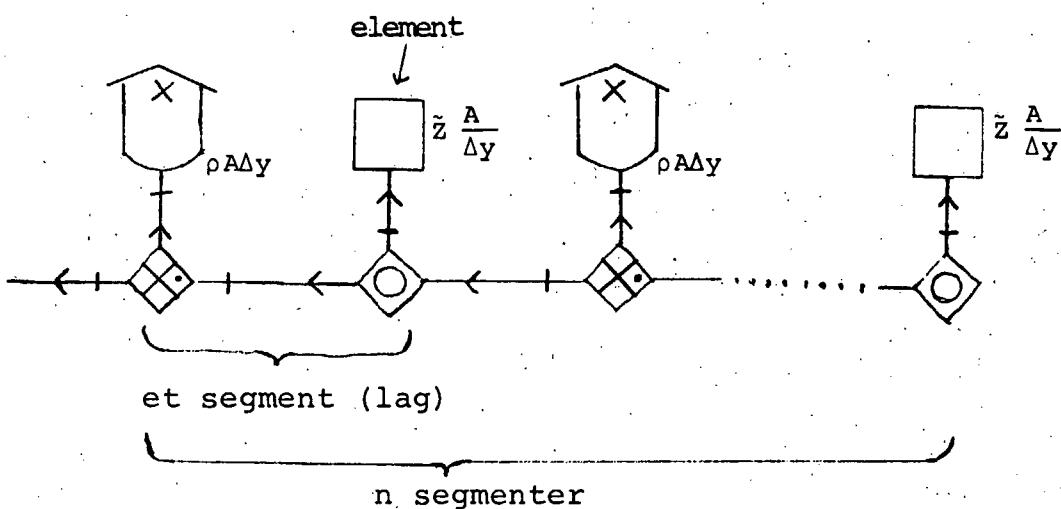
$$\Delta u = u(y + \Delta y) - u(y) \approx \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y$$

hvis Δy er tilstækkelig lille.

der gælder derfor:

$$\tilde{Z}_g = \frac{F}{\Delta u} = \frac{\frac{F}{A} A}{\frac{\Delta y}{\Delta t} \frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{\sigma A}{\dot{Y} \Delta y} = \tilde{Z} \frac{A}{\Delta y}$$

En energibåndsmodel over stofopbygningen vil derfor se således ud:



Hvis vi udregner den komplekse impedans \tilde{z}_R i båndet til "omverdenen", hvilket gøres helt mekanisk ved hjælp af regnereglerne fra kap.2, fås

$$\tilde{z}_R = \rho A \Delta y s + \frac{1}{\frac{\Delta y}{ZA} + \frac{1}{\tilde{z}_1}}, \text{ hvor}$$

$$\tilde{z}_1 = \rho A \Delta y s + \frac{1}{\frac{\Delta y}{ZA} + \frac{1}{\tilde{z}_2}}$$

⋮ osv op til

$$\tilde{z}_{n-1} = \rho A \Delta y s + \frac{\tilde{z}_A}{\Delta y}$$

Hvis $d \ll \sqrt{\frac{\tilde{z}}{\rho_s}}$ kan vi se bort fra de inertielle effekter (se appendix I), hvorved vi får:

$$\tilde{z}_R = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\Delta y}{\tilde{z}_i A}} = \tilde{z} \frac{A}{d}$$

Vi kan altså i et responseforsøg, hvor stimulus er et harmonisk signal, bestemme elementimpedansen \tilde{z} ved at bestemme impedansen \tilde{z}_R i den ydre port.

4.6 Lydimpedanser.

Vi vil på dette sted lave en kort ekskurs om nogle ofte benyttede eksperimentelle situationer, hvor der ikke kan ses bort fra de inertIELLE effekter.

I disse eksperimenter er klodsens tvkkelse $d \gg \lambda$, hvor λ er shearlydbøigelængden således, at man i praksis kan renge med at d er uendelig. Energibåndsmodellen, som er præsenteret på side 49 vil derfor ikke bestå af n segmenter, men af uendelig mange segmenter af tykkelsen Δy . Hvis vi i en sådan opstilling vil udregne den komplekse impedans \tilde{Z}_R i det ydre bånd, vil denne impedans være uændret, selv om vi tager første segment ud.

Vi får derfor ($\Delta y \neq 0$)

$$\tilde{Z}_R = \rho A \Delta y s + \frac{1}{\frac{\Delta y}{ZA} + \frac{1}{\tilde{Z}_R}} \quad \leftrightarrow$$

$$\tilde{Z}_R^2 - \rho A \Delta y s \tilde{Z}_R - \rho A^2 \tilde{Z}_s = 0$$

Lader vi $\Delta y \rightarrow 0$, fås

$$\tilde{Z}_R \rightarrow A \sqrt{\rho \tilde{Z}_s} \quad \text{eller (se side 39)}$$

$$\tilde{Z}_R \rightarrow A \sqrt{\rho \tilde{G}}$$

dvs. man kan i disse forsøg få elementstivheden bestemt ved at måle impedansen i den ydre port. Impedansen \tilde{Z}_R kaldes i disse eksperimenter for lydimpedansen \tilde{Z}_L , idet denne impedans hænger sammen med en udbredelse af transversale lydbølger i stoffet.

Som eksempler på lydimpedanser kan vi udregne Z_L for en Newtonsk væske og et Hooke'sk faststof. (Disse skal anvendes senere).

A) Newtonsk væske.

For en Newtonsk væske gælder om elementimpedansen \tilde{Z} , at

$$\tilde{Z} = \eta ,$$

hvor η er viskositeten (se side 37 og side 46), og derfor

$$(12) \quad \tilde{Z}_L = \sqrt{\rho\eta s}$$

B) Hooke'sk faststof.

For et Hooke'sk faststof er elementstivhedsfunktionen \tilde{G} givet ved

$$\tilde{G} = G ,$$

hvor G er stivheden (se side 37 og side 47). Derfor fås

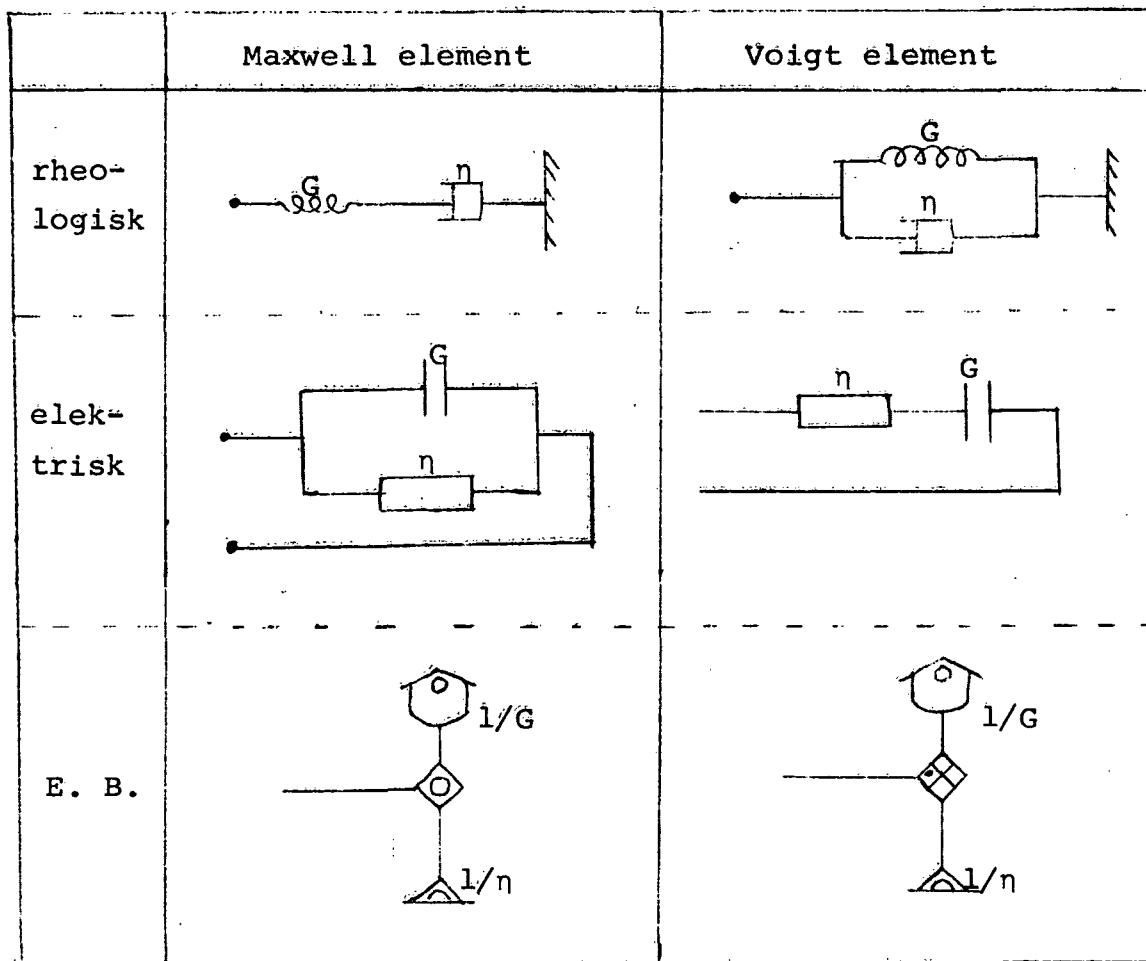
$$(13) \quad \tilde{Z}_L = \sqrt{\rho G}$$

Vi vil nu vende tilbage til vores første model (se side 49), og søge at retikulere yderligere på "elementkasserne".

4.7 Maxwell- og Voigtmodeller.

Som nævnt i indledningen til dette kapitel har de viskoelastiske stoffer både væske- og faststofagtige egenskaber. Der er derfor nærliggende at forsøge at lave en model over viskoelastiske stoffer gennem en kombination af modellerne for en Newtonsk væske og et Hooke'sk faststof. Der findes 2 principielt forskellige måder at lave en simpel kombination af disse 2 modeller på; de 2 fremkomne modeller kaldes hhv. Maxwell- og Voigtmodellen.

Ikonerne for disse modeller ser således ud:



Direkte af ikonerne (måske især det rheologiske) kan det ses, at kun Maxwellelementet kan udvise flydende adfærd. Derfor er Maxwellelementet også blevet benyttet til at forklare shearbevægelser, som vi beskæftiger os med, mens Voigtelementet er blevet benyttet i forbindelse med beskrivelsen af rumfangsændrende bevægelser ("bulk-bevægelser").

Nedenfor vil vi angive de mest benyttede responsfunktioner for Maxwell- og Voigtelementerne.

	Maxwell	Voigt
egent-lige	$G(t) = G e^{-(G/\eta)t}$ $\tilde{G}(s) = \frac{\eta}{\frac{1}{s} + \frac{\eta}{G}}$	$J(t) = \frac{1}{G}(1 - e^{-(G/\eta)t})$ $\tilde{J}(s) = \frac{1}{G + \eta s}$
uegent-lige	$J(t) = \frac{1}{G} + \frac{t}{\eta}$ $\tilde{J}(s) = \frac{1}{\eta s} + \frac{1}{G}$	$G(t) = G + 2\eta \delta(t)$ $\tilde{G}(s) = \eta s + G$

Som det ses, har størrelsen $\frac{\eta}{G}$ dimension af en tid. Denne karakteristiske tid τ_m kaldes Maxwell-relaxationstiden, og er et mål for, hvor lange systemet "husker" fortidige stimuli.

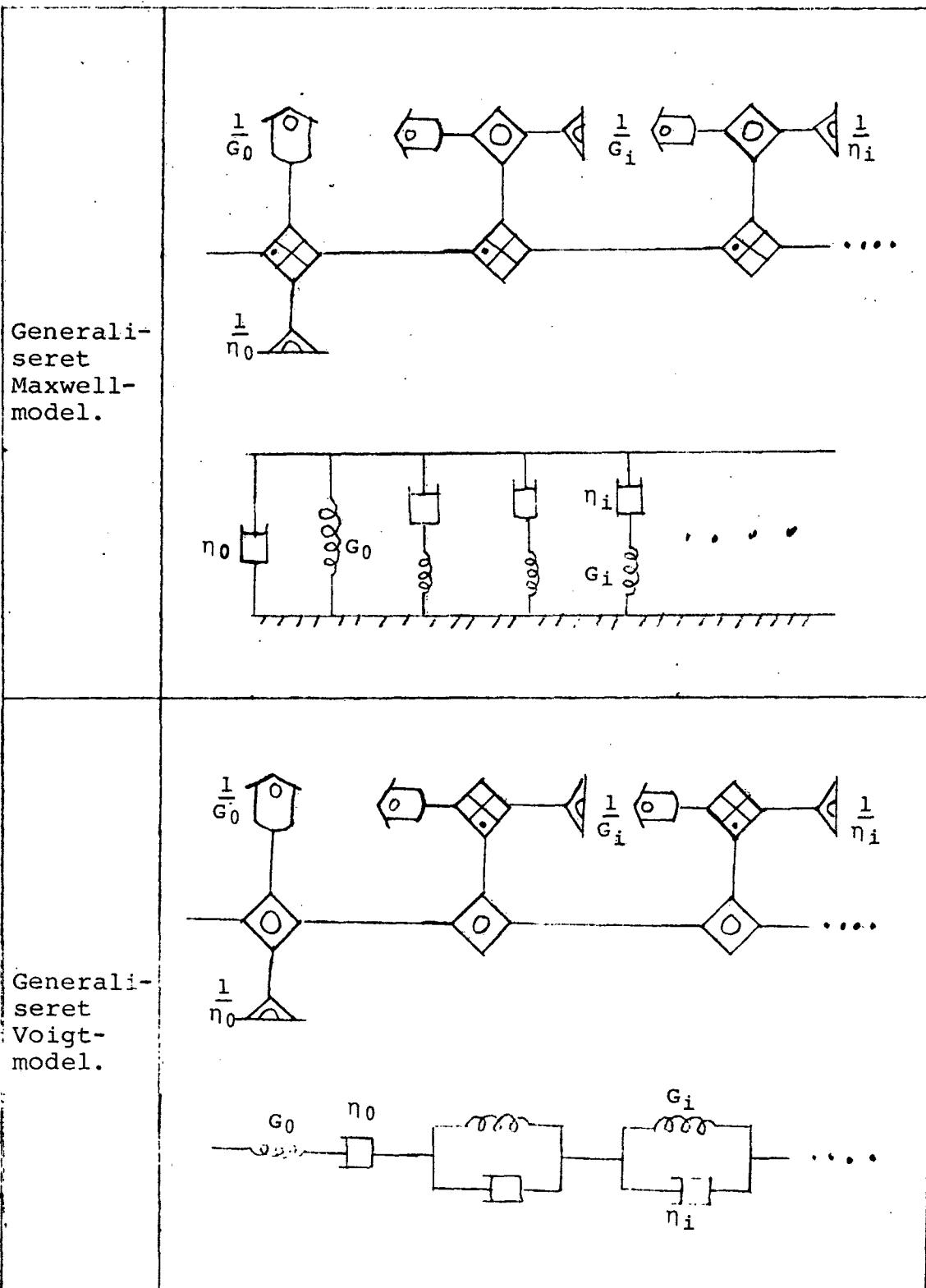
Maxwell-modellen giver stort set en rimelig beskrivelse af kurveformen af responsefunktionerne i shearforsøg med viskoelastiske stoffer, men desværre er Maxwell-modellen i mange tilfælde for upräcis. Der er derfor sket en yderligere udvikling af modellerne, af hvilke vi her vil omtnale tre forskellige.

4.8 Videreudvikling.

A) "Fordelings"-modeller.

Da det har vist sig, at en simpel Maxwellmodel ikke stemmer overens med eksperimentelle data, er modellen udvidet til at indeholde en uendelig kæde af Maxwell- eller Voigt-elementer.

Modellerne foreslægt af Gross, 1953, kan opskrives i følgende diagrammer:



Vi vil her kun angive de uegentlige krybef- og stivhedsfunktioner, da de umiddelbart kan udregnes efter regnereglerne:

	Generaliseret Maxwell	Generaliseret Voigt
uegent-	$G(t) = G_0 + 2\eta_0 \delta(t) + \sum_i G_i e^{-t/\tau_i}$	$J(t) = \frac{1}{G_0} + \frac{t}{\eta_0} + \sum_i \frac{1}{G_i} (1 - e^{-t/\tau_i})$
lige	$\tilde{G}(s) = G_0 + \eta_0 s + \sum_i \frac{\eta_i}{s + \frac{1}{\tau_i}}$	$\tilde{J}(s) = \frac{1}{G_0} + \frac{1}{\eta s} + \sum_i \frac{1}{G_i (1 + \tau_i s)}$

De 2 modeller er ækvivalente (Gross, 1953, s.63), og i forbindelse med de her behandlede shearforsøg vil det være mest naturligt, at betragte den generaliserede Voigtmodel, da denne kun består af Maxwelllementet påhægtet en kæde af Voigtelementer. Dette påhægtede korrektionsled kan for krybefunktionen $J(t)$ opskrives på følgende måde :

$$(14) \quad \sum_i \frac{1}{G_i} (1 - e^{-t/\tau_i}) = \sum_i \beta F_i (1 - e^{-t/\tau_i}) = \sum_i \beta F(\tau_i) (1 - e^{-t/\tau_i})$$

Man forlanger, at $F(\tau) = \sum_i F_i \delta_{\tau, \tau_i}$ er en tæthedsfunktion, dvs at

$$\sum_i F_i = 1, \text{ og dermed, at normeringsfaktoren}$$

$$\beta = \sum_i \frac{1}{G_i}.$$

$F(\tau)$ kaldes retardationsspektret eller fordelingen af retardationstider, idet den udtrykker, hvorledes $J(t)$ er retarderet i forhold til en "Maxwell-væske".

Ofte lader man retardationsspektret være kontinuert, idet korrektionsleddet (retardationsleddet) får formen

$$(15) \quad \int_0^{\infty} \beta F(\tau) (1-e^{-t/\tau}) d\tau = J_r(t)$$

således at $\int_0^{\infty} F(\tau) d\tau = 1$.

Vurdering af "Fordelings"-modellerne.

Den generaliserede Voigtmodel er hovedsagelig en matematiske udvidelse af Maxwellmodellen. Mens den simple Maxwellmodel kun indeholder 2 parametre, indeholder den generaliserede Voigtmodel i principippet uendelig mange parametre, som kan tilpasses de eksperimentelle observationer. Den fysiske information er langt større i modeller med få parametre end i modeller med mange, da forståelsen af egenskaberne som regel træder tydeligere frem ved få parametre. Vor forståelse af viskoelastiske stoffer er ikke blevet udvidet med indførelsen af de generaliserede Voigt- og Maxwellmodeller, men vi er nok lidt bedre i stand til at beskrive stoffernes opførsel.

B) B.E.L - modellen.

En model, som passer overraskende godt på mange eksperimentelle data, og som stadig kun opererer med to parametre, er foreslægt af Barlow, Erginsav og Lamb (B.E.L, 1967). Denne model bygger på målinger af lydimpedanser, som vi kort var inde på på side 50..

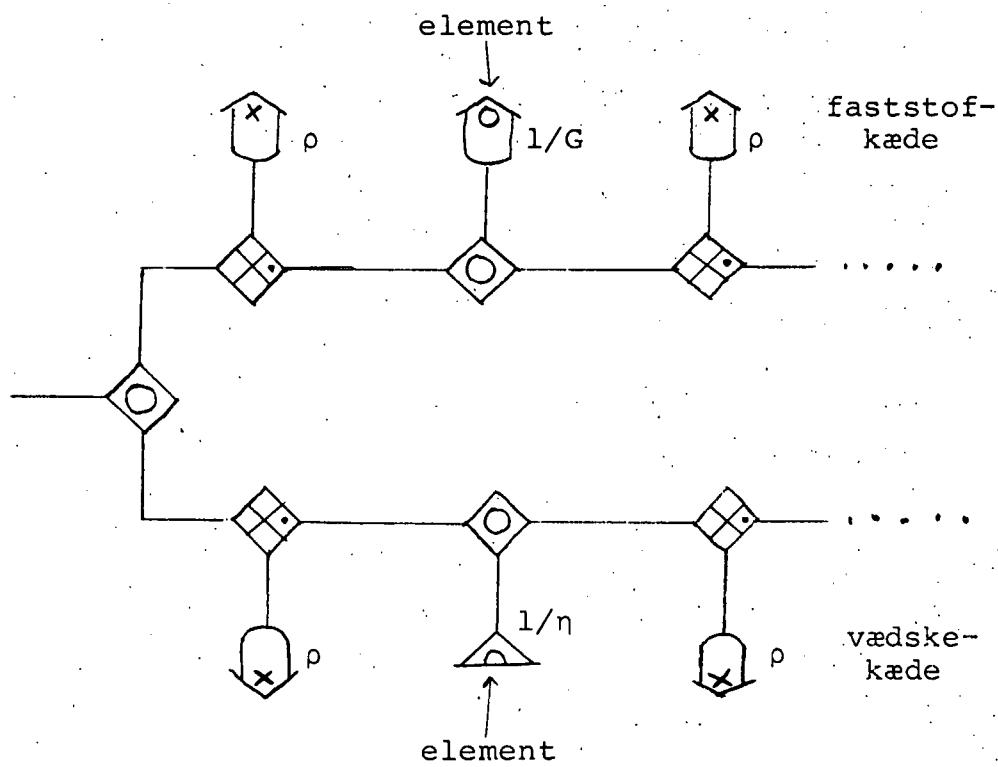
Vi bestemte \tilde{Z}_L for en Newtonsk væske til (lign.12)

$$\tilde{Z}_L = \sqrt{s \eta \rho}$$

og for et Hooke'sk faststof (lign.13)

$$\tilde{Z}_L = \sqrt{\rho G}$$

B.E.L. foreslår en model til beskrivelse af lydimpedanser i viskoelastiske stoffer, bestående af en elektrisk parallelforbindelse eller en rheologisk serieforbindelse af disse 2 impedanser. Denne modeldannelse er, set i lyset af vores model for stofopbygningen (se side 49), temmelig obskur, idet den består af en sammenstilling af 2 kæder med hver sin elementfunktion, men med fælles masse.



Reticuleret diagram over B.E.L. modellen. (De geometriske faktorer er udeladt).

Udtrykket for lydimpedansen i B.E.L.-modellen bliver følgende :

$$(16) \quad \frac{1}{Z_L} = \frac{1}{\sqrt{\rho G}} + \frac{1}{\sqrt{\rho \eta s}} \Rightarrow \tilde{Z}_L = \sqrt{\rho} \left(\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{G}} + \frac{1}{\sqrt{\eta s}}} \right)$$

Vi har før (se side 51) fundet en relation mellem lydimpedansen \tilde{Z}_L og den komplekse elementstivhedsfunktion \tilde{G} (Vi ser bort fra geometrifaktoren A):

$$\tilde{Z}_L = \sqrt{\rho \tilde{G}} , \text{ dvs } \tilde{G} = \frac{(\tilde{Z}_L)^2}{\rho}$$

Vi kan derfor bestemme elementresponsefunktionerne for B.E.L.-modellen :

$$(17) \quad \tilde{G}(s) = \left(\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{G}} + \frac{1}{\sqrt{\eta s}}} \right)^2 = \frac{\eta}{(\sqrt{\frac{\eta}{G}} + \frac{1}{\sqrt{s}})^2} , \text{ dvs}$$

$$(18) \quad \tilde{J}(s) = \frac{1}{\tilde{G}(s)} = \left(\frac{1}{\sqrt{G}} + \frac{1}{\sqrt{\eta s}} \right)^2 = \frac{1}{G} + \frac{1}{\eta s} + \frac{2}{\sqrt{G \eta s}}$$

$$= \frac{1}{G} \left(1 + \frac{1}{\tau_m s} + \frac{2}{\sqrt{\tau_m s}} \right) , \quad \tau_m = \frac{\eta}{G}$$

I følge skema side 39 fås, at

$$(19) \quad J(t) = L^{-1} [\frac{\tilde{J}(s)}{s}, t] = \frac{1}{G} + \frac{t}{\eta} + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{t}{G \eta}}$$

$$= \frac{1}{G} \left(1 + \frac{t}{\tau_m} + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{t}{\tau_m}} \right)$$

Det ses, at B.E.L.-modellens $J(t)$ består af Maxwell-modellens $J(t)$ plus et korrektionsled, der forløber som \sqrt{t} .

Selvom B.E.L.-modellen i al væsenlighed er en fænomenologisk model, er den god til at beskrive mange - isærdeleshed underafkølede - stoffer. Som noget nyt introducerer modellen, at der i krybefunktionen skal indgå et \sqrt{t} - led. Man kan så begynde at søge fysiske forklaringer, der fører til en sådan krybefunktion.

C. Isakovich - Chaban modellen.

De modeller vi indtil nu har omtalt, knytter sig hovedsagelig til forholdsvis simple væsker. For at beskrive mere sammensatte stoffer, som f.eks. polymerer, har det vist sig nødvendigt at indføre flere parametre i modelerne.

En af de mest benyttede responsefunktioner i beskrivelsen af viscoelastiske stoffer er stivhedsfunktionen $\hat{G}(s)$ (eller $\hat{G}(\omega)$). En grafisk fremstilling af realdelen $\hat{G}'(\omega)$ af $G(\omega)$ ser for en typisk Maxwell og B.E.L.-model således ud:

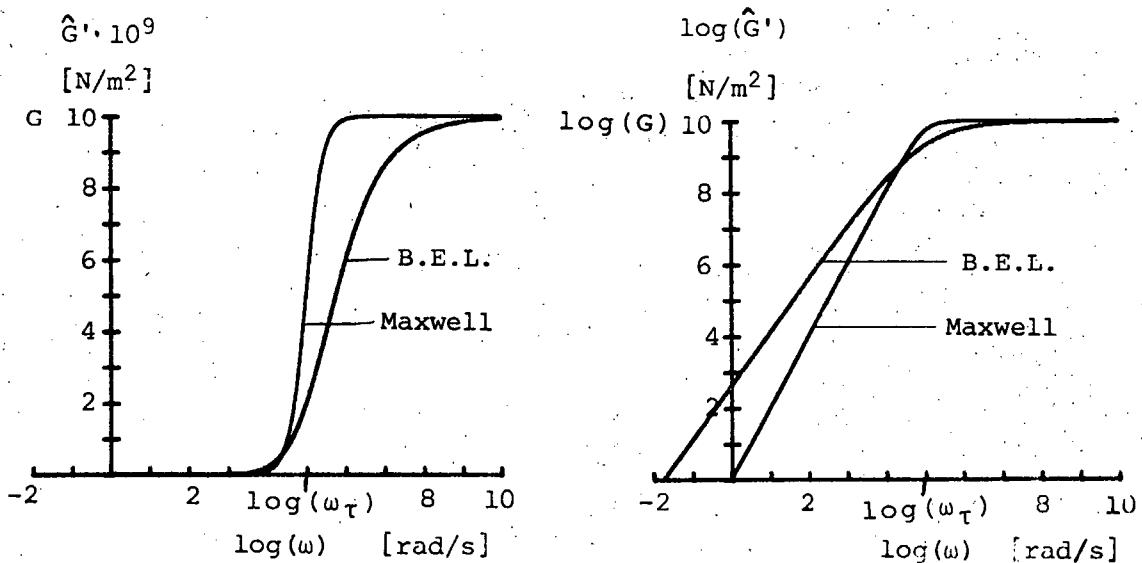


FIG.4: $\hat{G}'(\omega)$ for en Maxwell- og en B.E.L.-model. Til venstre i enkelt- og til højre i en dobbelt-logaritmisk skala. $\omega_\tau = \tau_m^{-1} = G/\eta$.

Som det ses går realdelen af stivhedsfunktionen $\hat{G}(\omega)$ mod en konstant, stivheden G , når ω går mod uendelig, men mens \hat{G}' i Maxwell-modellen når op på 90% af G når $\omega = 3\omega_\tau$ nås dette i B.E.L.-modellen først når $\omega = 200\omega_\tau$. (De tilsvarende tal for 50% er $\omega = \omega_\tau$ for Maxwell og $\omega = 5\omega_\tau$ for B.E.L.). Det skal ligeledes bemærkes, at hældningen af kurven i $\log(\omega)$ - $\log(\hat{G}')$ plottet for $\omega \ll \omega_\tau$ er 2 i Maxwellmodellel og 3/2 i B.E.L.-modellen.

Det har vist sig, at $\hat{G}'(\omega)$ for mange stoffer, som f. eks. polymerer, har et forløb som skitseret nedenfor (se f. eks. Ferry, 1970, Barlow og Erginsaw, 1975, Barlow, Harrison og Lamb, 1964, Lamb og Lindon, 1966, Barlow, Harrison, Lamb og Subramanian, 1969, Knollman og Hamamoto, 1967).

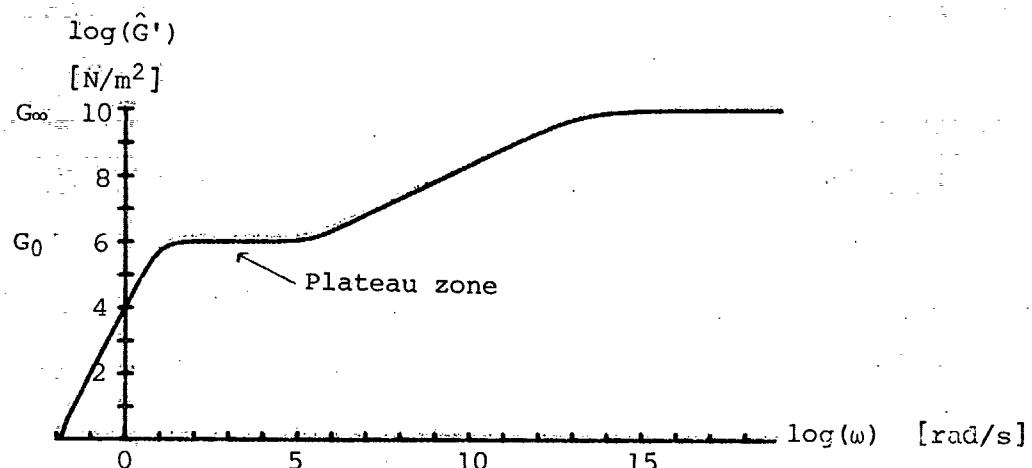


FIG.5: En Isakovich-Chaban-model i et dobb.-log.-plot

Der findes en såkaldt "plateau zone", hvor realdelen af stivhedsfunktionen holder sig på en tilnærmelsesvis konstant værdi G_0 inden den vokser op mod sin grænseværdi G_∞ for ω gående mod uendelig.

En model (blandt det uto af modeller, der er præsenteret i litteraturen), som er blevet anvendt til beskrivelse af såvel polymere stoffer, som ikke polymere seje væsker (f.eks. glycerol), og som bla.a. bygger på denne egenskab, er foreslået af Isakovich og Chaban (1966).

I denne model kan krybefunktionen $\tilde{J}(s)$ angives ved:

$$(20) \quad \begin{aligned} \tilde{J}(s) &= \frac{1}{G_\infty} + \frac{1}{s^\eta} + \left(\frac{1}{G_0} - \frac{1}{G_\infty} \right) \tilde{\Phi}(s\tau) , \text{ hvor} \\ \tilde{\Phi}(s\tau) &= \frac{3}{2 \cdot s \tau} \frac{(1 + \sqrt{2s\tau})(\sqrt{2s\tau} - \tanh \sqrt{2s\tau})}{\sqrt{2s\tau} (1 + \tanh \sqrt{2s\tau})} \end{aligned}$$

τ er en karakteristisk (temperaturafhængig) tidskonstant for stoffet.

Ved at benytte regnereglerne fås krybefunktionen $J(t)$:

$$(21) \quad J(t) = \frac{1}{G_\infty} + \frac{t}{n} + \left(\frac{1}{G_0} - \frac{1}{G_\infty} \right) \tilde{\Phi}(t/\tau), \text{ hvor}$$
$$\tilde{\Phi}(t/\tau) = L^{-1}\left\{ \frac{\tilde{\Phi}(s\tau)}{s\tau}, \frac{t}{\tau} \right\}$$

Som det ses, angiver Isakovich - Chaban modellen ligesom de førstnævnte modeller et korrektionsled (retardationsled) til Maxwell-modellens krybefunktion.

I højfrekvensgrænsen $|s| \gg \frac{1}{\tau}$ fås:

$$(22) \quad \tilde{\Phi}(s) \approx \frac{3}{\sqrt{2s\tau}} \quad \text{og dermed}$$
$$\tilde{\Phi}(t/\tau) \approx 3\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\frac{t}{\tau}}, \quad t \ll \tau$$

Modellen svarer i højfrekvensgrænsen (korttidsgrænsen) til B.E.L.-modellen, idet der blot er en faktor

$$\left(\frac{G_\infty}{G_0} - 1 \right) \frac{3}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\tau m}{\tau}}$$

til forskel på konstanten foran \sqrt{t} (eller $s^{-\frac{1}{2}}$) ledet.

I lavfrekvensgrænsen $|s| \ll \frac{1}{\tau}$ fås:

$$(23) \quad \tilde{\Phi}(s) \approx 1 \quad \text{og dermed}$$
$$\tilde{J}(s) \approx \frac{1}{G_0} + \frac{1}{s n} \quad \text{og}$$
$$J(t) \approx \frac{1}{G_0} + \frac{t}{n}, \quad t \gg \tau.$$

I lavfrekvensgrænsen (langtidsgrænsen) reduceres modellen til en simpel Maxwell-model, hvor Maxwellrelaxations-tiden er givet ved n/G_0 (og ikke som n/G_∞).

Udfra disse overvejelser kan betydningen af tidskonstanten τ for forløbet af responsefunktionerne angives.

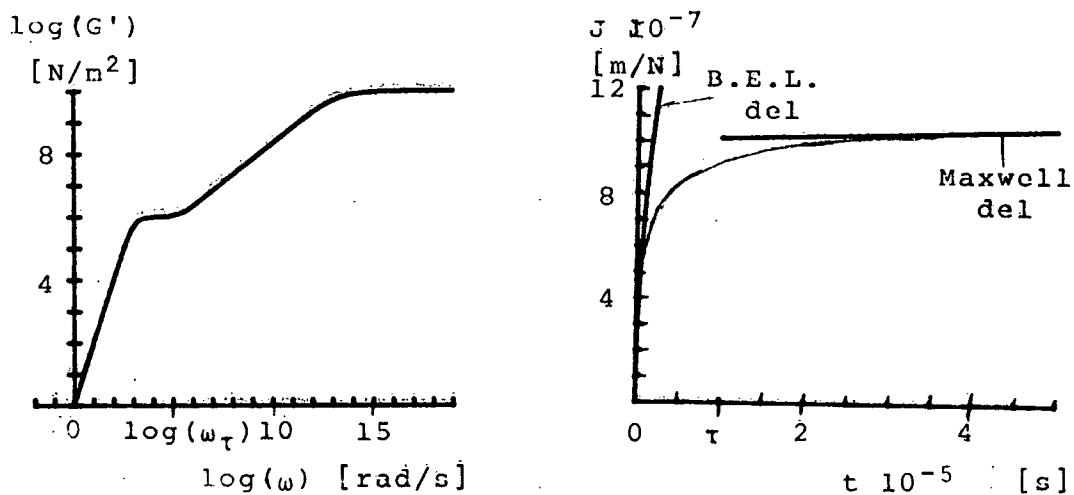


FIG.6: En Isakovich-Chaban-model i et $\hat{G}'(\omega)$ -plot og et $J(t)$ -plot.

Som det fremgår er Isakovich - Chaban modellen en 4 parametermodel. Den er hovedsagelig fremkommet ved hjælp af fænomenologiske overvejelser, men den indeholder dog visse elementer af teori.

Modellen er opstillet udfra en antagelse om, at der ud over et Maxwell-element skal være et retardationsled, $\Phi(t)$. Udseendet af dette led er fundet under antagelse af, at stoffet kan betragtes som bestående af to faser, en ordnet og en uordnet. I ligevægt har disse faser en karakteristisk koncentration af "huller" (vacancer). Når stoffet deformeres, forstyrres denne ligevægt, og der opstår en diffusiv proces, der efter den karakteristiske tid, τ , genopretter ligevægten.

5. OPSAMLING PÅ DEL I.

I dette kapitel vil vi give en kort opsummering af de model-overvejelser, vi har præsenteret i kap. 4, set i lyset af de generelle overvejelser i kap. 1.

Det, der ofte kendetegner modeldannelsen indenfor fysikken, er, at man som regel kan operere med et velfagrsæt genstandsområde som f.eks viskoelastiske stoffer, og at man, når modellerne skal konfronteres med den materielle virkelighed, kan "forme" virkeligheden således, at man i sin eksperimentelle praksis udelukker forstyrrende elementer fra genstandsområdet.

Det er ligeledes kendetegnende for fysikken, at der sker en vekselvirkning mellem "formningen af virkeligheden", dvs designing af eksperimentelle opstillinger, og modeldannelsen, således at modellerne kan forsimples meget, men dog alligevel udsige noget, der kan konfronteres med virkeligheden. Dette illustreres tydeligt gennem den forsimpling af modellerne for viskoelastiske stoffer, som arbejdet med shear-forsøg indebærer.

De første modeldannelser til en forklaring af væskers egenskaber nøjere skyldes som omtalt side 45 Newton. Det er værd at bemærke, at allerede denne model indeholder antagelsen, som man stadig opererer med (se side 49.), at man kan betragte væskedele, der bevæger sig i forhold til hinanden.

Ud fra væskemodellen (og faststofmodellen) kan det ses, hvilken stor rolle analogierne til stempler og fjedre spiller. Det er meget lettere at tænke i "stempel-fjeder"-modeller end at beskæftige sig med "udefinerede" sammenhænge mellem væskedele. Som P.V.Christiansen udtrykker det : "Bagved de fleste teoribygninger ligger, mere eller mindre implicit, en stak forestillingsbilleder, som i forskernes bevidsthed kan kombineres til mentale analoge modeller (eller "havregrødscomputere") i den indledende matematificering af et pro-

blem." (Christiansen, 1978, s.59)

I og med opstillingen af disse analogier er det også oplagt som et første forsøg, at prøve en bedre og mere generel model ved en sammenstilling af disse 2 analogier, og således få de første egentlige modeller for viskoelastiske stoffer opstillet, nemlig Maxwell- og Voigtmodellerne.¹

Videreudviklingen af disse i de generaliserede Maxwell- og Voigtmodeller vil vi ikke kalde en egentlig udvidelse af den fysiske erkendelse. Vi vil snarere opfatte disse modeller som en måde at systematisere de eksperimentelle data på, idet det har vist sig, at de simple modeller ofte var utilstrækkelige. En sådan systematisering er et vigtigt led i modeludviklingen, fordi den tit kan give ledetråde til nye udviklingsveje for modellerne, f.eks ved at fremkomme med karakteristiske korrektioner til de allerede eksisterende modeller.

B.E.L.-modellen kan ses som et forslag til en model, der kan give en forklaring på en sådan korrektion, selv om den bygger på nogle noget tvivlsomme antagelser om stoffernes "rheologiske" struktur. I og med at modellen giver et konkret matematisk udtryk for nogle stofegenskaber, som faktisk viser sig at stemme overens med den eksperimentelle praksis, kan man søge efter mere holdbare argumenter for denne model.

I Isakovich - Chaban modellen er der taget hensyn til en egenskab, som ingen af de forudnævnte modeller indeholder, nemlig "Plateau-zonen". Modellen er, ligesom de foregående, en fænomenologisk model, som bl.a. bygger på det postulat, at langtidsopførslen skal være en Maxwellmodel, men den indeholder dog visse ansatser til mere mikroskopisk baserede forklaringer på, hvorfor responsefunktionerne har det angivne udseende.

¹Det skal dog bemærkes, at det ikke er sådan modellerne originalt er opstået (se f.eks. Maxwell 1867).

Dette hænger bl.a. sammen med, at man ikke accepterer en direkte rheologisk forklaring som en teoretisk forklaring.

Hvis man vil have en model over viskoelastiske stoffer, som ligger i nærheden af, hvad vi har kaldt en teoretisk-mekanisk model, skal den, med det stade fysikken har idag, være en forklaring, der tager sit udgangspunkt i et andet niveau end det vi beskæftiger os med i denne rapport, nemlig på det molekulære (mikroskopiske) niveau.

6 Eksperimentelt forløb.

For at få en eksemplarisk indsigt i, hvorledes den eksperimentelle praksis indgår i udviklingen af et område indenfor fysikken, har vi sideløbende med arbejdet med de i kap.4 omtalte modeller udført en række eksperimentelle bestemmelser af viscoelastiske responsefunktioner.

I dette afsnit har vi koncentreret os om eksperimentelle metoder, som kan udtale sig om responsefunktionerne i henholdsvis højfrekvensområdet (korte tider) og lavfrekvensområdet (lange tider). Set i lyset af Isakovich-Chaban modeller vil det være af interesse at undersøge om langtidsopførselen kan beskrives ved en simpel Maxwell-model og om korttidsopførselen kan beskrives ved en modificeret B.E.L.-model.

De områder, der er af interesse, er derfor dels "langtidsområdet" omkring Maxwell-tiden ($\tau_m = \eta/G_0$) og dels "korttidsområdet" omkring tiden τ (højfrekvensområdet omkring ω_τ , hvor plateau zonen ender).

Det stof vi har gjort til genstand for disse undersøgelser, er en polymer, der kan købes som legetøj under navne som "Wonder-plast" og "Hoppeler".

Valget af dette stof har flere pragmatiske grunde.

1. Rent pædagogisk er stoffet et godt eksempel på et viscoelastisk stof, idet det både udviser elastiske og viskøse egenskaber i tidsintervaller, som er umiddelbart observerbare.
2. Vi havde en formodning om, at man kunne bruge den såkaldte "Mösbauereffekt" til bestemmelse af viscoelastiske responsefunktioner, og et pilotforsøg med dette

stof viste lovende resultater.

Vi udviklede dels en eksperimentel måleopstilling, som kan bestemme responsefunktioner i området omkring 0.1 sekund (svarende til 10Hz), dels har vi teoretisk vist, hvordan det er muligt at bestemme responsefunktioner i området omkring 10^{-8} s ved hjælp af Mösbauereffekten.

Kapitel 7. Makroskopiske mekaniske impedansmålinger.

For at bestemme shear-responsfunktionerne af det førstnævnte polymere stof til tider af størrelsesordenen $0.01 - 1$ sekund, har vi udført en række shear-forsøg, som er analoge til dem, der er beskrevet på s. 43 ff.

I stedet for at anvende et kasseformet udsnit og påvirke dette på den ene overflade, valgte vi et cylinderformet udsnit, og påvirkningen skete ved, at der var placeret en bevægelig aksel midt igennem udsnittet, som det fremgår af tegningen.

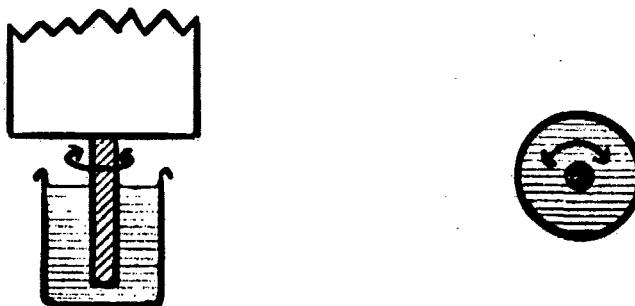


FIG.1: Til venstre: motor, aksel og stofbeholder skematisk, til højre: stofbeholder og aksel set fraoven.

Med en elektrisk motor kunne akslen påvirkes med et kraftmoment, som igen påvirkede stoffet i den cylinderformede beholder. Ved sådanne forsøg sker der en shear-forskydning af stoffet - og der er ingen rumfangsændring. Dvs, at $sp(\gamma)=0$.

I afsnit 7.1 foretages den matematiske beskrivelse af spændings- og deformationstensorerne i cylindergeometrien, og impedansen for akslen beregnes.

Derefter beskrives den eksperimentelle opstilling først ved en energibåndsmodel og derefter ved en mere detaljeret gen-nemgang af de enkelte elementer i opstillingen.

Sidst i afsnit 7.3 redegøres for måleproceduren og de enkelte måleinstrumenter, som indgår i denne.

7.1 Matematisk beskrivelse.

I den omtalte forsøgsopstilling er det en fordel for den matematiske formulering at tage hensyn til cylindergeometrien.

7.1.1. Spændingstensoren.

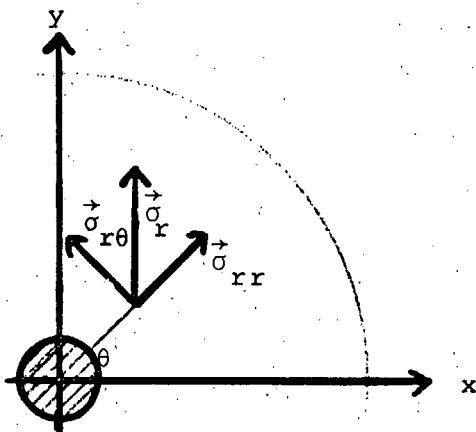


FIG.2: Vektorerne $\vec{\sigma}_{rr}$, $\vec{\sigma}_r$ og $\vec{\sigma}_{r\theta}$ indtegnet i et x-y-koordinatsystem.

Betrages figuren ovenfor og kaldes spændingen vinkelret på r-retningen for $\vec{\sigma}_r$, - det vil sige spændingen gennem fladen med normalvektoren $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$ gælder:

$$(1) \quad \vec{\sigma}_r = (\sigma_{rx}, \sigma_{ry}, \sigma_{rz}) \\ = \sigma_{r\theta} (-\sin\theta, \sin\theta, 0) + \sigma_{rr} (\cos\theta, \sin\theta, 0) + \sigma_{rz} (0, 0, 1)$$

Ser vi bort fra randeffekter i beholderens bund og antages trykket at være konstant gennem stoffet vil

$$\sigma_{rr} = \sigma_{rz} = 0$$

fordi beholderen iøvrigt er symmetrisk om akslen.

Af ligning (1) fås nu:

$$\sigma_{rx} = -\sigma_{r\theta} \sin\theta$$

$$\sigma_{ry} = \sigma_{r\theta} \cos\theta$$

Endvidere har vi fra tidligere (lign. 4.3), at

$$\sigma_{rx} = \sigma_{xx} \cos\theta + \sigma_{xy} \sin\theta$$

$$\sigma_{ry} = \sigma_{yx} \cos\theta + \sigma_{yy} \sin\theta$$

Når $\text{sp}(\bar{\sigma})=0$ er $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$, og da spændingstensoren er symmetrisk (dvs. $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$) fås:

$$(2) \quad \begin{aligned} \sigma_{xy} &= \sigma_{r\theta} (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\ \sigma_{xx} &= -2\sigma_{r\theta} \sin\theta \cos\theta \end{aligned}$$

I det symbolet for shearspændingen $\sigma_{r\theta}$ erstattes med σ , får spændingstensoren følgende udseende:

$$(3) \quad \bar{\sigma} = \begin{pmatrix} -\sigma \sin 2\theta & \sigma \cos 2\theta & 0 \\ \sigma \cos 2\theta & \sigma \sin 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7.1.2. Deformationstensoren.

På grund af geometrien i beholderen vil hastighedsfeltet \vec{v} altid være vinkelret på r -retningen og får da følgende udseende:

$$\vec{v} = v(-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$

De afledede af deformationstensoren kan skrives:

$$\dot{\gamma}_{ik} = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}$$

og da sammenhængen mellem differentialoperatoren i kardesiske og cylinderkoordinater er

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}$$

og

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos\theta \frac{\partial}{\partial \theta}$$

kan den aflede af deformationstensoren $\tilde{\gamma}$ skrives:

$$(4) \quad \tilde{\gamma} = \begin{pmatrix} -\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right) \sin 2\theta & \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right) \cos 2\theta & 0 \\ \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right) \cos 2\theta & \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right) \sin 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Den konstitutive ligning svarende til (4.11) bliver derfor:

$$(5) \quad \sigma = \int_{-\infty}^t G(t-\tau) \left(\frac{\partial v(\tau)}{\partial r} - \frac{v(\tau)}{r} \right) d\tau$$

7.1.3. Impedans i den axialsymmetriske beholder.

For at bestemme den impedans \tilde{Z}_R , som akslen "ser" ind i, betragtes følgende lagmodel, som er analog til den side 49. Cylinderen deles op i n segmenter af tykkelse Δr , således at $\Delta r = \frac{b-a}{n}$, hvor a er akselradius og b er beholderradius.

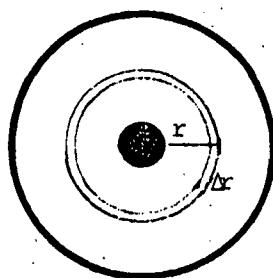


FIG.3: Et segment med tykkelsen Δr i afstanden r fra akslens midtpunkt.

Kaldes kraften, som virker gennem cylinderoverfladen i afstanden r, for F gælder det om spændingen σ :

$$\sigma = \frac{F}{2\pi r l}$$

hvor l er længden af akslen.

Forskellen i vinkelhastighed $\Delta\dot{\theta}$ af laget i afstanden r i forhold til laget i afstanden $r + \Delta r$ er givet ved

$$\begin{aligned}\Delta\dot{\theta} &= \dot{\theta}(r + \Delta r) - \dot{\theta}(r) \\ &\approx \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial r} \Delta r\end{aligned}$$

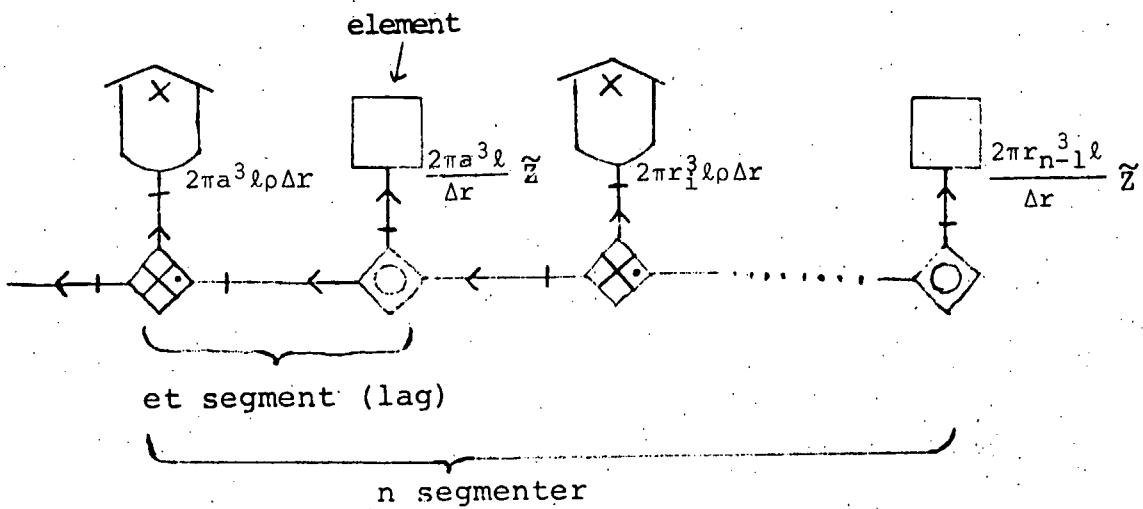
hvis Δr er tilstrækkelig lille.

Den komplekse impedans \tilde{Z}_g af segmentet i afstanden r er defineret som forholdet mellem kraftmomentet og vinkelhastigheden, altså

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_g &= \frac{F r}{\Delta\dot{\theta}} \\ &= \frac{F r}{\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial r} \Delta r} \\ &= \frac{F r}{\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) \Delta r} \\ &= \frac{\frac{F r}{2\pi r l} 2\pi r l}{\frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \Delta r} \\ &= \frac{\sigma 2\pi r^3 l}{\gamma \Delta r} \\ &= \frac{2\pi r^3 l}{\Delta r} \tilde{Z}\end{aligned}$$

hvor $\tilde{Z} = \frac{\sigma}{\gamma}$ er stoffets elementimpedans.

Nu kan følgende energibåndsmodel over stofopbygningen, svarende til den side 49, opstilles. Bemærk at krydsslagnene nu beskriver impulsmomentet, hvorved lagerkapaciteten er inertimomentet.



Impedansen \tilde{Z}_R i den ydre port bliver derfor:

$$(6) \quad \tilde{Z}_R = \rho l 2\pi a^3 \Delta r s + \frac{1}{\frac{\Delta r}{2\pi a^3 l \tilde{Z}} + \frac{1}{\tilde{Z}_1}}$$

$$\tilde{Z}_1 = \rho l 2\pi r_1^3 \Delta r s + \frac{1}{\frac{\Delta r}{2\pi r_1^3 l \tilde{Z}} + \frac{1}{\tilde{Z}_2}}$$

osv. op til

$$\tilde{Z}_{n-1} = \rho l 2\pi r_{n-1}^3 \Delta r s + \frac{2\pi r_{n-1}^3 l \tilde{Z}}{\Delta r}$$

Hvis $b-a \ll \sqrt{|\frac{\tilde{Z}}{\rho s}|}$, kan der ses bort fra de inertielle effekter (se appendix I), hvorved man får:

$$\tilde{Z}_R = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\Delta r}{2\pi r_i^3 l \tilde{Z}}} \quad , \quad \text{hvor } r_o = a.$$

Hvis $\Delta r \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), fås:

$$\tilde{Z}_R \rightarrow \frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{2\pi l \tilde{Z}} \int_a^b \frac{1}{r^3} dr} \quad \text{og dermed}$$

$$(7) \quad \tilde{Z}_R \rightarrow \frac{4\pi l a^2 b^2}{b^2 - a^2} \tilde{Z}$$

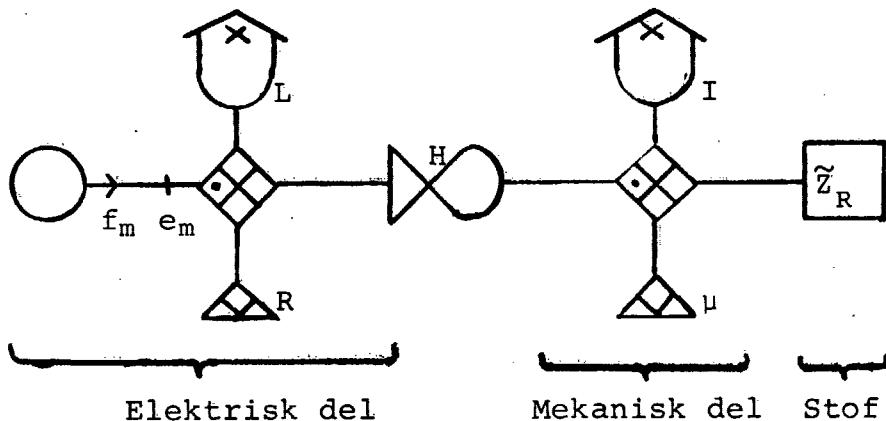
\tilde{Z}_R er altså givet ved elementimpedansen \tilde{Z} pånær en geometrisk faktor $\frac{4\pi l a^2 b^2}{b^2 - a^2}$ (som i "kassegeometrien" fra kapitel 4 var A/d).

7.2. Eksperimentel opstilling.

7.2.1. Energibåndsmodel.

Som omtalt består måleopstillingen i principippet at en motor, hvis aksel er i forbindelse med det stof, der skal undersøges.

En energibåndsmodel vil se således ud:



En motor består i alt væsentlig af en elektrisk del (en spole - med induktion L og modstand R - som befinner sig i et magnetfelt) og en mekanisk del (en rotor med inertimoment I ophængt i nogle lejer, som giver anledning til en lejegnidning μ).

Da der i motoren sker en omsætning af elektrisk energi til mekanisk energi via Lorentz-kraften fra den permanente magnet på de strømførende ledninger, skal der mellem de to dele placeres en gyrator, hvis omsætningsforhold kaldes H .

Motorens aksel er mekanisk parallel forbundet med stoffet, der skal undersøges - altså i forbindelse med en "sort kasse" med impedansfunktion \tilde{Z}_R .

Hvis der som input til motoren anvendes et signal af typen e^{st} , kan man ud fra regnereglerne i kapitel tre bestemme sammenhængen mellem impedansen \tilde{Z}_m i motorens "indgangsport" og impedansen \tilde{Z}_R :

$$(8) \quad \tilde{Z}_m = sL + R + \frac{H^2}{\tilde{Z}_R + sI + \mu}, \text{ hvor}$$

\tilde{Z}_m = impedansen i motorens tilledninger

L = motorens selvinduktion

s = laplace frekvensen

R = motorens ohmske modstand

H = motorens omsætningsforhold

\tilde{Z}_R = stofimpedansen

μ = motorens lejemodstand

7.2.2. Den elektriske motor.

Motoren, der blev brugt til forsøget, var en Faulhaber DC-micromotor type 330, 12 V. Denne motor udmærker sig ved at have en jernløs rotor og dermed et lille inertimoment, hvilket er vigtigt for at \tilde{Z}_R kan bestemmes ud fra \tilde{Z}_m (se senere).

Fra leverandørens side opgives følgende data for motoren:

$$L = 6,5 \cdot 10^{-4} \text{ H}$$

$$R = 21 \Omega$$

$$H = 1,413 \text{ Nm/A}$$

$$I = 1,5 \text{ kg m}^2$$



FIG.3: Foto af Faulhaber-motoren. Til højre metalkappen, i midten ankeret bestående af en tynd aksel og kobbevindinger samt et dæksel til venstre.

Efterhånden som forsøgsdesignet skred frem, blev det imidlertid klart, at der var problemer, som nødvendiggjorde visse ændringer af motoren.

A. Kommutatorstøj.

Motorens kommutator består af fem kommutator-segmenter, som drejer forbi to metalbørster (se tegning).

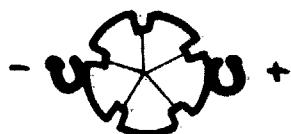


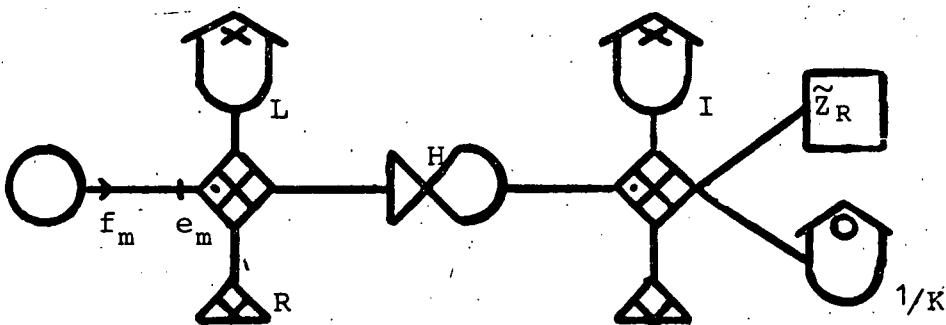
FIG.5: Skematisk tegning af kommutator og børster.

Hver gang der sker et "kommutatorskift" (et kommutatorsegment drejer forbi en børste, således at næste kommutatorsegment kommer i kontakt med børsten) produceres en støjimpuls, som ikke er ubetydelig i forhold til de signaler, der ellers måles.

For at komme ud over dette problem blev børsterne fjernet, og der blev loddet to tynde og bløde tilledninger direkte

på to "diamentralt" modsatte kommutatorsegmenter (så godt som det nu kan lade sig gøre med fem kommutatorsegmenter). Dette kunne gøres, idet de drejningsamplituder, der skal benyttes til bestemmelsen af $\tilde{Z}_R(\omega)$, er så små, at det er det samme sæt rotorvindinger, som er i motorens magnetfelt.

For at sikre, at det netop var de rotorvindinger, som var i forbindelse med de to kommutatorsegmenter, hvorpå tilledningerne var fastgjort, der befandt sig i motorens magnetfelt, blev der påsat en blød spiralfjeder (fjederkonstant $K = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ Nm/rad}$) på motorens aksel, således at fjederens hvilestilling bestemmer rotorens optimale stilling. Denne fjeder, som sidder mekanisk parallelt med akslen, skal indkoopereres i modellen over forsøgsopstillingen, som derved får følgende udseende:



Sammenhængen mellem \tilde{Z}_m og \tilde{Z}_R (ligning 8) bliver derved:

$$(9) \quad \tilde{Z}_m = R + sL + \frac{H^2}{\tilde{Z}_R + sI + \mu + \frac{K}{s}}$$

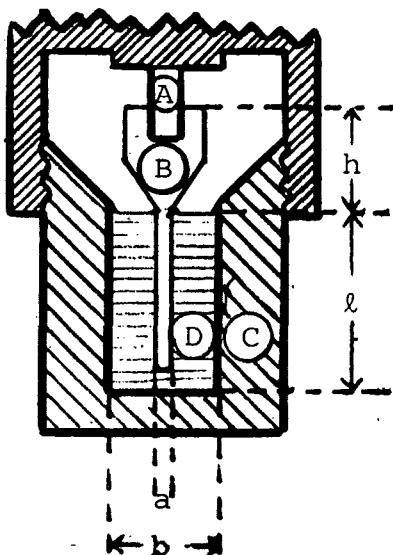
B. Lejegnidning.

Motoren var fra fabrikkens side forsynet med to nylonglidelejer (et i toppen og et i bunden af motoren), som desværre havde den egenskab, at de havde en ret stor "startgnidning", som skulle overvindes, før motoren kørte rundt efter stilstand. Denne ikke ubetydelige "startgnidning" udgjorde et ikke lineært element i forsøgsopstillingen, hvilket ikke kan indkoopereres i vores lineære model. Vi udskiftede derfor disse to glidelejer med kuglelejer, som

næsten udelukkende har en gnidning, der er proportional med omdrejningshastigheden (og derfor er lineær).

7.2.3. Stofbeholderen.

Ud over de direkte ændringer i motorens opbygning, konstruerede vi også et beholderarrangement, som blev pålitmet motoren. I beholderen placeres det stof, som målingerne skal udføres på. Nedenstående tegning viser de nærmere enkelheder i beholdersystemet.



- A: Motoraksel
- B: Forlænget aksel
- C: Stofbeholder
- D: Stof
- DIMENSIONER:
- a = 1.5 mm
- b = 7.0 mm
- l = 19.0 mm

FIG.6: Skematisk tegning af stofbeholderen og aksel.

Dimensioneringen er foretaget ud fra følgende kriterier:

- 1) Akselradius a skal afpasses således, at responsfunktionen \hat{Z}_R kan bestemmes ud fra kendskab til \hat{Z}_m .
- 2) Afstanden b-a skal være så lille, at man er i grænsen hvor $\hat{Z}_R = \alpha \hat{Z}$, med \hat{Z} som stoffets elementimpedans, og $\alpha = \frac{4\pi l a^2 b^2}{b^2 - a^2}$ (se side 74f)

Ad 1):

Som det ses af udtrykket for sammenhængen mellem \hat{Z}_m og \hat{Z}_R :

$$\hat{Z}_m = R + sL + \frac{H^2}{\hat{Z}_R + sI + \mu + S}$$

skal værdien af $|\hat{Z}_R|$, for at \hat{Z}_R skal kunne bestemmes ud fra \hat{Z}_m , være så stor, at den ikke "drukner" i usikkerheden på de andre størrelser i brøkens nævner. Der skal altså

gældে, at

$$(10) \quad |\tilde{Z}_R| > \Delta|sI + \mu + \frac{K}{s}|$$

Endvidere skal der gælde, at selve brøken ikke "drukner" i usikkerhederne på R og sL, altså:

$$|\frac{H^2}{\tilde{Z}_R + sI + \mu + \frac{K}{s}}| > \Delta|R + sL| \Leftrightarrow$$

$$(11) \quad \frac{H^2}{\Delta|R+sL|} > |\tilde{Z}_R + sI + \mu + \frac{K}{s}|$$

Der gælder:

$$\Delta|sI + \mu + \frac{K}{s}| \leq \Delta|sI| + \Delta\mu + \Delta|\frac{K}{s}| ,$$

$$\frac{H^2}{\Delta|R+sL|} \geq \frac{H^2}{\Delta R + \Delta|sL|} \quad \text{og}$$

$$|\tilde{Z}_R + sI + \mu + \frac{K}{s}| \leq |\tilde{Z}_R| + |sI| + \mu + |\frac{K}{s}| .$$

Derfor er følgende betingelse tilstrækkelig, for at (10) og (11) er opfyldt (s erstattes med $-i\omega$):

$$\Delta(\omega I) + \Delta\mu + \Delta(\frac{K}{\omega}) < |\hat{Z}_R| < \frac{H^2}{\Delta R + \Delta(\omega L)} = \omega I - \mu - \frac{K}{\omega}$$

Hvis man betragter de indgående størrelser (se side 76, og appendix II):

$$L = 6,5 \cdot 10^{-4} \text{ H}$$

$$R = 21 \Omega$$

$$H = 1,4 \cdot 10^{-2} \text{ Nm/A}$$

$$I = 1,5 \cdot 10^{-7} \text{ kg m}^2$$

$$K = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ Nm/rad}$$

$$\mu = 1,5 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Nm} \cdot \text{s}}{\text{rad}}$$

ses det, at hvis den relative usikkerhed på R ikke er meget lille, vil usikkerheden ΔR gøre højresiden meget lille. Endvidere vil det relative bidrag til \tilde{Z}_m fra \tilde{Z}_R være ubetydelig, hvis ikke R udkompenseres.

Vi brugte derfor en målemetode, der kunne udkompensere R

med en nøjagtighed på $0,01\Omega$ (se senere); $\Delta R = 0,01 \Omega$

Som estimerer på de andre usikkerheder brugtes følgende værdier (se appendix II):

$$\Delta L = 2 \cdot 10^{-4} H$$

$$\Delta \mu = 5 \cdot 10^{-8} Nm s/rad$$

$$\Delta K = 2 \cdot 10^{-5} Nm/rad$$

og da den relative usikkerhed på ω er mindre end 1% ser vi bort fra denne.

Som et skøn på forløbet af \hat{Z} anvendes en Maxwell-model, og idet der gælder at $\hat{Z}_R = \alpha \hat{Z}$ fås:

$$\Delta(\omega I) + \Delta \mu + \Delta\left(\frac{K}{\omega}\right) < \alpha \frac{\eta G}{\sqrt{G^2 + \eta^2 \omega^2}} < \frac{H^2}{\Delta R + \Delta(\omega L)} - \omega I - \mu - \frac{K}{\omega}$$

og dermed:

$$(12) \quad \frac{\sqrt{G^2 + \eta^2 \omega^2}}{\eta G} (\Delta(\omega I) + \Delta \mu + \Delta\left(\frac{K}{\omega}\right)) < \alpha < \frac{\sqrt{G^2 + \eta^2 \omega^2}}{\eta G} \left(\frac{H^2}{\Delta R + \Delta(\omega L)} - \omega I - \mu - \frac{K}{\omega} \right)$$

Vælges η og G i nærheden af $\eta = 10^4 N \cdot s/m^2$ og $G = 10^5 N/m^2$, som er tilnærmede værdier for stoffet ved stuetemperatur, kan uligheden løses grafisk:

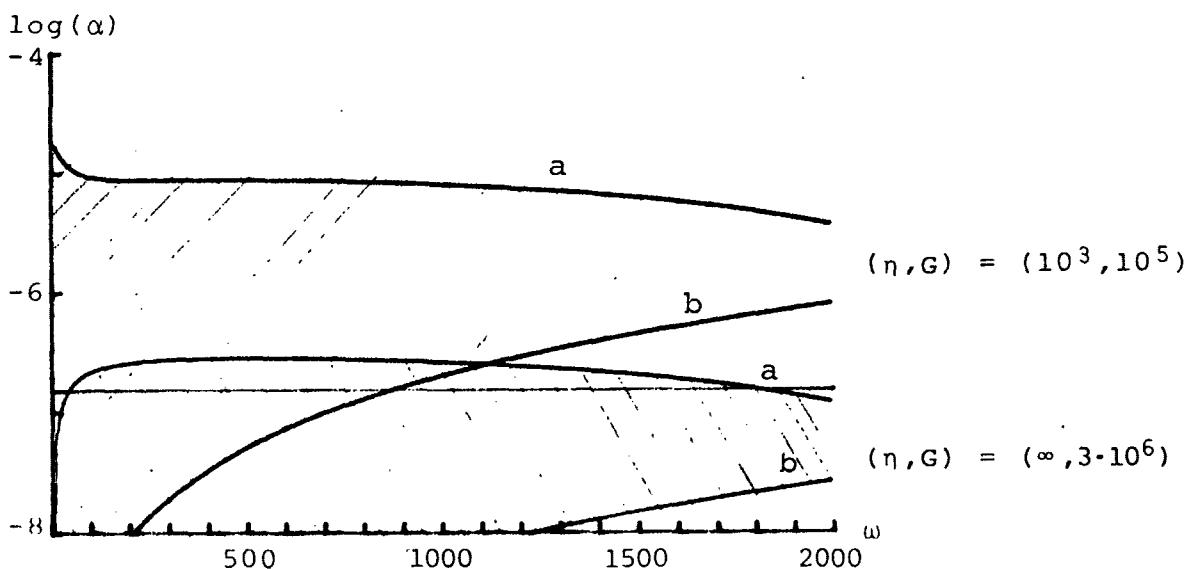


FIG.7: Højre- og venstre side (henhv. a og b) af (10) plottet som funktion af ω for forskellige η og G .

Af grafen ses, at for $\eta \in [10^3, \infty] [Ns/m^2]$ og $G \in [10^5, 3 \cdot 10^6] [N/m^2]$ er uligheden opfyldt med $\alpha = 1.5 \cdot 10^{-7} m^3$ og $\omega \in [10, 10^3] [rad/s]$

Under antagelse af, at der gælder (se ligning 7)

$$\alpha = \frac{4\pi l a^2 b^2}{b^2 - a^2}$$

vil tilnærmelsen

$$\alpha \approx 4\pi l a^2$$

gælde inden for 1%, hvis blot $a < 0,1 b$.

Idet l er valgt til ca. 2 cm for at vi kan se bort fra randeffekterne vil $\alpha = 1.5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3$ betyde at $a = 0.77 \text{ mm}$.

Det konkrete valg af akselradius blev: $a = 0,75 \text{ mm}$.

Ad 2):

Som tidligere angivet (se Append.I) kan de inertielle effekter negligeres, hvis

$$b - a < \sqrt{\left| \frac{\tilde{Z}}{\rho s} \right|}$$

hvorved der gælder

$$\tilde{Z}_R = \alpha \tilde{Z}$$

Antages \tilde{Z} igen at følge en Maxwell-model fås ($s = -i\omega$):

$$b - a < \sqrt{\frac{1}{\rho \omega} \cdot \frac{\eta G}{\sqrt{G^2 + \eta^2 \omega^2}}} = \Lambda$$

Grafisk ser højresiden således ud:

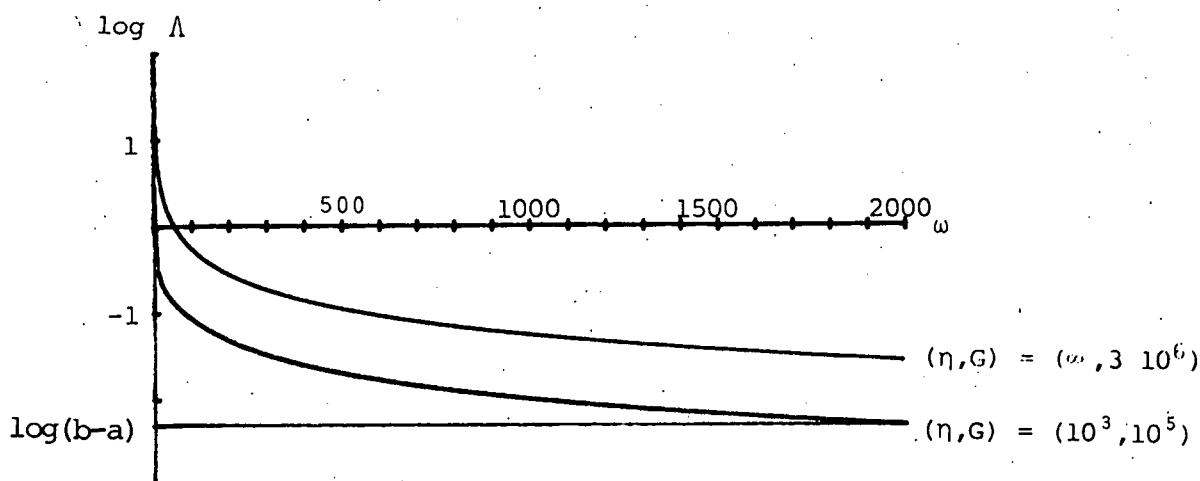


FIG.8: Λ plottet som funktion af ω for forskellige værdier af G og η .

Hvis ω , η og G ligger i intervallerne nævnt på side 81, ses det, idet $a = 0,75$ mm og $b = 3,50$ mm, at uligheden er opfyldt. Ved højere temperaturer (mindre η og G værdier) vil vi dog nærme os den kritiske grænse alvorligt. Alt i alt er dimensionerne blevet som angivet på fig. 6.

Den endelige værdi af α er derfor givet ved ($l = 1.9$ cm)

$$(13) \quad \alpha = \frac{4\pi l a^2 b^2}{b^2 - a^2} = 1.4 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3$$

7.2.4. Sammenhæng mellem motorimpedans og elementimpedans.

Motorimpedansen er, idet $s = -i\omega$, givet ved (lign. 9)

$$\hat{Z}_m = -i\omega L + R + \frac{H^2}{\hat{Z}_R - i\omega I + i\frac{K}{\omega} + \mu}$$

og dermed

$$\hat{Z}_R = \frac{H^2}{\hat{Z}_m - R + i\omega L} + i\omega L - i\frac{K}{\omega} - \mu$$

Heraf fås følgende udtryk for realdelen \hat{Z}'_R og imaginær-delen \hat{Z}''_R :

$$(14) \quad \hat{Z}'_R = \frac{H^2 (\hat{Z}'_m - R)}{(\hat{Z}'_m - R)^2 + (\hat{Z}''_m + \omega L)^2} - \mu$$

$$(15) \quad \hat{Z}''_R = \frac{-H^2 (\hat{Z}''_m + \omega L)}{(\hat{Z}'_m - R)^2 + (\hat{Z}''_m + \omega L)^2} + \omega I - \frac{K}{\omega}$$

Da $\hat{Z}_R = \alpha \hat{Z}$ kan vi ved at bestemme $(\hat{Z}'_m - R)$ og $(\hat{Z}''_m + \omega L)$ udregne elementimpedansen \hat{Z} .

7.3. Måleprocedure.

7.3.1. Signaler.

Som input til måleopstillingen (input til motoren) benyttes et signal fra en sinusgenerator, altså et signal af formen $\phi = \phi_0 \cos \omega t$, hvor både amplituden ϕ_0 og frekvensen ω

er reelle tal.

Dette signal tilhører ikke klassen af tilladte standard-signaler, som har formen e^{st} , hvor $s = \epsilon - i\omega$ er Laplace-frekvensen. Formelt kan cosinussignalet imidlertid fås som en sum af to standardsignaler, idet vi går til grænsen $\epsilon = 0$.

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \phi_0 \cos \omega t \\ &= \frac{1}{2} \phi_0 (e^{-i\omega t} + e^{i\omega t})\end{aligned}$$

Da responsoperatoren er lineær og reel (se side 49), og da funktionerne e^{st} er egenfunktioner til L vil outputsignalet $\gamma(t)$ have samme form, idet:

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= L(\phi(t)) \\ &= L\left(\frac{1}{2} \phi_0 (e^{-i\omega t} + e^{i\omega t})\right) \\ &= \frac{1}{2} \phi_0 (\lambda e^{-i\omega t} + \lambda^* e^{i\omega t}) \\ &= \gamma_0 \cos(\omega t + \gamma_1)\end{aligned}$$

hvor outputamplituden γ_0 er givet ved

$$\gamma_0 = \phi_0 \sqrt{\lambda'^2 + \lambda''^2}$$

og faseforskydningen γ_1 ved

$$\gamma_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda'}{\lambda''}\right)$$

Den komplekse responsfunktion $\hat{R}(\omega)$ er defineret som forholdet mellem response og stimulus, når stimulus er givet ved $e^{-i\omega t}$ (se side 35).

Som det ses af det foregående, er responset på den del af stimulus, som er givet ved $\phi_0 e^{-i\omega t}$ lig med $\phi_0 \lambda e^{-i\omega t}$.

Vi har derfor:

$$\hat{R}(\omega) = \frac{\phi_0 \lambda e^{-i\omega t}}{\phi_0 e^{-i\omega t}} = \lambda$$

og dermed

$$|\hat{R}(\omega)| = |\lambda| = \frac{\gamma_0}{\phi_0}$$

og

$$\text{Ar}(\hat{R}(\omega)) = \text{Ar}(\lambda) = \gamma, \quad \text{Ar} = \text{argument}.$$

Responsfunktionen $\hat{R}(\omega)$ kan altså beregnes ved at bestemme amplitudeforholdet mellem output og input samt faseforskydningen af output i forhold til input.

Som omtalt blev motoren påvirket med et cosinussignal, og ved at måle strømamplituden f_0 gennem motoren spændingsamplituden e_0 over motoren samt faseforskellen θ mellem strøm og spænding kan motorimpedansen \hat{Z}_m bestemmes:

$$|\hat{Z}_m| = \frac{e_0}{f_0} \quad \text{og} \quad Ar(\hat{Z}_m) = \theta$$

og dermed:

$$(16) \quad Z_m' = \frac{e_0}{f_0} \cos\theta \quad \text{og}$$

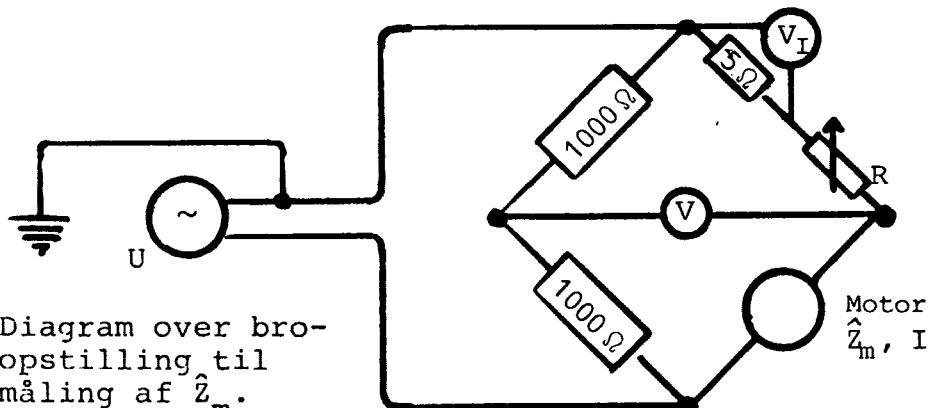
$$(17) \quad z_m' = \frac{e_0}{f_0} \sin \theta.$$

Efter at have bestemt \hat{z}_m kan elementimpedansen \hat{z} af det undersøgte stof beregnes ved hjælp af ligningerne (14), (15) og (7).

7.3.2. Broopstilling.

Som omtalt side 80 er det nødvendigt at have en nøjagtig bestemmelse af motorens ohmske modstand R .

Vi brugte derfor nedenstående broopstilling, som kan ud-kompensere R med en nøjagtighed på 0.01 Ω.



Der gælder med betegnelserne fra tegningen, idet $R_v = R + 5\Omega$

$$V = \frac{1}{2}I(\hat{Z}_m - R_v).$$

Med et AC voltmeter måltes amplituden V_o af brospændingen V og amplituden V_{I_o} af spændingen V_I over 5Ω ' modstanden, således at amplituden I_o af strømmen gennem motoren er bestemt ved

$$I_o = \frac{V_{I_o}}{5}$$

Endvidere blev faseforskellen θ mellem brospændingen V og spændingen V_I målt (altså faseforskydningen mellem spænding og strøm).

Derved har man (jvf ligning 16 og 17)

$$(18) \quad \hat{Z}_m' - R_v = \frac{\frac{1}{2}I_o V_o}{V_{I_o}} \cos\theta$$

$$(19) \quad \hat{Z}_m'' = \frac{\frac{1}{2}I_o V_o}{V_{I_o}} \sin\theta$$

Systemet bestående af motor og stofbeholder blev placeret i en kryostat, således at vi kunne styre temperaturen T. De temperaturer, vi kunne arbejde med, blev bestemt af det temperaturinterval, hvori motoren fungerede:
 $-30^\circ C < T < 75^\circ C$.

Måleproceduren var følgende:

Først termostaterdes systemet på den ønskede temperatur. Så indstillede modstanden R (som kunne reguleres med en nøjagtighed på 0.01 Ω) ved hjælp af broopstillingen, således at $R_v = R$, idet vi kunne fastholde motorens aksel med en låsemekanisme, forsyne måleopstillingen med et DC-signal samt indstille R_v , således at brospændingen V var lig 0. Derefter forsynedes måleopstillingen med et AC-signal fra sinusgeneratoren, og vi bestemte en række sammenhørende værdier af størrelserne V_o , V_{I_o} , θ og frekvensen ω ($1 \text{ Hz} < \omega < 1500 \text{ Hz}$) fra generatoren.

På denne måde bestemtes frekvensforløbet af størrelserne $(\hat{Z}_m' - R)$ og \hat{Z}_m'' - som indgår direkte i beregningerne - for en række temperaturer.

7.3.3. Fasemeter.

Faseforskellen mellem V_I og V , blev målt med et simpelt fasemeter, hvis væsentligste ingredienser var en logisk "exklusiv eller" kreds og et integrationsled.

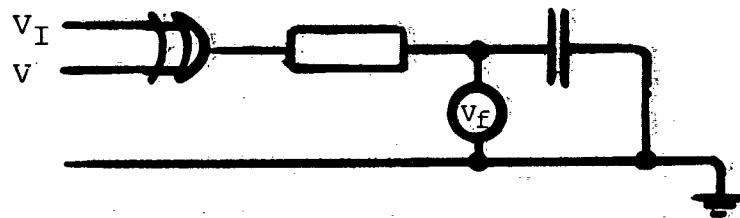


FIG.10: Diagram over fasemeteret. V og V_I er de to inputspændinger, og V_f outputspændingen.

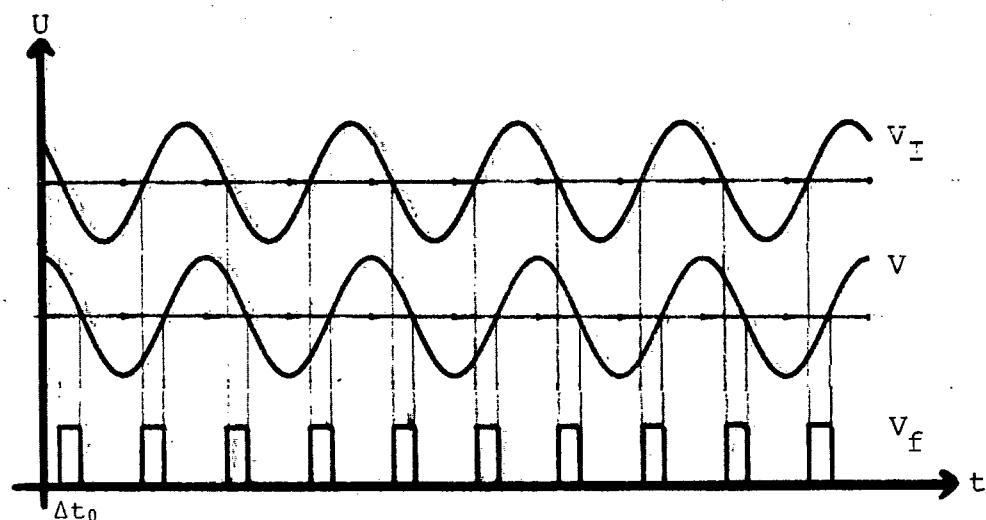


FIG.11: Illustration af fasemeterets virkemåde.

Signalerne V_I og V sendes ind i en logisk "exklusiv eller" kreds, hvis output vil være et firkant signal, hvor pulsbredden er angivet ved tidsforskellen Δt_0 mellem hvornår V passerer 0, og hvornår V_I passerer 0.

Dette signal sendes ind i integrationsleddet, hvorved spændingen V_f over kondensatoren vil indstille sig på middelværdien af signalet.

Der gælder for faseforskellen θ , at

$$(20) \quad \theta = \omega \Delta t_0$$

således, at spændingen V_f er proportional med θ . I den kon-

krete opstilling gjaldt der, at $V_f = 0 \text{ V}$ for $\theta = 0$ og $V_f = 15 \text{ V}$ for $\theta = \pi$.

Det skal bemærkes, at dette fasemeter ikke kan skelne om V er "før" eller "efter" V_I (om faseforskellen θ er positiv eller negativ), men dels kan fortegnsforløbet forudsiges ud fra ligning (9), og dels kunne vi på et osciloskop direkte iagttage både V og V_I .

7.3.4. Automatik.

Som det er fremgået, skulle spændingerne V_o , V_I og V_f bestemmes som funktion af frekvensen ω . Vi lavede derfor en opstilling, som automatisk kunne scanne et frekvensinterval ($1 < \omega < 1500$) igennem, optage V_o , V_{I_o} og V_f med passende mellemrum og udpunche resultaterne på en hulstrimmel.

Dette kunne gøres, idet der blev brugt følgende apparatur:

- 1) 2 stk. Brüel og Kjær Electronic Voltmeter type 2425, som målte spændingerne i broopstillingen.
- 2) En Wawetek HF Sweep Generator model 144, der genererede sinussignalerne.
- 3) En Solartron Schlumberger Data Transfer Unit, der anvendtes som datascanner.
- 4) En styreenhed (eget fabrikat), som styrede frekvensen af sinusgeneratoren og bestemte, hvornår datascanneren skulle udpunche dataene.

Skematisk så systemet således ud:

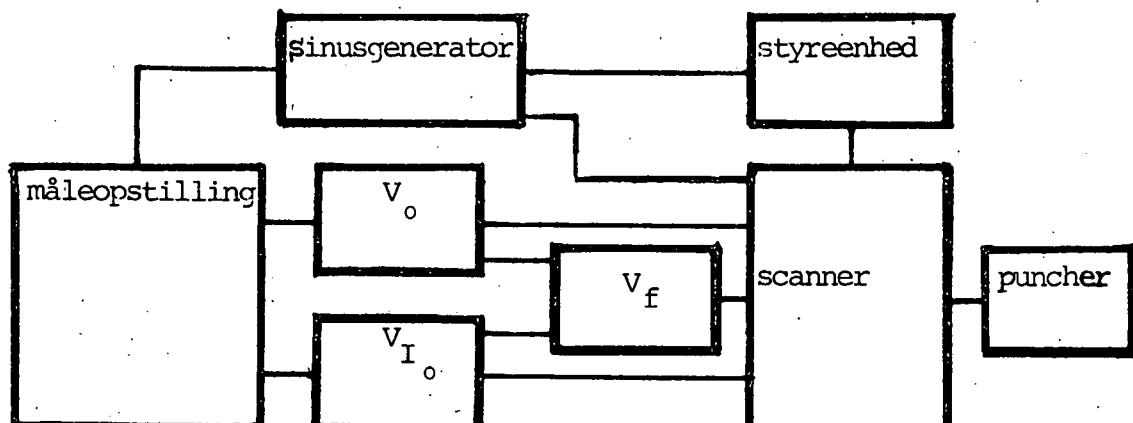


FIG.12: Diagram over den samlede opstilling

8. BESTEMMELSE AF RESPONSFUNKTIONER I SEJE VÆSKER TIL TIDER AF STØRRELSESORDEN 10^{-8} SEKUND.

Vi vil i dette afsnit vise, hvordan man ved hjælp af den såkaldte "Mössbauer-effekt" kan bestemme de viskoelastiske responsfunktioner for en dej væske til tider af størrelsesorden 10^{-8} sekund. Dette sker ved, at der opslemmes partikler indeholdende Mössbaueraktive kerner i væskeren.

Indledningsvis redegøres for, hvordan det er muligt ved hjælp af Mössbauer-effekten at bestemme den atomare breddefunktion $\Gamma(t)$ for de Mössbauer-aktive kerner i partiklerne. Dernæst vises det, hvordan denne atomare breddefunktion kan anvendes til bestemmelse af kernernes krybefunktion, og, hvordan denne videre kan anvendes til bestemmelse af partiklernes krybefunktion. På baggrund af dette vises det, at der er en direkte sammenhæng mellem partiklernes krybefunktion og elementkrybefunktionen for den dej væske.

Afslutningsvis redegøres mere detaljeret for "Mössbauer-eksperimentet".

8.1. Bestemmelse af den atomare breddefunktion $\Gamma(t)$ ved hjælp af Mössbauer-effekt-målinger.

Vi vil i dette afsnit vise, hvordan vi ved hjælp af Mössbauer-effekten kan bestemme den atomare breddefunktion $\Gamma(t)$, som er defineret ved

$$\Gamma \equiv \langle (x(t) - x(0))^2 \rangle$$

hvor $x(t)$ er atomets x-koordinat til tiden t .

Mössbauer-effekt-målingerne er baseret på såkaldt "rekylfri" emission og absorption af γ -stråling fra og i identiske atomkerner. De emitterende kerner er placeret i kilden, mens de absorberende kerner indgår i absorberen, som er det stof, der ønskes undersøgt.

Kilden forskydes med en hastighed v relativt til absorberen,

hvorved den emitterende stråling doppler-forskydes

$$\Delta\omega = \frac{v}{c}\omega$$

Herved opnås gennem den transmitterede - og i detektoren registrerede - γ -stråling oplysning om absorptionen af den emitterede stråling til bestemte kilde-hastigheder. Ved at variere v kan frekvensen af den emitterede stråling forskydes, og kerneresonans-absorptionsspektrets (absorptionstværsnittets) udseende bestemmes.

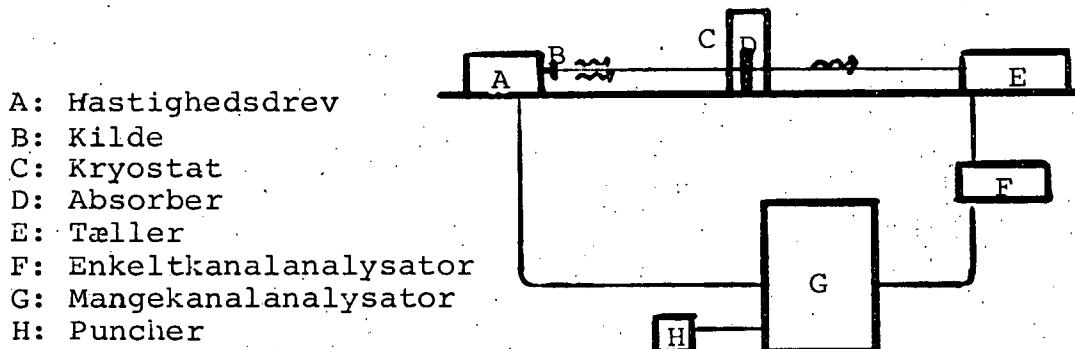


FIG.1.: Principskitse af eksperimentel opstilling til bestemmelse af Mössbauer-effekten.

Sammenhængen mellem breddefunktionen $\Gamma(t)$ og det transmitterede spektrum kan etableres, idet både emmissionsspektret $\delta(\omega)$ og absorptionstværsnittet $\sigma(\omega)$ kan udtrykkes ved van-Hoves selvkorrelationsfunktion $G_s(\vec{r}, t)$, som i den klassiske grænse - dvs. for

$$(1) \quad |t| \gg \frac{\hbar}{k_B T}$$

kan tolkes som sandsynlighedstætheden for atomets position \vec{r} til tiden t , når den til tiden $t=0$ befandt sig $\vec{r} = \vec{0}$ (van Hove, 1954).

Antages stoffet at være isotrop, og antages $G_s(\vec{r}, t)$ at være

en normalfordelingstæthed vil denne være givet ved:

$$G_s(\vec{r}, t) = N_3(0, \Gamma(t)\bar{\mathbf{E}}),$$

hvor $N_3(0, \Gamma(t)\bar{\mathbf{E}})$ er den tredimensionale normalfordeling med middelværdi 0 og variansmatrix $\Gamma(t)\bar{\mathbf{E}}$.

Sandsynlighedstætheden $\delta(\omega)$ for emission med frekvensen ω er givet ved (Singwi & Sjölander, 1960):

$$(2) \quad \delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int \int \exp(-i((\omega - \omega_e)t - \vec{k}_e \cdot \vec{r})) e^{-|t|/\tau} G_s^e(\vec{r}, t) d\vec{r} dt,$$

hvor

$$\omega_e = \Delta E/h$$

hvor ΔE er overgangsenergien for Mössbauer-niveauet, \vec{k}_e er bølgetallet for den emiterede stråling, τ er middellevetiden af Mössbauer-niveauet og $G_s^e(\vec{r}, t)$ er van Hove-selvkorrelationsfunktionen for de emitterede kerner.

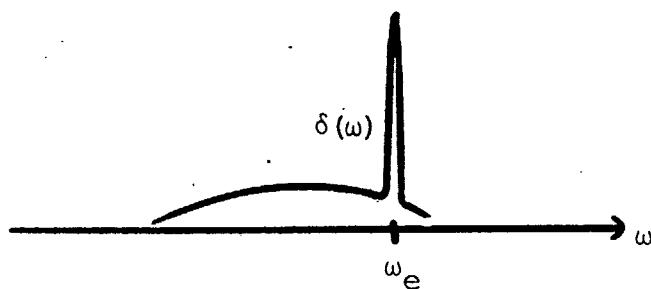


FIG.2.: $\delta(\omega)$ afbilledet som funktion af ω .

Absorptionstværsnittet $\sigma(\omega)$ er tilsvarende givet ved

$$(3) \quad \sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{2\tau} \int \int \exp(-i(\omega - \omega_a)t - \vec{k}_a \cdot \vec{r}) e^{+|t|/\tau} G_s^a(\vec{r}, t) d\vec{r} dt$$

hvor σ_0 er en kerneparameter, ω_a er overgangsfrekvensen for de absorberende Mössbauer-kerner, \vec{k}_a er bølgetalsvektoren for den absorberede stråling og $G_s^a(\vec{r}, t)$ er van Hove-selvkorrelationsfunktionen for de absorberende kerner.

Tætheden af emissionen $\delta(\omega)$ må, når de emitterende kerner bevæges, forskydes

$$\delta_v(\omega) = \delta(\omega - \Delta\omega),$$

men idet $\frac{\Delta\omega}{\omega_e} \approx 10^{-10}$ kan $\Delta\omega$ regnes for konstant

$\Delta\omega = \frac{v}{c}\omega_e$ - og dermed vil der til konstant v være tale om, at emissionsspektrum $\delta_v(\omega)$ er parallelforskudt i forhold til $\delta(\omega)$.

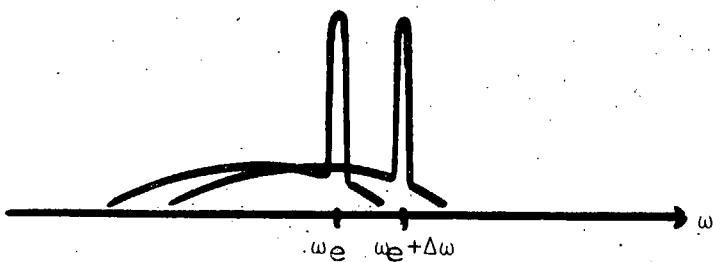


FIG.3: $\delta(\omega)$ og $\delta_v(\omega) = \delta(\omega + \Delta\omega)$ afbilledet som funktion af ω .

Ved forskellige hastigheder forskydes $\delta_v(\omega)$ altså i forhold til $\delta(\omega)$. Da $\sigma(\omega)$ - altså absorptionstværsnittet - har et spektrum, som for "toppens" vedkommende (svarende til resonant absorption af den fra kilden velkendte stråling) vil være sammenfaldende med den stillestående kildes emissionsspektrum, vil vi, når vi mäter den transmitterede stråling ved forskellige hastigheder af kilden få et udtryk for $\sigma(\omega)$.

Det såkaldte Mössbauer-spektrum er netop den transmitterede strålings afhængighed af kildehastigheden. Måles f.eks. på et stof, som er identisk med kilden, vil absorptionen være stor når $v = 0$ svarende til resonansabsorption, mens absorptionen vil falde skarpt ved blot en lille ændring i hastigheden.

Absorptionen $A(\Delta\omega)$ skal altså udregnes, og dette er bestemt af middelværdien af $\sigma(\omega)$, når ω har fordelingen $\delta_v(\omega)$:

$$\begin{aligned}
 (4) \quad A(\Delta\omega) &= \int_{\mathbf{v}} \sigma(\omega) \delta_v(\omega) d\omega \\
 &= \int \sigma(\omega) \delta(\omega - \Delta\omega) d\omega \\
 &= \frac{\sigma_0}{4\pi\tau} \int e^{-it\Delta\omega} e^{-2|t|/\tau} e^{it(\omega_a - \omega_e)} \int e^{irk} a_G^a(\vec{r}, t) dr \int e^{irk} e_G^e(\vec{r}, t) dr dt
 \end{aligned}$$

Herved ses, at en omvendt Fourier-transformation af $A(\Delta\omega)$ giver:

$$\begin{aligned}
 2\pi F^{-1}\{A(\Delta\omega), t\} &= \frac{\sigma_0}{2\pi} e^{-2|t|/\tau} e^{it(\omega_a - \omega_e)} \int e^{irk} a_G^a(\vec{r}, t) dr \int e^{irk} e_G^e(\vec{r}, t) dr
 \end{aligned}$$

og dermed

$$\begin{aligned}
 \int A(\Delta\omega) e^{it(\Delta\omega - (\omega_a - \omega_e))} d\Delta\omega &= \frac{\sigma_0}{2\tau} e^{-2|t|/\tau} \int e^{irk} a_G^a(\vec{r}, t) dr \int e^{irk} e_G^e(\vec{r}, t) dr
 \end{aligned}$$

Da vi ved, at \vec{r} har tætheden $G_s(\vec{r}, t)$, som er tre-dimensionel, kan vi indføre betegnelsen $g_s(x, t)$ for tætheden af $(-\vec{k}\vec{r})$, som er een-dimensionel. Indføres samtidig betegnelsen $F_A(t)$ for $\int A(\Delta\omega) e^{it(\Delta\omega - (\omega_a - \omega_e))} d\Delta\omega$ fås:

$$\begin{aligned}
 F_A(t) &= \frac{\sigma_0}{2\tau} e^{-2|t|/\tau} \int e^{-ix} g_s^a(x, t) dx \int e^{-ix} g_s^e(x, t) dx \\
 &= \frac{\sigma_0}{2\tau} e^{-2|t|/\tau} F\{g_s^a * g_s^e, 1\}
 \end{aligned}$$

hvor * betegner foldningen af funktionerne g_s^a og g_s^e .

Hvis $G_s(r, t)$ er en normalfordelingstæthed, nemlig $N_3(0, \Gamma(t)\vec{E})$, er $g_s(x, t)$ ligeledes en normalfordelings-tæthed, nemlig $N(0, \Gamma(t)|\vec{k}|^2)$.

Da $g_s^a * g_s^e$ er tætheden for $(-\vec{k}_a \cdot \vec{r}_a) + (-\vec{k}_e \cdot \vec{r}_e)$, idet \vec{r}_a og \vec{r}_e er stokastisk uafhængige, ses det, at $g_s^a * g_s^e$ er normalfordelingstætheden $N(0, \Gamma_a(t)|\vec{k}_a|^2 + \Gamma_e(t)|\vec{k}_e|^2)$. Idet man i summen $\Gamma_a|\vec{k}_a|^2 + \Gamma_e|\vec{k}_e|^2$ kan sætte $|\vec{k}_a|^2 = |\vec{k}_e|^2 = \kappa^2$ fås:

$$\begin{aligned} F_A(t) &= \frac{\sigma_0}{2\tau} e^{-2|t|/\tau} F_x \{ g_s^a * g_s^e, 1 \} \\ &= \frac{\sigma_0}{2\tau} e^{-2|t|/\tau} \exp(-\frac{1}{2}k^2(\Gamma_a(t) + \Gamma_e(t))) \end{aligned}$$

Heraf fås:

$$(5) -\ln F_A(t) = -\ln \frac{\sigma_0}{2\tau} + 2|t|/\tau + \frac{k^2}{2}(\Gamma_a(t) + \Gamma_e(t))$$

Som det ses af udtrykket kan $\Gamma_a(t)$ ikke bestemmes absolut ud fra kendskabet til $A(\Delta\omega)$. Imidlertid kan man bestemme variationen af $\Gamma_a(t)$ med temperaturen i forhold til $\Gamma_a^R(t)$ for en bestemt referencetemperatur T_R . Dette gøres ved, at man lader kildens temperatur være fastholdt og varierer absorberens temperatur, idet den eneste temperaturafhængige størrelse på denne måde vil være $\Gamma_a(t)$, mens de temperaturuafhængige størrelser blot indgår som en additiv størrelse, som udgår ved sammenligninger.¹

¹ Vi har i udledningen af $F_A(t)$ stiltiende forudsat, at absorbtionen består af en enkelt linie (at ω_a er den samme for alle kerner). Dette er dog sjældent tilfældet, hvorfor vi i Appendix IV har vist, at betydningen af at ω_a varierer blot er, at der kommer en ekstra additiv konstant, som forsvinder ved sammenligninger.

8.2. Sammenhæng mellem atomare responsefunktioner og elementresponsefunktionerne.

Vi vil i dette afsnit vise, hvordan man udfra en kontinuumsmodel kan bestemme en sammenhæng imellem atomare responsefunktioner og elementresponsefunktioner.

Proceduren i denne udledning består i at betragte en i principippet uendelig stor klods af stoffet, lade et stofområde med radius a blive påvirket med en kraftstilmus og derefter finde hastighedsresponset på dette kraftinput. Hvis a har atomare dimensioner kaldes responsfunktionen atomar.

Til denne bestemmelse af responsefunktionerne har vi til rådighed dels bevægelsesligningen og dels de konstitutive relationer, som det fremgår af kapitel 4.

8.2.1. Bevægelsesligningen.

Bevægelsesligningen (4.2.) har som nævnt formen

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \vec{f} + \text{div} \vec{\sigma}$$

Vi vil imidlertid forudsætte, at bevægelsesligningen er lineær i \vec{v} , altså at

$$\rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = 0,$$

hvorved ligningen får udseendet:

$$(6) \quad \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{f} + \text{div} \vec{\sigma}.$$

8.2.2. Konstitutive relationer.

De konstitutive relationer, som angiver sammenhængen imellem deformations- og spændingstensorerne (se s.42f.), antages ligeledes for lineære.

Elementerne i deformationstensoren $\bar{\gamma}$ kan skrives som

$$\gamma_{ik} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \quad i, k \in \{1, 2, 3\}$$

hvor \vec{u} er forskydningsvektoren.

Den tidsaflede af deformationstensoren er igen en tensor, hvis elementer $\dot{\gamma}_{ik}$ er angivet ved

$$\dot{\gamma}_{ik} = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)$$

hvor \vec{v} er hastighedsvektoren.

Både $\bar{\gamma}$ og $\bar{\dot{\gamma}}$ og spændningstensoren $\bar{\sigma}$ er symmetriske tredimensionale andenrangtensorer. Mængden af sådanne tensorer udgør et seksdimensionalt vektorrum, som kan opspaltes i to invariante underrum - et eendimensionalt D bestående af diagonaltensorer $\bar{\alpha}_D$ med ens diagonalelementer (dvs. $\alpha_{ik} = \alpha$ for $i=k$ og $\alpha_{ik} = 0$ for $i \neq k$), og et femdimensionalt S bestående af sporløse tensorer $\bar{\alpha}_S$ (dvs. tensorer $\bar{\alpha}$, hvor $sp(\bar{\alpha}) = 0$).

Spaltes en symmetrisk tredimensional andenrangtensor $\bar{\alpha}$ op efter disse underrums retninger, fås komponenterne

$$\bar{\alpha}_D = \frac{1}{3} sp(\bar{\alpha}) \bar{E}$$

og

$$\bar{\alpha}_S = \bar{\alpha} - \frac{1}{3} sp(\bar{\alpha}) \bar{E}.$$

I en konstitutiv relation mellem $\bar{\sigma}$ og $\bar{\dot{\gamma}}$ vil komponenten $\bar{\sigma}_D$ kunne udtrykkes alene ved $\bar{\dot{\gamma}}_D$ og $\bar{\sigma}_S$ ved $\bar{\dot{\gamma}}_S$, hvis stoffet er isotrop.

Da der ikke er forskel på rummets retninger, kan den mest generelle konstitutive relation mellem $\bar{\sigma}$ og $\bar{\dot{\gamma}}$ udtrykkes ved hjælp af to skalare tidsafhængige stivhedsfunktioner (sml. s.48), hvorved fås

$$(7) \quad \sigma_{ik} = \int_{-\infty}^t G_s(t-\tau) \gamma_{Sik}(\tau) + G_b(t-\tau) \gamma_{Dik}(\tau) d\tau$$

hvor G_s og G_b er henholdsvis shear- og bulkstivheden.

8.2.3. Stimulus.

For at bestemme de atomare responsefunktioner påvirkes et stofområde omkring stedet $\vec{r}=(0,0,0)$ med et kraftfelt $\vec{f}(\vec{r},t)$, som antages at være en δ -funktion i tiden og kun virkende i x-retningen, dvs.

$$\vec{f}(\vec{r},t) = (g(\vec{r})\delta(t), 0, 0).$$

Antages $g(\vec{r})$ at være bestemt af en normalfordelings-tæthed $N(0, a^2 \bar{E})$ således:

$$g(\vec{r}) = p_0 (2\pi a^2)^{-\frac{3}{2}} e^{-r^2/2a^2}$$

betyder dette, at der til $t=0$ overføres impulsen p_0 til et stofområde med radius af størrelsesorden a .

8.2.4. Response.

Under antagelse af at stoffet var i hvile til $t<0$, vil den 'atomare stofpartikel', som til $t=0$ befandt sig i $(0,0,0)$, til tiden t befinde sig i stedet \vec{r}_a givet ved

$$\vec{r}_a = (x(t), 0, 0).$$

Man kan derfor ved anvendelse af den lineære response-teori angive forskydningen $x(t)$ af stoffet, som til $t=0$ befandt sig i $r_a=(0,0,0)$ ved hjælp af den atomare admittansfunktion Y_a og den til stofområdet overførte impuls p (se s. 30)

$$x(t) = \int_{-\infty}^t Y_a(t-\tau) p(\tau) d\tau$$

og idet $p(t)=p_0 \delta(t)$ fås

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}_a(t)\mathbf{p}_0.$$

Den atomare lethedsfunktion $F_a(t)$ kan bestemmes udfra $\mathbf{y}_a(t)$, som det er vist s. 39.

$$\begin{aligned} F_a(t) &= \frac{\partial \mathbf{y}_a(t)}{\partial t} \\ &= \frac{1}{p_0} \frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial t} \\ &= \frac{1}{p_0} (\vec{v}_a(t))_x \end{aligned}$$

hvor $(\vec{v}_a(t))_x$ er x-komposanten af hastigheden af det stof, som til $t=0$ befandt sig i $\vec{r}=(0,0,0)$.

Benævnes stoffets hastighedsfelt $\vec{v}(\vec{r},t)$ vil hastigheden $\vec{v}_a(t)$ være givet ved

$$\begin{aligned} \vec{v}_a(t) &= \vec{v}((\mathbf{x}(t), 0, 0), t) \\ &= (v_x(\mathbf{x}(t), t), 0, 0) \end{aligned}$$

Rækkeudvikles x-komponenten omkring $(0, t)$ fås:

$$v_x(\mathbf{x}(t), t) = v_x(0, t) + \frac{\partial v_x(0, t)}{\partial t} x(t) + \dots$$

men da $\vec{v}(\vec{r}, t)$ skal være løsning til den lineariserede bevægelsesligning (6) fås

$$v_x(\mathbf{x}(t), t) = v_x(0, t).$$

Udfra disse overvejelser kan den atomare lethedsfunktion $F_a(t)$ skrives:

$$F_a(t) = \frac{1}{p_0} v_x(0, t)$$

At bestemme $F_a(t)$ - og dermed i princippet samtlige atomare responsefunktioner - bliver derfor et spørgsmål om at bestemme $v_x(0, t)$.

Bestemmelsen af $v_x(0, t)$ sker nu udfra bevægelsesligningen (6) og den konstitutive ligning (7). Dette sker ved anvendelse af de rumligt og tidsligt Fouriertransformerede, som fremgår af nedenstående skema (der skal summeres over dobbelt index):

A	$\vec{A}(\vec{r}, t)$	$\tilde{A}(\vec{k}, s)$
f	$(g(\vec{r})\delta(t), 0, 0)$	$\tilde{g}(\vec{k}, 0, 0)$
g	$p_0 (2\pi a^2)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{r^2}{2a^2}}$	$p_0 (2\pi)^{-3} e^{-\frac{1}{2}a^2 k^2}$
$\dot{\gamma}_{D\alpha\beta}$	$\frac{2\partial v_j}{3\partial x_j} \delta_{\alpha\beta}$	$\frac{2}{3} i \kappa_j \tilde{v}_j \delta_{\alpha\beta}$
$\dot{\gamma}_{S\alpha\beta}$	$\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \delta_{\alpha\beta}$	$i(\kappa_\beta \tilde{v}_\alpha + \kappa_\alpha \tilde{v}_\beta - \frac{2}{3} \kappa_j \tilde{v}_j \delta_{\alpha\beta})$
$\sigma_{\alpha\beta}$	$\int_{-\infty}^t G_s(t-\tau) \dot{\gamma}_{S\alpha\beta}(\tau) + G_b(t-\tau) \dot{\gamma}_{D\alpha\beta}(\tau) d\tau$	$\tilde{Z}_s \tilde{\gamma}_{S\alpha\beta} + \tilde{Z}_b \tilde{\gamma}_{D\alpha\beta}$

For bevægelsesligningen

$$\rho \frac{\partial v_\alpha}{\partial t} = f_\alpha + \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}$$

fås

$$\rho s \tilde{v}_\alpha = i \kappa_\beta \tilde{\sigma}_{\alpha\beta} + \tilde{f}_\alpha$$

Udfra skemaet kan x-komposanten af $\tilde{v}(\vec{k}, s)$ bestemmes:

$$\tilde{v}_x(\vec{k}, s) = \frac{\tilde{g}(\vec{k})}{\kappa^2 \tilde{Z}_s(s) + \rho s} \left(1 - \frac{\kappa_x^2 (\frac{1}{3} \tilde{Z}_s + \frac{2}{3} \tilde{Z}_b)}{\kappa^2 (\frac{4}{3} \tilde{Z}_s + \frac{2}{3} \tilde{Z}_b) + \rho s} \right)$$

Idet vi vil bestemme $v_x(0, t)$, skal vi tilbagetransformere $\tilde{v}_x(\vec{k}, s)$ til $v_x(\vec{r}, t)$ og sætte $\vec{r}=\vec{0}$. Herved fås:

$$F_a(t) = \frac{1}{p_0} v_x(0, t) =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^4 i} \int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} e^{st} ds \int d^3 k \frac{e^{-\frac{1}{2}a^2 k^2}}{\kappa^2 \tilde{Z}_s + \rho s} \left(1 - \frac{\kappa_x^2 (\frac{1}{3} \tilde{Z}_s + \frac{2}{3} \tilde{Z}_b)}{\kappa^2 (\frac{4}{3} \tilde{Z}_s + \frac{2}{3} \tilde{Z}_b) + \rho s} \right)$$

Idet $Y_a(s) = L^{-1}[F_a(t), s]$ (se s.35) fås

$$Y_a(s) =$$

$$\frac{2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \kappa^2 \frac{e^{-\frac{1}{2}\kappa^2 a^2}}{\kappa^2 \tilde{Z}_s + ps} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\kappa^2 (\frac{1}{6}\tilde{Z}_s + \frac{2}{3}\tilde{Z}_b)}{\kappa^2 (\frac{1}{3}\tilde{Z}_s + \frac{2}{3}\tilde{Z}_b) + ps} \right) d\kappa$$

Hvis stoffet er usammentrykkeligt, dvs. $\tilde{Z}_b = \infty$ er andet led i parantesen lig $1/3$. Følgende udtryk kan derfor bruges som en god approksimation til Y_a :

$$(8) \quad Y_a(s) = \frac{1}{3\pi^2} \int_0^\infty \frac{\kappa^2 e^{-\frac{1}{2}\kappa^2 a^2}}{\kappa^2 \tilde{Z}_s + ps} d\kappa$$

Indføres to dimensionsløse variable

$$u = \kappa \sqrt{\frac{\tilde{Z}_s}{ps}}$$

$$(9) \quad \xi = \frac{pa^2 s}{2\tilde{Z}_s}$$

fås

$$(10) \quad Y_a(s) = \frac{\sqrt{2\xi}}{3\pi^2 a \tilde{Z}_s} \int_0^\infty \frac{u^2 e^{-\xi u^2}}{1+u^2} du \\ = \frac{\sqrt{2\xi}}{3\pi^2 a \tilde{Z}_s} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\pi/\xi} - \frac{1}{2} \pi e^\xi \operatorname{erfc}\sqrt{\xi} \right)$$

(se f.eks. Abramowitz & Stegun, 1965).

I højfrekvensgrænsen $|\xi| \gg 1$ gælder

$$\int_0^\infty \frac{u^2 e^{-\xi u^2}}{1+u^2} du \approx \xi^{-3/2} \int_0^\infty z^2 e^{-z^2} dz = \xi^{-3/2} \frac{1}{4}$$

og dermed

$$(11) \quad Y_a(s) = \frac{4}{3pa^3 (2\pi)^{3/2} s}$$

I højfrekvensgrænsen, er responsefunktionen tilsvarende den, som hører til en fri partikel idet "partikelmassen" M_a er givet ved massen af den sky af stoffet, som sættes i bevægelse af kraftinputtet

$$M_a = \frac{3\rho a^3 (2\pi)^{3/2}}{4}$$

hvilket er et nødvendigt resultat, hvis modellen skal kunne bruges.

I lavfrekvensgrænsen $|\xi| \ll 1$ gælder tilnærmelsen

$$Y_a(s) = \frac{\sqrt{2\xi}}{3\pi^2 a \tilde{Z}_s} \quad \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\xi}}$$

Da $\tilde{Z}_a(s) = \frac{1}{\tilde{Y}_a(s)}$ fås

$$(12) \quad \tilde{Z}_a(s) = \frac{3}{2} (2\pi)^{3/2} a \tilde{Z}_s(s)$$

Dvs. at den atomare impedans $\tilde{Z}_a(s)$ er givet ved elementimpedansen pånær en konstant faktor, som afhænger af "atomradius" a .

8.3. Partikelresponsefunktion og elementresponsefunktion.

Som sagt påstår vi, at vi, ved at opslemme Mössbaueraktive SnO_2 partikler i det stof der skal undersøges, kan bestemme stoffets elementresponsefunktion.

Som vi i kap. 8.1. omtalte, kan vi ved hjælp af Mössbauereffekten bestemme breddefunktionen, $\Gamma(t)$, for Mössbauerkerne i SnO_2 partiklerne.

Vi vil i dette afsnit dels angive, hvorledes man ud fra denne breddefunktion kan bestemme kernernes krybefunktion $J_k(t)$, dels vise hvordan man ud fra kendskabet til denne kan bestemme elementkrybefunktion for stoffet.

Det sidstnævnte gøres i to skridt, idet vi først bestemmer et udtryk for kernernes krybefunktion i forhold til selve SnO_2 partiklerne, og dernæst angiver et udtryk for partiklernes krybefunktion i forhold til det omgivende stof. Endelig argumenteres for det rimelige i at antage, at den samlede krybefunktion kan findes som summen af disse to krybefunktioner.

8.3.1. Kernernes krybefunktion.

P.V.Christiansen (1979) har ved en generalisering af det såkaldte fluktuations-dissipations teorem vist, at der i den klassiske grænse består følgende simple sammenhæng mellem kernens breddefunktion $\Gamma(t)$ og kernens krybefunktion $J_k(t)$:

$$(13) \quad \Gamma(t) = 2k_B T J_k(t),$$

hvor k_B er Boltzmanns konstant og T er den absolutte temperatur.

Vi vil antage, at kernernes krybefunktion $J_k(t)$ kan beskrives ved den atomare krybefunktion $J_a(t)$, der er beskrevet i det foregående afsnit.

Idet SnO_2 er et krytalinsk stof, vil elementimpedansen $\tilde{Z}(s)$ for SnO_2 være givet ved en "Hookeisk" model (se side 43f.):

$$\tilde{Z}(s) = \frac{G}{s},$$

hvor G er stivheden af SnO_2 ($\approx 10^{10} \text{ N/m}^2$).

Idet

$$\xi = \frac{\rho a^2 s^2}{2G} = \frac{1}{2}(s\tau_f)^2,$$

hvor $\tau_f = a\sqrt{\frac{\rho}{G}}$ er "fonontiden", gælder der, hvis $|s| \ll \frac{1}{\tau_f}$ (se lign. 8)

$$\tilde{Z}_a(s) = \frac{3}{2}(2\pi)^{\frac{3}{2}} a \frac{G}{s}$$

og dermed

$$J_a(t) = \frac{2}{3(2\pi)^{\frac{3}{2}} Ga}, \quad t \gg \tau_f.$$

Modellen angiver således, at $J_a(t)$ går mod en konstant værdi for $t \gg \tau_f$. Den såkaldte Debye-Waller faktor $W = \frac{1}{4}\kappa^2 \Gamma(\infty)$ bliver:

$$(14) \quad W = \frac{1}{4}\kappa^2 \Gamma(\infty) = \frac{\kappa^2 k_B T}{3(2\pi)^{\frac{3}{2}} Ga}.$$

¹ $J_a(t)$ kan i modellen faktisk findes "eksakt" til:

$$J_a(t) = \frac{2}{3(2\pi)^{\frac{3}{2}} Ga} \left(1 - e^{-\frac{1}{2}(\frac{t}{\tau_f})^2} \right).$$

Dette kontinuums udtryk adskiller sig fra det, man traditionelt finder under en anvendelse af en Debye-model, idet overgangen til den konstante værdisker uden indsvingninger, i modsætning til hvad man finder i Debye-modellen for $N(t)$.

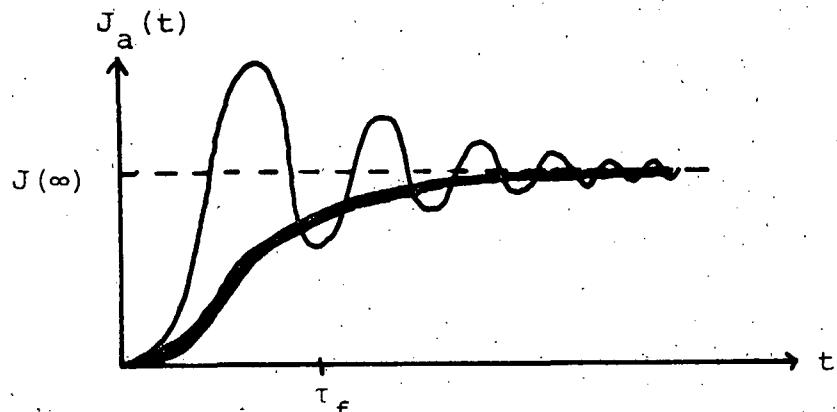


FIG.4: Kernekrybefunktionen til korte tider for en Debye-model (—) og en kontinuumsmodel (---).

8.3.2. Partiklernes krybefunktion.

Vi har nu diskuteret den atomare krybefunktion $J_a(t)$ for Mössbauerkerne i tinoxid, under antagelse af, at tinoxiden var i hvile og i principippet havde uendelig udstrækning. Konkret er tinoxiden opslømmet som partikler af størrelsesordenen 1000 Å i det stof, der skal undersøges. Vi vil derfor omtale, hvordan dynamikken af disse partikler kan beskrives ved hjælp af partiklernes krybefunktion $J_p(t)$, og hvorledes denne krybefunktion hænger sammen med stoffets elementkrybefunktion $J(t)$.

Vi antager, at sammenhængen mellem $J_p(t)$ og $J(t)$ er givet ved en generalisation af "Stokes lov":

$$(15) \quad J_p(t) = \frac{1}{6\pi r} J(t) ,$$

hvor r er partikelradius.

At dette udtryk er rimeligt, kan ses af, at hvis man i regningerne i kap. 8.1. indsætter partikelradius r for a , ville man i langtidsgrænsen i stedet få $6\pi r^3 / 3(2\pi)^2$, altså et tal der er 25% større.

Da udregningerne i kap. 8.1. er baseret på et "udtværet" kraftinput og ikke et kraftinput på en veldefineret partikel, antager vi, at den generaliserede "Stokes lov" er en bedre approximation.

Man kan imidlertid ud af regningerne se, at man ikke kan bruge den generalliserede Stokes lov i alle tidsinterval-
ler, men kun til tider, der er så store, at de inertielle
effekter kan negligeres, svarende til at man er i lavfre-
kvensgrænsen givet ved $|\xi| \ll 1$ (jvf side 101)

Vi har nu delt beskrivelsen af Mössbauerkernernes dyna-
mik op i to dele. Dels en individuel bevægelse af kernen
i forhold til hele SnO_2 partiklen, og dels en bevægelse
af SnO_2 partiklen i forhold til det omliggende stof.

Idet vi regner med at tinoxidpartiklerne er "uendelig"
stive set i forhold til det omgivne stof, kan kernernes
bevægelse i forhold til partiklens massemidtpunkt
antages at være statistisk uafhængige af bevægelsen af mas-
semidtpunktet, hvorved den totale krybefunktion for
kernerne vil være en sum af kernernes krybefunktion J_A i
forhold til massemidtpunktet og krybefunktionen J_p for mas-
semidtpunktet (jvf ligning 14 og 15)

$$(16) \quad J_k(t) = J_a(t) + J_p(t) = \frac{4W}{2k_B T_k^2} + \frac{1}{6\pi r} J(t)$$

hvor W er Debye-Waller faktoren for tinoxid, κ^2 er bølgetals-
vektoren for Mössbaerstrålingen og $J(t)$ er elementkrybefunk-
tionen for det undersøgte stof.

Vi kan derfor ved hjælp af sammenhængen mellem krybefunk-
tion og breddefunktion (lign. 9) omskrive lign. 5 til:

$$-\ln F_A(t) = -\ln \frac{\sigma_0}{2\tau} + \frac{2|t|}{\tau} + \frac{\kappa^2}{2} \Gamma_e(t) + 2W + \frac{\kappa^2 k_B T}{6\pi r} J(t)$$

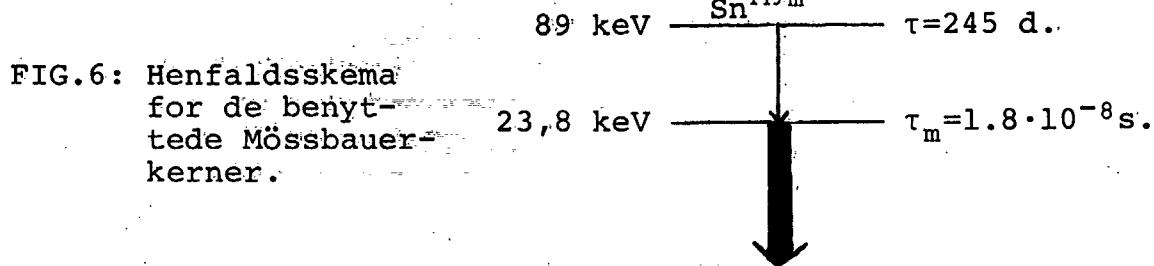
Da Debye-Waller-faktoren for tinoxid i temperaturin-
tervallet mellem 100°K og 300°K varierer med ca. 10%,
se for eksempel Goldanskii, 1968. side 329,

må der i bestemmelsen af $J(t)$ i forhold til $J_R(t)$, som
er krybefunktionen til en given referencetemperatur T_R ,
kompenseres for dette.

8.4. Beskrivelse af Mössbauer-eksperimentet.

8.4.1. Opstillingen.

Den benyttede kilde var en Sn^{119m} , hvis henfaldsskema fremgår af fig.6.



Sn^{119m} -kerner udsender 55,2 keV og 23,8 keV γ -stråling, mens den sekundære stråling hovedsagelig består af en 21 keV K_{α} -linie, som selv om den ligger ubehageligt tæt på Mössbauer-linien (23,8 keV) let fjernes med et paladium-filter.

Kilden placeres i et hastighedsdrev, der giver kilden hastigheder i positiv og negativ retning i forhold til absorberen. Hastighedsamplituden v_0 skal afpasses efter kilden, således at v_0 er af størrelsesordenen

$$v_0 \approx \frac{c}{\tau_m \omega_e} \approx \frac{c \hbar}{\tau_m E} \approx 0.4 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}$$

hvor c er lyshastigheden, ω_e overgangsfrekvensen svarende til overgangsenergien og E står for Mössbauer-niveauet i emitterkernerne.

Absorberen består af det polymere stof, vi har gjort til genstand for undersøgelsen, idet der er opslemmet tinoxid (SnO_2)-partikler med en radius på ca. 10^3 Å i stoffet, hvor ved vi får oplysning om Sn^{119} -kernerne i det opslemmede SnO_2 .

Absorberen befinner sig i en kryostat, således at absorberens temperatur kan reguleres i intervallet fra ca. 77° K til ca. 400° K .

Bag absorberen er anbragt en detektor, der registrerer de γ - kvanter, der transmitteres gennem absorberen. Et registreret γ - kvant omdannes til en elektrisk puls, som sendes videre til analyseudstyret.

8.4.2. Analyseudstyret

Dette er i principippet (se fig.1,s.91) en enkeltkanal- og en mangekanalanalysator (MK). Enkeltkanalanalysatoren sorterer de pulser fra, som ikke stammer fra γ - kvanter, hvis energi ligger omkring Mössbauer-niveauet. Mangekanalanalysatoren lagrer de ankomne pulser i 256 additive hukommelser (kanaler) på en sådan måde, at en kanal lagrer pulser, som stammer fra kilden, når denne har en bestemt hastighed v .

Mangekanalanalysatoren er nemlig koblet til hastighedsdrevet på en sådan måde, at en kanal kun er "åben" (i 100 μ sec.), når hastighedsdrevet har en bestemt hastighed v . I den aktuelle opstilling er hastigheden v en lineær funktion af kanalnummeret J , hvorved også $\Delta\omega$ bliver en lineær funktion af J .

Transmissionsspektret $N(\Delta\omega)$ (antallet af tællinger i kanalnummeret svarende til $\Delta\omega = \frac{v}{c} \omega_e$) kan således direkte optages på mangekanalanalysatoren.

Transmissionskoefficienten $T(\Delta\omega)$ gennem absorber er givet ved

$$T(\Delta\omega) \equiv \exp(-a \cdot A(\Delta\omega))$$

hvor det atomare tværsnit $A(\Delta\omega)$ er angivet på side 94 og a er absorbertykkelsen angivet i antal Sn^{119} atomer pr cm^2 .

For tynde absorbere, hvor $a \cdot A(\Delta\omega)$ er lille gælder rækkeudviklingen:

$$e^{-a \cdot A(\Delta\omega)} \approx 1 - a \cdot A(\Delta\omega)$$

Kaldes antallet af Mössbauer-kvanter fra kilden, som er udsendt i retning af absorberen for N_m og antallet af kvanter, som stammer fra baggrundsstrålingen uden at være filtreret fra før N_x gælder der

$$N(\Delta\omega) = N_m \cdot T(\Delta\omega) + N_x \approx N_m (1 - a \cdot A(\Delta\omega)) + N_x$$

heraf fås

$$A(\Delta\omega) \approx \frac{N_x + N_m - N(\Delta\omega)}{a \cdot N_m}$$

Fig.7 viser et typisk forløb for $N(\Delta\omega)$.

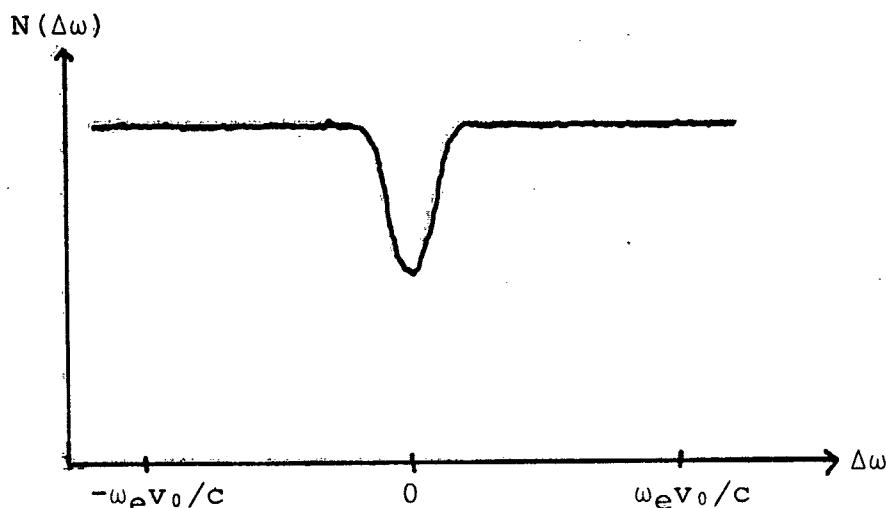


FIG.7: Et 'Mössbauerspektrum'. N som funktion af $\Delta\omega$.

Hvis hastighedsdrevet kilden en så stor hastighedsamplitude, at $A(\Delta\omega)=0$ når $|\Delta\omega|$ er tæt på $\Delta\omega_0$, hvor

$$\Delta\omega_0 = \frac{v_0}{c} \omega_e$$

gælder

$$N(\Delta\omega_0) = N_x + N_m \equiv B$$

hvor B kaldes for Mössbaerspektrets baggrund.

$A(\Delta\omega)$ er derfor givet ved:

$$A(\Delta\omega) = \frac{B - N(\Delta\omega)}{aN_m} = \frac{B - N(\Delta\omega)}{a(B - N_x)} \approx \frac{1}{a} \frac{B - N(\Delta\omega)}{B}$$

idet $N_x \ll B$

Vi har så

$$\begin{aligned} F_A(t) &= \int A(\Delta\omega) e^{it(\Delta\omega - (\omega_a - \omega_e))} d\Delta\omega \\ &= \frac{1}{a} \int \frac{B - N(\Delta\omega)}{B} e^{it(\Delta\omega - (\omega_a - \omega_e))} d\Delta\omega \\ &\equiv \frac{1}{a} F_D(t) \end{aligned}$$

hvor $F_D(t)$ direkte kan beregnes ud fra Mössbauerspektret.¹

Der gælder derfor nu:

$$\begin{aligned} (17) \quad -\ln F_D(t) &= -\ln a - \ln F_A(t) \\ &= -\ln \frac{\sigma_0 a}{2\tau} + \frac{2|t|}{\tau} + \frac{\kappa^2}{2} \Gamma_e(t) + 2W + \frac{\kappa^2 k_B T}{6\pi r} J(t) \end{aligned}$$

Vi kan derfor, som før omtalt, ud fra kendskabet til $F_D(t)$ bestemme temperaturvariationen af elementkrybefunktionen $J(t)$.

¹ I appendix V viser vi konkret, hvordan $F_D(t)$ beregnes numerisk.

9. RESULTATER.

I dette kapitel vil vi præsentere resultaterne - dels fra de mekaniske impedansmålinger og dels fra målingerne af Mössbauer-effekten i den seje væske. Dette gøres i afsnitene 9.1 og 9.2, mens vi i afsnit 9.3 vil diskutere de opnåede resuktater i forbindelse med den i afsnit 4.8.C. præsenterede Isakovich-Chaban-model.

9.1. Mekaniske impedansmålinger.

Som nævnt i kapitel 7 kan vi ved hjælp af opstillingen skitseret på fig. 7.12. bestemme elementimpedansen $\hat{Z}(\omega)$ og dermed elementstivheden $\hat{G}(\omega)$. I fig. 1 er de opnåede resultater for $\hat{G}'(\omega)$, som er realdelen af $\hat{G}(\omega)$, præsenteret for tre udvalgte temperaturer, 280°K , 300°K og 340°K .

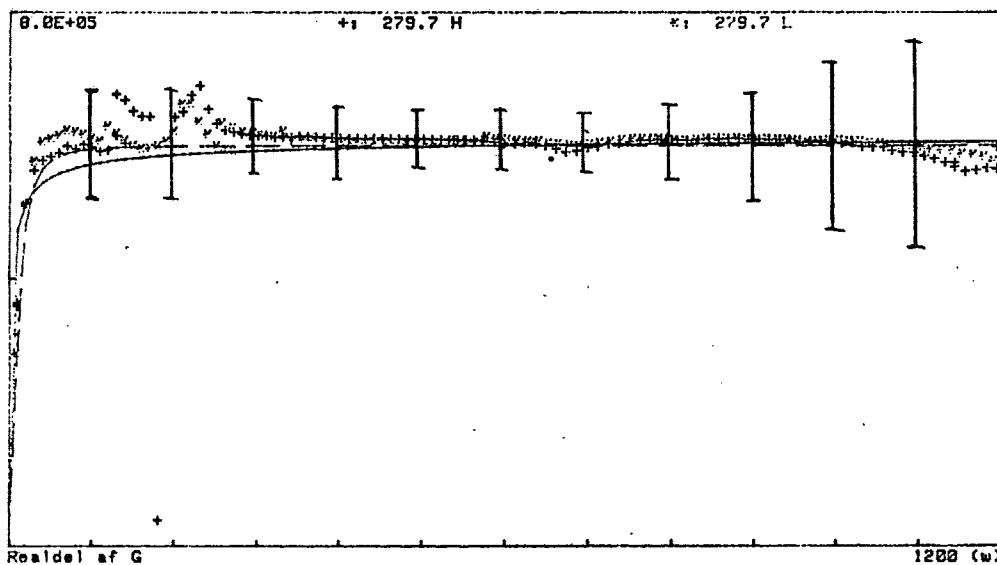


FIG.1.a.

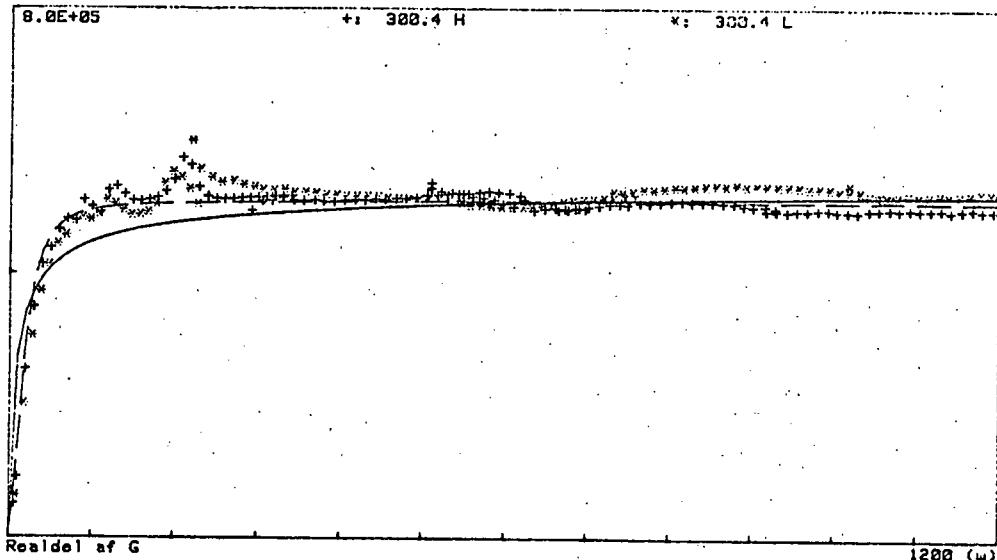


FIG.1b.

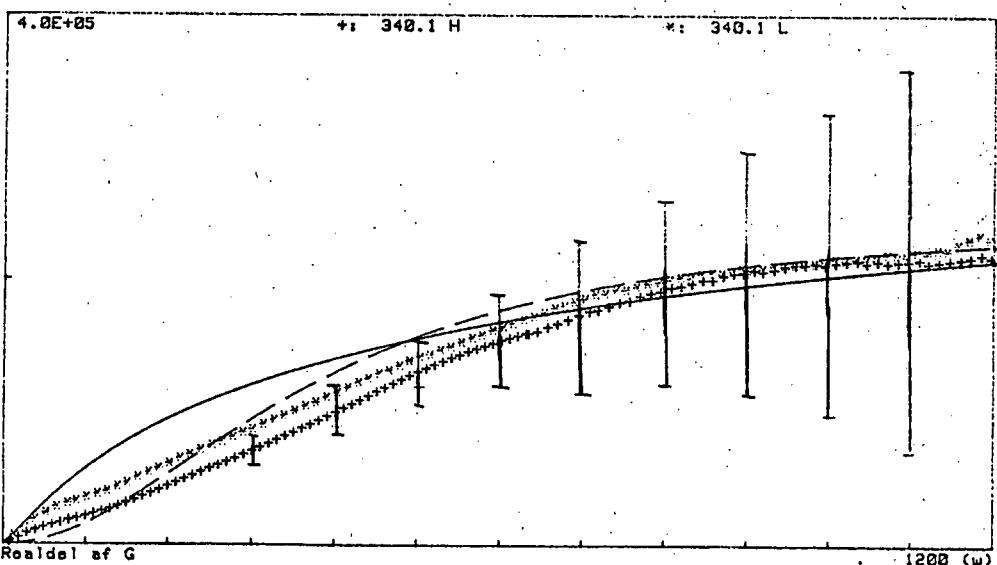


FIG.1c.

Fig.1: Resultaterne af de mekaniske impedansmålinger for temperaturerne 280°K (a), 300°K (b) og 340°K (c). Enheden på (1)-aksen er 100 rad/s og på (2)-aksen $4 \cdot 10^5 \text{ N/m}$ på (a) og (b), mens den er $2 \cdot 10^5 \text{ N/m}$ på (c). For hver temperatur er der foretaget to målesekvenser, idet inputamplituden er forandret med en faktor 2. Dette er gjort for dels at kunne bedømme ulineariteterne i forsøget, dels for at bedømme usikkerhederne. Den høje amplitude er angivet ved (+), mens den lave er angivet med (*). (---) angiver en Maxwell model og (—) angiver en B.E.L. model. Det skal bemærkes at disse modeller er fittet til både realdel og imaginærdel.

Afviigelserne ved $\omega \approx 200 \text{ rad/s}$ skyldes en mekanisk resonans i motoren.

Ved temperaturerne 280 °K og 300 °K ses det, at $\hat{G}'(\omega)$ stabiliseres på et G_0 -niveau, som for 280 °K er $6,1 \cdot 10^{-10} \text{ N/m}^2$ og for 300 °K er $5,1 \cdot 10^{-10} \text{ N/m}^2$. For 340 °K er det vanskeligere at bestemme G_0 , idet det stabile niveau ikke nås i intervallet $\omega \in [10, 10^3] \text{ rad/s}$. Det skal ligeledes bemærkes, at vi for denne temperatur er i et område, hvor shearbølgeimpedansen begynder at spille en rolle (jvf fig. 7.8).

I fig. 1 er der desuden indtegnet et Mindste kvadraters metode (MKM) fit til både en Maxwell- og en B.E.L. model.

De indtegnede usikkerheder er beregnet ved hjælp af Gauss' approksimationsformel:

$$(\Delta \hat{G}')^2 \approx \sum_{\Phi} \left(\frac{\partial f}{\partial \Phi} \right)^2 (\Delta \Phi)^2$$

hvor f er givet ved

$$f = \frac{\omega}{\alpha} \hat{Z}_R''$$

og Φ står for hver af de indgående parametre. \hat{Z}_R'' er den beregnede impedans (lign. 7.15) og α den geometriske faktor (lign 7.13).

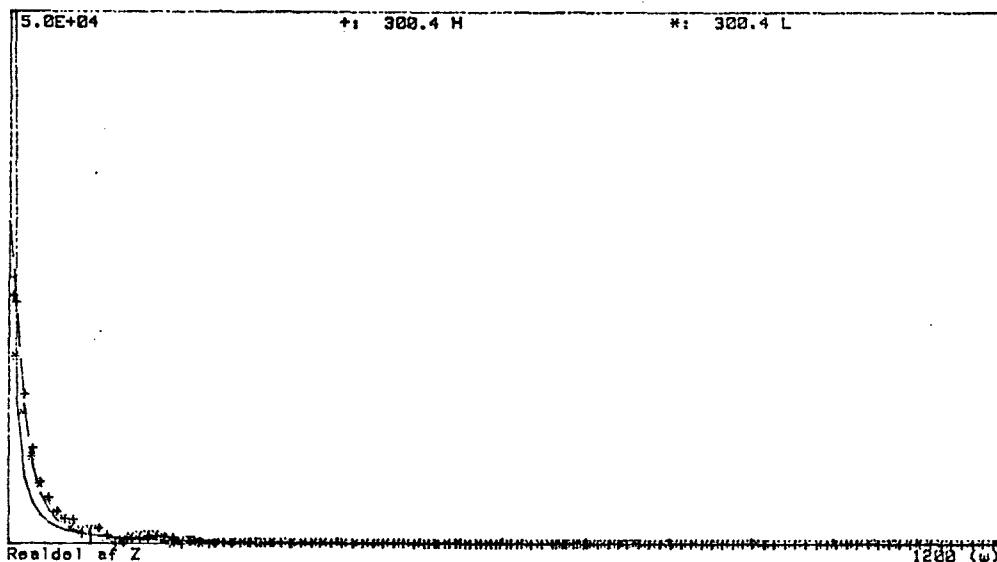


FIG.2: De målte værdier for $\hat{Z}'(\omega)$ ved henhv. høj og lav amplitude plottet sammen med MKM-fit til en Maxwell (----) - og en B.E.L.-model (—). Temperaturen er 300°K. $\hat{Z}'(\omega)$ måles Ω og ω i rad/s.

Ud fra de mekaniske impedansmålinger skulle det principielt også være muligt at bestemme viskositeten η og dermed Maxwell-relaxationstiden $\tau_m = \frac{\eta}{G_0}$. Dette skulle gøres ved at betragte $Z'(\omega)$ og bestemme grænseværdien for ω gående mod 0, idet denne grænseværdi netop er η . Bestemmelsen af $\lim_{\omega \rightarrow 0} Z'(\omega)$ er, som det ses af fig. 2, imidlertid vanskelig at foretage, idet en rimelig nøjagtig bestemmelse af η ville kræve målepunkter for $Z'(\omega)$ for frekvenser, der ligger under vores måleområde.

Ved at betragte fig. 1 og fig. 2 ses det, at Maxwell-modellen faktisk giver de bedste fit undtagen for temperaturen 340 K (1c). Imidlertid får lydimpedansen betydning ved denne temperatur (vi skulle nok have valgt en mindre beholderradius), hvilket betyder at de systematiske fejl spiller en væsentlig rolle.

9.2. Mössbauer-effekt-målingerne.

Vi har i kapitel 8 vist, hvorledes det - ud fra Mössbauer-effekt-målinger - er muligt at bestemme temperaturvariationen af elementkrybefunktionen for en dej væske, når der opslæmmes tinoxid partikler i væskeren. I fig. 3 er resultaterne af sådanne målinger vist for tre forskellige temperaturer - nemlig de udvalgte 280 °K, 300 °K og 340 °K.

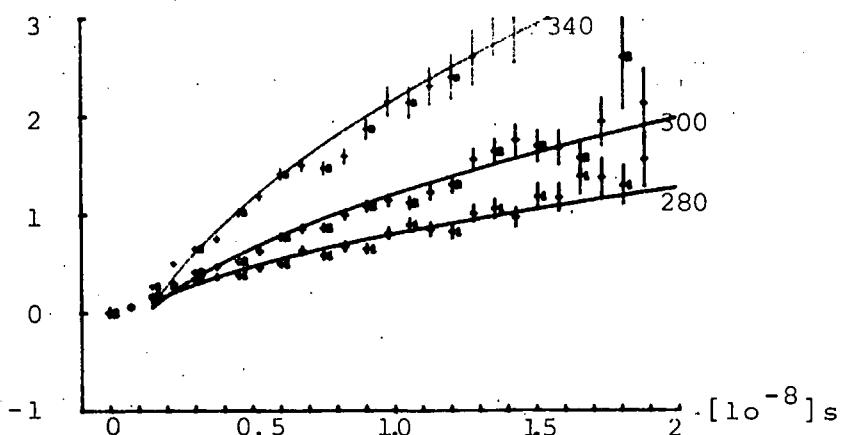


FIG.3: Resultaterne af Mössbauereffekt-målingerne.
 $\frac{1}{2}K^2 \Gamma_a(t)$ plottet som funktion af tiden t for 280 °K, 300 °K og 340 °K. De fuldt optrukne linier er MKM-fit til $k\sqrt{t}$. Kurverne er plottet i større skala i appendix VI.

Der gælder (jævnfør lign. 8.16 og 8.17), at

$$(1) \quad -\ln F_D(t) + \ln F_D^R(t) = \kappa^2 k_B (T J_p(t) - T_R J_p^R(t)) + \Delta W$$

$J_p(t)$ er krybefunktionen for tinoxidpartiklerne og ΔW står for temperaturvariationen af Debye-Waller faktoren fra temperaturen T til referencetemperaturen T_R .

Idet vi kompenserer for temperaturvariationen af W ved at lade samtlige kurver starte i $(0,0)$, gælder der, hvis vi er i langtidsgrænsen, svarende til $|\xi| \ll 1$ (se lign. 8.9)

$$(2) \quad -\ln F_D(t) + \ln F_D^R(t) - (-\ln F_D(0) + \ln F_D^R(0)) = \frac{\kappa^2 k_B}{6\pi r} (T J(t) - T_R J_R(t))$$

hvor $J(t)$ er elementkrybefunktionen ved temperaturen T og $J_R(t)$ er elementkrybefunktionen til T_R .

(Det skal bemærkes at det stykke, som graferne forrykkes på grund af ΔW ligger indenfor temperaturvariationen af W opgivet af Goldanskii, 1968)

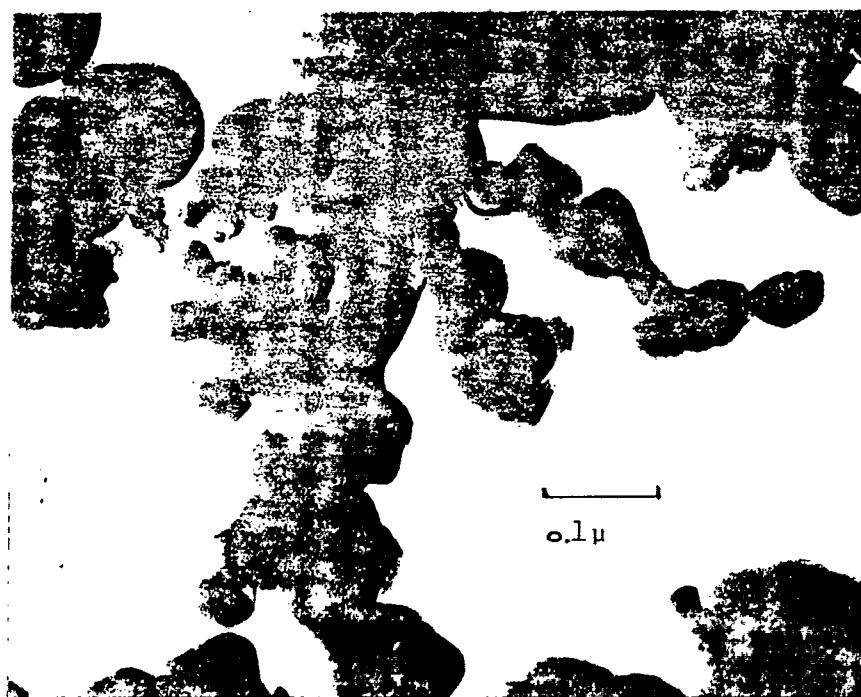


FIG. 4: Elektronmikroskopisk foto af SnO₂-partiklerne.

Vi vil nu antage, at elementkrybefunktionerne for stoffet er givet ved en faststofmodel (se s.46) med stivheden $G_\infty \approx 10^{10} \text{ N/m}^2$, når stoffets temperatur er $T_R = 200 \text{ K}$. Da tinoxid-partiklernes størrelse er $r \approx 10^{-7} \text{ m}$ (se fig.4) vil $J_p^R(t)$ være givet ved

$$(3) \quad J_p^R(t) = \frac{1}{6\pi r} \cdot \frac{1}{G_\infty} \approx 10^{-4} \text{ s}^2/\text{kg}$$

Dette gælder i hele det tidsinterval, som de eksperimentelle data ligger i, idet $|\xi| \ll 1$ når

$$\omega \ll \frac{2G_\infty}{\rho r^2} \approx 10^{10} \text{ rad/s}$$

Af lign.(3) ses, at størrelsen af $J_p^R(t)$ er forsvindende i forhold til den skala resultaterne præsenteres i (fig. 3)

For at undersøge om vi for højere temperaturer kan erstatte $J_p(t)$ med $(1/6\pi r)J(t)$, betragtes forløbet af $|\xi|$ under antagelse af at den komplekse elementimpedans $Z(s)$ følger en Isakovitch-Chaban-model, hvis parametre er

$$G_0 \approx 10^6 \text{ kg/s}^2\text{m}$$

$$G_\infty \approx 10^{10} \text{ kg/s}^2\text{m}$$

$$\eta \approx 10^5 \text{ kg/sm}$$

hvilke er de tilnærmede værdier ved stuetemperatur.

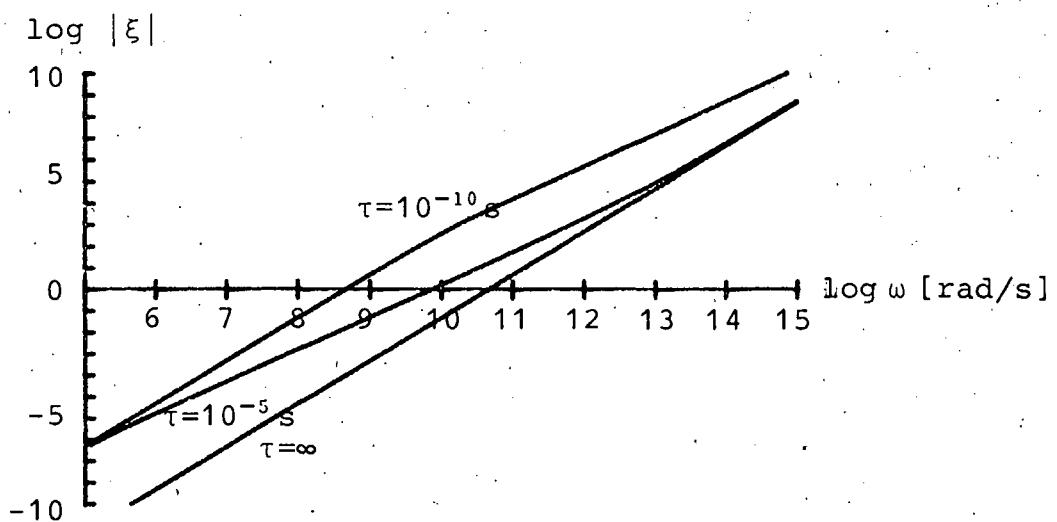


FIG.5: $|\xi|$ plottet i et dobbeltlogaritmisk plot, som funktion af ω for forskellige værdier af τ .

Som det ses af fig. 5 kan vi inden for de måletider, som er karakteristiske for Mössbauereffektmålinger, komme ud i området, hvor $|\xi| \approx 1$. Faktisk skulle vi derfor kunne observere at $J_p(t)$ starter som krybefunktionen for en fri partikel ($|\xi| \gg 1$) - altså have en t^2 -afhængighed.

Vores eksperimentelle resultater viser da også (se fig. 3), at de første punkter tenderer imod en t^2 -afhængighed, hvorefter $J_p(t)$ overgår til at følge elementkrybefunktionen.

Hvis elementkrybefunktionen følger en Isakovich-Chaban-model, vil krybefunktionen til tider meget mindre end parameteren τ forløbe proportionalt med $t^{\frac{1}{2}}$ (se s.62). Vi har derfor ved hjælp af MKM fittet resultaterne til $a+bt^{\frac{1}{2}}$, idet vi ser bort fra de første punkter, som følger en t^2 -lov.

Som det ses af resultaterne, kan det ikke afvises, at grafen følger en $t^{\frac{1}{2}}$ -lov, men resultaterne er dog heller ikke så overbevisende, at det med sikkerhed er godt gjort.

Isakovich-Chaban modellen giver imidlertid mulighed for at for tolke resultaterne fra Mössbauereffekt-målingerne, idet denne angiver at det er stoffets elastiske egenskaber, der ligger til grund for krybefunktionens opvoksen i tidsintervallet 10^{-9} s til 10^{-8} s.

¹ Når man betragter resultaterne i fig 3 skal man være opmærksom på følgende forhold, som kan være medvirkende til at forøge usikrigheden.

- A) Vi har i beskrivelsen af tinoxidpartiklerne kun taget hensyn til deres translatoriske bevægelser og ikke til deres eventuelle rotation. Hvis partiklerne roterer, vil der komme et ekstra bidrag til Mössbauerkernernes breddefunktion fra denne rotation (især for de kerner som befinner sig "tæt" ved partiklens overflade).
- B) De benyttede tinoxidpartikler har ikke ens radier - der er faktisk en fordeling af partikelradier. (Da der er forholdsvis mange Mössbauerkerner i de "store" partikler, vil man forvente at det især er effekterne fra disse man ser).

Vi har ikke i dette projekt fundet tid til at behandle disse problemer nøjere, hvilket betyder, at vi ikke kan bedømme indvirkningen af effekterne på resultaterne nøjere.

9.3. Sammenstilling af resultaterne.

Som det er fremgået af det foregående, får vi fra de mekaniske impedansmålinger direkte oplysning om de frekvensafhængige responsefunktioner i frekvensområdet $1-10^3$ Hz mens Mössbauereffektmålingerne giver os oplysning om den tidsafhængige krybefunktion til tider mellem 10^{-9} - 10^{-8} s.

For at kunne sammenligne disse resultater er det nødvendigt enten at transformere de mekaniske impedansmålinger til tidsbilledet eller at transformere Mössbauermålingerne til frekvensbilledet. Vi har valgt at transformere $kt^{\frac{1}{2}}$ -fittene af Mössbauereffektmålingerne over i frekvensbilledet, idet

$$kt^{\frac{1}{2}} = \frac{k^2 k_B T}{6\pi r} J(t) \Leftrightarrow J(t) = \frac{6\pi r \cdot k}{k^2 k_B T} t^{\frac{1}{2}}$$

Heraf får vi, idet $\tilde{G}(s) = 1/\tilde{J}(s)$

$$(4) \quad \tilde{G}(s) = \frac{k^2 k_B}{3\pi r \sqrt{\pi}} \cdot \frac{T}{k} \cdot s^{\frac{1}{2}}$$

Sættes nu $s=-i\omega$ kan realdelen af $\hat{G}'(\omega)$ bestemmes:

$$\hat{G}'(\omega) = \frac{k^2 k_B \sqrt{2}}{6r\pi\sqrt{\pi}} \cdot \frac{T}{k} \cdot \omega^{\frac{1}{2}}$$

Vi kan ved Mössbauereffektmålingerne bestemme konstanten foran $\omega^{\frac{1}{2}}$, hvorved det bliver muligt at indtægne resultaterne af disse og de mekaniske impedansmålinger i samme plot, som det er gjort i fig.6.

Som det ses af fig.6 er der en rimelig overensstemmelse imellem de opnåede resultater og en Isakovich-Chaban-model, omend hældningen for den højeste temperatur ikke ser ud til

at være 2 for $\omega < \tau_m$, hvilket den er i modellen.¹

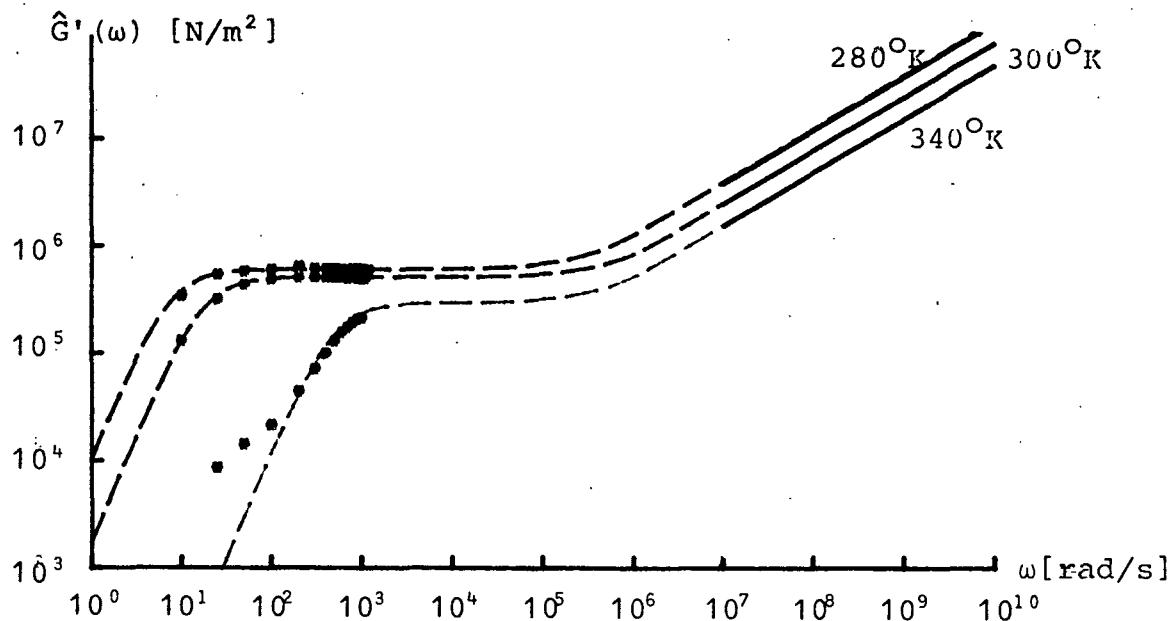


FIG. 6: Resultaterne af måleresultaterne for $\hat{G}'(\omega)$ opnået ved de mekaniske impedansmålinger plottet i et dobbelt-logaritmisk plot sammen med linier bestemt af fittene til $k\sqrt{\epsilon}$ af Mössbauer-målingerne. For hver temperatur er der indtegnet en Isakovich-Chaban-model.

Det kunne forventes, at temperaturvariationen af skæringspunktet mellem G_0 -linien, bestemt ved de mekaniske impedansmålinger, og $\omega^{1/2}$ -linien, bestemt ved Mössbauereffekt-målingerne ($\omega = 1/\tau$), ville flytte monoton mod større værdier af ω for større værdier af temperaturen T , svarende til at τ bliver mindre med stigende temperatur. Dette skulle forventes da τ ifølge Isakovich-Chaban modellen angiver en karakteristisk diffusionstid, som oplagt må blive mindre for større temperaturer.

Denne temperaturvariation af τ er vanskelig at observere ved vores målinger, men det kan skyldes, at G_0 -niveauet for 340 K er behæftet med stor usikkerhed, som omtalt tidligere.

¹ I forbindelse med fig. 6 skal man være opmærksom på, at Mössbauer-resultaterne er "tvunget" til at have hældningen $\frac{1}{2}$ (idet det er funktionen $k\sqrt{\epsilon}$ man ser), således at man ved at "skrue" på parameteren τ i Isakovich-Chaban modellen altid kan få overensstemmelse mellem model og resultater.

10. AFSLUTNING.

Det primære formål med den eksperimentelle del af dette speciale har været at forsøge at vise, at Mössbauereffekt målingerne kan benyttes til bestemmelse af visse seje vækers viskoelastiske egenskaber.

Almindeligvis anvendes Mössbauereffekten på diffusive systemer med $\frac{k_B T \zeta^2}{6\pi r n} > 1/\tau$ svarende til $n < \frac{k_B T \zeta^2 \tau}{6\pi r} \approx 10 \text{ N s/m}^2$
(τ er Mössbauerniveauets levetid)

Som det fremgår af kapitel 9, har vi, ved den i kapitel 8 beskrevne fremgangsmåde, kunnet bestemme elementresponsefunktionerne for et stof hvor $n > 10^3$. Vi har, under anvendelse af Isakovich-Chaban modellen fortolket resultaterne ud fra stoffets elastiske egenskaber og altså ikke ud fra stoffets viskositet.

For at kunne sammenholde resultaterne af disse målinger med stoffets makroskopiske egenskaber har vi ved mekaniske impedans målinger, som er beskrevet i kapitel 7, bestemt stoffets responsefunktioner til tider omkring $1-10^{-3}\text{s}$.

Det ses af vores resultater, at bestemmelsen af responsefunktionerne ved de to omtalte metoder stemmer rimeligt overens med, hvad der forudsiges af Isakovich og Chaban.

Det væsentligste problem i relation til metodiske konklusioner er, om Mössbauereffektens måleområde i forhold til vores stof - og de benyttede SnO_2 -partiklers størrelse - er optimalt til eftervisning af en $t^{1/2}$ -lov for responsefunktionerne.

Til meget korte tider - dvs de 2-3 første fourierkomponenter af Mössbauerspektrene (svarende til $t \approx 10^{-9}\text{s}$) - mener vi at have iagtaget inertielle effekter, hvilket kan tyde på, at partiklerne er større end først antaget.

Til lange tider - for $t > 1.5 \times 10^{-8}$ s - bliver usikkerheden på beregningen af fourierkomponenterne så stor, at vi ikke mener det rimeligt at tage disse med i betragtning.

Vi vil således konkludere, at Mössbauereffekten kan anvendes til at bestemme elementresponsefunktioner til tider omkring 10^{-8} s, når stoffets stivhedsfunktion $G(\omega)$, for $\omega \approx 10^8$ rad/s, ligger i intervallet omkring 10^7 N/m² og man anvender "prøvepartikler" med en radius på ca. 10^{-7} m.

Som det fremgår af det forige, har vi ikke gjort noget for at selekterer partiklerne efter størrelse, hvilket ville have givet en nøjagtigere målemetode.

APPENDIX I.

Bestemmelse af de målte impedanser i de rheologiske
målinger.

Som vi har omtalt på side 74 kan man under visse betingelser se bort fra de inertielle effekter, når man skal bestemme de viskoelastiske stoffers responseegenskaber.

For at bestemme sammenhængen mellem elementimpedansen \tilde{Z} og den målte impedans \tilde{Z}_R skal man løse bevægelsesligningen udfra kendskabet til de konstitutive relationer og randbetingelserne for den eksperimentelle opstilling.

Vi vil her beskæftige os nøjere med de to opstillinger, som er omtalt side 43 og side 68f.

1) "Kassegeometrier" (se side 43).

A. Bevægelsesligning.

$$(1) \rho \frac{\partial v(y,t)}{\partial t} = \frac{\partial \sigma(y,t)}{\partial y}$$

B. Den konstitutive relation.

$$(2) \sigma(y,t) = \int_{-\infty}^t b(t-\tau) \frac{\partial v(y,\tau)}{\partial y} d\tau$$

Bevægelsesligninger løses ved at benytte en tidslig Fourier-transformation, $B(y,t) \sim \tilde{B}(y,s)$ hvorved bevægelsesligningen (1) bliver

$$(1') \rho s \tilde{v}(y,s) = \frac{\partial \tilde{\sigma}(y,s)}{\partial y}$$

og den konstitutive ligning (2) transformeres til

$$(2') \tilde{\sigma}(y,s) = \tilde{Z} \frac{\partial \tilde{v}(y,s)}{\partial y}$$

Herudfra fås differentialequationen

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} - \frac{\rho s}{Z} \tilde{v} = 0$$

som med grænsebetingelserne

$$y = 0 \Rightarrow \tilde{v} = 0$$

$$y = d \Rightarrow \tilde{v} = v_0$$

har den fuldstændige løsning

$$\tilde{v}(y, s) = \frac{v_0}{e^{ad} - e^{-ad}} (e^{ay} - e^{-ay}), \text{ hvor } a = \sqrt{\frac{\rho s}{Z}}$$

Idet den målte impedans \tilde{Z}_R pr. definition
er givet ved

$$\tilde{Z}_R = \frac{A \tilde{v}(d, s)}{v_0}$$

får vi fra (2) og (3)

$$\tilde{Z}_R = \frac{A \sqrt{\frac{\rho s}{Z}}}{\tanh(\sqrt{\frac{\rho s}{Z}} d)} \tilde{Z}$$

Hvis $|\sqrt{\frac{\rho s}{Z}} d| \ll 1$ fås

$$\tilde{Z}_R \approx \tilde{Z} \frac{A}{d}$$

Der kan altså ses bort fra de inertielle effekter hvis

$$d \ll \sqrt{\left| \frac{Z}{\rho s} \right|}$$

Hvis $|\sqrt{\frac{\rho s}{Z}} d| \gg 1$ fås

$$\tilde{Z}_R \approx A \sqrt{\rho s Z} = A \sqrt{\rho G}$$

i overensstemmelse med det på side 51 opgivne udtryk
for lydimpedanser.

2) Cylindergeometri. (side 72ff)

Udledningen er parallel til den foregående for kasse-

geometrien.

Bevægelsesligningen.

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}$$

bliver

$$-\rho \sin \theta \frac{\partial v}{\partial t} = (\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) \sigma_{xx} + (\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) \sigma_{xy}$$

som er ensbetydende med (under anvendelse af lign. 7.2.)

$$(4) \quad \rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{2\sigma}{r}$$

Den konstitutive ligning er ifølge (7.4)

$$(5) \quad \sigma(r, t) = \int_{-\infty}^t G(t - \tau) \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) v(r, \tau) d\tau$$

Fouriertransformeres med hensyn til t fås for bevægelsesligningen (1) :

$$(4') \quad \rho s \tilde{v}(r, s) = \frac{\partial \tilde{\sigma}(r, s)}{\partial r} + \frac{2\tilde{\sigma}(r, s)}{r}$$

og for den konstitutive ligning (2)

$$(5') \quad \tilde{\sigma}(r, s) = \tilde{Z}(s) \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) \tilde{v}(r, s)$$

Ud fra disse kan differentialligningen svarende til (3) bestemmes til

$$(6) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \left(\frac{\rho s}{\tilde{Z}_s} + \frac{1}{r^2} \right) \tilde{v} = 0$$

som har den fuldstændige løsning

$$\tilde{v}(r, s) = k_1 J_1 \left(r \sqrt{-\frac{\rho s}{\tilde{Z}}} \right) + k_2 Y_1 \left(r \sqrt{-\frac{\rho s}{\tilde{Z}}} \right)$$

hvor J_1 og Y_1 er besselfunktionerne af første og anden grad, og k_1 og k_2 bestemmes af følgende grænsebetingelser:

$$r = a \Rightarrow \tilde{v} = v_0$$

$$r = b \Rightarrow \tilde{v} = 0$$

I lavfrekvensgrænsen $|r \sqrt{-\frac{\rho s}{z}}| \ll 1$ gælder (Abramowitz og Stegun 1968, side 360):

$$\tilde{v}(r, s) \approx \frac{1}{2} k_1 r \sqrt{-\frac{\rho s}{z}} - \frac{2}{\pi} k_2 \frac{1}{r \sqrt{-\frac{\rho s}{z}}}$$

hvoraf fås:

$$(7) \quad \tilde{v}(r, s) \approx \frac{av_0}{a^2 - b^2} \left(r - \frac{b^2}{r} \right)$$

Den målte impedans er

$$\tilde{Z}_R = \frac{2\pi a^3 l \sigma(a, s)}{v_0}$$

og af ligning (5') og (7) fås

$$\tilde{Z}_R = \frac{4\pi l a^2 b^2}{b^2 - a^2} \tilde{Z}$$

hvilket var, hvad der skulle vises.

Betingelsen $b \ll \sqrt{|\frac{z}{\rho \cdot s}|}$, som er en lidt stærkere betingelse end $(b-a) \ll \sqrt{|\frac{z}{\rho \cdot s}|}$, der normalt angives i litteraturen (se for eksempel Ferry, 1970), betyder, idet $\sqrt{|\frac{z}{\rho \cdot s}|}$ er shearlydbølgelængden, at dimensionen af stofbeholderen skal afpasses i forhold til de anvendte frekvenser, således at der ikke udbredes lydbølger i stoffet.

APPENDIX II.

Usikkerhed på størrelser ved de mekaniske impedansmålinger.

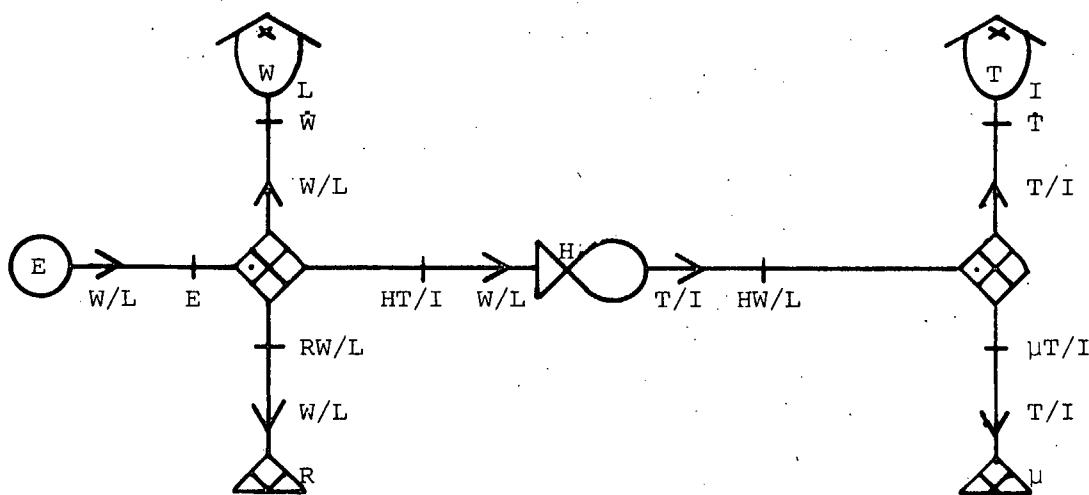
Nøjere undersøgelse af Faulhaber-motoren.

Som omtalt i kapitel 7, anvendes en energibåndsmodel over en elektromotor i beregningerne af de rheologiske målinger.

Vi vil her omtale nogle simple forsøg, der dels er udført for at kontrollere modellen, dels er udført for at kontrollere størrelserne på de konstanter, der indgår i modellen.

1. Energibåndsmodellen i tidsbilledet.

Den fuldt reticulerede energibåndsmodel over en elektromotor ser således ud (sammenlign side 75).



E = spændingen fra generatoren,

W = Fluxen gennem motorens spole,

L = Spolens selvinduktion,

R = Motorens ohm'ske modstand,

H = Omsætningsforholdet,

T = Impulsmomentet,

I = Inertimomentet,

μ = Gnidningskoefficient.

Ud fra regnereglerne kan følgende koblede differential-ligningssystem opstilles til bestemmelse af $T(t)$ og $W(t)$.

$$(1) \quad T(t) = \frac{H}{L} W(t) - \frac{\mu}{I} T(t)$$

$$(2) \quad \dot{W}(t) = E(t) - \frac{H}{I} T(t) - \frac{R}{L} W(t)$$

Vi vil nu bestemme strømmen $f = W(t)/L$ i den ydre port, når inputet til motoren er en stepfunktion $E_0 \cdot E(t)$. Vi vil med andre ord bestemme motorens admittansfunktion $Y_m(t)$.

Fluxen $W(t)$ kan bestemmes udfra de koblede differential-ligninger 1) og 2), idet man får for $t > 0$:

$$(3) \quad \ddot{W} + \left(\frac{\mu}{I} + \frac{R}{L} \right) \dot{W} + \left(\frac{R\mu}{I \cdot L} - \frac{H^2}{I \cdot L} \right) W = \frac{\mu}{I} E_0$$

Denne ligning har den fuldstændige løsning

$$(4) \quad W(t) = W_\infty + k_1 e^{-\omega_0(\gamma + \sqrt{\delta^2 - 1})t} + k_2 e^{-\omega_0(\gamma - \sqrt{\delta^2 - 1})t}$$

hvor

$$W_\infty \text{ er fluxen gennem spolen for } t \rightarrow \infty; \quad W_\infty = L \frac{\mu \cdot E_0}{R \mu + H^2}$$

$$\omega_0 = \frac{H}{\sqrt{L \cdot I}}$$

$$\delta = \frac{1}{2\omega_0} \left(\frac{R}{L} - \frac{\mu}{I} \right)$$

$$\gamma = \frac{1}{2\omega_0} \left(\frac{R}{L} + \frac{\mu}{I} \right)$$

og k_1 og k_2 er konstanter bestemt af grænsebetingelserne:

$$W(t) \rightarrow 0 \text{ for } t \rightarrow 0 \quad \text{og} \quad T(t) \rightarrow 0 \text{ for } t \rightarrow 0$$

$$k_1 = \frac{W_\infty \omega_0 (\gamma - \sqrt{\delta^2 - 1}) - E_0}{2 \omega_0 \sqrt{\delta^2 - 1}}$$

$$k_2 = \frac{E_0 - W_\infty \omega_0 (\gamma + \sqrt{\delta^2 - 1})}{2 \omega_0 \sqrt{\delta^2 - 1}}$$

Da alle parametrene på nær en er opgivet fra fabrikantens side, kan vi sammenholde dette teoretiske resultat med eksperimentelle bestemmelser af f , som blev gjort inden "aksselfjederen" blev påsat, når vi som input brugér et standard-stepsignal.

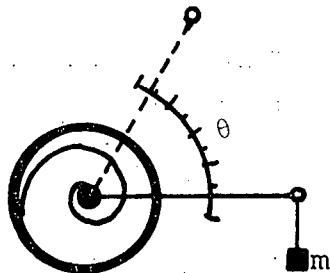
Inden vi gør dette, vil vi kort omtale nogle småforsøg vi har udført, for at kontrollere størrelsen af de indgående konstanter.

2. Bestemmelse af motorparametrene.

2.1 Fjederkonstanten K.

For at bestemme fjederkonstanten K af den påsatte spiral-fjeder, udførte vi et simpelt forsøg, der bestemte sammenhængen mellem et påtrykt kraftmoment M på akslen og vinkeldrejningen af denne.

FIG.1: Arrangement til måling af kraftmoment og vinkel-drejning θ .



Sammenhængen mellem M ($= m \cdot g \cdot r$, hvor m er massen af loddet, g tyngdeaccelerationen og r afstanden fra akselens midtpunkt) og θ er givet ved:

$$M = K \cdot \theta$$

Følgende figur giver resultaterne af målingen

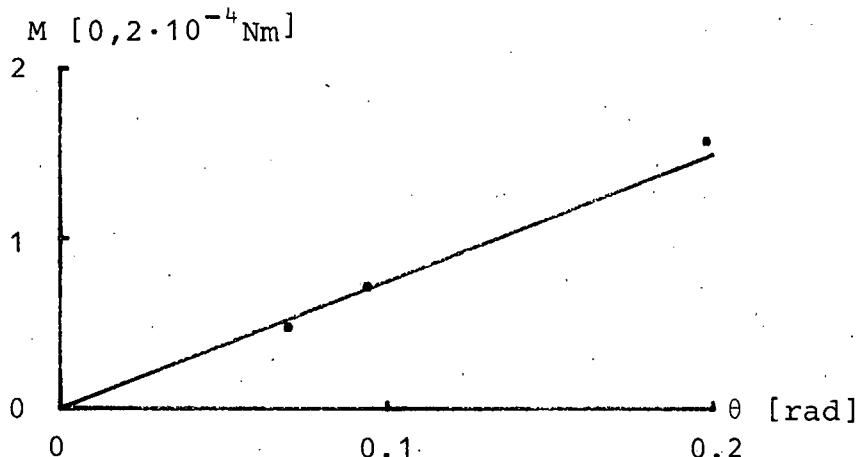


FIG.2: Kraftmomentet som funktion af vinkelderjningen.

Ud fra kurvens hældning, og ud fra et skøn på usikkerhederne på de målte størrelser (massen m , afstanden r og vinklen θ) fås:

$$K = 1.5 \cdot 10^{-4} \pm 2 \cdot 10^{-5} \frac{\text{N m}}{\text{rad}}$$

2.2 Akslens inertimoment I.

Som tidligere omtalt har vi forlænget motorens oprindelige aksel. Inertimomentet, I , af dette forlængerstykke kan beregnes til (jævnfør dimensionerne på fig. 7.6).

$$I_1 = 2.7 \cdot 10^{-9} \text{ kg m}^2$$

hvilket er forsvindende i forhold til inertimomentet I af den oprindelige aksel, - opgivet til

$$I = 1.5 \cdot 10^{-7} \text{ kg m}^2$$

af fabrikanten.

For at kontrollere størrelsen af inertimomentet I , påvirkede vi den ubelastede motor med et sinus-signal og bestemte den frekvens, hvorved systemet bestående af fjeder og aksel kommer i resonans. Idet systemets godhed (Q -værdi) er ca. 5, kan resonansfrekvensen tilnærmes med egenfrekvensen ω_0 givet ved:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{I}}$$

hvoraf inertimomentet kan bestemmes.

Resultat: $\omega_0 = 31.4 \text{ rad s}^{-1}$
hvilket giver

$$I = 1.5 \cdot 10^{-7} \pm 2 \cdot 10^{-8} \text{ kg m}^2$$

2.3 Omsætningsforholdet H.

For at bestemme omsætningsforholdet, H , udførte vi et forsøg, der bestemte sammenhængen mellem strømstyrken gennem motoren og det statiske kraftmoment, M , motoren leverer.

Opstillingen minder meget om den, der blev brugt til bestemmelsen af K .

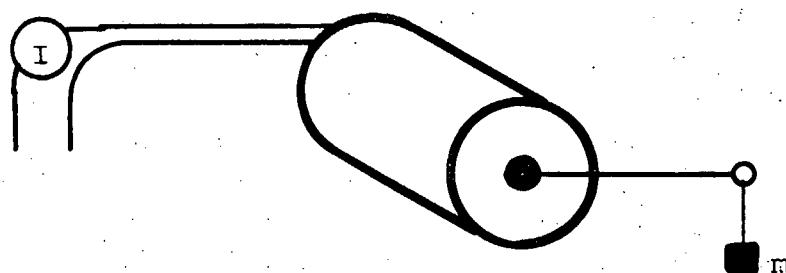


FIG. 3: Arrangement til bestemmelse af sammenhæng mellem strømstyrke og kraftmoment.

Sammenhængen mellem M og f er givet ved

$$M = H \cdot f$$

Resultaterne kan fremstilles i følgende figur:

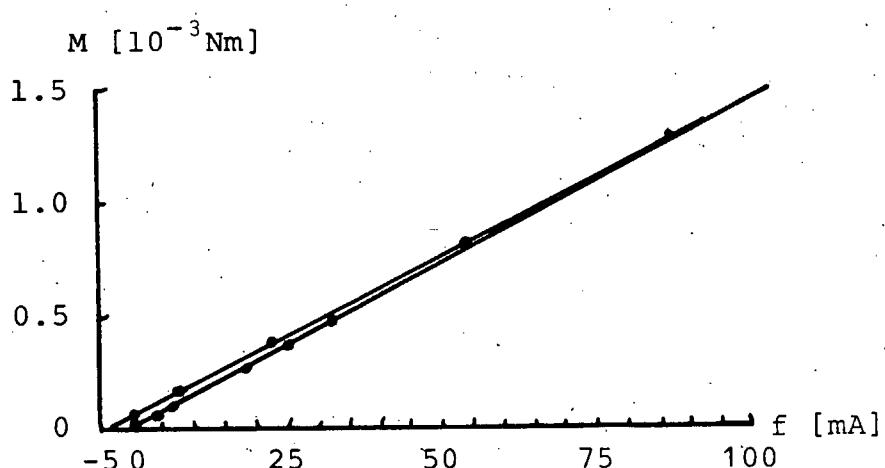


FIG. 4: Sammenhængen mellem strømstyrke og kraftmoment.

Vi udførte to forsøgsserier. En hvor rotoren stod opti-

malt i forhold til magnetfeltet, jævnfør side 77, og en hvor rotoren var drejet ca. 25° fra denne stilling, for at se betydningen af rotorens stilling i forhold til magnetfeltet.

Ud fra håldningen af kurverne og ud fra et skøn på usikkerhederne på de målte størrelser (massen m, afstanden r og strømstyrken f) fås

Optimal opstilling

$$H = 1.46 \cdot 10^{-2} \pm 7 \cdot 10^{-4} \frac{\text{N m}}{\text{A}}$$

Drejet 25°

$$H = 1.41 \cdot 10^{-2} \pm 7 \cdot 10^{-4} \frac{\text{N m}}{\text{A}}$$

Fra fabrikken er H opgivet til

$$H = 1.413 \cdot 10^{-2} \frac{\text{N m}}{\text{A}}$$

Udsvingene af akslen er i de forsøg, som er omtalt i rapporten, meget mindre end 25° , hvorfor det må anses for rimeligt at antage H for at være konstant.

2.4 Motorens modstand R.

I selve måleproceduren blev modstanden (som omtalt side 80) ud kompenseret med en nøjagtighed på 0.01Ω . Vi vil derfor blot præsentere en graf, som viser temperaturvariationen af R.

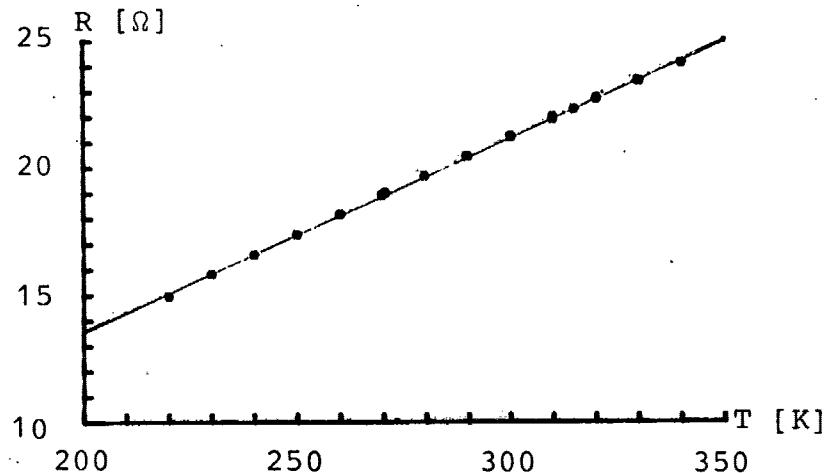


FIG.5: Modstanden i motoren, som funktion af temperaturen.

2.5 Motorens selvinduktion L.

Denne blev direkte målt med et instrument med følgende resultat: (målefrekvens 1000 Hz)

$$L = 6.6 \cdot 10^{-4} \pm 1 \cdot 10^{-5} \text{ H}$$

Fabrikkens opgivelse var:

$$L = 6.5 \cdot 10^{-4} \text{ H}$$

Vi vil senere omtale en anden metode til bestemmelse af L (se side 136).

2.6 Lejegnidningen μ .

For at bestemme lejegnidningen μ inddrog vi et resultat fra gennemregningen af modellen - nemlig at strømmen, $f(t) = W(t)/L$, til lange tider er givet ved (jævnfør side 78)

$$f = \frac{\mu \cdot E_o}{R \mu + H^2}$$

Strømmen er således en lineær funktion af E_o , og hældningen, α , af grafen for denne funktion er bestemt af størrelserne μ , R og H.

Vi kan derfor ud fra kendskabet til R og H, og ud fra en eksperimentel bestemmelse af α , finde gnidningen μ ud fra

$$\mu = \frac{\alpha \cdot H^2}{1 - \alpha R}$$

Da μ er temperaturafhængig blev den bestemt for en række temperaturer. Dette gav følgende resultater:

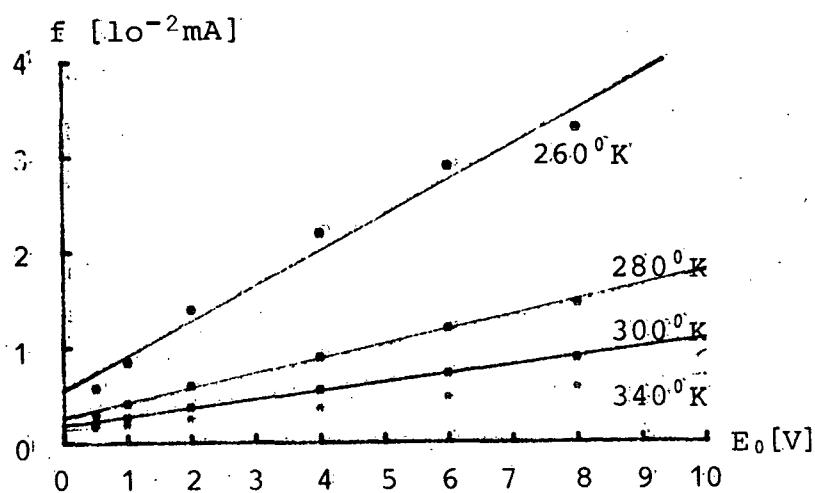


FIG.6: Strømstyrken som funktion af spændingen for forskellige temperaturer.

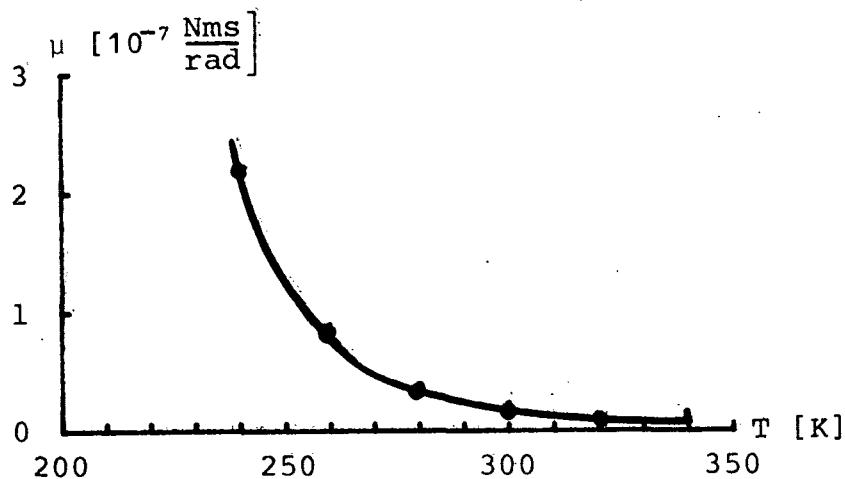


FIG.7: Lejegnidningen som funktion af temperaturen.

Som det ses af fig.6., er modelantagelsen om proportionalitet mellem f og E_0 ikke fuldstændigt opfyldt, da der er en systematisk afvigelse fra en ret linie - dette skyldes sikkert, at lejet opvarmes ved højere spændinger.

Vi vil ud fra ovenstående kurver skønne den relative usikkerhed på $\mu < 50\%$.

3. Modelkontrol.

Vi er nu i stand til at vurdere modellen over motoren, idet vi eksperimentelt har bestemt tidsafhængigheden af outputstrømmen f , når inputspændingen e er givet ved $E = E_0 \cdot E(t)$. Denne eksperimentelle bestemmelse kan så sammenholdes med modellens resultater.

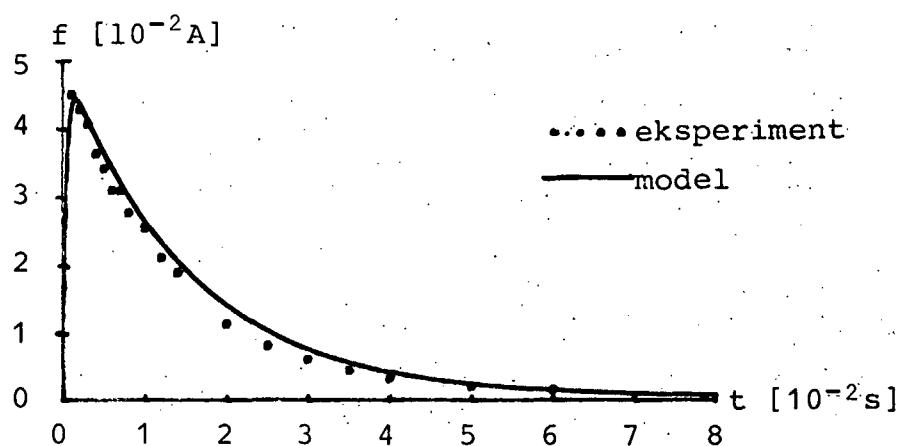


FIG.8: Strømresponset som funktion af tiden ved et stepspændingsinput.

Som det ses er der en rimelig overensstemmelse mellem model og eksperiment.

4. Yderligere bestemmelser af H og L.

4.1. Dynamisk bestemmelse af H.

Som det ses af ligning (4) indgår der to eksponentialfunktioner, en langsomt aftagende med tidskonstant

$$\omega_0 (\gamma - \sqrt{\delta^2 - 1}) t$$

og en hurtigt aftagende med tidskonstant

$$\omega_0 (\gamma + \sqrt{\delta^2 - 1}) t$$

Ved at indsætte værdierne for parametrene ses det, at den hurtigt aftagende eksponentialfunktion falder så hurtigt af, at det aftagende forløb på kurven side

er bestemt af funktionen med tidskonstant

$$\tau = \omega_0 (\gamma - \sqrt{\delta^2 - 1}) t$$

Der gælder

$$\begin{aligned} \tau &= \omega_0 (\gamma - \sqrt{\delta^2 - 1}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{R}{L} + \frac{\mu}{I} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{L} - \frac{\mu}{I} \right) \sqrt{1 - \frac{4 H^2}{L I \left(\frac{R}{L} - \frac{\mu}{I} \right)^2}} \\ &\approx \frac{H^2}{R I} \end{aligned}$$

$$\text{idet } \frac{\mu}{I} \ll \frac{R}{L} \quad \text{og } \frac{\mu}{I} \ll \frac{H^2}{R \cdot I}.$$

Da vi kan bestemme tidskonstanten τ af de eksperimentelt bestemte kurver, kan en eventuel temperaturafhængighed af H bestemmes, idet temperaturafhængigheden af R er kendt (se figur 5), og idet inertimomentet, I , er temperaturafhængig. Resultaterne fremgår af følgende tabel:

T °K	H $10^{-2} \frac{\text{N m}}{\text{A}}$
230	1.5
240	1.5
250	1.5
260	1.5
270	1.5
280	1.6
290	1.8
300	1.6
310	1.5
320	1.5
330	1.5

Det ses at H kan antages at være temperaturafhængig, og at størrelsen, når usikkerheden på bestemmelsen af H ved

hjælp af denne metode tages i betragtning, må siges at stemme overens med det på side 77 opgivne.

4.2 Bestemmelse af L.

Hvis man fastlåser akselen på motoren er motorimpedansen \hat{z}_m givet ved (sammenlign ligning 7.9)

$$\hat{z}_m = R + s \cdot L$$

idet $I = \infty$

Ved at bestemme frekvensafhængigheden af $|\hat{z}_m(\omega) - R|$ kan selvinduktionen bestemmes. Man får følgende måleresultater:

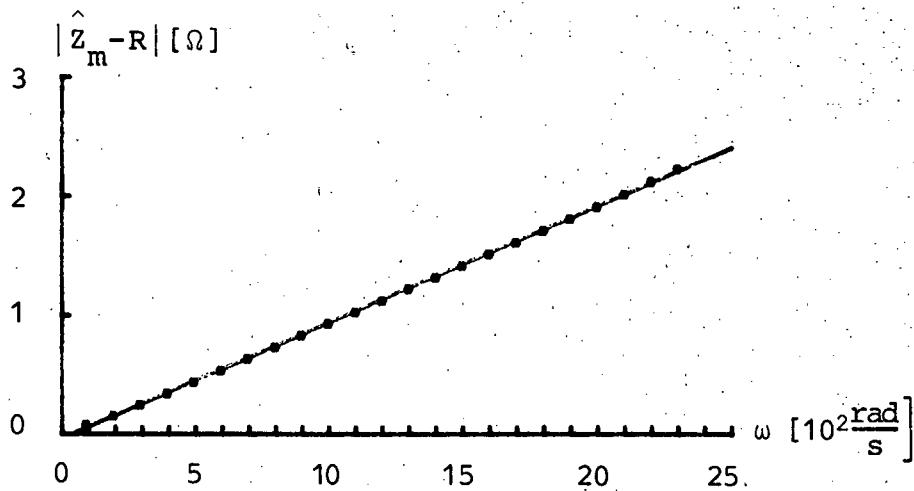


FIG.9: $|\hat{z}_m(\omega) - R|$ plottet som funktion af frekvensen.

Ud fra grafen findes

$$L = 9.7 \cdot 10^{-4} \text{ H}$$

Denne værdi afviger fra den opgivne værdi

$$L = 6.5 \cdot 10^{-4} \text{ H}$$

hvorfor vi har vlagt at sætte usikkerheden på L til

$$\Delta L = 3 \cdot 10^{-4}$$

svarende til en relativ usikkerhed på 50%.

APPENDIX III.

Beregning af variansen på bestemmelsen af $F_D(t)$.

Som det ses på s. 145 beregnes størrelsen $F_D(t)$ ved

$$F_D(t_j) = \frac{1}{127} \sum_{j=2}^{255} D_j \cos\left(\frac{2\pi j}{254}(J - J_T)\right), \text{ hvor}$$

$$D_j = \frac{B - N_j}{B} \cdot 100 \quad \text{og } J_T \text{ er tyngdepunktet for } D.$$

N_j er antallet af tællinger fra kanal J i mangekanal-analysatoren, og da disse tællinger stammer fra radioaktiv emission, vil N_j være Poissonfordelt.

Vi indfører derfor en stokastisk variabel:

$\vec{N} = (N_2, N_3, \dots, N_J, \dots, N_{255})$ hvor hver enkelt N_j er Poissonfordelt.

Størrelserne D_j , B og J_T er ligeledes stokastiske, men vi antager at tyngdepunktet J_T er ikke-stokastisk da dette forsimpler regningerne meget.

Baggrunden bestemmes ved hjælp af formlen:

$$(1) \quad B = \frac{\sum_{j=2}^n N_j + \sum_{j=257-n}^{255} N_j}{2(n-1)}, \text{ hvor } 2 < n < 127.$$

Vi har så

$$(2) \quad F_D(t_j) = \frac{100}{127} \sum_{j=2}^{255} \left(1 - \frac{N_j}{B}\right) \cos\left(\frac{2\pi j}{254}(J - J_T)\right)$$
$$= \frac{100}{127} (254\delta_{oj} - \sum_{j=2}^{255} \frac{N_j}{B} \cos\left(\frac{2\pi j}{254}(J - J_T)\right)).$$

Vi kan rækkeudvikle funktionen

$$f(\vec{N}) = \frac{1}{B} \sum_{J=2}^{255} N_J \cos \frac{2\pi j}{254} (J - J_T)$$

omkring middelværdien

$$\vec{x}_o = (E(N_2), \dots, E(N_J), \dots, E(255))$$

efter formlen

$$(3) \quad f(\vec{N}) \approx f(\vec{x}_o) + (\vec{N} - \vec{x}_o) \cdot \vec{f}'(\vec{x}_o)$$

hvorefte variansen $\text{Var}(f(\vec{N}))$ kan bestemmes ved

$$\text{Var}(f(\vec{N})) \approx \sum_{J=2}^{255} \text{Var}(N_J) (f'_{N_J}(\vec{x}_o))^2$$

Da N_J er Poissonfordelt, kan vi både estimere variansen $\text{Var}(N_J)$ og middelværdien $E(N_J)$ med N_J , hvorved man efter nogle manipulationer får:

$$(4) \quad \begin{aligned} \text{Var}(f(\vec{N})) &\approx \sum_{J=2}^{255} N_J \cos^2 \left(\frac{2\pi j}{254} (J - J_T) \right) \\ &+ \left(\frac{1}{\sum_{J=2}^n N_J} \left(\frac{1}{2(n-1)} \sum_{J=2}^{255} N_J \cos \left(\frac{2\pi j}{254} (J - J_T) \right) \right)^2 \right. \\ &+ \left. \left(\frac{1}{\sum_{J=257-n}^{255} N_J} \left(\frac{1}{2(n-1)} \sum_{J=2}^{255} N_J \cos \left(\frac{2\pi j}{254} (J - J_T) \right) \right)^2 \right. \right. \\ &- \left. \left(\frac{1}{B^3(n-1)} \sum_{J=2}^{255} N_J \cos \left(\frac{2\pi j}{254} (J - J_T) \right) \right)^2 \right. \\ &\quad \sum_{J=2}^n N_J \cos \left(\frac{2\pi j}{254} (J - J_T) \right) \\ &- \left. \left(\frac{1}{B^3(n-1)} \sum_{J=2}^{255} N_J \cos \left(\frac{2\pi j}{254} (J - J_T) \right) \right)^2 \right. \\ &\quad \sum_{J=257-n}^{255} N_J \cos \left(\frac{2\pi j}{254} (J - J_T) \right) \end{aligned}$$

Erstatter vi nu hvert N_J med B (idet N_J aldrig afviger mere end 10% fra B), får vi:

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(f(\vec{N})) &\approx \frac{1}{B} \sum_{J=2}^{255} \cos^2 \left(\frac{2\pi j}{254} (J - J_T) \right) \\
 &+ \frac{1}{2(n-1)B} \left(\sum_{J=2}^{255} \cos \left(\frac{2\pi j}{254} (J - J_T) \right) \right)^2 \\
 (5) \quad &\approx \left(\frac{1}{B(n-1)} \sum_{J=2}^{255} \cos \left(\frac{2\pi j}{254} (J - J_T) \right) \right) \\
 &\times \left(\left(\sum_{J=2}^n \cos \left(\frac{2\pi j}{254} (J - J_T) \right) \right) \right. \\
 &\left. + \sum_{J=257-n}^{255} \cos \left(\frac{2\pi j}{254} (J - J_T) \right) \right)
 \end{aligned}$$

herudfra fås

$$(6) \quad \text{Var}(f(\vec{N})) \approx \begin{cases} \frac{254}{B^2}, & j \neq 0 \\ \frac{254}{B} \left(\frac{127}{n-1} - 1 \right), & j = 0 \end{cases}$$

I det vi har at

$$F_D(t_j) = \frac{100}{127} (254 \delta_{0j} - f(\vec{N}))$$

ser vi, at

$$(7) \quad \text{Var}(F_D(t_j)) \approx \begin{cases} \frac{100^2}{127^2} \frac{254}{B} \left(\frac{127}{n-1} - 1 \right), & j = 0 \\ \frac{100^2}{127} \cdot \frac{1}{B}, & j \neq 0 \end{cases}$$

Det vi egentlig er ude efter at bestemme, er variansen på breddefunktionen, som bestemmes ud fra $-\ln F_D(t_j)$.

Vi vil derfor bestemme variansen på $Y(t_j)$ givet til

$$Y(t_j) = -\ln(F_D(t_j))$$

hvilket gøres ud fra tilnærmelsen

$$(8) \quad \begin{aligned} \text{Var}(Y(t_j)) &\approx \frac{1}{E(F_D(t_j))^2} \text{Var}(F_D(t_j)) \\ &\approx \frac{1}{F_D(t_j)^2} \text{Var}(F_D(t_j)) \end{aligned}$$

Vi får derved

$$(9) \quad \text{Var}(-\ln(F_D(t_j))) \approx \begin{cases} \frac{157}{B F_D(0)^2} \left(\frac{127}{n-1} - 1 \right), & j = 0 \\ \frac{79}{B F_D(t_j)^2}, & j \neq 0. \end{cases}$$

APPENDIX IV.

Vi har i kapitel 8.1 vist, hvordan det ud fra Mössbauer effekten er muligt at bestemme absorberkernernes breddefunktion, $\Gamma_a(t)$. I denne udledning er det antaget, at absorptionsovergangsfrekvensen, ω_a , består af en enkelt linie (at ω_a er den samme for alle absorberkerner). Dette er dog sjældent tilfældet - i tinoxid, som vi har benyttet som absorber, er der for eksempel et svagt kvadropolsplit.

Vi vil derfor i dette appendix vise, at hvis ω_a varierer, betyder det blot, at der i ligning (8.5) kommer en ekstra temperaturuafhængig størrelse.

Vi antager derfor at ω_a har en sandsynlighedstæthed $P(\omega_a)$. Udtrykket (8.5) gælder derfor kun, hvis der betinges med ω_a . Det generelle udtryk for $A(\Delta\omega)$ fås ved at "blande" over ω_a :

$$\frac{\sigma_0}{2\tau} \int \int e^{-it\Delta\omega} e^{-2|t|/\tau} e^{it(\omega_a - \omega_e)} P(\omega_a) \int e^{i\vec{r} \cdot \vec{k}_a} G_s^a(\vec{r}, t) d\vec{r} \int e^{i\vec{r} \cdot \vec{k}_e} G_s^e(\vec{r}, t) d\vec{r} dt d\omega_a$$

hvorved vi får:

$$(1) \quad F^{-1}\{A(\Delta\omega), t\} = \frac{\sigma_0}{2\tau} e^{-2|t|/\tau} e^{-it\omega_e} \int e^{it\omega_a} P(\omega_a) d\omega_a \int G_s^a(\vec{r}, t) d\vec{r} \int G_s^e(\vec{r}, t) d\vec{r}$$

Kaldes middelværdien af ω_a for ω_m får vi for $F_A(t)$:

$$(2) \quad F_A(t) = \int A(\Delta\omega) e^{it(\Delta\omega - (\omega_m - \omega_e))} d\Delta\omega \\ = \frac{\sigma_0}{2\tau} e^{-2|t|/\tau} e^{-it\omega_m} F^{-1}\{P(\omega_a), t\} F\{g_s^a + g_s^e, 1\}$$

Idet $P(\omega_a)$ kan antages for temperaturuafhængig, kan temperaturafhængigheden af $F_a(t)$ stadig som omtalt side 94 bestemmes udfra $-\ln F_A(t)$.

-
1. Hvis $P(\omega_a)$ ikke er en tæthed - men diskret - skal den fourier-transformerede $F^{-1}\{P(\omega_a), t\}$ blot erstattes med de fourier-stieljes-transformerede af ω_a 's fordelingsfunktion.

APPENDIX V.

Numerisk behandling af Mössbauer-data'ene.

Som vi før har set, skal vi for at bestemme breddefunktionen $\Gamma_a(t)$ udregne $F_D(t)$, hvor

$$D(\Delta\omega) = \frac{B - N(\Delta\omega)}{B}$$

Vi skal altså bestemme

$$F_D(t) = \int_{-\infty}^{\infty} D(\Delta\omega) e^{it(\Delta\omega - (\omega_e - \omega_a))} d\Delta\omega$$

For nemheds skyld sættes $\omega_e - \omega_a$ (som er lig middelværdien af $A(\Delta\omega)$) og lig tyngdepunktet af $D(\Delta\omega)$ lig $\Delta\omega_T$.

Da vi endvidere antager at $A(\Delta\omega)$ og dermed $D(\Delta\omega)$ er symmetrisk om $\Delta\omega_T$ fås:

$$(1) \quad F_D(t) = \int_{-\infty}^{\infty} D(\Delta\omega) \cos t(\Delta\omega - \Delta\omega_T) d(\Delta\omega)$$

I den konkrete opstilling er hastigheden v af drevet givet ved:

$$(2) \quad v = \frac{v_o (J-128.5)}{127.5}$$

hvor J er kanalnummeret og v_o er hastighedsamplituden.

Vi indfører derefter substitutionen

$$(3) \quad \Delta\omega = \frac{v}{c} \omega_e = \frac{v_o \omega_e}{c \cdot 127.5} (J-128.5) \text{ og}$$

$$(4) \quad \Delta\omega_T = \frac{v_o \omega_e}{c \cdot 127.5} (J_T - 128.5)$$

hvorved man får

$$(5) \quad F_D(t) = \frac{v_o \omega_e}{c \cdot 127.5} \int_{-\infty}^{\infty} D_J \cos \left(\frac{v_o \omega_e}{c \cdot 127.5} t(J - J_T) \right) dJ$$

hvor D_J er indført som forkortelse for $D(\frac{v_o \omega_e}{c \cdot 127.5} (J-128.5))$

Vi omskriver $F(t)$ og bortkaster konstanten $\frac{v_o \cdot \omega_e}{c \cdot 127.5}$, som blot indgår som en ny additiv konstant i $F(t)$, som vi jo oprindelig er interesseret i:

$$\begin{aligned}
 F_D(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_2^{256} D_{J+254n} \cos\left(\frac{v_o \omega_e}{c \cdot 127.5} t (J+254n - J_T)\right) dJ \\
 &= \int_2^{256} \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_{J+254n} \cos\left(\frac{v_o \omega_e}{c \cdot 127.5} t (J+254n - J_T)\right) dJ \\
 (6) \quad &= \int_2^{256} \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_{j+254n} (\cos\frac{v_o \omega_e}{c \cdot 127.5} t (J - J_T)) \cos\frac{v_o \omega_e}{c \cdot 127.5} 254n \\
 &\quad - \sin\left(\frac{v_o \omega_e}{c \cdot 127.5} t (J - J_T)\right) \sin\left(\frac{v_o \omega_e}{c \cdot 127.5} 256n\right) dJ
 \end{aligned}$$

Vi vil nu kun udregne $F_D(t)$ for bestemte værdier af t , nemlig for

$$(7) \quad t = t_j = \frac{2\pi j c \cdot 127.5}{v_o \omega_e 254} \quad (j=0,1,2,\dots)$$

Vi får dermed

$$(8) \quad F_D(t_j) = \int_2^{256} \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_{J+254n} \cos\frac{v_o \omega_e t_j}{c \cdot 127.5} (J - J_T) dJ$$

Vi sætter nu $D_J^P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_{J+254n}$ og ser, at D_J^P er periodisk med perioden 254.

D_J^P stemmer overens med D_J på intervallet $[2, 256]$, hvis og kun hvis $D_J=0$ for $J \notin [2, 256]$.

Vi antager derfor $D_J=0$ for $J \notin [2, 256]$. Herved får vi

$$(9) \quad F_D(t_j) = \int_2^{256} D_J \cos\frac{2\pi j (J - J_T)}{254} dJ$$

hvor det er klart, at D_J netop er den beregnede D i kanal nummer J . (Det er jo derfor substitutionen så ud som den gjorde) og J_T er kanaltallet for tyngdepunktet af D .

Da vi kender D_J for $J=2, \dots, 255$ kan vi udregne integralet numerisk ved hjælp af trapez-reglen og får:

$$(10) \quad F_D(t_j) = \sum_{J=2}^{255} D_J \cos\frac{2\pi j}{254} (J - J_T)$$

I den konkrete udregning er D_J beregnet som

$$(11) \quad D_J = \frac{B - N_J}{B} \cdot 100$$

således at D_J er angivet i procent af baggrunden. Endvidere er den diskrete fouriertransformation normeret med 127, således at F_D er

$$(12) \quad F_D(t_j) = \frac{100}{127} \sum_{j=2}^{255} \frac{B - N_j}{B} \cos \frac{2\pi j}{254} (J - J_T)$$

APPENDIX VI.

Resultater.

I det følgende præsenteres resultaterne af vores målinger ved temperaturerne 280°K , 300°K og 340°K .

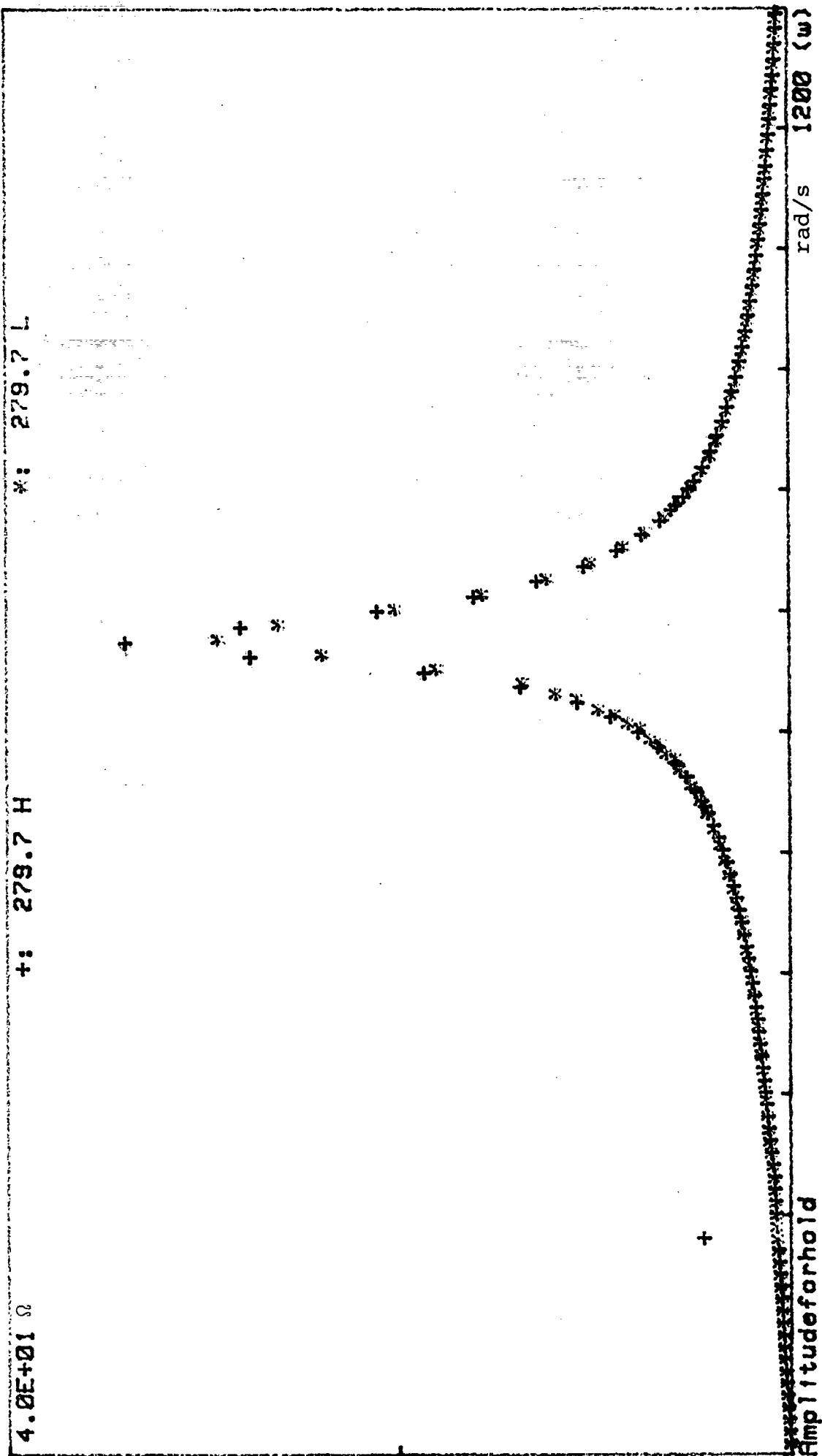
Først resultaterne af de mekaniske impedansmålinger, som er omtalt i kapitel 9:

- a) Amplitudeforholdet mellem strøm og spænding
- b) faseforskydningen
- c) de beregnede værdier for $\hat{G}'(\omega)$ (se fig.10.1)

Dernæst resultaterne af Mössbauereffektmålingerne, som er omtalt i kapitel 8:

- a) Spektrene
- b) de rene fouriertransformerede af disse
- c) forskellen mellem de rene fouriertransformerede og referencens.

Afslutningsvis præsenteres fig.10.6. i A4-format.



$4.0E+01$ 8

H 278.7

L 279.7

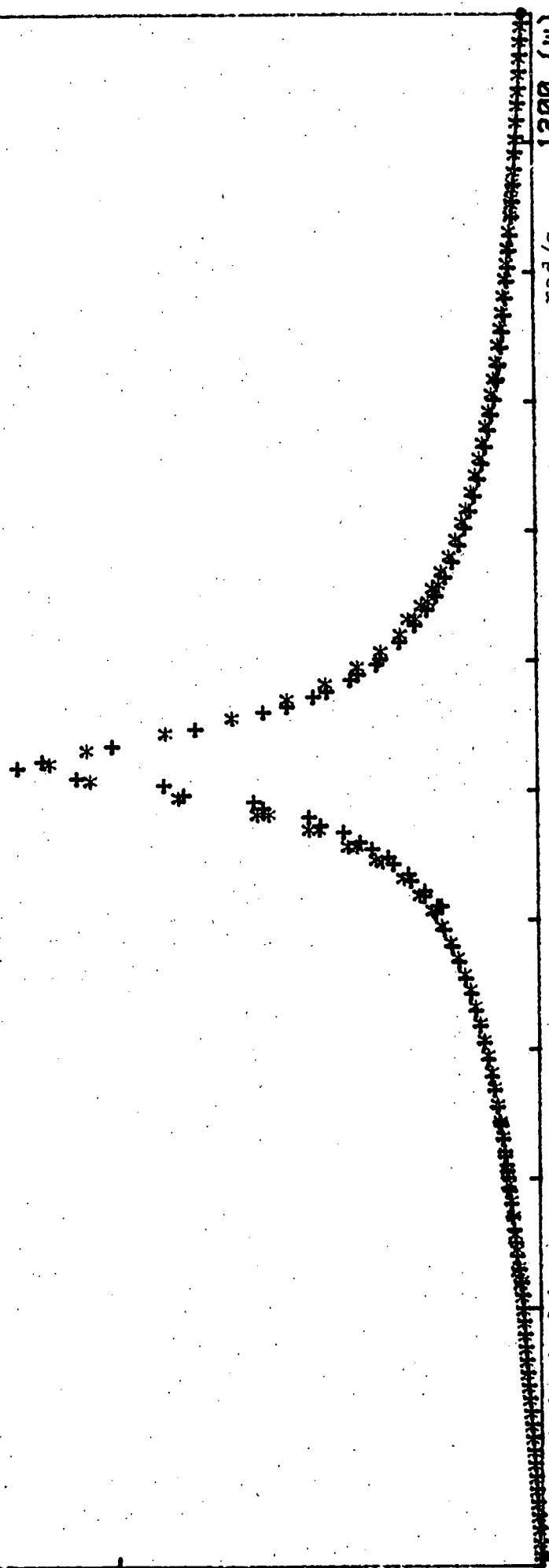
W 279.7

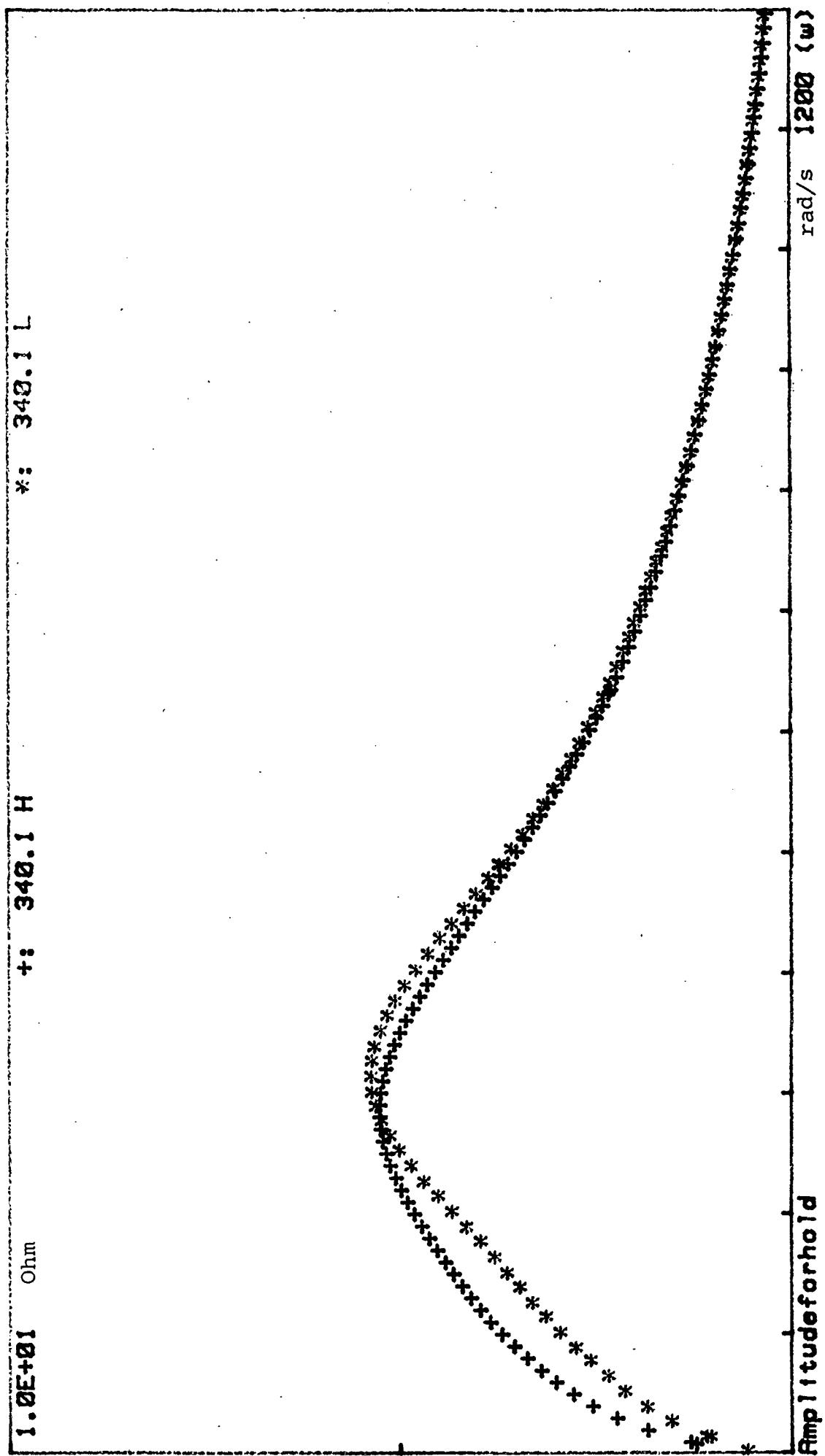
4.0E+01 Ω
+: 300.4 H *: 300.4 L

Amplitude of hold

1200 (w)

rad/s





1.0E+01 Ohm

+: 348.1 H

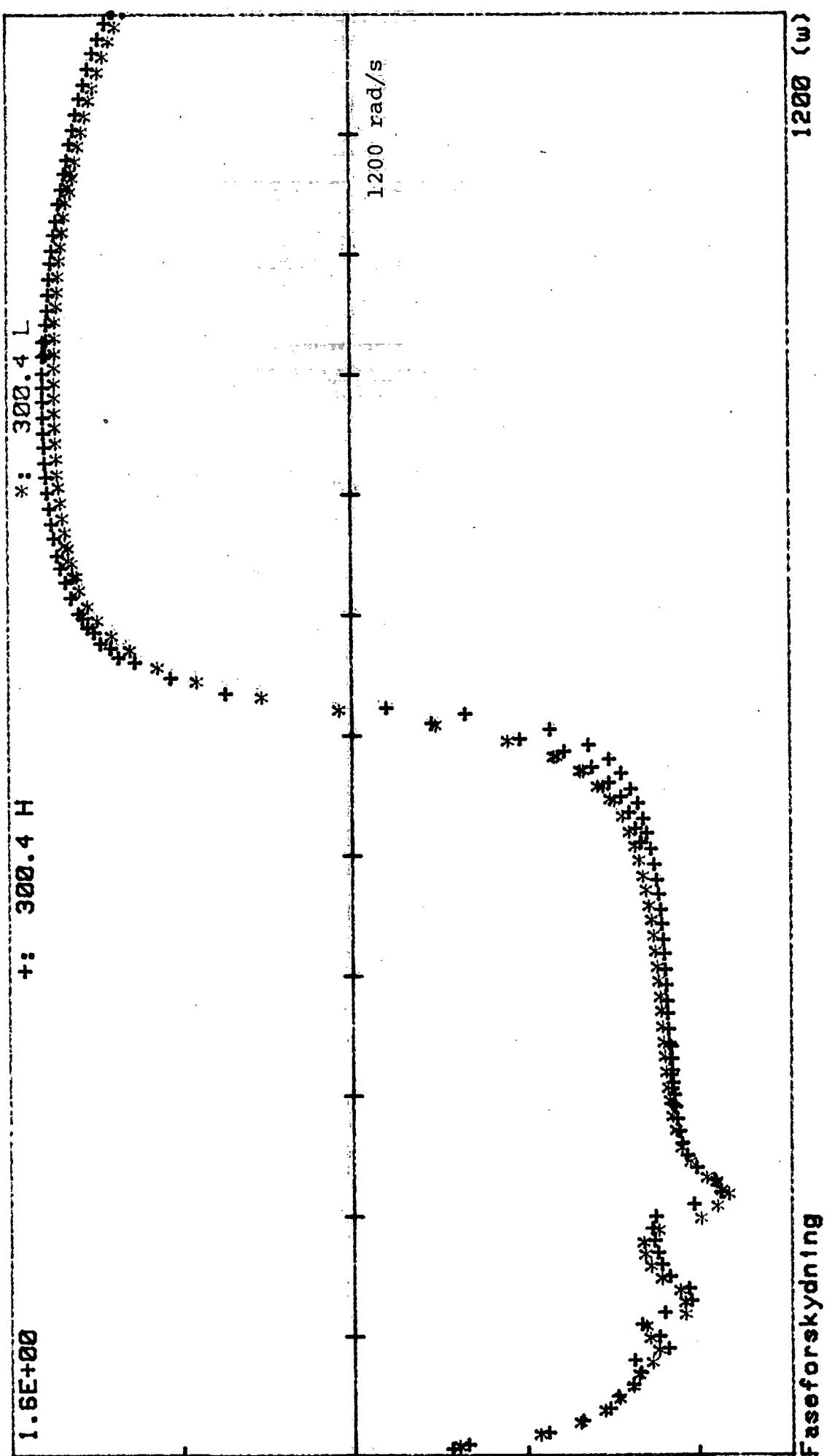
*: 348.1 L

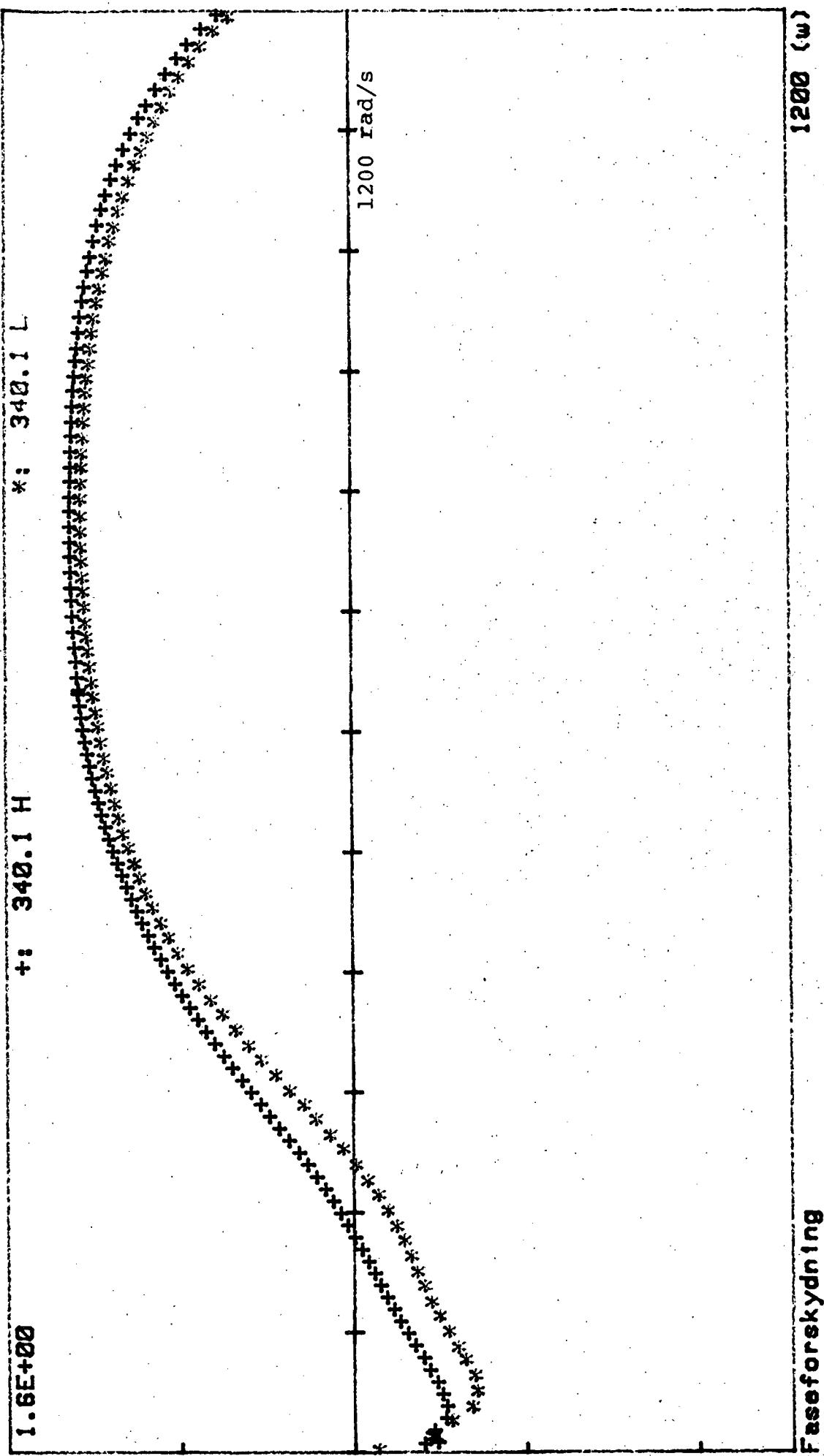
1200 (w)

Faseforeskydning

+ : 279.7 H * : 279.7 L 1.6E+00

1200 rad/s

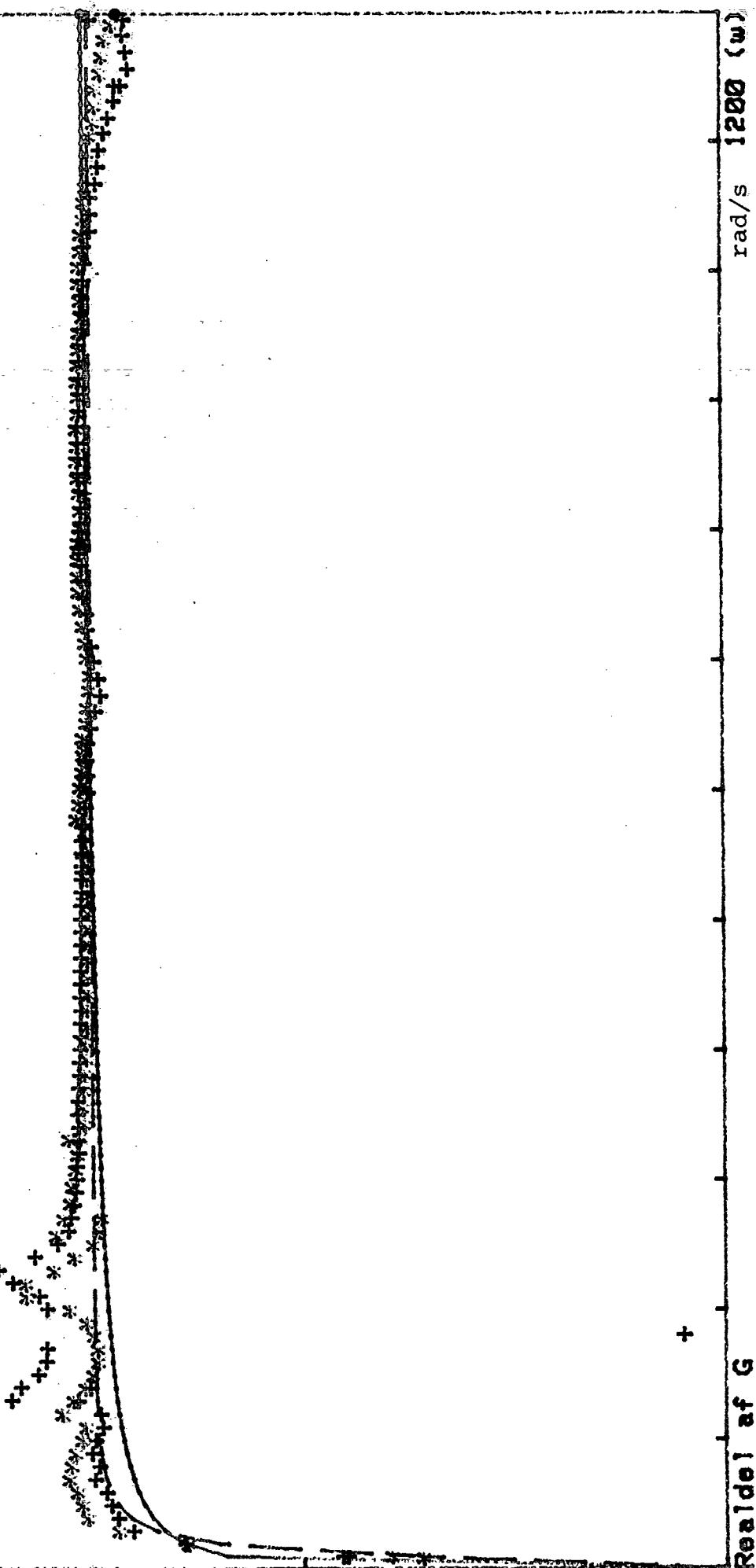


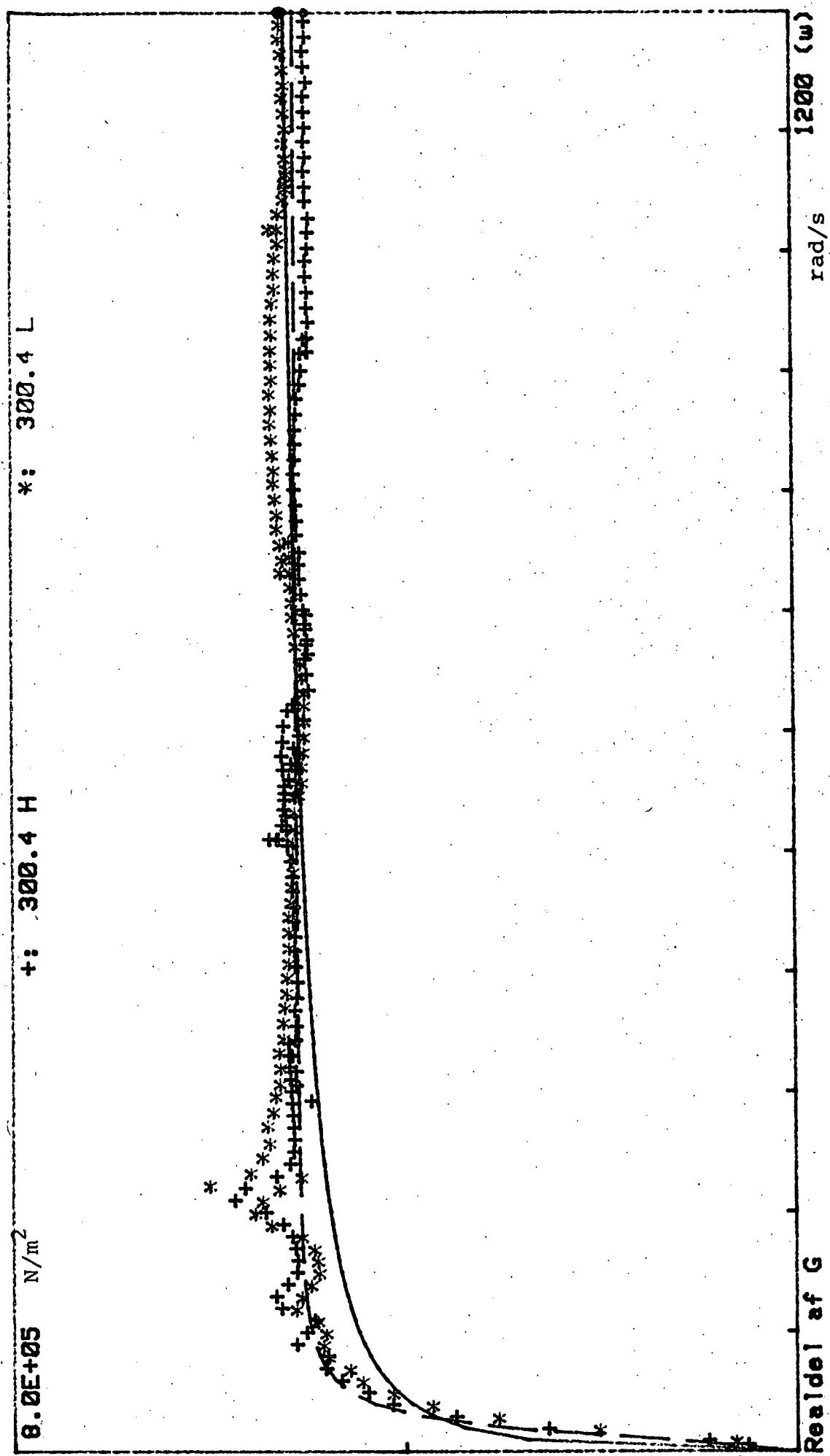


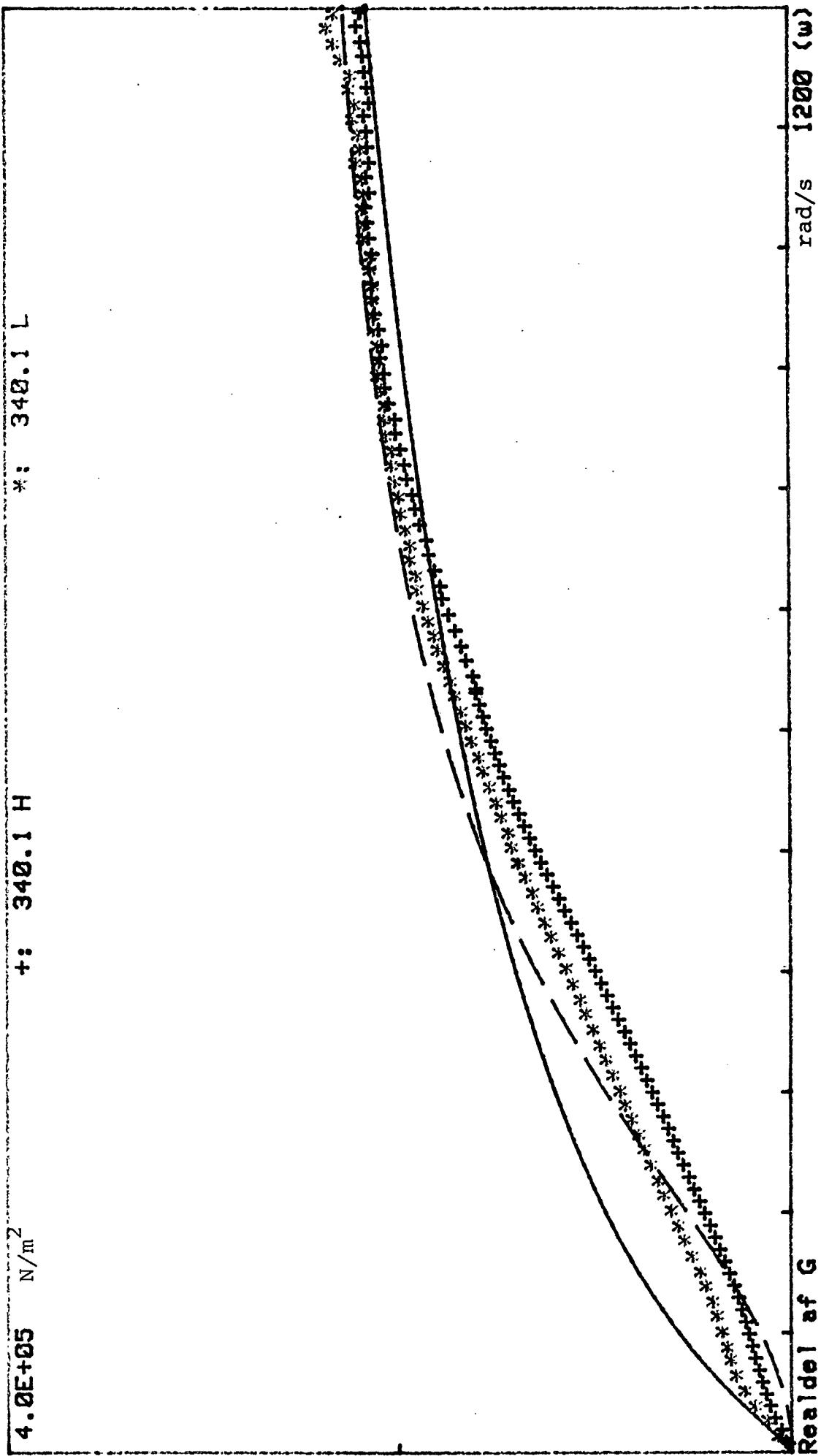
8.0E+05 N/m²

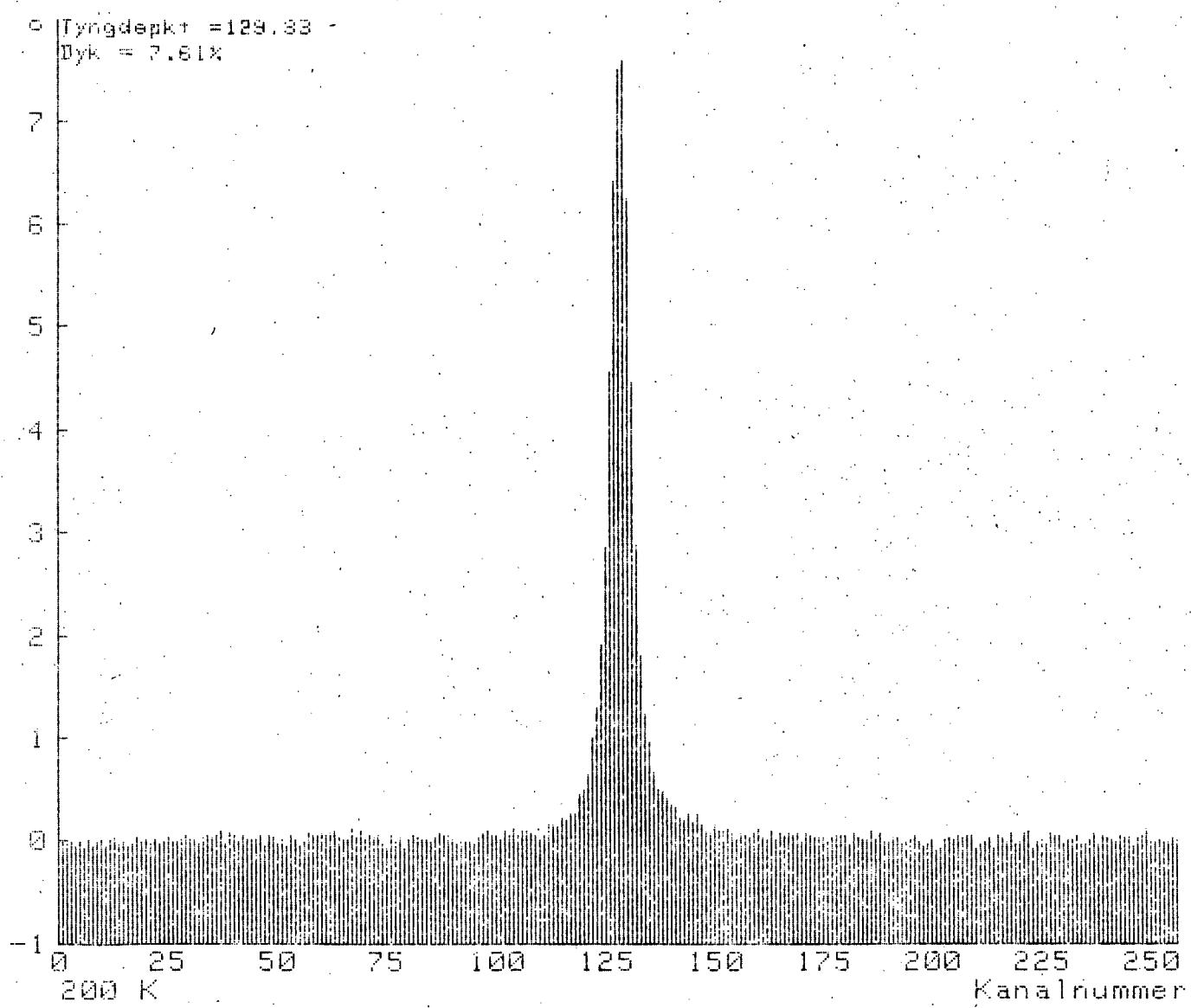
+ : 279.7 H

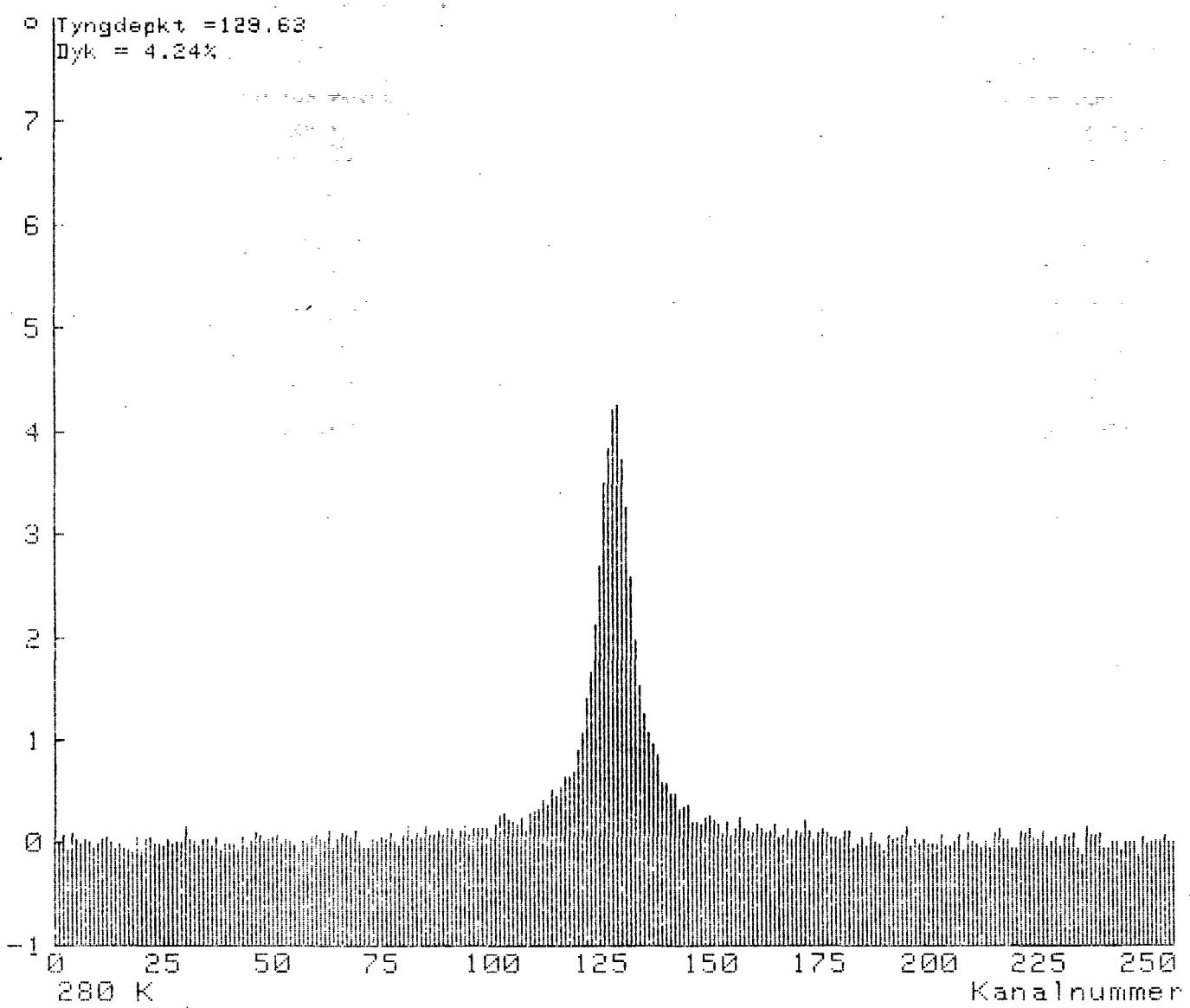
* : 279.7 L

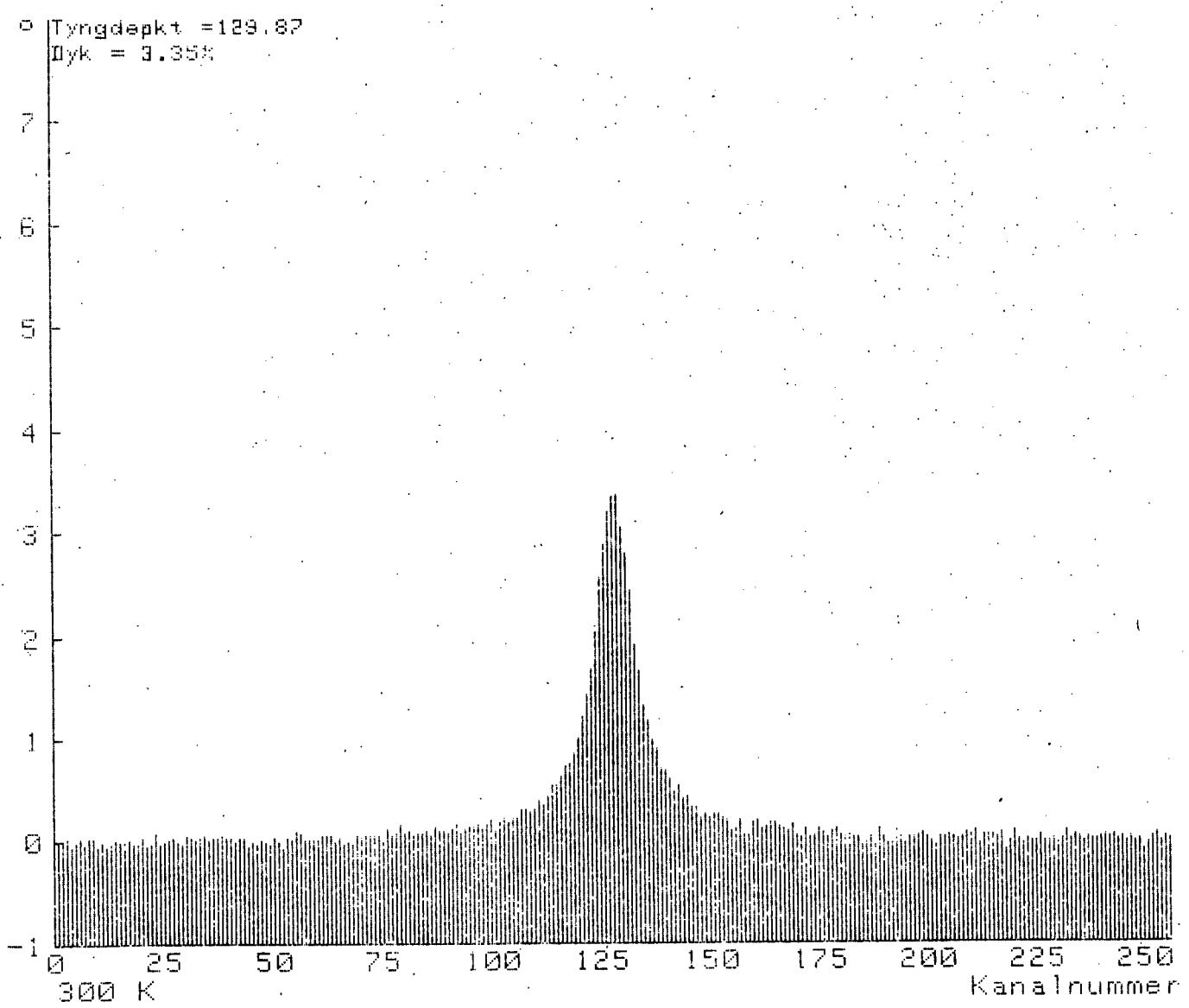


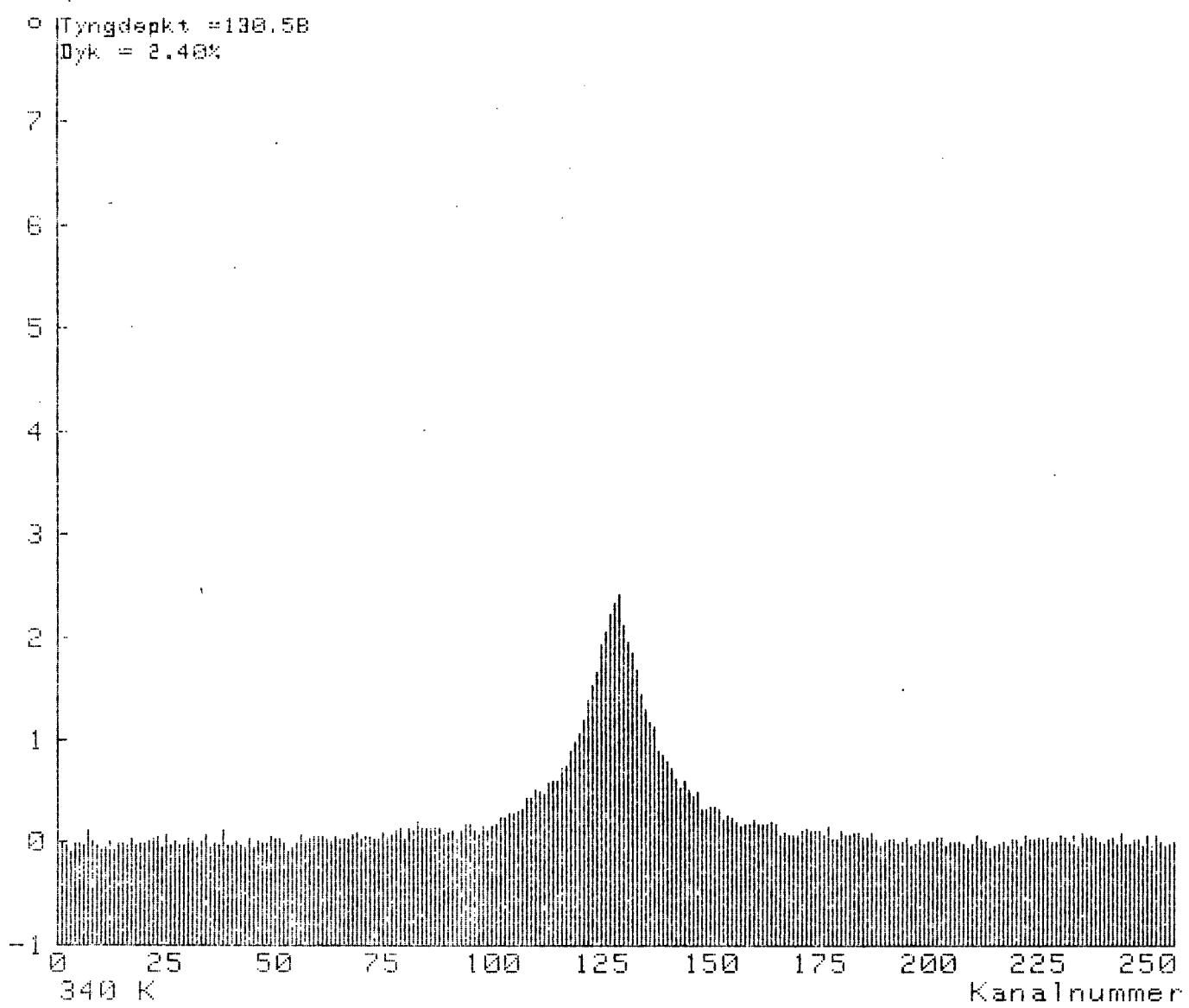


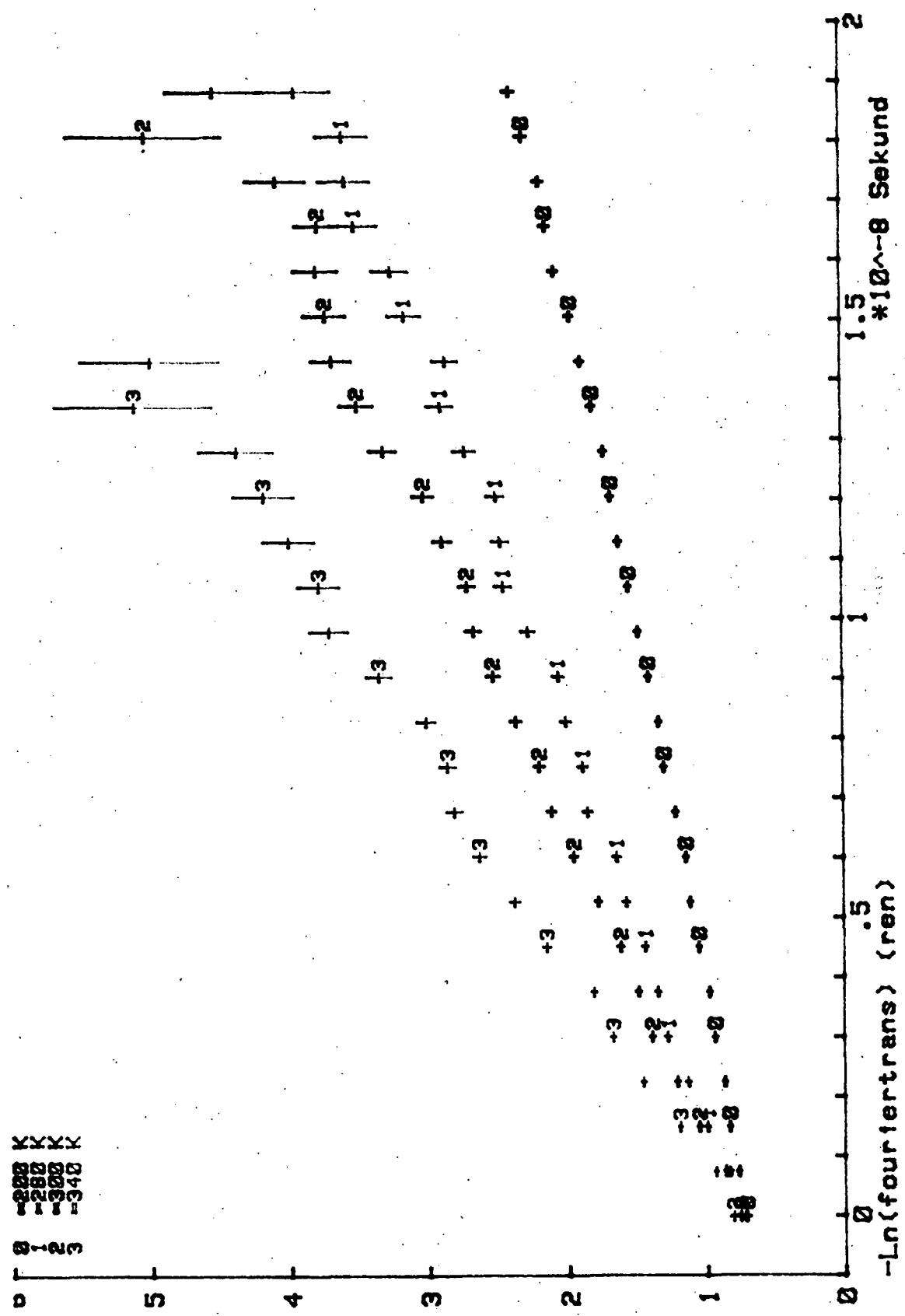


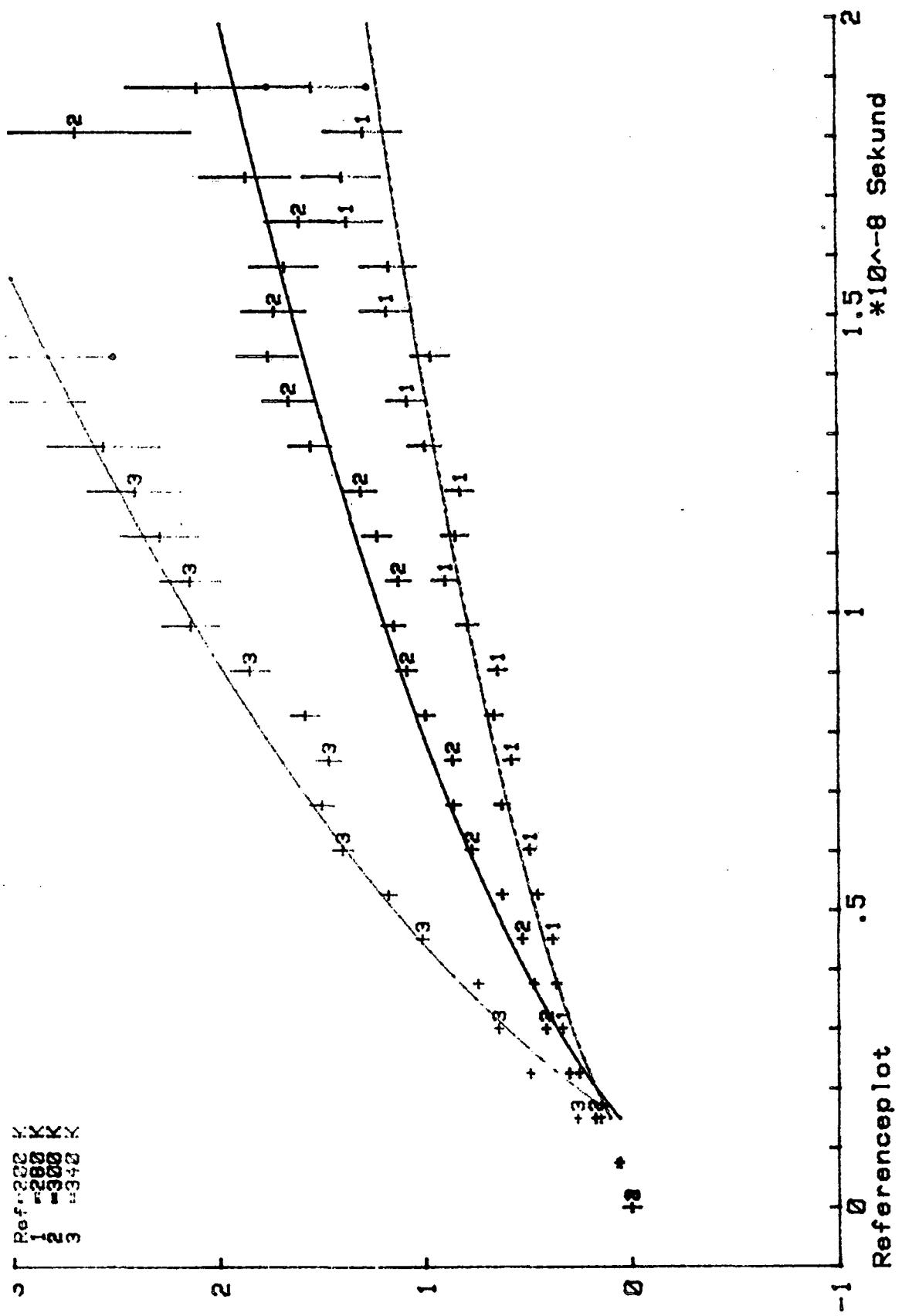


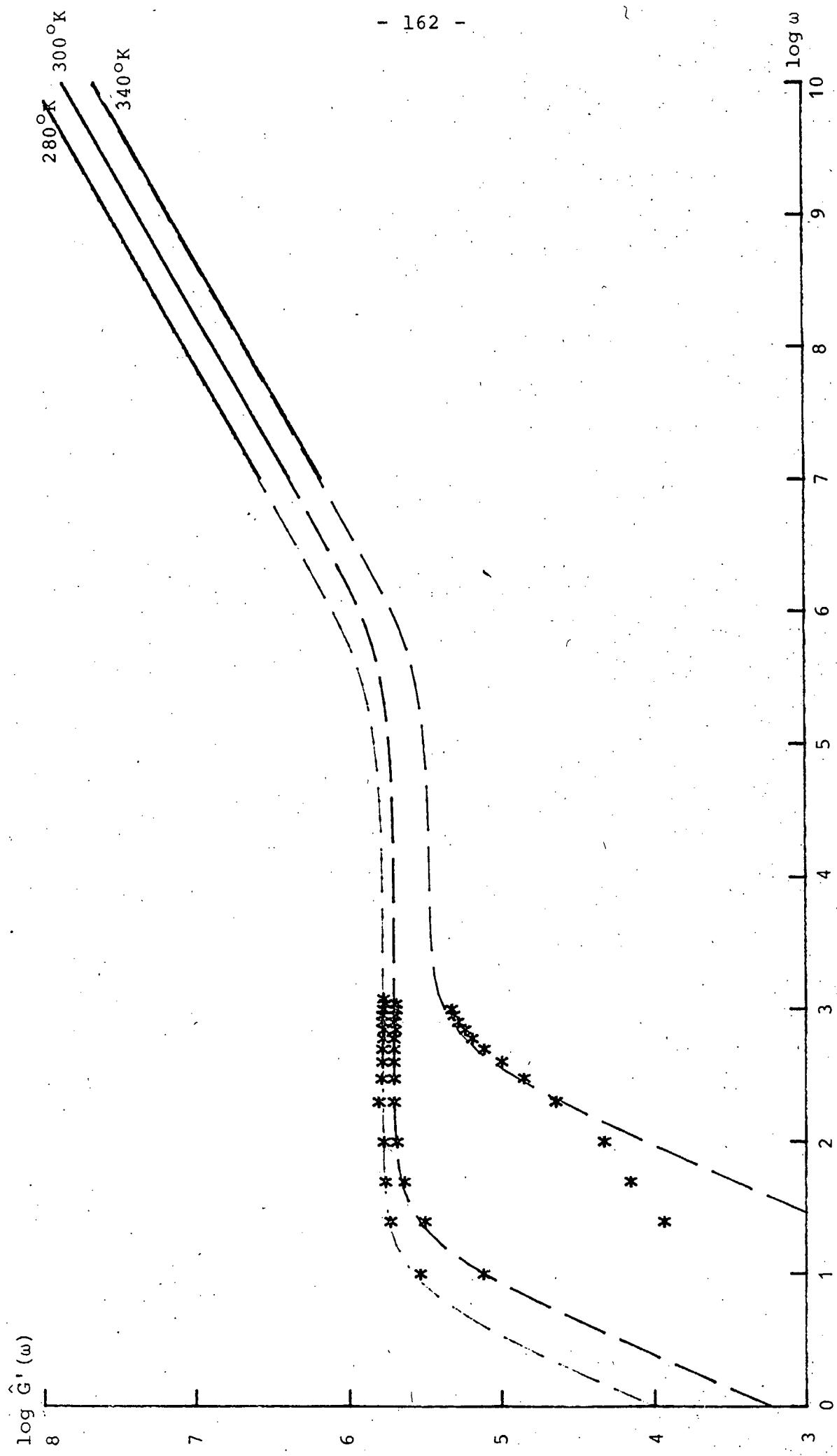












APPENDIX VII

Program til behandling af Mössbauerdataene.

```

10 ! **** MOS-FT ****
20 ! MOS-FT 4
30 ! ****
40 COM B$(6)T801,F(32,6),Ymin,Ymax,Xfmax,Ftmin,Ftmax,Xmax,Smlmin,Smlmax,Kj
def$,Hast
50 COM Sp(260,6),Key
60 DIM A$(256),X(260)
70 INTEGER Xspan(2)
80 IF Key=0 THEN LOAD KEY "MOSKEY"
90 Key=1
100 ! ****
110 Spind: ! PROCEDURE TIL INDLAESNING AF TAPE
120 ! ****
130 EXIT GRAPHICS
140 PRINTER IS 16
150 SET TIMEOUT 3;500
160 ON INT #3 GOTO Tapecheck
170 Dummy=0
180 MAT X=ZER
190 PRINT PAGE
200 CONVERT 3;"I"," " TO ",",1
210 READ IO 3,4;Read4
220 WAIT 500
230 Om: STATUS 3;Status
240 READ IO 3,5;Readio
250 IF (IOFLAG(3)=0) AND (Status>49) OR (Readio<46) THEN DISP "POWER ON TAPEREDER
!!! Tryk CONT herefter."
260 IF (IOFLAG(3)=0) AND (Status>49) OR (Readio<46) THEN BEEP
270 IF (IOFLAG(3)=0) AND (Status>49) OR (Readio<46) THEN PAUSE
280 IF (IOFLAG(3)=0) AND (Status>49) OR (Readio<46) THEN Om
290 IF Status<49 THEN DISP "Anbring typen korrekt i tapereader!! tryk CONT der
efters"
300 IF Status<49 THEN BEEP
310 IF Status<49 THEN PAUSE
320 IF Status<49 THEN Om
330 DISP
340 ON ERROR GOTO 350
350 ENTER 3;A$
360 IF A$(2,6)="GROUP" THEN 350
370 OFF ERROR
380 FOR J=1 TO 256 STEP 8
390 ENTER 3 USING "F";Dummy,X(J),X(J+1),X(J+2),X(J+3),X(J+4),X(J+5),X(J+6),X(J+
7)
400 NEXT J
410 Tapecheck: IF Dummy=0 THEN Om
420 Tapeend: !
430 ! ****
440 ! BAGGRUND FINDES OG SPEKTRET VENDES
450 ! ****
460 INPUT "HVOR MANGE KANALER I HVER SIDE TIL BAGGRUND?",Nbag
470 Ydersum=Min=Max=Sdata=Sum=0
480 FOR I=2 TO Nbag
490 Ydersum=Ydersum+X(I)+X(257-I)
500 NEXT I
510 Baggrund=Ydersum/(2*(Nbag-1))
520 X(1)=X(256)=0
530 FOR I=2 TO 255
540 X(I)=(1-X(I)/Baggrund)*100
550 Max=MAX(X(I),Max)
560 Min=MIN(X(I),Min)
570 Sdata=Sdata+I*X(I)
580 Sum=Sum+X(I)
590 NEXT I
600 Tyngdepunkt=Sdata/Sum
610 ! ****
620 ! HER TILKNYTTES SPEKTRET IDENTIFIKATIONER OG YDRE PARAMETRE
630 ! ****
640 Id=0
650 PLOTTER IS "GRAPHICS"
660 LOCATE 7,119.8,6,100

```

```

670 PRINTER IS 16
680 PRINT PAGE,"For at kunne sammenligne flere spektre, skal spektret"
690 PRINT "tilknyttes et tal (udelukkende til maskinbrug)."
700 CALL Omnr(L,0,Id)
710 Husk=L
720 F(0,Husk)=0
730 IF Hast>0 THEN H=1
740 IF Hast>0 THEN S10
750 N_hast: PRINT PAGE
760 INPUT "HVILKEN KILDE ER BRUGT?",Kilde$
770 IF (Kilde$(1,1)="F") OR (Kilde$(1,1)="S") THEN 800
780 PRINT PAGE,"KILDEN KAN IKKE IDENTIFICERES"
790 GOTO 760
800 INPUT "HVILKEN HASTIGHED HAR DREVET (CM/S pr kanal)",Hast
810 IF Kilde$(1,1)="F" THEN F(30,Husk)=3.363022E-11/Hast
820 FOR I=1 TO 256
830 Sp(I,Husk)=X(I)
840 NEXT I
850 Sp(260,Husk)=Tyngdepunkt ! * de sidste numre i spektrumsarrayet *
860 Sp(259,Husk)=Max ! * bruges til tyngdepunkt, max og min *
870 Sp(258,Husk)=Min ! ****
880 IF Kilde$(1,1)="S" THEN F(30,Husk)=2.0347696E-11/Hast
890 ! ****
900 F(29,Husk)=Baggrund ! * de sidste numre i fourierarrayet *
910 F(28,Husk)=Nbag-1 ! * bruges til kildehastighed, storelse *
920 IF H=1 THEN 1000 ! * af baggrund og antal kanaler der er *
930 ! * brugt til bestemmelse af baggrund *
940 ! ****
950 PRINT PAGE,"ALLE PROCEDURERNE UDFØRES VED HJÆLP AF NØGLERNE."
960 PRINT "NAAR DU HAR KALDT EN PROCEDURE, VIL DER LYDE ET BEEP (LIGESOM"
970 PRINT "DET DU HØRTE NU) NAAR DEN ER FORBI. DU KAN SAA TRYKKE EN NY"
980 PRINT "NØGLE NED"
990 GOTO Loop
1000 EXIT GRAPHICS
1010 PRINT PAGE,"KILDEN ER ",,Kilde$
1020 PRINT LIN(1),"HASTIGHEDEN AF DREV ER ",Hast;"cm/s"
1030 PRINT LIN(1),"HVIS DE SKAL LAVES OM, BRUG HAST-NØGLEN"
1040 ON ERROR GOTO Katastrofe
1050 ! ****
1060 ! PROCEDURERNE UDFØRES FRA NØGLERNE
1070 ! ****
1080 Loop: BEEP
1090 L=Husk
1100 Gclear=0
1110 Igen: ON KEY #0 GOTO Sfast
1120 ON KEY #16 GOTO Sfly
1130 ON KEY #11 GOTO Ftppapir
1140 ON KEY #27 GOTO Ftdisp
1150 ON KEY #1 GOTO Ftfast
1160 ON KEY #17 GOTO Ftfly
1170 ON KEY #2 GOTO Sm1fast
1180 ON KEY #18 GOTO Sm1fly
1190 ON KEY #5 GOTO Dump
1200 ON KEY #8 GOTO F1
1210 ON KEY #9 GOTO F2
1220 ON KEY #10 GOTO F3
1230 ON KEY #3 GOTO Mark
1240 ON KEY #4 GOTO Andet
1250 ON KEY #19 GOTO Nyid
1260 ON KEY #20 GOTO N_hast
1270 ON KEY #12 GOTO Crt
1280 ON KEY #28 GOTO Extplot
1290 ON KEY #14 GOTO N_sp
1300 ON KEY #6 GOTO Spind
1320 GOTO Igen
1330 ! ****
1340 Katastrofe:PRINTER IS 16
1350 EXIT GRAPHICS
1360 PRINT PAGE,"DU HAR LAVET EN ALVORLIG FEJL; PROV NØGLEN EN GANG T
IL"

```

```

1370 GOTO Loop
1400 Crt: ! *****
1401     ! PLOTTER IS CTR.
1402     !
1410     DISP
1420     PLOTTER IS "GRAPHICS"
1430     IF Status>10 THEN OUTPUT 705;"SP0"
1440     LOCATE 7,119.8,6,100
1450 GOTO Loop
1460 Extplot: ! *****
1461     ! PLOTTER IS 9872A
1462     !
1470     EXIT GRAPHICS
1480     GCLEAR
1490     PRINTER IS 16
1500     PRINT PAGE
1510     SET TIMEOUT 7;500
1520     ON INT #7 GOTO Pow
1530     STATUS 705;Status
1540 Pow:  IF Status=1 THEN DISP "POWER ON 9872A !! Tryk CONT derefter"
1550     IF Status=1 THEN BEEP
1560     IF Status=1 THEN PAUSE
1570     IF Status=1 THEN 1530
1580     PLOTTER IS 7,5,"9872A"
1590     ON ERROR GOTO Err
1600 Err:  IF IOFLAG(7)=0 THEN 1600
1610     OUTPUT 705;"IP288,1070,10676,7026"
1620     OUTPUT 705;"OE"
1630     ENTER 705;Errorp
1640     IF Errorp<>0 THEN PRINT PAGE,"Fejl nr. ";Errorp;"for plotteren"
1650     IF Errorp<>0 THEN BEEP
1660     IF Errorp<>0 THEN PAUSE
1670     LOCATE 7,149.5,6,100
1680     DISP CHR$(130); "PLOTTER ER 9872A",CHR$(128)
1690 GOTO Loop
1700 N_sp: ! *****
1701     ! NYT SPEKTRUM I ARBEJDSLAKER
1702     !
1710     PRINTER IS 16
1720     EXIT GRAPHICS
1730     PRINT PAGE
1740     FOR I=0 TO 6
1750     PRINT "Nr. ";I;" = ";B$(I)
1760     NEXT I
1770     INPUT "HVILKET NUMMER SKAL I ARBEJDSLAKERET",Husk
1780     PRINT PAGE;"DU ARBEJDER NU MED. ";B$(Husk)
1790 GOTO Loop
1800 Sfast: ! *****
1810     ! PLOT AF SPEKTRET
1820     !
1830     Id=3
1840     IF Ysmax<>0 THEN Er_sat
1850 F1:   Fejl=1
1860     PRINTER IS 16
1870     PRINT PAGE
1880     INPUT "ANGIV AKSEGRAENSER FOR SPEKTRET; Ymin,Ymax",Ymin,Ymax
1890     IF Ysmax<=Ysmin THEN Error
1900 Er_sat:CALL Plota(Sp(*),Ysmin,Ysmax,L)
1910 GOTO Loop
1920 Sflyt: !
1930     Id=3
1940     CALL Plota(Sp(*),Sp(258,L),Sp(259,L),L)
1950 GOTO Loop
1960 Ftpapir: ! *****
1970     ! UDSKRIFT OG OPKALD AF FOURIERANALYSE
1980     !
1990     PRINTER IS 0
2000 Check:IF F(0,L)>0 THEN Ftok
2010     CALL Ft(Sp(*),(L))
2020 GOTO Loop

```

```

2030 Ftdisp!: -----
2040     EXIT GRAPHICS
2050     PRINTER IS 16
2060     PRINT PAGE
2070     GOTO Check
2080 Ftokt!: -----
2090     PRINT LIN(2),B$(L),LIN(1)
2100     PRINT " ", "Fouriertrans", "-LN(fouriertrans)", LIN(1)
2110     J=0
2120     IF F(J,L)<=0 THEN Loop
2130     PRINT "Nr"; J, F(J,L), -LOG(F(J,L))
2140     J=J+1
2150     GOTO 2120
2160 Ftfast!: *****
2170     ! PLOT AF FOURIERKOMPONENTER
2180     ! *****
2190 I1: IF F(0,L)=0 THEN Ikke_udfort
2200 IF Ftmax<>0 THEN 02k
2210 F2: Fej1=2
2220 PRINTER IS 16
2230 PRINT PAGE
2240 INPUT "ANGIV AKSEGRAENSER FOR FT-PLOT (Xmax, Ymin, Ymax)", Xfmax, Ftmin
, Ftmax
2250 IF (Xfmax<=0) OR (Ftmax<=Ftmin) THEN Error
2260 02k: Id=5
2270 CALL Plot((Xfmax),(Ftmin),(Ftmax),(L),Gc1ear,F(30,L),Id)
2280 GOTO Loop
2290 Ftfly!: -----
2300 Id=4
2310 IF F(0,L)=0 THEN Ikke_udfort
2320 GOSUB Hjaelp
2330 CALL Plot((J-1)*F(30,L),-LOG(F(0,L)),(Yftmax),(L),0,F(30,L),Id)
2340 GOTO Loop
2350 Hjaelp!: -----
2360 J=0
2370 IF F(J,L)<=0 THEN RETURN
2380 Yftmax=MAX(-LOG(F(J,L)),Yftmax)
2390 J=J+1
2400 GOTO 2370
2410 Sm1fast!: *****
2420     ! PLOT AF FOURIERKOMPONENTER MINUS REFERENCE SPEKTRUM
2430     ! *****
2440 12: IF (F(0,0)<=0) OR (F(0,L)<=0) THEN Ikke_udfort
2450 IF F(30,0)<>F(30,L) THEN Forsk
2460 IF Sm1max<>0 THEN 03k
2470 Fej1=3
2480 PRINTER IS 16
2490 PRINT PAGE
2500 F3: INPUT "ANGIV AKSEGRÆNSER FOR FT-SAMMENLIGNINGEN (Xmax, Ymin, Ymax)", Xsmax, Sm1min, Sm1max
2510 IF (Xsmax<=0) OR (Sm1max<=Sm1min) THEN Error
2520 03k: Id=10
2530 CALL Plot((Xsmax),(Sm1min),(Sm1max),(L),Gc1ear,F(30,L),Id)
2540 GOTO Loop
2550 Sm1fly!: -----
2560 Id=6
2570 EXIT GRAPHICS
2580 IF L=0 THEN PRINT PAGE, 'REF-SPEKTRET KAN IKKE SAMMENLIGNES MED SIG SE
LV'
2590 IF L=0 THEN Loop
2600 IF (F(0,0)<=0) OR (F(0,L)<=0) THEN Ikke_udfort
2610 IF F(30,0)<>F(30,L) THEN Forsk
2620 GOSUB Sm1
2630 CALL Plot((J-1)*F(30,L),LOG(F(0,0)/F(0,L)),Smax,(L),0,F(30,L),Id)
2640 GOTO Loop
2650 Sm1t!: -----
2660 J=0
2670 IF (F(J,0)<=0) OR (F(J,L)<=0) THEN RETURN
2680 Smax=MAX(LOG(F(J,0)/F(J,L)),Smax)
2690 J=J+1

```

```

2700      GOTO 2670
2710 Forsk:PRINTER IS 16
2720      PRINT PAGE,"HASTIGHEDERNE ER FORSKELLIGE; DE KAN IKKE SAMMENLIGNES"
2730      GOTO Loop
2740 Mark:! ****
2750      ! PROCEDURE TIL AT OPSPLITTE SPEKTRET I HALVE LINIER
2760      ! ****
2770 EXIT GRAPHICS
2780      IF Id=3 THEN 05
2790      PRINTER IS 16
2800      PRINT PAGE,"PROCEDUREN KAN KUN BRUGES I FORBINDELSE MED DATA-SPEKTRE"
2810      GOTO Loop
2820 05:   Id=7
2830      CALL Omnr(L,Husk,Id)
2840      F(30,L)=F(30,Husk)
2850      F(29,L)=F(29,Husk)
2860      F(28,L)=F(28,Husk)
2870      GRAPHICS
2880      PRINTER IS 0
2890      FOR I=1 TO 2
2900      DIGITIZE Xspan(I),Y
2910      NEXT I
2920      Xspmax=MAX(Xspan(1),Xspan(2))
2930      Xspmin=MIN(Xspan(1),Xspan(2))
2940      IF Sp(Xspmax,Husk)>Sp(Xspmin,Husk) THEN Venstre
2950      B$(L)=B$(L)&" | HØJRE"
2960      FOR I=Xspmin+1 TO Xspmax+1
2970      Sp(I-Xspmin,L)=Sp(I,Husk)
2980      NEXT I
2990      FOR I=Xspmax+2 TO 260+Xspmin
3000      Sp(I-Xspmin,L)=0
3010      Sp(258,L)=Sp(258,Husk)
3020      Sp(259,L)=Sp(259,Husk)
3030      Sp(260,L)=1
3040      CALL Plota(Sp(*),Sp(258,L),Sp(259,L),L)
3050      CALL Ft(Sp(*),(L))
3060      GOTO Loop
3070 Venstre:B$(L)=B$(L)&" | VENSTRE"
3080      FOR I=Xspmax-1 TO Xspmin-1 STEP -1
3090      Sp(Xspmax-I,L)=Sp(I,Husk)
3100      NEXT I
3110      FOR I=Xspmin-2 TO Xspmax-260 STEP -1
3120      Sp(Xspmax-I,L)=0
3130      Sp(259,L)=Sp(259,Husk)
3140      Sp(258,L)=Sp(258,Husk)
3150      Sp(260,L)=1
3160      CALL Plota(Sp(*),Sp(258,L),Sp(259,L),L)
3170      PRINTER IS 0
3180      CALL Ft(Sp(*),(L))
3190      GOTO Loop
3200 Nyid:! ****
3210      PRINTER IS 16
3220      PRINT PAGE,"DU KAN NU ANGIVE ET NYT ID-TAL FOR SPEKTRET"
3230      CALL Omnr(L,0,-1)
3240      CALL Copy(Sp(*),L,Husk,-1)
3250      CALL Copy(F(*),L,Husk,-2)
3260      GOTO Loop
3270 Error:! ****
3280      PRINTER IS 16
3290      PRINT PAGE,"FORKERTE INDATA; PROV IGEN !!"
3300      ON Fejl GOTO F1,F2,F3
3310 Ikke_udført:! ****
3320      PRINTER IS 16
3330      EXIT GRAPHICS
3340      PRINT PAGE,"DE NØDVENDIGE FOURIERKOMPONENTER ER IKKE BEREGNET"
3350      GOTO Loop
3360 Dump:! ****
3370      ! PLOTTENE KAN PRINTES PÅ PAPIR
3380      ! ****
3390      DUMP GRAPHICS

```

3400 GOTO Loop
3410 Andet: ! ****=
3420 ! PROCEDURE TIL AT PLOTTE FLERE GRAFER OVEN I HINANDEN
3430 ! ****=
3440 PRINTER IS 16
3450 IF (Id=1) OR (Id=2) THEN Id=Id*5
3460 IF (Id=5) OR (Id=10) THEN 04k
3470 EXIT GRAPHICS
3480 PRINT PAGE,"PROCEDUREN KAN KUN UDFØRES I FORBINDELSE MED FASTE GRAEN
SER"
3490 GOTO Loop
3500 04k: PRINT PAGE
3510 FOR I=0 TO 6
3520 PRINT "Nr";I;"=";B\$(I)
3530 NEXT I
3540 INPUT "Hvilket spektrum-NUMMER skal indtegnes i samme plot",L
3550 Gclear=1
3560 Id=Id/5
3570 ON Id GOTO I1,I2
3580 ! ****=
3590 ! UNDERPROGRAM TIL AT PLOTTE SPEKTRE
3600 ! ****=
3610 SUB Plota(P(*),Ymin,Ymax,L)
3620 COM B\$(6)[80]
3630 GCLEAR
3640 GRAPHICS
3650 Ytic=1
3660 IF Ymax-Ymin<=2 THEN Ytic=.5
3670 Yint=INT(Ymin)
3680 IF (Ytic=.5) AND (RBS(Yint-Ymin)>.5) THEN Yint=Yint+.5
3690 SCALE 0,256,Yint,Ymax
3700 AXES 25,Ytic,0,Yint
3710 LORG 6
3720 FOR J=0 TO 256 STEP 25
3730 MOVE J,Yint-(Ymax-Yint)/100
3740 LABEL USING "K";J
3750 NEXT J
3760 LORG 3
3770 MOVE 1,Yint-(Ymax-Yint)/25
3780 LABEL USING "K";B\$(L)
3790 MOVE 210,Yint-(Ymax-Yint)/25
3800 LABEL USING "K";"Kanalnummer"
3810 LORG 8
3820 FOR J=Yint TO Ymax STEP Ytic
3830 MOVE -256/75,J
3840 LABEL USING "K";J
3850 NEXT J
3860 LORG 3
3870 CSIZE 2.5
3880 MOVE 1,Ymax
3890 LABEL USING "11A,1DD.DD";"Tyngdepkt =";P(260,L)
3900 MOVE 1,Ymax-(Ymax-Yint)/35
3910 LABEL USING "5A,DD.DD,A";"Dyk =";P(259,L);%"
3920 ON ERROR GOTO Exit
3930 FOR J=0 TO 256
3940 MOVE J,Yint
3950 DRAW J,P(J,L)
3960 NEXT J
3970 Exit: CSIZE 3.0
3980 PENUP
3990 SUBEND
4000 ! ****=
4010 ! UNDERPROGRAM TIL F(-)BEREGNING
4020 ! ****=
4030 SUB Ft(P(*),L)
4040 COM B\$(6)[80],F(32,6)
4050 FOR I=0 TO 25
4060 F(I,L)=0
4070 NEXT I

```

4090 PRINT " ", "Fouriertrans", "-LN(Fouriertrans)", LIN(1)
4100 DISP CHR$(130); "FT BEREGNING KØRER", CHR$(128)
4110 F(0,L)=1/2*P(1,L)
4120 FOR I=2 TO 255
4130 F(0,L)=F(0,L)+P(I,L)
4140 NEXT I
4150 F(0,L)=F(0,L)/127
4160 PRINT "Nr 0", F(0,L), -LOG(F(0,L))
4170 Beg: FOR I=1 TO 25
4180     Cos=Cosi=COS(I*PI/127)
4190     Sin=Sini=SIN(I*PI/127)
4200     Costg=COS(P(260,L)*I*PI/127)
4210     Sintg=SIN(P(260,L)*I*PI/127)
4220     F(I,L)=1/2*P(1,L)*(Cos*Costg+Sin*Sintg)
4230     FOR J=2 TO 255
4240         Cos1=Cos*Cosj-Sin*Sinj
4250         Sin=Sin*Cosj+Cos*Sinj
4260         Cos=Cos1
4270         F(I,L)=F(I,L)+P(J,L)*(Cos*Costg+Sin*Sintg)
4280     NEXT J
4290     F(I,L)=F(I,L)/127
4300 IF F(I,L)<=0 THÉN Subud
4310 PRINT "Nr"; I, F(I,L), -LOG(F(I,L))
4320 NEXT I
4330 Subud:DISP
4340 SUBEND
4350 ! ****
4360 ! UNDERPROGRAM TIL AT PLOTTE FOURIERKOMPONENTER
4370 ! ****
4380 SUB Plot(Xmax,Ymin,Ymax,L,Gc1,Step,Id)
4390 COM B$(6)[80],F(32,6)
4400 DIM S$(80)
4410 IF Gc1=0 THEN GCLEAR
4420 GRAPHICS
4430 IF Gc1=1 THEN Ma
4440 PEN 3
4450 IF Id>5 THEN S$="Referenceplot"
4460 IF (Id<=5) AND (Id>>3) THEN S$="-Ln(fouriertrans) (ren)"
4470 Expo=INT(LGT(Xmax))
4480 Xtic=INT(Xmax/10^Expo)*.05*10^Expo
4490 Ytic=1
4500 IF Ymax-Ymin<=2 THEN Ytic=.5
4510 Yint=INT(Ymin)
4520 IF (Ytic=.5) AND (ABS(Yint-Ymin)>.5) THEN Yint=Yint+.5
4530 SCALE -Xtic,Xmax,Yint,Ymax
4540 AXES Xtic,Ytic,-Xtic,Yint
4550 LORG 6
4560 FOR J=0 TO Xmax STEP Xtic*.5
4570 MOVE J,Yint-(Ymax-Yint)/100
4580 LABEL USING "K"; J/10^Expo
4590 NEXT J
4600 LORG 3
4610 MOVE 3*Xmax/4,Yint-(Ymax-Yint)/25
4620 LABEL USING "K"; "#10^"; Expo; " Sekund"
4630 MOVE -Xtic,Yint-(Ymax-Yint)/25
4640 LABEL USING "K"; S$
4650 LORG 8
4660 FOR J=Yint TO Ymax STEP Ytic
4670 MOVE Xint-Xtic-(Xmax-Xint)/75,J
4680 LABEL USING "K"; J
4690 NEXT J
4700 Ma:LORG 3
4710 PEN L MOD 4+1
4720 CSIZE 2.5
4730 SETGU
4740 IF (Id=1) OR (Id=4) OR (Id=5) THEN Ren
4750 MOVE 10,100
4760 IF (Id<>2) AND (Gc1=0) THEN LABEL USING "K"; "Ref="; B$(0)
4770 Ren: MOVE 10,100-L*2
4780 LABEL USING "K"; "L="; B$(1)

```

4790 SETUU
4800 LORG 5
4810 IF (Id=6) OR (Id=10) OR (Id=2) THEN Comp
4820 FOR J=0 TO Xmax STEP Step
4830 IF F(K,L)<=0 THEN Udgang
4840 MOVE J,-LOG(F(K,L))
4850 LABEL USING "K";"-"
4860 MOVE J,-LOG(F(K,L))
4870 IF INT(K/2)=K/2 THEN LABEL USING "K";" ";L
4880 MOVE J,-LOG(F(K,L))
4890 IF K=0 THEN IPLT 0,SQR(155.6*(127/F(28,L)-1)/F(29,L))/F(0,L),-1
4900 IF K=0 THEN IPLT 0,-2*SQR(155.6*(127/F(28,L)-1)/F(29,L))/F(0,L),-1
4910 IF K>0 THEN IPLT 0,SQR(77.2/F(29,L))/F(K,L),-1
4920 IF K>0 THEN IPLT 0,-2*SQR(77.2/F(29,L))/F(K,L),-1
4930 K=K+1
4940 NEXT J
4950 GOTO Udgang
4960 Comp:FOR J=0 TO Xmax STEP Step
4970 IF (F(K,0)<=0) OR (F(K,L)<=0) OR (F(K,0)=F(K,L)) THEN Udgang
4980 F=LOG(F(K,0)*F(0,L)/(F(K,L)*F(0,0)))
4990 MOVE J,F
5000 LABEL USING "K";"-"
5010 MOVE J,F
5020 IF INT(K/2)=K/2 THEN LABEL USING "K";" ";L
5030 MOVE J,F
5040 IF K=0 THEN IPLT 0,SQR(155.6*((127/F(28,0)-1)/(F(29,0)*F(0,0)^2)+(127/F(28,L)-1)/(F(29,L)*F(0,L)^2))),-1
5050 IF K=0 THEN IPLT 0,-2*SQR(155.6*((127/F(28,0)-1)/(F(29,0)*F(0,0)^2)+(127/F(28,L)-1)/(F(29,L)*F(0,L)^2))),-1
5060 IF K>0 THEN IPLT 0,SQR(77.2*(1/(F(29,0)*F(K,0)^2)+1/(F(29,L)*F(K,L)^2))),-1
5070 IF K>0 THEN IPLT 0,-2*SQR(77.2*(1/(F(29,0)*F(K,0)^2)+1/(F(29,L)*F(K,L)^2))),-1
5080 K=K+1
5090 NEXT J
5100 Udgang:IF Id<=5 THEN Udgang1
5110 CALL Fitsqrt(L,Step)
5120 MOVE 2*F(30,L),F(31,L)-LOG(F(0,0)/F(0,L))+F(32,L)*SQR(2*F(30,L))
5130 FOR J=2*F(30,L) TO Xmax STEP Xmax/100
5140 DRAW J,F(31,L)-LOG(F(0,0)/F(0,L))+F(32,L)*SQR(J)
5150 NEXT J
5160 Udgang1:CSIZE 3.3
5170 PENUP
5180 SUBEND
5190 ! *****
5200 SUB Copy(Ar(*),L,H,Id)
5210 IF Id=-1 THEN Dim=260
5220 IF Id=-2 THEN Dim=30
5230 FOR I=0 TO Dim
5240 Ar(I,L)=Ar(I,H)
5250 NEXT I
5260 SUBEND
5270 ! *****
5280 SUB Omnr(L,H,Id)
5290 COM B\$(6){80}
5300 PRINTER IS 16
5310 IF Id<>0 THEN PRINT PAGE
5320 PRINT LIN(1)
5330 FOR I=0 TO 6
5340 PRINT "Nr. ";I;" = ";B\$(I)
5350 NEXT I
5360 INPUT "ANGIV ET TAL MELLEM 0 OG 6; 0 ER FORBEHOLDT ^REF-SPEKTRET^",L
5370 PRINT PAGE
5380 IF B\$(L)="" THEN Rok
5390 PRINT "Dette tal er brugt til et andet spektrum! nemlig:"
5400 PRINT LIN(1),B\$(L),LIN(1)
5410 IF (Id>5) AND (L=H) THEN PRINT "og tallet skal vaere forskelligt fra ";H
5420 IF (Id>5) AND (L=H) THEN 5260
5430 INPUT "SLET dette spektrum &lettes ? (J/H)",R\$

```
5450 IF A$(1,1)<>"J" THEN Iden
5460 Bok:INPUT "Giv spektret en identifikation",B$(L)
5470 SUBEND
5480 ! ****
5490 ! MK -FIT TIL SQR(T)
5500 ! ****
5510 SUB Fitsqrt(L,Tstep)
5520 COM B$(6)[80],F(32,6)
5530 FOR J=2 TO 20
5540 IF F(J,L)<=0 THEN Fiok1
5550 N=N+1
5560 T=J*Tstep
5570 St=St+T
5580 Ssqrt=Ssqrt+SQR(T)
5590 Sf=Sf-LOG(F(J,L))+LOG(F(J,0))
5600 Sfsqrt=Sfsqrt+(-LOG(F(J,L))+LOG(F(J,0)))*SQR(T)
5610 NEXT J
5620 Fiok1:Sqrtn=Ssqrt/N
5630 Sfm=Sf/N
5640 ! F(32,L)=(Sfsqrt-Sqrtn*Sf)/(St-Sqrtn*Sqrtn)
5650 ! F(32,L)=Sfsqrt/St
5660 ! F(31,L)=Sfm-F(32,L)*Sqrtn
5670 ! F(31,L)=0
5680 OUTPUT 0;
5690 OUTPUT 0;
5700 OUTPUT 0;"-----"
5710 OUTPUT 0;"FIT TIL A+B*SQR(T)" FOR ";"B$(L)
5720 OUTPUT 0;
5730 OUTPUT 0;"A = ";F(31,L),"B = ";F(32,L)
5740 OUTPUT 0;"-----"
5750 OUTPUT 0;
5760 SUBEND
```

LITTERATURLISTE.

- 1) Barlow, A.J. og Erginsav, A.: "Viscoelastic properties of poly (propylene glycols). Polymer 16, 1975.
- 2) Barlow, A.J., Erginsav, A. og Lamb, J.: "Viscoelastic relaxation of supercooled liquids. II". Proc. Roy. Soc., A 298, 481, 1967.
- 3) Barlow, A.J., Harrison, G. og Lamb, J.: "Viscoelastic relaxation of polydimethylsiloxane liquids". Proc. Roy. Soc. Land. A 282, 228-51, 1964.
- 4) Barlow, A.J., Harrison, G., Lamb, J. og Subramanian: "Viscoelastic relaxation in a series of polyethyl-acrylates and poly-n-butylacrylates". Proc. Roy. Soc. A 309, 497-520, 1969.
- 5) Christiansen, P.V.: "Dynamik og diagrammer". Tekst nr. 8, IMFUFA, RUC, 1978.
- 6) Christiansen, P.V.: "Semiotik og systemegenskaber". Tekst nr. 22, IMFUFA, RUC, 1979.
- 7) Ferry, John D.: "Viscoelastic Properties of Polymers". John Wiley & sons, INC, 1970.
- 8) Goldanskii, V.I. og Herber (ed): "Chemical Applications of Mössbauer Spectroscopy". Her i M. Cordey Hayes: "¹¹⁹Sn: Inorganic Compounds, Metals and Alloys". Academic Press INC, London, 1968.
- 9) Gross, B.: "Theories of Viscoelasticity". Actualités scientifiques et industrielles. 1190, 1953.
- 10) Gullvåg, I.: "Charles Sanders Peirce". Pax, 1972.
- 11) van Hove, L.: "Correlations in Space and Time and Born Approximations Scattering in Systems of Interacting Particles". Phys. Rev. 95 (1), 249-62, 1954.

- 12) Isakovich, M.A. og Chaban, I.A.: "Propagation of Sound in strongly viscous Liquids". Soviet Phys. JETP. 23, nr. 5, 1966.
- 13) Jenkins, G. og Watts, D.: "Spectral Analysis". Holden-Day, 1968.
- 14) Jensen, U.J.: "Videnskabsteori 1". Berlingske Leksikon Bibliotek, 1973.
- 15) Jensen, H. Højgaard: "Stoffers tilstandsformer og dynamik". Note. Københavns Universitet, Forår 1977.
- 16) Jensen, J. Højgaard: "Matematiske modeller er væsens-forskellige, selv om de ser ens ud". Tekst nr. 26. IMFUFA, RUC, 1980.
- 17) Knollman, G. og Hamamoto, A.: "Study of the Isakovich-Chaban Theory in Viscoelastic Relaxation". J. Chem. Phys. 47, 5232-5241, 1967.
- 18) Kuhn, T.: "Videnskabens revolutioner". Fremad, 1973.
- 19) Lamb, J og Lindon, P.: "Audio - Frequency Measurements of the Viscoelastic Properties of Polydimethylsiloxane Liquids". J. Acoust. Soc. Am., 41 (4), 1967.
- 20) Maxwell, J.C.: "Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 157". Tayler and Francis, Red Lion Court, Fleet Street, London, 1867.
- 21) Motte, A.: "Sir Isaac Newtons Mathematical Principles of Natural Philosophy and His System of the World". p.385, University of California Press, Berkeley, Calif. 1934. (Refereret i Allen, T. og Ditsworth, R." "Fluid Mechanics". McGraw-Hill, 1972).
- 22) Næss, A.: "Metodelære". Munksgård, 1967.

- 23) Næss, A. og Galtung, J.: "Metodelære". Munksgård.
1969.
- 24) Nørretranders, T.: "Om kapitalistisk naturvidenskab".
Modtryk, 1976.
- 25) Singwi, K.S. og Sjølander, A.: "Resonance Absorption
of Nuclear Gamma Rays and the Dynamics of Atomic
Motions. Phys. Rev. 120, nr. 4. 1093-1102. 1960.
- 26) Stegun, I.A. og Abramowitz, M.: "Handbook of Mathe-
matical Functions". National Bureau of Standards.
1968.

- 16/79 "STATISTIK I KREFTFORSKNINGEN". Projektrapport af Michael Olsen og Jørn Jensen.
Vejleder: Jørgen Larsen.
- 17/79 "AT SPØRGE OG AT SVARE i fysikundervisningen"
Albert Christian Paulsen.
- 18/79 "MATHEMATICS AND THE REAL WORLD", Proceedings of an International Workshop, Roskilde university centre (Denmark), 1978. Preprint.
Bernhelm Booss & Mogens Niss (eds.).
- 19/79 "GEOMETRI, SKOLE OG VIRKELIGHED".
Projektrapport af Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen og Per H.H. Larsen.
Vejleder: Mogens Niss.
- 20/79 "STATISTISKE MODELLER TIL BESTEMMELSE AF SIKRE DOSER FOR CARCINOGENE STOPPER".
Projektrapport af Michael Olsen og Jørn Jensen.
Vejleder: Jørgen Larsen.
- 21/79 "KONTROL I GYMNASIET - FORMÅL OG KONSEKVENSER".
Projektrapport af Crilles Bacher, Per S. Jensen, Preben Jensen og Torben Nysteen.
- 22/79 "SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (1)". 1-port lineært response og støj i fysikken.
Peder Voetmann Christiansen.
- 23/79 "ON THE HISTORY OF EARLY WAVE MECHANICS - with special emphasis on the role of relativity".
Helge Kragh.
- 24a/80 "MATEMATIKOPFATTELSER HOS 2.G'ERE" 1. En analyse.
24b/80 "MATEMATIKOPFATTELSE HOS 2.G'ERE" 2. Interviewmateriale.
Projektrapport af Jan Christensen og Knud Lindhardt Rasmussen.
Vejleder: Mogens Niss.
- 25/80 "EKSAMENSOPGAVER" Dybdemodulet/fysik 1974-79.
- 26/80 "OM MATEMATISKE MODELLER". En projektrapport og to artikler.
Jens Højgaard Jensen m.fj.
- 27/80 "METHODOLOGY AND PHILOSOPHY OF SCIENCE IN PAUL DIRAC's PHYSICS"
Helge Kragh.
- 28/80 "DIELEKTRISK RELAXATION - et forslag til en ny model bygget på væskernes visco-elastiske egenskaber".
Projektrapport, speciale i fysik, af Gert Kreinøe.
Vejleder: Niels Boye Olsen.
- 29/80 "ODIN - undervisningsmateriale til et kursus i differentialligningsmodeller"
Projektrapport af Tommy R. Andersen, Per H.H. Larsen og Peter H. Lassen.
Vejleder: Mogens Brun Heefelt.
- 30/80 "FUSIONENERGIEN - - - ATOMSAMFUNDETS ENDESTATION".
Oluf Danielsen.
- 31/80 "VIDENSKABSTEORETISKE PROBLEMER VED UNDERSKNINGSSYSTEMER BASERET PÅ MÆNGDELÆRE"
Projektrapport af Troels Lange og Jørgen Karrebæk.
Vejleder: Stig Andur Pedersen.
- 32/80 "POLYMERES STOFFERS VISCOELASTISKE EGENSKABER - BELYST VED HJÆLP AF MEKANISKE IMPEDANS-MÅLINGER OG MØSSBAUEREFFEKT-MÅLINGER".
Projektrapport, speciale i fysik, af Crilles Bacher og Preben Jensen.
Vejledere: Niels Boye Olsen og Peder Voetmann Christiansen.