TEKST NR 135 1987

INTUITIONISTISK MATEMATIKS METODER OG ERKENDELSESTEORETISKE FORUDSÆTNINGER.

MATEMATIKSPECIALE:

Claus Larsen

Vejledere:

Anton Jensen

Stig Andur Pedersen

TEKSTER fra

IMFUFA ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, Postbox 260, 4000 Roskilde.

INTUITIONISTISK MATEMATIKS METODER OG ERKENDELSESTEORETISKE FORUDSÆTNINGER.

IMFUFA tekst nr. 135/87 101 sider ISSN 0106-6242

ABSTRACT:

Denne tekst er en specialeopgave fra KU skrevet på RUC under vejledning af Stig Andur Pedersen. Opgaven indeholder en gennemgang af filosofiske problemstillinger, der knytter an til matematikkens filosofi samt en beskrivelse af, hvorledes såvel den klassiske- som den intuitionistiske matematik traditionelt er søgt begrundet. Som sådan knytter denne opgave an til forskellige 3. moduls opgaver med et lignende udgangspunkt (jvf. tekst nr. 31 og nr. 94.)

Der gives dernæst en beskrivelse af, hvorledes den moderne matematikfilosofi søger at løse en del af de problemer, der er rejst samt give intuitionismen et sundt filosofisk fundament. Tilsidst ses der på hvilken matematisk praksis, der kommer ud som resultat af de filosofiske grundholdninger. Af formelle grunde fortaber denne del af opgaven sig noget i det tekniske. En større vægtning af metaperspektivet - såvel det matematiske som det filosofiske - havde været på sin plads.

We busted out of class had to get away
from those fools
We learned more from a three minute
record than we ever learned in school ...

B. Springsteen

FORORD

Det er ofte blevet fremhævet, at matematik ikke har brug for noget vedhæng -det være sig et historisk-, filosofisk- eller samfundsmæssigt vedhæng. Mange betragter matematik som en størrelse, der hviler i sig selv og taler for sig selv. "Matematikken virker", hævdes det fra forskellige sider. Den har faktisk stor succes, og følgelig er den både relevant og samfundsnyttig.

Det er meget svært at skulle argumentere mod sådanne synspunkter. Det har jeg da heller ikke tænkt mig at gøre, men det alene at betragte matematik som en autonom enhed er efter min opfattelse et nummer for snævert. Selvfølgelig har man ikke brug for at vide noget om sumerenes indførelse af dobbelt bogføring i forbindelse med en gradvis større urbanisering i Mesapotanien for at kunne bevise Schonflies' sætning. Men det må da være relevant på et professionelt niveau at interessere sig for- og undersøge de forbindelser, der er mellem matematikken og ikke-matematiske områder som historie, samfundsvidenskab, politik, filosofi m.m. Sådanne undersøgelser foretages da også men sjældent af matematikkerne selv. Dette er trist, ikke mindst fordi det ikke altid er lige kompetente svar, der gives fra andet hold om matematikken og dens nærmeste omegn.

Jeg har i denne opgave valgt at se på matematikken i et filosofisk lys. Nærmere bestemt vil jeg se på, hvorledes den intuitionistiske matematik, der er en af de "konstruktive" retninger indenfor matematikken, kan forankres filosofisk. Jeg har valgt intuitionismen som emne af to grunde. For det første fordi det er en retning, der historisk set hat stået i et modsætningsforhold til den klassiske matematik. Der bliver derfor rig lejelighed til at stable en diskussion på benene. For det andet er der indenfor den nyere anlytiske filosofi en levende debat igang indenfor sprogfilosofien. Et af hovedspørgsmålene i denne debat er spørgsmålet om den rette tolkning af bl.a. videnskablige teorier. Skal disse fortolkes realistisk eller anti-realistisk? Intuitionismen repræsenterer her en anti-realistisk fortolkning af matematikken.

Specialet er bygget således op: Først et kort afsnit, hvor jeg vil introducere den filosofiske terminologi og forsøge at argumentere for, at den analytiske tilgang til filosofien er relevant i en sammenhæng, hvor matematikken søges funderet filosofisk. Endelig vil jeg give et rids af, hvad jeg i det følgende vil mene med en lødig og seriøs filosofisk behandling af en sådan forankring.

Derefter vil jeg i et historisk kapitel skitsere, hvorledes man tidligere har forsøgt at begrunde den klassiske- og intuitionistiske matematik. I denne forbindelse vil jeg undersøge, hvorledes intuitionismen traditionelt er blevet

behandlet filosofisk.

I det andet kapitel vil jeg stille keglerne op til resten af opgaven. Jeg vil her beskrive et moderne forsøg på at forsyne intuitionismen med et sundt filosofisk fundament. Dette forsøg er lavet af den engelske filosof Michael Dummett. Som umiddelbar konsekvens af hans synspunkter skal vi se på, hvorledes de logiske konnektiver skal tolkes intuitionistisk.

Nu er matematik ikke blot filosofi og logik. Jeg vil derfor i det tredie kapitel give nogle smagsprøver på, hvorledes intuitionistisk matematik praktiseres. Desuden vil jeg vha. nogle bevisteoretiske overvejelser give en vurdering af i hvor høj grad, Dummetts program lader sig gennemføre, når der er tale om mere komplicerede former for matematik -f.eks. reel analyse.

Endeligt vil jeg vha. et eksempel pege på, hvorfor intuitionismen må opfattes i videste forstand til trods for de begrundelsesproblemer, der viser sig. Udfra eksemplet vil jeg pege på, hvorledes man kan begrunde den mere komplicerede matematik samt give ideer til, hvordan man eventuelt kunne lave en kobling mellem intuitionistisk- og klassisk matematik.

INDHOLD

0 INDLEDNING

1) Indledning.....side 1

I TRÆK FRA DEN NYERE MATEMATIKFILOSOFIS HISTORIE

1) Frege.....side 7
2) Hilbert..... - 20
3) Brouwer..... - 32

II INTUITIONISMEN I ET MENINGSTEORETISK LYS

1) Dummett.....side 42
2) De logiske konnektivers intuitionistiske mening..... - 51

III INTUITIONISTISK MATEMATIK I PRAKSIS OG I BEVISTEORETISK PERSPEKTIV, ELLER ER DUMMETT'S PROGRAM GENNEMFØRLIG?

1) Intuitionistisk aritmetik.....side 61
2) Intuitionistisk analyse og beslægtede emner.. - 64
3) En beregnelig 1. ordens differentialligning uden beregnelig løsning..... - 86

IV KONKLUSION

1) Konklusion.....side 96

LITTERATURLISTE side 100

INDLEDNING

At prøve at give en oversigt over filosofiens status, metoder, hovedproblemer, emner osv. lader sig næppe gøre, især ikke hvis denne oversigt skal begrænses til nogle få sider. Det bliver ikke meget lettere, hvis man skærer denne oversigt ned til kun at omhandle nogle få af filosofiens områder -nemlig i første omgang den matematiske videnskabsteori.

Nu er videnskabsteorien strengt taget ikke en filosofisk disciplin på linie med etik, politisk filosofi, retsfilosofi og lignende, men et fagfelt, der med oprindelig tilknytning til erkendelsesteorien, har gennemgået en udvikling, således at man idag må sige at også videnskabssociologi og videnskabshistorie spiller betydelige roller ved en beskrivelse af videnskabernes indbyrdes forhold, virke, udvikling, afgrænsning osv. Vi skal i denne opgave dog mere se på den matematiske teoris forhold til- og plads i virkeligheden, den matematiske argumentation og begrundelse og ikke mindst den matematiske teoris logiske struktur og meningen af matematiske sætninger og systemer -beskrivelser der er tilknyttede de mere traditionelle aspekter af videnskabsteorien.

Det er dog stadig svært at give en samlet oversigt over de væsentligste filosofiske problemer og deres indbyrdes forhold indenfor dette problemfelt. Ser vi på, hvem der fortrinsvis har beskæftiget sig med denne, den interne videnskabsteori -intern fordi denne del af videnkabsteorien ser det som sin opgave at beskrive de videnskablige teorier, som de tager sig ud, og hvis de forsøger at give en beskrivelse af de videnskablige teoriers udvikling, så sker dette ved hovedsaglig at se på faktorer indenfor det videnskablige samfund- er det især filosoffer med tilknytning til den analytiske filosofi, der melder sig. Jeg vil altså begrænse mig til at beskrive den analytiske filosofis syn på filosofiens centrale problemer, virkemåde samt den prioritering, der kommer til udtryk ved at arrangere de forskellige filosofiske hovedområder i forhold til hinanden.

Dette skal ikke forstås således, at den analytiske filosofi ikke er en broget og uensartet flok, hvorom man kan give en kortfattet og udtømmende beskrivelse. Tværtimod er det en filosofisk gruppe, som hovedsagelig er tilknyttet den angelsaksisk prægede kulturkreds med nogle få fælles synspunkter af en temmelig generel karakter. Først og fremmest er der enighed om den generelle metode til løsning af en række af filosofiens traditionelle spørgsmål.

Denne metode -den filosofiske analyse-, ser det som sin fornemste opgave at afdække betydningen af de centrale udtryk, der indgår ved formuleringen af de filosofiske

problemer. Herved er der ikke tale om nogen egentlig nyskabelse (Den analytiske filosofi, som retning hører fortrinsvis det 20. århundrede til.), da problemer, som hvad er bevægelse, hvad er moral, hvad er forandring og hvad er viden, allerede var centrale spørgsmål hos såvel de før-sokratiske filosoffer som hos Platon, Sokrates og Aristoteles. Men til trods for at disse spørgsmåls besvarelse og dermed en præcisering af de indgående begreber har haft en fremtrædende rolle, så har den filosofiske tyngde traditionelt været koncentreret om at afdække virkelighedens struktur samt at anvise generelle moralske, politiske og religiøse handleforskrifter. Som sådan har den traditionelle filosofis udgangspunkt været metafysikken, altså den spekulative ikke-emperiske erkendelse, der beskæftiger sig med virkelighedens grundstruktur og de mest basale egenskaber ved alt, hvad der kan være til. Med afklaring af spørgsmål som guds eksistens, frihed, tid, rum, kausalitet, væren... var man veludrustet til at gå i gang med politisk-, moral- og religionsfilosofiske spørgsmål. Hermed skal ikke forstås, at den analytiske filosofi ikke betragter metafysiske problemer som værende relevante men snarer, at den ser andre problemfelter som værende mere fundamentale. Som sådan kan man sige, at man fra antikken til dagens analytiske filosofi, er der sket en tyngdeforskydning i en retning som vi vil præcisere i det følgende. En sådan tyngde forskydning er ikke et nyt fænomen indenfor filosofien.

Med Descartes blev spørgsmålet om grundstrukturen og egenskaberne ved det værende afløst af spørgsmål om, hvad det overhovedet vil sige at have viden, hvorledes denne viden kan begrundes, og hvor grænserne for vores erkendelse går. Pointen er, at vi i filosofien fra at betragte metafysiske og ontologiske spørgsmål som de centrale og dem, der er grundlæggende i forhold til såvel andre filosofiske spørgsmål som en hel række andre spørgsmål (f.eks. vedrørende videnskaberne), bevæger os over i en situation, hvor erkendelsesteorien varetager denne centrale stilling, altså hvor filosofiens første spørgsmål er "Hvad kan jeg vide?".

Gennem det 18. og 19. århundrede har der været en række filosoffer, der har fulgt Descartes i denne orientering af de mest centrale filosofiske problemer mod erkendelsesteorien. Til disse problemer hører;

(i) problemet om erkendelsens opbygning og grundlag,
(ii) problemet om erkendelsens gyldighed,
(iii) problemet om erkendelsens former og
(iv) problemet om erkendelsens grænser.

Lad os ultrakort se på nogle af de syn der er givet på løsninger af disse problemer;
ad i) Descartes selv mente, at der var et grundlag. Dette fremkom alene ad fornuftens vej. F.eks. kunne man overhovedet ikke tvivle på ens egen eksistens som

bevidsthedsvæsen. Dette er udtrykt i den berømte sætning "Cogito ergo sum". Vi ser her, at der er klare træk fra den euklidiske geometri. Denne ses som hvilende på et klippefast grundlag af rationelt ubetvivlelige postulater og definitioner. Spinoza, en anden af de store rationalister, kunne f.eks. godt tvivle på sine umiddelbare omgivelsers eksistens, men absolut ikke på at summen af vinklerne i en trekant er lig summen af to rette (Davis 1981 p.326).

Rationalisternes ide var, at det er de evidente sandheder, der er grundlæggende for vores erkendelse også den del af erkendelsen, der handler om den materielle virkelighed. Det er med vores fornuft, at vi når ud til afkrogene i vores erkendelse på samme måde, som vi ud fra de geometriske aksiomer ad fornuftens vej finder geometriens skjulte sandheder.

Over for rationalisternes synspunkt stod empiristernes. Empiristerne mente, at fysikken var den videnskab, som erkendelsen skulle modelleres efter. Med det fremskridt naturvidenskaberne gjorde, vandt dette synspunkt stor tilslutning -så stor at J.St. Mill foreslog at også matematik skulle betragtes som en empirisk videnskab, f.eks. ved vi at 3+2=5, fordi vi kan iagtage at hvis vi lægger en bunke med 3 mønter til en bunke med 2 mønter så har vi en bunke mod 5 mønter. De fleste empirister måtte dog betragte matematik som en bastard, der faldt uden for det generelle synspunkt, at det er fra observationer, at erkendelsen stammer. Empiristerne var altså enige om, at der fandtes et grundlag for erkendelsen, men de var uenige om, hvori denne bestod.

Pragmatisk orienterede filosoffer
afviser derimod ideen om, at der findes et grundlag for erkendelsen.

ad ii) Rationalisterne vil sige, at noget erkendelse har evig gyldighed. Igen vil pragmatisterne stå i modsætning hertil.

ad iii) Distinktionen mellem a-priori erkendelse og a-posteriori erkendelse repræsenterer netop sådan et skel mellem erkendeformer. Lad os se lidt nærmere herpå, da det er begreber vi skal bruge en del i det følgende. A-posteriori erkendelse er den del af erkendelsen, der er afhængig af erfaringen i modsætning til den a-priori erkendelse, der går forud for erfaringen, og som sådan ikke er afhængig af denne. Empiristerne mener, at al viden om virkeligheden er a-posteriori viden og at den eneste erkendelse, der kan udtrykkes a-priori, er domme af typen "Alle ungkarle er ugifte." -altså selvindlysende sandheder. Som sådan er den a-priori erkendelse tom i forhold til virkeligheden. Rationalisterne derimod ser den a-priori erkendelse som den mest fundamentale form for erkendelse. Hvorledes dette kan gå til, belyses bedst ved distinktionen mellem analytiske og syntetiske domme.

Kants senere definition af en analytisk dom, omfatter netop

en dom som "Alle ungkarle er ugifte.", idet en benægtelse af denne beløber sig til en modsigelse, d.v.s analytiske domme kan genkendes alene på deres sproglige form. Rationalistens forestillinger om kausalitet og medfødte ideer m.m er dog ikke af denne form. F.eks. er der indbygget en nødvendighed i årsagssætningen (enhver hændelse har sin årsag), idet denne synes at være forudsætning for overhovedet at have viden om virkeligheden. Nødvendigheden i sætningen er dog ikke af en sådan karakter, at hvis vi benægter sætningen, så modsiger vi os selv. Kant kalder denne form for erkendelse den syntetisk/a-priori erkendelse -a-priori, fordi den går forud for mødet med verden -syntetisk fordi den ikke er tom i forhold til virkeligheden. Tværtimod er den syntetisk/a-priori erkendelse betingelsen for, at vi overhovedet kan beskrive virkeligheden.

Der er også en anden form for syntetisk/a-priori erkendelse hos Kant -nemlig den matematiske. Denne kaldes den intuitive erkendelse, mens ovenfornævnte, hvor bl.a. kausalitetsprincippet hører til, kaldes den diskursive. Vi har ifølge Kant en intuition om tidens- og rummets struktur -en intuition, der er en nødvendig forudsætning for overhovedet at kunne percipere, idet en perception kræver en placering af det perciperede i tid og rum. Det matematikken gør, er at give en beskrivelse af strukturen af disse -aritmetikken af tiden, geometrien af rummet. Vi kan tilsidst bemærke, at der skal et specielt syn på verden til for at påstå, at man har analytisk/a-posteriori viden.

ad iv) Hos Kant er spørgsmålet om erkendelsens grænser et meget centralt problem, idet han søgte at karakterisere betingelserne for vores virkeligheds forståelse altså at give en redegørelse for den syntetisk/a-priori erkendelse.

Efter denne afstikker til erkendelsesteoriens hovedtemaer, vender vi tilbage til den analytiske filosofis, idet vores beskrivelse af forholdet mellem de forskellige filosofiske områder ikke er afsluttet. Personificerer vi igen den historiske udvikling, har vi med den tyske filosof Gottlob Frege den første fortaler for det nyeste tyngdeskift indenfor filosofien nemlig et tyngdeskift, der placerer sprogfilosofien i det filosofiske brandpunkt.

Descartes så ikke bare erkendelsesteorien som en del af metafysikken men som den første filosofi. På samme måde så Frege (og med ham en stor del af de analytiske filosoffer) sprogfilosofien, hverken som en filosofisk disciplin på linie med etik, religionsfilosofi m.m. eller som som en hjælpedisciplin, men som udgangspunktet for filosofiske studier overhovedet. Specielt skal besvarelsen af sprogfilosofiske spørgsmål danne grundlag for en besvarelse af ontologiske og erkendelsesteoretiske spørgsmål. Men hvilke belæg har de analytiske filosoffer for denne orientering, og hvad er det for spørgsmål, hvis besvarelse er

så vigtig?

Generelt kan man sige, at det er via sproget, at tanker kommunikeres. Vi kan ikke udsætte vores tanker, intuition, følelser m.m. for en analyse men kun konstatere, at disse optræder som fænomener på et eller andet niveau. Sproget er således den eneste tilgang, vi har til den mentale sfære, og dermed er sproget erkendelsens bærer. Dette kan forstås på et utal af måder, men lad os lige se på et par udlægninger.

Det kan forstås således, at der i ens bevisthed sker en mental akt (som er mere eller mindre underordnet i denne sammenhæng), og at denne sættes i forbindelse med en række sproglige størrelser som ord, begreber, sætninger m.m., og det er via en analyse af disse størrelser, at der skaffes adgang til den mentale sfære. Man kan også se sproget som bærer af erkendelsen, og at det er via mødet med sproget og den voksende færdighed i anvendelsen af dette, at man udvider bekendskabet med verdenen og dens måde at fungere på. Sproget ses altså som en kulturs forlængede arm, og det at forstå sproget bliver således en indsigt i den måde ens virkelighed fungerer på.

Som det ses, spiller sproget altså en væsentlig rolle, nemlig som bærer af erkendelsen. Det er via sproget i denne rolle, at vi kan udsætte vores erkendelse for en analyse -en analyse der vil bringe os nærmere en forståelse af, hvori vores erkendelse består og derigennem afdække, hvad vi mener med en forståelse af virkeligheden, og hvorledes virkeligheden er struktureret.

Det er nu ikke entydigt, hvad man skal forstå ved en analyse af sproget. Vores naturlige sprog er vagt, forvirrende og unøjagtigt. Filosofiske problemer, stillet med et sådan redskab, kan så heller ikke være andet end vage, forvirrende og unøjagtige. Grunden til, at mange filosofiske problemer er kommet på gyngende grund, skyldes, at sproget er et utilstækkeligt redskab. Den sproglige analyses opgave er så at trænge bag om de forvirrende udtryk ved at erstatte disse med mindre forvirrende udtryk. F.eks. er det en udbredt opfattelse, at en person A besidder viden om en påstand P, netop hvis P er sand, A kan begrunde P, og A har gode grunde til at hævde P. Således har vi analyseret vidensbegrebet derhen, at det konstitueres af begreberne "sandhed", "begrundelse" og "overbevisning" (Nu er denne analyse ikke særlig kontroversiel, men skal vi gå videre og analysere sandhedsbegrebet løber vi ind i mange forskellige opfattelser af, hvordan en analyse af dette begreb tager sig ud -hvis det ikke som hos nogle betragtes som et simpelt irreduktibelt begreb). Man søger altså efter denne opfattelse nærmest at opløse de filosofiske problemer ved hjælp af en begrebsanalyse.

En anden løsning på problemerne ved et naturlig sprogs unøjagtighed går i retning af, at give en beskrivelse af,

hvordan et sprog bør fungere eller rettere en beskrivelse af, hvordan sproget fungerer, hvis det var et idealsprog. Man ser her den sproglige form som en tilslører af de egentlige og væsentlige ingredienser et sprogligt udtryk besidder, f.eks. den logiske form.

Kort sagt; vi ser her antydet, at det er via sproget og en indsigt i hvorledes dette fungerer, at vi kan give svar på en række af de mest centrale filosofiske spørgsmål, fordi sproget netop er en offentlig tilgængelig størrelse. Den nærmere redegørelse for hvorledes et sprog fungerer består derefter i at give en redegørelse for sproglige udtryks mening. Her er den mest udbredte opfattelse den, at man må angive en meningsteori møntet på et naturligt sprog. Hvordan denne videre tager sig ud, og hvorledes denne forholder sig til andre sprogfilosofiske spørgsmål og begreber, er der derimod stor uenighed om. Vi skal i de følgende afsnit se på nogle filosoffer og filosofiske retninger, der har beskæftiget sig med en række af de ovennævnte spørgsmål i forbindelse med matematikfilosofien. Med lidt tålmodighed vil der altså komme noget mere substans på ovenstående noget luftige og ufuldstændige beskrivelse af den analytiske filosofi.

Vi kan nu give følgende korte beskrivelse af forholdet mellem metafysik, ontologi, erkendelsesteori og sprogfilosofi (d.v.s i første omgang meningsteori):
Der findes en historisk udvikling, som kan beskrives ved, at man fra at spørge til en række abstrakte størrelsers beskaffenhed og eksistens (f.eks. "Hvad er godhed?", "Hvad er bevægelse?", "Eksisterer Gud ?", osv.) tager et skridt tilbage og spørger om, hvad det overhovedet vil sige at vide noget, for så indenfor dette århundrede hovedsagelig at interessere sig for det medium, hvori denne viden udtrykkes -nemlig sproget. En række filosofiske problemer får så deres mest generelle behandling, hvis vi er i stand til at betragte dem ud fra et meningsteoretisk perspektiv. Væsentligst i denne sammenhæng er dog ikke hvilken af de tre filosofiske områder; ontologi, epistemologi og meningsteori, der er den primære. Det væsentligste er, overhovedet at have en filosofi -i dette tilfælde matematikfilosofi-, der giver koherente svar på spørgsmål om, hvorledes den matematiske virkelighed tager sig ud, hvori den matematiske erkendelse består, og hvorledes sproget fungerer i disse forbindelser. Michael Dummett udtrykker dette således;
"When logic is taken in the broad sense in which it compromises the theory of meaning, understood as a branch of philosophy, the idea of a logic that has no metaphysical, that is, no ontological, component is a delusion. There can not be an aseptic logic that merely informs us how language funktions and what is the structure of the thoughts which it expresses without committing itself to anything concerning reality, since reality is what we speak about -the realm of reference- and an account of language demands an account of how what we said is about reality and is rendered true or false by how things are in reality" (Dummett 1981 p.431).

FREGE:

Den tyske matematikker, logikker og filosof Gottlob Frege har ydet betydlige bidrag til alle de filosofiske discipliner, han har beskæftiget sig med. Han er den egentlige ophavsmand til logikken, som vi kender den idag med betydligt arbejde inden for kvantorer. Hans arbejde inden for matematikkens filosofi har affødt den første af de store skoler inden for denne gren af filosofien, og som sådan har Frege været grundlægger af den moderne filosofiske diskussion af matematikken. Endeligt har Frege, som nævnt i indledningen, været grundlægger af meningsteorien og han har derved ydet væsentlige bidrag til sprogfilosofien.

Vi skal ikke her beskæftige os videre med Freges logik, idet denne er blevet videreudviklet utrolig meget gennem de snart 100 år, der er gået siden, han udkom med "Begriffsschrift". Desuden er logik som sådan ikke af interesse for det følgende. Derimod skal vi se lidt nærmere på Freges matematik filosofi, ikke så meget fordi det er et holdbart filosofisk synsfunkt (Hermed ikke sagt at de i afskygninger lever i bedste velgående), men fordi det som ovenfornævnt indgår i en matematik filosofisk tradition, hvoraf intuitionismen (især som den er repræsenteret ved Heyting/Brouwer) er en del. Vi skal dog først se på Frege som filosofisk semantikker. Det er her Freges ideer er mest levedygtige. Hovedårsagen til at dvæle lidt ved Frege på dette punkt er dog, at vi herved får set nogle begreber og betragte måder, der danner grundlag for den mere moderne diskussion omkring intuitionismen, især som den er repræsenteret ved Dummett, Putnam, Kripke, Kreisel m.fl.

I semantikken beskæftiger man sig med spørgsmål vedrørende "sandhed", "reference", "kommunikation", osv., men semantikken ser det først og fremmest som sin opgave at anvise en teori for, hvad det vil sige, at sproglige entiteter -det være sig ord eller sætninger- har en mening. Freges første tese, m.h.t. hvorledes meningen af en sproglig entitet er givet, er, at mening ikke er et indre psykologisk fænomen men derimod offentlig. De associationer, billeder og andre mentale fænomener, der optræder hos en sprogbruger, er underordnet i forhold til et ords eller en sætnings mening. En sproglig entitets mening er tværtimod et offentligt anliggende og således først og fremmest knyttet til vores sproglige praksis. Hvorledes dette nærmere skal forstås, kan man få en ide om ved at se på Freges anden semantiske tese. Denne siger, at kun er i sammenhængen med en sætning at et ord får sin mening, dvs. den væsentligste sproglige størrelse er sætningen, og den er grundpillen i vores sproglige praksis (Frege 184 p.73). Dette skal ikke forstås således, at orderne først og fremmest er byggeklodser, som vi sætter sammen på bestemte måder (dette gør vi iøvrigt også) og ved korrekt sammensætning får en sætning. Det skal snarere forstås sådan at, den mindste sproglige meningsfulde

akt, vi kan udføre, er at fremsætte en sætning. Men via hvilken offentlig tilgængelig størrelse er en sætnings mening så givet? Frege mente selv, at det er en sætnings sandhedsbetingelser, der konstituerer en sætnings mening. Den kompetente sprogbruger forstår meningen af en sætning som "Idag er det torsdag.", når vedkommende ved, hvad der skal til for at fremsætte denne som en sand hhv. en falsk påstand. Vedkommende offentliggør så denne viden ved f.eks. at ytre påstanden lille fredag aften.

Frege tager altså "sandhed" som et elementært begreb i den forstand, at en nærmere redegørelse, for hvornår man generelt kan sige, at en sætning er sand, ikke findes, ligesom det ifølge Frege ikke det kan lade sig gøre at give en generel definition af begrebet "sandhed", selv om vi kan belyse det. Vi kan se ovenstående eksemplificeret ved meningen af ord som og, eller, alle osv. En analyse af en sætning som "Det regner idag og det er forår.", hvor "og" indgår, består i at angive de omstændigheder, hvorunder sætningen, der indeholder "og", er sand. Dette sker ved en specifikation af hvornår hele sætningen er sand som følge af sandhedsværdierne af sætningerne "Det regner idag." og "Det er forår.". En sådan specifikation kender vi fra sandhedstabellerne.

Vi bemærker her, at Frege opererer med to sandhedsværdier, men hvad mere vigtigt er, han anser deklarative sætninger for at besidde en sandhedsværdi uafhængigt af vores erkendeformåen, d.v.s sætninger har en "indbygget" sandhedsværdi, og vi forstår meningen af en sætning, når vi kender til de omstændigheder, der vil afdække denne. Vi ser således her, at Frege er realist, en realisme der ligger på det semantiske niveau. Med semantisk realisme menes der det synspunkt, at enhver sætning, der udtrykker en påstand, har en objektiv sandhedsværdi, uanset om man er i stand til at erkende den eller ej.

Semantisk realisme synes, at være et rimeligt synspunkt at holde fast ved, da den fuldstændigt svarer til vores intuition. Da semantisk realisme er noget, der skal problematiseres senere, vil det være på sin plads at give et eksempel på en række sætninger, hvor vores intuition om, at disse har en definitiv sandhedsværdi, kommer i konflikt med andre intuitioner.

Lad os se på sætninger om fremtiden og specielt en række sætninger om en bestemt persons fremtid. Lad os antage, at en række af disse sætninger er sande, og at resten af disse er falske, uanset de ikke er erkendbare, da de hændelser de beskriver ikke er indtruffet. Af disse sætninger,som altså definitivt er sande eller falske, vil der være kombinationer, der beskriver personens fremtidige arbejde, fremtidige familie forhold, fremtidige sejre og nedture samt dødstidspunkt og omstændighederne omkring dette. Det synes kort sagt som om, vi er tvunget til at acceptere fatalisme,

altså det synspunkt at hændelser sker uundgåeligt. Dette strider til gengæld mod vores forestillinger om, at vi har en fri vilje. Nu er der her tale om sætninger om fremtiden og ikke om matematiske sætninger, som har vores interesse. Eksemplet skulle også kun tjene til at illustrere, at vores intuition om den semantiske realismes holdbarhed ikke nødvendigvis er rigtig.

Hvis vi skal vælge et mere matematisk eksempel på, hvor vi kommer i tvivl om den semantiske realismes rimelighed, kan vi nævne en sætning som "Der findes ti på hinanden følgende tre-taller i decimaludvirklingen af π.". Det vides ikke pt. om denne sætning er sand eller falsk, og det kan ikke udelukkes, at dette altid vil være tilfældet.

Vil man stadig opretholde det realistiske synspunkt, må man ihvertilfælde ledsage dette med et argument. Et sådan har Frege netop, idet han betoner sætningers sandhedsværdi, som den objektive størrelse, der muliggør, at en sætnings mening er en offentlig tilgængelig størrelse. Vi kan altså kort sige, at Freges sammenkædning af "sandhed" og "mening" er udtryk for hans realistiske position, der bunder i et syn på sproget, som det middel hvormed vores tanker skal kommunikeres -tanker der udtrykker objektive sandheder om virkeligheden. Alle, der prøver at fremsætte påstande om, at udtryks mening er noget bevisthedsmæssigt eller i det hele taget afviger filosofisk fra Frege, får verbalt en på hatten;
"Was soll man nun dazu sagen, wenn jemand, statt diese Arbeit, wo sie noch nicht vollendet scheint fortzu-setzen, sie für nichts achtet, in die Kinderstube geht oder sich in ältesten erdenkbaren Entwickelungsstufen der Menschheit zurück-versetzt, um dort wie J. St. Mill etwa eine Pfefferkuchen- oder Kieselsteinarithmetik zu entdecken! Es fehlt nur doch, dem Wohl geschmacke des Kuchens eine besondere Bedeutung für den Zahlbegriff zuzuschreiben." (Frege 1884 p. vii).

Lad os nu se lidt videre på Freges syn på sproget og dets virkemåde, for endeligt at se på Freges definition af et tal.Frege inddeler sproglige størrelser ind i to hovedegrupper;De der er navne af natur, og de der er prædikative af natur. I første gruppe er der navne, konkrete beskrivelser, udsagn osv., i den anden gruppe prædikative udtryk, navne på egenskaber osv. Man ser, at der her ikke er tale om en inddeling i forhold til den grammatiske rolle, de forskellige sproglige størrelser spiller, men snarer det vi metaforisk kan beskrive som forskellen mellem mættede og umættede udtryk. Skal vi kort give en nærmere beskrivelse af de to typer for udtryk, må vi f.eks. sige, at prædikative udtryk fremkommer ved i en sand/falsk sætning at fjerne et navn. Denne sondring på sprogligt plan modsvares så på det ontologiske i sondringen mellem objekter og begreber. Ligsom deres lingvistiske modparter er objekter "mættede" eller "fuldstændige" mens begreber er "umættede" eller

"ufuldstændige". Forholdet mellem objekter og begreber udtrykker Frege ved, at et objekt falder under et begreb, netop hvis objektet har de egenskaber, som er karakteristiske for begrebet. Dette forhold mellem objekter og begreber ses også mellem begreber. I dette tilfælde taler Frege om begreber af forskellig orden.

Vi får altså et hieraki startende med objekter, der falder under et begreb af 1. orden, som igen kan falde inden for et begreb af 2. orden. Den videre udredning af disse forhold er noget kompliceret og ikke særlig væsentlig her. Væsentligere er et begrebs ekstension, som er mængden af objekter, der falder under begrebet -også kaldet begrebsomfanget. F.eks. er en postkasse et objekt, der falder under farven rød. "rødhed" er her et begreb idet "...er rød" kan fuldstændiggøres til en sand/falsk sætning ved at indsætte navnet på et objekt. Ekstensionen af begrebet rød er så mængden af alle røde objekter. Vi har nu indført så meget terminologi, så vi kan få en ide om hvordan Freges definition af et tal tager sig ud.

Frege betragter ikke en definition som en notationsmæssig forkortelse men som en udregning af genstande. Ved en definition udpeger eller afgrænser man, det der eksisterer -man skaber ikke nye genstande. Vi ser, at også her er Frege realist, men her er det en realisme på det ontologiske plan. Når man så har gennemført en definition af et tal (som for Frege er et objekt), så har man godtgjort dets eksistens som en objektiv størrelse.

Udgangspunktet for Freges definition er bestemmelser af meningen af sætninger som "tallet der tilskrives begrebet F er lig tallet der tilskrives begrebet G", uden brug af udtrykket "tallet der tilskrives begrebet F". Denne sætning er sand, hvis vi kan lave en en-til-en forbindelse mellem de objekter, der falder under begreberne F og G. Feks. kunne F og G betegne hhv. "fingrene på min venstre hånd" og "fingrene på min højre hånd". Her er det let at etablere en en-til-en forbindelse mellem de objekter, der falder under de to begreber. Frege siger, at F er ligetællelig med G. Der er dog andre begreber, der også er ligetællig med F. F.eks. "tærne på min højre fod", "fløje i pentagon", osv. Om alle disse begreber kan vi sige, at antallet vi knytter til dem er lig antallet, vi kan tilskrive begrebet F. Frege definerer følgeligt tallet, der tilskrives begrebet F som ekstensionen af begrebet "ligetælleligt med begrebet F", dvs. et tal er omfanget af et begreb og som sådan et objekt -nemlig en klasse af begreber. Vi bemærker, at Frege tager etableringer af en en-til-en forbindelse mellem objekter for at gå forud for definitionen af et tal. Faktisk mener han også, at en-til-en tilordningen kan udredes i rent logiske termer (Frege 1884 p. 84), ligesom han mener, at relationsbegrebet hører logikken til (Frege 1884 p.83). Nu er der selvfølgelig mange karakteristika, der er forskellige mellem "tærne på min højre fod" og "fløje i pentagon". Men

netop den lighed vi har påvist ved at trække en-til-en forbindelsen, er det vi vil kalde et tal.

Nu er det en smal sag at definere de enkelte tal: 0 er det tal som tilskrives begrebet "ulig sig selv". (Frege anser lighedsbegrebet for at være et rent logisk begreb. (Frege 1884 p.88)). 1 er det tal, som kan tilskrives begrebet "lig med 0" og videre kan efterfølgerrelationen udtrykkes ved "Der findes et begreb F og et objekt x, som falder under dette således, at tallet der tillskrives begrebet F er n og nummeret, der tilskrives begrebet "falder under F, men ikke lig x" er n". Den sætning udtrykker altså, at n F følger m i følgen af de naturlige tal (Frege 1884 p.89).

Frege går videre til at vise nogle enkle sætninger som "Hvert tal forskellig fra 0 følger umiddelbart efter et andet naturligt tal" (Frege 1884 p.92) og intet tal følger sig selv i følgen af naturlige tal for tilsidst bl.a. at konkludere følgende;
"Ich hoffe in dieser Schrift wahrscheinlich gemacht zu haben, dass die arithmetischen Gesetze analytische Urtheile und folglich a priori sind. Demnach würde die Arithmetik nur eine weiter ausgebildete Logik, jeder arithmetische Satz ein logisches Gesetz, jedoch ein abgeleitetes sein." (Frege 1884 p.99).

Der skal måske lige en bemærkning med på vejen angående Freges brug af ordet "logik". For ham synes det at dække store dele af, hvad vi har kaldt sprogfolosofi, samt det vi almindeligvis forstår som logik.

Vi har altså set, at Freges syn på sprogets virkemåde giver sig udslag i en analyse af f.eks. sætninger, der udtrykker ligheder. Specielt har vi Freges definition af et tal som eksempel på en begrebs logisk analyse, der antyder, at vi må opfatte aritmetiske teoremer som værende logiske lovmæssigheder i sidste instans. Denne tese, at aritmetik kan reduceres til logik, kaldes den logicistiske tese og er kernen i Freges matematik-filosofi. Lad os se på den i det følgende.

I forhold til sondringen mellem analytisk/a-priori-, syntetisk/a-priori- og a-posteri erkendelse, er Frege altså af den klare opfattelse, at aritmetiske domme er analytiske, idet de kan reduceres til logiske. Dette anså Frege for at være en forbedring i forhold til Kants synspunkt, hvor matematiske domme ansås for at være syntetisk/a-priori (Frege 184 p.118). Man kan give Frege medhold i, at der er vundet end del ved at kunne betragte aritmetiske domme som værende analytiske uden at skulle være afhængig af syntetiske elementer som Kants tids/rum intuition. Vi skal dog senere se, at det er højst usandsyligt, at Freges reduktion af aritmetik til logik kan lade sig gøre -umulig er reduktionen ihvertilfælde i Freges forstand.

Det synes klart på forhånd, at der er to grunde til uoverenstemmelserne mellem Kant og Frege m.ht., om matematiske domme er analytiske eller ej;
1). Kant havde en for snæver opfattelse af, hvad der kunne anses for at være analytisk.
2). Frege havde en for bred opfattelse af karakteren af analytiske domme.

Her gør begge forhold sig gældende. Kant f.eks. anså analytiske domme for at være trivielle. Dette understregedes af det forhold, at logikken på hans tidspunkt var den klassiske logik d.v.s subjekt -prædikatslogikken, der havde været den herskende logik siden Aristoteles tid (og indtil slutningen af 1900-tallet, hvor Frege indførte radikale ændringer i form af en formalisering samt betydelige udvidelser m.ht. analyse af kvantorer og de logiske konnektiver). At pege på dette som hovedeårsagen til divergenserne mellem Kant og Frege er dog forkert, dels fordi Kants definition af analytiske domme muliggør en bredere logik, og dels fordi Freges opfattelse på en række punkter viser sig uholdbar. Logisk kan man pege på problematiske tautologier som ¬¬A->A og den tilhørende slutningsregel; $\frac{\neg\neg A}{A}$ (Vi vender tilbage hertil senere). Dette viser selvfølgelig ikke, at det logicistiske program ikke kan lade sig gøre. Der er dog en række andre forhold, der peger på, at Frege havde for bred en forståelse af analytiske domme med andre ord, at det er nødvendigt at indføre ikke logiske principper for at gemnemføre det logicistiske program, hvorved hele brodden går af det.

Vi ser i det følgende på Freges sondring mellem objekter, begreber og begrebsomfang. Betragter vi klassen af alle røde genstande (omfanget af begrebet "rød") er dette et objekt, der som sådan kan falde under et begreb (f.eks "ekstension af et begreb"). Specielt kan man spørge om dette objekt kan falde under begrebet "rød". Svaret her er nej. Ser vi derimod på et begreb som "abstrakt", er omfanget af dette begreb abstrakt. Som sådan falder omfanget af dette begreb under sig selv. Det synes altså tilladeligt at spørge, om en klasse af objekter, der falder under et begreb, tilhører sig selv eller ej. Lad os nu danne begreberne "klasse, der ikke er medlem af sig selv" (1.begreb) og klasse, der er medlem af sig selv" (2.begreb). Lad os desuden se på de tilhørende omfang altså 1.omfang og 2.omfang. Antager vi nu, at omfanget af et begreb enten tilhører sig selv eller ikke tilhører sig selv (Dette er det udelukkede 3.princip, som ihvertilfælde Frege ikke ville bestride.), kan vi spørge, om omfanget af det første begreb tilhører sig selv eller ej. Antager vi, at det tilhører sig selv, får vi, at det falder under det 1.begreb, altså at det ikke er medlem af sig selv. Antager vi omvendt, at omfanget af det 1.begreb ikke tilhører sig selv, så må det tilhøre omfanget af det 2.begreb d.v.s falde under begreb 2., og dermed får vi, at

omfanget af begreb 1. tilhører sig selv. I begge tilfælde ser vi at omfanget af begrebet "klasse, der ikke er medlem af sig selv" både tilhører sig selv og ikke tilhører sig selv. Dette strider mod loven om kontradiktion ("ikke både A og ¬A").

Man kan iøvrigt anskue dette fra et semantik synsvinkel, idet vi ifølge Frege ville have to referencer for en sætning (Frege anså en sætnings reference (bedeutung) for at være en af de to sandhedsværdier sand/falsk, ligesom prædikater og navne som reference hhv. har begreber og objekter som deres reference). Vi kan altså konkludere, at forholdet mellem et begreb, dets omfang og de objekter, der falder under det, ikke er så enkelt et forhold som først antaget. Nærmere bestemt kan vi sige, at indførelsen af disse tilsyneladende logisk funderede størrelser fører til konflikt med grundlæggende logiske principper (udelukkede 3. og loven om kontradiktion).

Året inden Frege udgav "Grundlagen der Arithmetik" (1884), hvor han bl.a. angav definitionen på et naturligt tal, var Cantor kommet med sit arbejde indenfor mængdelæren, der på flere måder mindede om Freges arbejde. Til trods herfor stod overenssemmelserne mellem Frege og Cantor dog klart i skyggen af de uoverensstemmelser, der fandtes. Da Frege udgav "Grundlagen der Arithmetik", blev denne anmeldt af Cantor. På trods af en fundamental enighed med Frege var Cantor meget forbeholden over for hans arbejde, og gav dette værk en hård kritik (Dummet 1973 p.630, Dauben 1979, p.221). Omvendt anså Frege Cantor's tilgang til mængdelæren for at være usikker:
"Though Frege was in large part sympathetic to Cantors achievment, he was tremendously concerned over what he felt were its weak and consegently unacceptable foundations" (Dauben 1979, p.220).

Denne uoverensstemmelse mellem Frege og Cantor mht. grundlaget for mængdelæren kan ses som udtryk for den forskel, der er mellem filosoffen og den arbejdende matematikker:
"Frege, like Peano, Whitehead, Russell, and Zermelo, believed that strictly logical conciderations had to be made precise before one could accept mathematics, finite or transfinite, as regordusly established. In order to do so, the intuitive levels on which Cantor had worked his entire life were abandoned in favor of strictly logical analysis. This was territory in which Cantor would have felt foreign and uncomfortable. (Dauben 1979 p. 223).

Ligheden mellem Frege og Cantors arbejde var dog stor nok til, at Russells paradoks lod sig formulere i mængdeteorien. Forholdet mellem et begreb og dets omfang er som mellem et åbent udsagn $P(x)$ og mængden af de størrelser, der gør dette sand; $\{x: P(x) \text{ er sand}\}$. Videre er forholdet mellem et objekt og et begrebsomfang som forholdet mellem element og mængde.

Det er da også muligt at formulere førnævnte paradoks i Cantors mængdelære. Ser vi på det åbne udsagn P(x): "x er ikke element i sig selv" og danner mængden $M = \{x: P(x)\}$, kan vi spørge, om M tilhører sig selv eller ej, og ligesom ovenfor fører dette til selvmodsigelse.

Cantor selv var godt klar over, at der i mængdelæren optrådte visse uregelmæssigheder. Han havde selv frembragt en (ifølge Fraenkel m.fl. i 1899) ved at betragte mængden af alle mængder U. Nu skulle U være den største mængde overhovedet, men ifølge hans teori er potensmængden P(U) endnu større. Nu forstyrrede dette ikke Cantor sønderligt. Han mente, at analogt til de endelige tal så var der ikke noget største transfinit tal, men at betragte samtlige tranfinitte tal på samme måde som de naturlige tal -altså som en totalitet- var forbundet med inkonsistens. Det var kun gud, der havde begreb om så absolut en størrelse (Dauben 1979, p.245). Cantor selv var ved få modifikationer af sin teori i stand til at omgå denne uregelmæssighed og betragtede den ikke som et fundamentalt slag mod sin teori -tværtimod:
"Cantor on the contrary, regarded the antinomies as positive results which fully complementery the advance of his research. It was Bertrand Russell who finally made it unmistakabele clear that such was not the case at all." (Dauben 1979 p. 242).

Vi ser altså de samme fænomener optræde i forholdet mellem Cantor og Russell som ovenfor mellem Cantor og Frege. Cantor er den arbejdende matematikker, der godt kan få sin mængdelære til at løbe rundt. Der er nogle problemer hist og her, men de klares hen ad vejen. Russell er den filosofisk- og grundlagsorienterede matematikker, der kræver præcision. Med ham bliver anomalierne til et langt mere fundamentalt problem end et, der kan løses ved diverse ad hoc remedier, idet det er i selve mængdebegrebet, at der er indbygget inkonsistens. Med inkonsistens her kan der genereres lige så mange paradokser, som det skal være. Dette betød for det logicistiske program, at det ikke længere var spørgsmål om, der var en passende logisk fundering af matematikken, men om en logisk fundering overhovedet var mulig. Dette spørgsmål rammer Frege specielt hårdt:
"When applied in the context of a carefully developed logical program like Freges Grundgesetze, the devastating effect of the paradoxes was evident : they threatened the entire structur" (Dauben 1979 p.241).

Fra et matematisk synspunkt kan vi sige, at det logicistiske program bestod i en udledning af aritmetik fra logik samt mængdelære. (Hos Russell var projektet noget mere ambitiøs. I "Principia Mathematica" søgte han sammen med Whitehead at lave denne reduktion videre således, at det meste af datidens matematik på nær geometrien, kunne ses som værende baseret på logik og mængdelære.) Hvis man forstår Freges program bredt således, at aritmetik omfatter de reelle tals

teori, så er de ovenfornævnte mængdeteoretiske paradokser et rimeligt symptom på programmets mangler, idet der skal et temmelig stort mængde teoretisk apparat til for at udlede den reelle analyse. Hvis vi dog ser -og som Frege nok også har set- aritmetikken som de naturlige tals teori, så er de mængdeteoretiske problemer knap så god den diagnose på logicismens mangler. Der her ikke skal de store mængdeteoretiske armbevægelser til for lave aritmetik.

Der er dog andre mangler ved Freges redegørelse. Frege har brug for, at der, til hvert begreb F han ser på (f.eks. "sig selv ulig"), svarer en klasse af begreber nemlig netop alle de begreber, der er ligetallig med F. Spørgsmålet er nu, om man rent logisk kan godtgøre, at disse klasser (som er omfanget af begrebet "ligetalligt med F") faktisk betegner noget. Frege er tavs i den konkrete redegørelse, en tavshed der afspejler hans begrebsrealistiske holdning. Almene entiteter (modsat partikulære) indgår for ham som en objektiv del af virkeligheden. Det er iøvrigt på dette punkt, der er størst uenighed mellem Frege og datidens anden store logicist -Russell (se nedenfor).

At der uendelig mange naturlige tal beror (korrekt nok) på, at Frege kan definere tallene 0 og 1 og videre angive, hvorledes tallet n+1 defineres, når vi har defineret n. Han viser videre, at tallet n ikke kan efterfølges i rækken af naturlige tal af et tidligere defineret tal. Herefter kan han betragte de naturlig tal som en uendelig totalitet. Denne procedure kræver dog, at de forskellige klasser, som er nævnt ovenfor, har en reference. Klasser er for Frege objekter, d.v.s antagelsen om, at disse klasser har en reference, beløber sig til i det mindste til en antagelse om, at der findes uendelig mange objekter. Ydermere går denne antagelse forud for en forståelse af, hvad et naturligt tal er.

Dedekin, der var ude i lignende overvejelser, var overbevist om, at han havde etableret eksistensenen af en uendelig mængde ved at angive en reflexiv mængde, d.v.s en mængde der kunne bringes i en en-til-en forbindelse med en ægte delmængde af sig selv. En reflexiv mængde er klart ikke endelig.

Dedekin betragtede mængden af alle tænkelige genstande T. Tanken "t er genstand for tanken" tilhører T. Alle genstande for tanken af denne specielle form kaldes T'. $T' \subseteq T$, da der findes andre tænkelige genstande en netop dem i T'. På den anden side har man en tanke genstand $t \in T$, så tilhører tanken "t er genstand for tanken" T'. Således er forbindelsen mellem T og T' en-til-en. Problemet med denne tankegang er, at den også er berørt af Russells paradox (Fraenkel 1973 p.46).

Vi ser altså, at Frege skal indføre et slags uendelighedsaksiom, som godt nok synes overmådig plausibel,

men som ikke desto mindre ikke er logisk begrundbar. Dette argument mod Frege er en invending, der ikke påberåber sig de mængde teoretiske paradokser. Disse virker trods alt farligst, når vi taler om mængder af stor kardinalitet.

Lad os tilsidst pege på endnu et problem ved Freges redegørelse. Dette problem omhandler brugen af foreliggende uendelige mængder i modsætning til uendelige mængder, der er under frembringelse -de såkaldte potentielle uendeligheder. Potentielle uendeligheder opstår i forbindelse med processer, der kan gentages ad infinitun; f.eks. halvering af et liniestykke, halvering af en af disse, osv. Aristoteles mente f.eks., at alle uendeligheder kunne behandles på denne måde, og at foreliggende uendeligheder som peceptuelle objekter var logisk umulige. Kant, der også operede med denne distinktion, var lidt mere liberal, idet han nok mente, at vi kunne percipere faktiske uendeligheder. Forholdet mellem disse og protentielle uendeligheder er for Kant som forholdet mellem tallet 2 og tallet $100^{100^{100}}$ (Jeg skal nok vende tilbage til disse forhold senere). Intuitivt synes det rimeligt (med Frege) at acceptere uendelige mængder som foreliggende totaliteter i en eller anden forstand. Lad os dog se på et eksempel, hvor vi ikke kan opfatte en klasse som en foreliggende uendelighed.

Det er velkendt, at hvis man har givet en mængde M kan danne mængden af delmængden af denne P(M), og at kard P(M)> kard M På denne vis får vi, at vi hele tiden kan frembringe større og større kardinaltal, og at denne proces ikke bringes til standsning således, at vi får et største kardinaltal. Ser vi nu på klassen af alle kardianltal, så kan denne ikke opfattes som en totalitet, der foreligger, idet den i såtilfælde ville kunne tilskrives et kardinaltal i modstrid med, at et største sådan ikke fandtes. Vi ser altså, at Cantors mængdelære giver anledning til en noget anden type paradoks en den "mængden af alle mængder ikke indeholdt i sig selv" giver andledning til. Dette paradoks kaldes Burali-forti's paradoks og blev publiceret i 1897. Cantor kendte godt dette paradoks -allerede i 1897 (Fraenkel 1973 p. 8) -men ligesom med hans eget paradoks kunne dette håndteres.

Man kan selvfølgelig godt sige, at det også her er den uhæmmede brug af store mængder, der fremtvinger et paradoks og ikke forestillinger om, at uendelige mængder kan behandles som totaliteter. Man kan dog også sige, at hvis de forskellige klasser ikke opfattes som totaliteter (Dette kræver selvfølgeligt et andet mængde begreb.), så kunne de omtalte paradokser ikke frembringes. Cantor betragtede sådanne kolossale totaliteter som inkonsistente "vielheiten", hvor ethvert forsøg på at gøre sig begreb om disse fører til inkonsistens. På denne vis får vi allerede hos Cantor en distinktion mellem forskellige uendelige totaliteter svarende til distinktionen mellem mængde og klasse. (Hvor grænserne gik mellem de to begreber var dog

ikke nøje fastlagt.) Det var via denne distinktion, at Cantor var i stand til at håndtere mængdelæren på trods af forekomsten af nogle på anomalier. Der er med andre ord mulighed for stor uenighed, om hvorledes vi skal forstå uendeligheder. Ser man på forskellige filosoffers og matematikkeres udlægning af dette begreb, er der faktisk vild uenighed, dette vender jeg også tilbage til.

Der var en del forsøg på at rede Freges tese om, at aritmetik var analytisk. Russell søgte, at omgå paradokserne via sin typeteori, hvor han inddelte objekter i forskellige typer. Type 1. svarede til de objekter hos Frege, der kunne tilskrives et navn, type 2. svarede til omfanget af et 1. ordens begreb, o.s.v. Formuleret ved brug af mængdeteoretiske begreber; entiteter af 1. typer var "ægte" elementer, altså entiteter der ikke var dannet af mængder. Entiteter af 2. type var mængder dannet af entiteter af 1. type. De n+1'te typer var så mængder dannet af mængder af n'te type. På denne vis kunne selvreference undgås. Her behøvede Russell imidlertid et uendelighedsaksiom, der postulerede eksistensen af uendelig mange entiteter af 1. type. Dette aksiom er stærkere end det "uendelighedsaksiom" vi nævnte før ved Frege. Intuitivt er det ikke engang til at sandsynliggøre, og logisk begrundbart er det ihvertilfælde ikke.

Den her beskrevne typeteori er endda en skrabet udgave i forhold til Russells oprindelige, hvor f.eks. de reelle tal kunne forekomme på forskellige niveauer i teorien. Dette skyldtes, at denne udvidede typeteori ikke havde de forskellige typer ordnet lineært, men var en forgrenet typeteori. Der var således her brug for, at det var de samme reelle tal, der blev konstrueret som type n, som dem der var konstrueret som type m. Bortset fra at denne situation strider mod vores intuition, så måtte Russell her indføre et aksiom, der godtgjorde, at der var en overensstemmelse mellem f.eks. reelle tal frembragt indenfor forskellige typer. Andre forsøg på at rede Freges program gik på at lave restriktioner enten angående antagelser vedrørende mængders eksistens (Zermelo) eller angående antagelser, der specificerer elementernes karakter. Fælles for disse forsøg var, at de ikke bevarede alle ønskelige mængde- og element egenskaber. En mere generel indvending må også være, at hvis matematikken skal hvile på mængdelære og logik, må disse være bæredygtige. Specielt kan mængdelæren ikke være en kontroversiel størrelse, hvorom der findes mere eller mindre tilfredsstillende udlægninger. På trods af disse indvendinger findes der (i en noget anden form) stadig fortalere for en logicistisk orienteret matematik filosofi f.eks. repræsenteret ved Quine (At trække Quine ind i billedet her er måske mere misvisende end oplysende, idet han afviger filosofisk fra f.eks. Frege på lang række områder; Hos Quine ses sproget som et netværk af domme -ændrer man meningen af en dom får dette konsekvenser for hele netværket. Følgeligt er det hos Quine ikke særlig væsenligt

hvilken mening den enkelte sætning har, modsat Frege for hvem dette var et centralt spørsmål. Erkendelsesteoretisk accepterer Quine ikke sondringen analytisk/syntetisk og ontologisk er han af den opfattelse, at vores ontologiske antagelser må til enhver tid indpasses i vort samlede erkendelsesnetværk. Ontologien har således intet krav på at være almengyldig.), ligsom den mængdeteoretisk baserede matematik har haft stor udbredelse i undervisningen.

Vi skal tilsidst bemærke at til trods for, at Russell og Frege var enige et langt stykke af vejen mht. det logicistiske program, så var de dog uenige på et væsentligt punkt, nemlig mht. udlægningen af definitioners rolle. Vi har set, at Frege er konceptuel realist -begreber eksisterer som reelle entiteter. Når vi ved hvad, der skal til for at kunne sige, at et objekt falder under et begreb, og så også ved, om dette begreb er tomt eller ej, så ved vi også besked, om dette begrebs eventuelle eksistens. Når vi laver en definition ifølge Frege, så afgrænser vi altså en klasse af objekter, men denne klasse skal også vises at være ikke-tom.

Omvendt mener Russel at definitioner blot er notationsmæssige hjælpemidler. Begreber er altså ikke platoniske entiteter men derimod entiteter, som vi skaber for at gøre livet mere bekvemt. Bevares -vi indfører ikke ligegyldige definitioner. Definitioner har nemlig foruden deres notationsmæssige funktion den fordel, at de peger på, hvad der er væsentligt at betragte. Desuden er notationsprocessen ikke overflødig i den forstand, at den giver os en indsigt, som vi ville have været foruden, hvis vi ikke havde lavet en given definition. Disse fordele er dog biting i forhold til definitionens primære funktion, vi må fastholde, at Russell er konceptuel realist -dvs. nominalist.

Matematisk er denne forskel på Russell og Frege underordnet, men filosofisk er den interessant.
Ser vi på Freges definition af et tal, så repræsenterer denne en overgang fra den rene logik til noget, der minder om matematik. (Denne forskel mellem matematik og logik bliver endnu tydeligere, hvis vi ser på indførelsen af Peano's aksiomer.) Den logicistiske tese siger, at matematik udspringer af logik. På et eller andet tidspunkt må der ske en transformation fra logik til matematik -en transformation der sker via definitioner, som vi eksempelvis så det ved Freges definition af et tal.

Lad der nu være givet en sådan udledning af et stykke matematik fra den rene logik. Hvis vi følger Russell, så må denne kunne udføres uden brug af definitioner, da disse kun er at betragte som notationsskift (Vi får godt nok et temmeligt tungt apparat.), og følgeligt bliver der ingen forskel på logik og matematik -i bedste fald vil matematik kunne karakteriseres som "kompliceret logik". Her synes Freges position at være langt mere tilfredsstillende, idet matematik godt nok bliver udvidet logik, men på en sådan

måde, at man via definitionerne har udviklet og opdaget en række nye områder, som logikken dækker. Dette svarer i langt højere grad til vores almindelige opfattelse af forholdet mellem faggrupper.

Vi har her hovedsagelig set på, matematikfilosofien repræsenteret ved Frege. Den er blevet anvendt på "grundlagsproblemet", d.v.s problemet om hvorledes vi skal forankre de mest fundamentale matematiske principper, metoder, sandheder m.m. Desuden har vi set på uendelighedsbegrebet samt det første "naive" mængdebegreb. Af andre matematikfilosofiske hovedområder kan vi nævne problemet om forbindelsen mellem anvendt og ren matematik, problemer omkring den matematiske virkeligheds beskaffenhed samt matematiske sætningers erkendelsesmæssige status. På de sidste to punkter var Frege klar. Den matematiske virkelighed er en objektiv størrelse, som det er matematikkerens opgave at afdække, og de matematiske sætninger er analytisk sande, i kraft af at de kan reduceres til logik.

HILBERT

Når man som studerende har læst det ene matematiske værk efter det andet og set, at der i en ikke uvæsentlig del af disse værker har været et indledende afsnit om mængdelæren, kunne man alligevel forsigtigt spørge, om man, på baggrund af de paradokser vi har set, ikke bare kunne undvære mængdelæren. Dette ville nok være et drastisk skridt for næsten en hvilken som helst matematikker og især for en matematikker som David Hilbert, der -ikke uden grund- havde stor tiltro til det produkt, han arbejdede med. Mange nye resultater, der kom frem omkring århundredeskiftet, hvilede på mængdelæren. Blandt disse kendte sætninger som Borels overdækningssætning og Bolzano/Weierstrass' sætning foruden en lang række andre. Så når Hibert mener, at mængdelæren er et paradis, skabt af Cantor (se nedenfor), og at vi bør være optimister mht. løsning af de problemer, der måtte opstå, så bunder dette i, at videnskaberne i almindelighed og matematikken i særdeleshed i perioden før første verdenskrig var i en rivende udvikling med det ene betydelige resultat efter det andet (Dauben 1979 p.263.)

At der opstod visse anormaliteter i mængdelæren kunne således ikke få ham til at skifte til anden opfattelse end, at matematikken og i særdeleshed langt den største del af Cantors mængdelære var uberørt af disse. I forhold hertil var de mængdeteoretiske paradokser kun randfænomener, som skulle sies fra det man "egentlig" forstår ved matematik. Det, der altså i første omgang var Hilbert mål, var således at give en beskrivelse af matematikken, således at den blev retfærdiggjort i sit virke samtidig med, at man undgik paradokserne.

Hilbert selv var i 1899 kommet med bidrag til forskningen omkring den euklidiske-/ikke euklidiske geometri, idet han havde givet aksiomtiseringer til disse -aksiomatiseringer i en noget anden betydning end Euklids oprindelige. For det første forsøgte Euklid at give definitioner på forskellige matematiske objekter som punkter (det der ingen udstrækning har), linier osv. Sådanne definitioner, der angav matematiske objekters beskaffenhed, var for Hilbert fuldstændig uinteressante. Det, der var interessant, var deres indbyrdes forhold. Han sammenlignede den matematiske virksomhed med et slags spil, og i et spil som f.eks. skak er det underordnet, hvad et tårn er. Det, der er væsentligt, er hvorledes dets rolle er i spillet, altså bl.a. hvorledes det bevæger sig, og hvorledes dets samspil er med de andre brikker. Det matematikkeren skal gøre, er altså at specificere de relationer de såkaldte punkter, linier mm. skal have indbyrdes og til hinanden. Således var det en væsentlig rolle hos aksiomerne, at de skulle være formidlere af spillereglerne i det geometriske spil igen i modsætning til Euklid, hos hvem aksiomerne var selvindlyssende sandheder, der dannede grundpillerne i virkelighedens

geometri -nemlig den euklidiske. Naturligvis var aksiomerne ikke helt tilfældigt fastlagte. Man havde en standart interpretation i mente ved f.eks. aksiomsgrupperne I-III, parallel aksiomet samt aksiomsgrupppe V, altså den geometri der svarer til det, vi normalt forstår ved den euklidiske geometri. Denne intenderede meningsfastlæggelse (hvorom vi ikke på forhånd kan være sikker på at der ikke er flere) forekommer kun på det intuitive niveau. Reelt har vi kun et system af udsagn deduktiv ordnet i forhold til vores aksiomer. Bruger vi igen analogien til et spil er vi kun interesseret i spillets regler og dets spilbarhed og ikke om diverse intuitioner mm., man kan have vedrørende spillet. Det vi kan bedømme spillets succes på er nu, om det kan lade sig gøre at spille det, eller om man har fastlagt reglerne således, at man kommer i en situation, hvor to regler angiver forskellige forløb for det videre spil. Ifølge Hilbert var det matematiske spil spilbart, hvis systemet af udsagn udledt af aksiomer samt aksiomerne selv ikke indeholdt et udsagn samt dets negation, altså hvis systemet var konsistent. Det var en videreudvikling af disse ideer, der førte til formulering af det formalistiske program, hvis hovedtræk vi skal skitsere i det følgende.

Nu var det den uhæmmede omgang med uendeligheder, der førte til anomalierne i Cantors mængdelære. Dele af matematikken nemlig den, der angår finitte totaliteter, er ikke berørt af paradokserne. Denne del af matematikken har yderligere den fordel, at den direkte kan vises at være konsistent, idet f.eks. objekter i den finitte talteori kan identificeres med konkrete objekter. (Hilbert anså genstandene for den finitte talteori at være streger "I","II","III", osv.) Omvendt kunne man ikke vise konsistensen af den transfinitte del af matematikkem på denne vis, da uendelige totaliteter ikke svarer til perciperbare genstande. Man kunne dog vise en teoris konsistens i forhold til en anden, f.eks. konstruerede Hilbert en model for den euklidiske geometri inden for de reelle tal, hvor konsistensen af førstenævnte så afhang af konsistensen af sidstnævnte. Konsistens kan dog generelt ikke vises på denne relative måde. Vi må have et direkte bevis for konsistensen af f.eks. den transfinitte aritmetik. Her er det, at den formaliserede matematik kommer ind i billedet, idet hvis f.eks. aritmetikken skulle gøres til genstand for studier skulle denne klart afgrænses. Denne afgrænsning sker ved en formalisering (som vi nærmere skal beskrive i det følgende), hvor man klart angiver hvilke tegn man bruger, hvordan disse sættes sammen til "meningsfulde" udtryk, hvad et bevis er, hvilke aksiomer man opererer med, osv. I forhold til denne formalisering har den finitte matematik to roller:
1) Den er den ukontroversielle kerne i matematikken og i forhold til hvilken den transfinitte matematik kun er en konservativ udvidelse. (Her med streger og streg dannelse som genstands område.)
2) Den er et redskab, hvormed konsistensen af den formaliserede matematik skulle vises. (Her med formler og

formeldannelse som genstandsområde).

Sætninger indenfor den finitte matematik omhandler altså reelle objekter i modsætning til den ikke-finitte matematik, der omhandler ideelle objekter. Tilsvarende kaldes sætninger vedrørende de reelle objekter for reelle sætninger. Beviser vedrørende sætninger indenfor dette område beløber sig nogenlunde til beregninger samt kombinatoriske manipulationer. Hilbert var aldrig helt klar på dette område, men man må dog give ham medhold i, at det han betegnede, som den finitte matematik ikke var videre kontroversiel hvad angår styrke. Langt de fleste sætninger er dog såkaldte ideelle sætninger. Lad T være et formelt system af sætninger . Lad S være et system af sætninger indlejret i T, dvs. S er enten et delsystem af T eller S kan "oversættes" til et sådan ved en passende afbildning. At T repræsenterer en konservativ udvidelse af S vil sige at enhver reel sætning bevist inden for T vil kunne bevises inden for S, med andre ord indførelsen af de ideelle objekter og -sætninger vil ikke medføre en udvidelse af de reelle sætninger. Denne konservations-egenskab kan udtrykkes ved skemaet; $PR_T(b,J(\varphi))\rightarrow\varphi$, hvor $PR_T(b,F)$ er et bevisprædikat, der udtrykker at T-formlen F er bevist ved symbolstregen b (se nederfor) og J er oversætter funktionen for formler φ, $J(\varphi)\in T$. Skemaet kaldes også det bevisteoretiske reflektionsprincip og er ækvivalent med sætningen, der udtrykker "T er konsistent" (Sieg 1984 p.172). Et finitistisk bevis for konsistensen af T ville nu give en generel metode til at transformere beviser for reelle sætninger om til S-beviser for disse ; $PR_T(b,J(\varphi))\rightarrow\varphi$ er teorem i S hvis $kons_T$ (sætningen der udtrykker at T er konsistent) er teorem I S. I dette tilfælde ville et T-bevis for $J(\varphi)$ giver, at $PR_T(b,J(\varphi))$ er teorem i S og derved φ teorem i S.

Vi ser her -noget overraskende- at konservationsprogrammet, der går ud på ad finitte vej at vise, at de ideelle sætninger repræsenterer en konservativ udvidelse i forhold til de reelle sætninger, er afhængigt af programmet, der skal vise matematiske systemers konsistens (og omvendt). Vi ser også at formaliserede teorier hos Hilbert ikke er rene sprogspil, som antydet i indledningen af dette afsnit, men teorier centreret om en kerne af meningsfulde reelle sætninger. (Den mere filosofiske fundering af de ideelle elementer kommer senere.)

Vi har altså matematik på 3 niveauer :
1) Den "egentlige matematik", som praktiseres af den arbejdende matematikker.
2) En formalisering af denne. Denne formalisering konstitueres af en afgørlig række (logiske og matematiske) aksiomer, samt deres konsekvenser (der fremkommer ved at anvende givne sluningsregler).
3) Metamatematikken, hvis genstandsområde er den formaliserede matematik. Sidstnævnte er konsistent, da den

begrænses til at omfatte de såkaldte finitte metoder.

Målet var nu at give en passende række aksiomer, således at denne formalisering var fuldstændig, dvs. til enhver intuitiv sand sætning skulle der i den formaliserede matematik findes et teorem. Da man mente, at enhver sætning enten er sand eller falsk, betød dette, at der for enhver sætning $\supset$ skulle gælde at $\supset$ eller $\neg\supset$ skulle tilhøre den formaliserede matematik. Samtidigt var det vigigt, at klassen af aksiomer i formaliseringen var afgørlige, idet dette var nødvendigt hvis man skulle holde styr på hvilke formler, der tilhørte formaliseringen. Hvis man nu kunne vise, at den formaliserede matematik var konsistent, så havde man retfærdiggjort indførelsen af de ideelle objekter og dermed påvist matematikkens sandhed. Idealet var således en konsistent, fuldstændig og afgørbar formalisering af matematikken. Lad os i det følgende se på hvorledes en sådan formalisering tager sig ud, og om programmet, der går ud på at vise dens konsistens, kan gennemføres.

Først og fremmest skal der redegøres for hvilke logiske og matematiske symboler, der skal bruges. Hvis f.eks. den intenderede model for vores formalisering er aritmetikken, skal vi foruden logiske symboler som "(", ")", "->", "$\exists$", "v_1", "v_2", "=", have prædikatsymboler og funktionsymboler som "<", "S", "+", ".", "$\exists$", samt konstant symbolet "0". Der er selvfølgelig en vis forbindelse mellem valget af notation og den intenderede interpretation. Dernæst skal der redegøres for hvilke sammensætninger af symboler (symbolstrenge), der er syntaktisk meningsfulde. F.eks. skal der ved brug af parenteser være lige mange højre og venstre parenteser. De simpleste interessante symbolstrenge er termerne. Disse kan interpreteres som navn på et objekt. Eksempler på termer er 0, v_1, $S(V_1)$,.... De mere komplicerede symbolstrenge der er syntaktisk meningsfulde er de såkaldte velformede formler. Disse interpreteres som udsagn. Eks. på velformede formler er "$v_1<0$", "$S(0)=v$", "1=0". (Disse kaldes atomiske formler og karakteriseres ved manglende logiske konnektiver), samt "$\neg(S(0)=0)$","$\forall v_1\ V_1>0$". Det er let at vise, at ved passende regler for dannelse af syntaktisk korrekte symbolstrenge er der entydig læsbarhed (f.eks. ved rigelig brug af parenteser).

Med regler for dannelse af syntaktisk meningsfulde udtryk skal vi nu formalisere det, der svarer til et bevis i den intenderede interpretation. Intuitivt er et bevis en kæde af slutninger, hvor sidste led i denne slutningskæde er sand hvis de første er det. Dette kan illustreres ved en slutningsregel som modus ponens ;

$$\frac{a,\ (a\to b)}{b},$$

dvs. hvis a og a->b er sande sætninger, så er b en sand sætning. Hvis nu a ikke ved hjælp af en sådan slutningskæde kan sluttes af andre sætninger, må a være et aksiom. Ideen er nu, at vi laver en liste over aksiomer samt gyldige

slutningsregler. Her er der mange mulige fremgangsmåder. Generelt kan vi dele aksiomerne op i logiske aksiomer, d.v.s. aksiomer der kun vedrører syntaksen f.eks. tautologier og i aksiomer vedrørende den intenderede interpretation, f.eks. hvis denne er Peano aritmetikken så Peano's aksiomer. Endelig skal vi angive hvilke slutningsregler, der er tilladte. Hvis man her har tilstrækkeligt med logiske aksiomer, kan man her nøjes med en slutningsregel f.eks. modus ponens. I dette tilfælde vil et bevis for α_n være en endelig følge af sætninger $(\alpha_1,..,\alpha_n)$, hvor α_i enten er et aksiom eller fremkommer af α_i og α_k j,k <i ved modus ponens. (Man bemærker at det er "mekanisk" afgørbart, om en følge af sætninger er et bevis eller ej.).

Spørgsmålet er nu om denne definition af et bevis svarer til vores intuitive forestilling om, at et bevis godtgør, at vores konklusion er sand når præmisserne er det eller sagt mere præcist; enhver model for aksiomerne skal også være model for den beviste sætning. Hvis vi har været tilstrækkelig omhyggelige ved opskrivningen af aksiomer og slutningsregler, er det forholdsvis nemt at vise, at vores formalisering af et bevis er sund, dvs. hvis vi ud fra aksiomerne A kan bevise en sætning φ ($A \vdash \varphi$) så er vi sikker på at φ følger logisk af A ($A \models \varphi$); d.v.s. modeller for A er også modeller for φ. At det omvendte gælder ($A \models \varphi$ medfører AT $A \vdash \varphi$) er på forhånd knap så indlysende, men igen : Er vi omhyggelige nok med vores definition af et formelt bevis -og det er der matematikkere, der har været-, kan man vise at denne defintion er fuldstændig (Gödel 1930), altså at beviser i første ordens logik netop afspejler, hvad det vil sige, at en sætning følger logisk af aksiomerne.

Gödels fuldstændighedssætning var et stærkt resultat, men ellers pegede langt de fleste resultater på at formaliserede systemer ikke kunne besidde en række af de egenskaber som man kunne ønske. Mange af disse (negative) resultater blev opnået ved en nummerering af syntaksen den såkaldte Gödelnummerering således, at der var en entydig forbindelse mellem symbolstrenge og naturlige tal. Udsagn om formler blev således udsagn om tal, altså talteoretiske udsagn. F.eks. kunne mængden af sætninger udledt af en endelig mængde formler identificeres med en mængde $M=\{x: P(x)\}$, hvor P(x) er en funktion (Man siger at P(x) definerer mængden.), og hvor man for hvert tal x enten kan slutte $A \vdash P(S^x 0)$ eller $A \vdash \neg P(S^x 0)$ for en afgørbar endelig mængde passende stærke talteoretiske aksiomer A. Dette var blot en blandt mange definitioner på at en mængde M er recursiv. Ifølge Churches tese, som vi nok skal vende tilbage til senere, er dette en formalisering af det intuitive begreb afgørbarhed. Lad nu $\mathfrak{N}$ være en struktur i de naturlige tals sprog, og lad Th$\mathfrak{N}$ være denne strukturs teori d.v.s mængde af sande sætninger i $\mathfrak{N}$ (man kan tænke på $\mathfrak{N}$ som den intenderede interpretation af en formalisering af de naturlige tals teori). Tarski's udefinerbarhedssætning siger

at mængden af Gödeltal af sætninger i $\#Th\mathfrak{N}$ ($\#Th\mathfrak{N} = \{\#\delta : \delta \in Th\mathfrak{N}\}$) hvor $\#\delta$ betegner Gödeltallet af sætningen δ) ikke er definerbar i $\mathfrak{N}$. Specielt bliver $\#Th\mathfrak{N}$ altså ikke recursive.

Lad nu A være en række talteoretiske aksiomer og antag at #A er recursiv (specielt kunne A tænkes endelig), da er mængden af A's konsekvenser Cn(A) ikke fuldstændig. Var Cn(A) fuldstændig, havde vi, at Cn(A)=$Th\mathfrak{N}$, men $\#Th\mathfrak{N}$ (og dermed #Cn(A)) er ikke recursiv. På den anden side hvis Cn(A) er fuldstændig og #A er recursiv, da er #Cn(A) recursiv, udfra denne modstrid ser vi, at der altså ikke findes en fuldstændig recursiv aksiomatisering af alle intuitive sande sætninger i de naturlige tals teori $Th\mathfrak{N}$. Vi kan med andre ord til enhver recursiv aksiomatisering A i de naturlige tals sprog finde en sætning, der intuitiv er sand men som ikke kan bevises (eller modbevises) ud fra A. (Dette er i al væsentlighed indholdet af Gödels 1.ufuldstændighedssætning) Vi ser altså at der er en konflikt mellem to af idealbegreberne aksiomatisering på afgørbar vis og fuldstændighed.

Vi kan bemærke her at Gödels første ufuldstændighedssætning også rammer Freges program, idet lige meget hvor omhyggelig man er med udvælgelsen af sine aksiomer, hvis man kræver, at det skal kunne afgøres, hvad der kan siges at være et aksiom (specielt hvis der er endeligt mange), så får vi sætninger, der hverken kan bevises eller modbevises.

Gödels anden ufuldstændighedssætning var derimod stillet direkte mod Hibert program; Hvis en sætning ved en passende interpretation hævder konsistensen af et talteoretisk system så kan denne sætning ikke vises indenfor systemet, d.v.s i metamatematikken, der er langt svagere end de naturlige tals teori, kan konsistensen af de naturlige tals teori ikke vises. Da sætningen om konsistensen for en teori T $kons_T$ er ækvivalent med reflektionsprincippet betyder Gödels anden ufuldstændighedssætning også, at det ikke finitistisk kan vises, at tilføjelsen af ideelle sætninger til de reelle er konservativ.

Interessant er det, at Tarski med et forsøg på semantisk konsistensbevis nåede til lignende forhold. Semantisk skelnede Tarski mellem objektsprog og metasprog, hvor sidstnævnte er det sprog der taler om objektsproget. Med denne skelnen og diverse krav til objekt -og metasprog (bl.a skal objektsproget betragtes som idealsprog og ihvertilfælde være semantisk lukket d.v.s ikke indeholde sin egen semantik i modsætning til et naturligt sprog, der er semantisk lukket og som derved frembringer semantiske paradokser) søgte Tarski at give en sandhedsdefinition, der undgik semantiske paradokser som løgner paradokset. Denne bliver i sin korteste udgave frembragt af sætningen "Jeg lyver.".

Lad nu S' være et sprog der indeholder et sandhedsprædikat. Med andre ord skal T-sætninger at typen " "P" er sand netop

hvis P "være sætninger i S', hvor "P" er navnet på en sætning P fra objektsproget. Lad nu objektsproget være en teori T. Hvis nu sætningen, der siger at alle teorier fra T kan tilskrives prædikatet "sand" og denne er bevislig i metasproget S' siges sandhedsdefinitionen I S' at være normal. Det er her uklart om konsistens af f.eks. de naturlige tals teori kan vises ved at finde et passende metasprog med en normal sandhedsdefinition for denne teori (faktisk kan konsistens ikke vises på denne måde, jvf. Fraenkel m.fl. 1973 p.294).

Bestræbelserne strandede imidlertid på, at metasproget skulle være strengt stærkere end objektsproget for at vise, at der fandtes en sådan normal sandhedsdefinition. Altså har vi et forhold analogt til det mellem metamatematikken og den formaliserede matematik. Disse begrænsende resultater taler for sig selv, men lad os i det følgende se lidt på i hvilket omfang Hilberts ideer lever videre, og lad os i denne forbindelse forsøge at give en vurdering af hans filosofiske holdepunkter.

Først kan vi kort repetere Hilberts matematikfilosofiske synspunkter. I sit syn på matematiske teoriers genstandsområde tager Hilbert i første omgang bolden op efter Kant ;
"Schon Kant hat gelehrt -und zwar bildet dies einen integrierenden Bestandteil seiner Lehre-, dass die Mathematik über einen unabhängig von aller Logik gesicherten Inhalt verfügt und daher nie und nimmer allein durch Logik begründen werden kann,..." (Hilbert 1930 p.275).

Med andre ord er matematiske sætninger syntetiske og ethvert forsøg på en reduktion af matematik til logik er på forhånd udelukket. Dette er dog ikke en dogmatisk holdning men begrundes ved at "Vielmehr ist als Vorbedingung für die Anwendung logischer Schlüsse und für die Betätigung logischer Operationen schon etwas in der Vorstellung gegeben: gewisse, ausserlogische konkrete Objekte, die anschaulich als unmittelbares Erlebnis vor allem Denken da sind." og "Dies ist die philosophische Grundeinstellung, die ich für die Mathematik wie überhaupt zu allem wissenschaftlicher Denken, Verstehen und Mitteilen für erforderlich halte und ohne die eine geistige Betätigung gar nicht möglich ist. Und insbesondere in der Mathematik sind Gegenstand unserer Betrachtung die konkreten Zeichen selbst, deren Gestalt unserer Einstellung zufolgen unmittelbar deutlich und wiedererkennbar ist." (Hilbert 1930 p.275).

Denne forståelse af visse matematiske genstande som givet ved intuition og som en nødvendig forudsætning for overhovedet at kunne tale om matematisk viden er helt i Kants ånd. Det kan ikke siges klarere, at denne forståelse er roden til Hilberts forståelse af matematiske objekter som værende ikke logiske. Videre ser vi, at denne intuition er som hos Kant a-priori. Facit bliver at den matematiske

erkendelse er a-priori ikke-analytisk erkendelse.

I talteorien er det symbolerne I, II, III, IIII osv., der er de genstande, som vi har ovennævnte intuition om, dvs. vi kan intuitivt skelne disse fra hinanden (modsat empiriske objekter), og det er disse symboler, vi refererer til når vi taler om to, tre osv. elementære sætninger som $2<3$ er så udsagn om forholdet mellem de intuerede symboler 2 og 3. Denne opfattelse holder også for mere komplicerede sætninger så længe vi holder os til tal, der er endelige samt undgår kvantorisering over uendelige totaliteter i de tilfælde, hvor disse ikke kan reduceres til i princippet at være finite.

Hilbert har her selv et eksempel med sætningen "Der findes for det største kendte primtal p et primtal, der er større end p". Hvis det tages som synonymt med "der findes for det største kendte primtal p et primtal der er større end p og mindre end $p!+1$ holder vi os indenfor det finitte område, da det i praksis er denne sætning, man viser. I dette tilfælde er eksistenssætninger reducerbare til en disjunktion mellem endelig mange sætninger. Det er dog almindeligvis ikke i denne betydning eksistenskvantoren bruges. I det generelle tilfælde er sætningen $\exists x\ P(x)$ "ækvivalent" med;

$$P(x_1) \vee P(x_2) \vee \ldots \vee P(v_n) \vee \ldots,$$

en udvidelse der bringer os udover det finitte.

Vi kan altså ikke generelt reducere sætninger med kvantorer ved at transformere disse til hhv. endelige disjunktioner og endelige konjunktioner. En anden udvej kunne være at vise $\neg\forall x \neg p(x)$ i stedet for at vise $\exists x\ P(x)$. Dette giver endda ofte behagelige, præcise og korte beviser, men hviler på et andet kontroversielt princip -tertium non datur. (Hilbert 1930 p.279) (Her er der lidt forvirring omkring sprogbrug. Tertium non datur er et logisk princip. Hilbert forstår på p.196 også dette som det semantiske princip bivalens, eller rettere Hilbert synes her ikke at lave en distinktion mellem logik og semantik.) Generelt kan vi altså ikke behandle kvantorer ved finitte metoder, ligesom man indenfor Cantors mængdelære ikke kan behandler uendelige mængder som endelige totaliteter. Cantors mængdelære har tilgengæld (med rimelig grund) høj anseelse hos Hilbert;
"Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertrieben können." (Hilbert 1930 p.274), ligesom det udelukkede 3. princip samt eksistenssætninger ikke er til at undvære;
"Dieses Tertium non datur dem Mathematiker zu nehmen, wäre etwa, wie wenn man dem Astronomen das Fernrohr oder dem Boxer den Gebrauch der Fäuste untersagen wolte. Das Verbot der Eksistenzsätze und des Tertium non datur kommt ungefähr dem Versicht auf die mathematische Wissenschaft überhaupt gleich."(Hilbert 1930 p.307). Disse objekter og principper m.m skal på trods af deres kontroversielitet indpasses i

Hilberts matematik. Objekterne, altså f.eks. de uendelige totaliteter, opfattes som ideelle objekter (sådanne er set før i matematikken f.eks. "i" i den komplekse analyse; "Gerade wie $i=\sqrt{-1}$ eingeführt wurde, um die Gesetze der Algebra, z.B. die über Existenz und Anzahl der Wurzeln einer Gleichung, in der Eineinfachsten Gestalt aufrechtzuerhalten;..". (Hilbert 1930 p.279) og mens de finitte objekter har en mening, er de ideelle objekter meningsløse, ligesom de logiske symboler og sætninger i den logiske kalkyle er meningsløse. Det, der betyder noget, er om indførelsen af disse ideelle objekter og kontroversielle principper bevarer de matematiske systemers konsistens.

Vi kan her kort bemærke, at Hilbert igen tager bolden op efter Kant, idet Hilberts ideelle objekter er set før på den filosofiske scene med Kants forståelse af fornuftsideer. Disse er ikke hos Kant -og heller ikke hos Hilbert- absolutte i den forstand, at de har samme ontologiske status som f.eks. objekter, der er genstand for vores perception. De er konstruktioner og generalisationer, der kan tjene som ledetråde for vores erkendelse. Hvis man ifølge Kant troede, at fornuftsideer som gud, verden som et hele betragtet, osv. havde denne status, så ville man løbe ind i selvmodsigelser. Nu var Kants sigte med sin argumentation den rationelle udlægning af fornuftsideer, og når han taler om selvmodsidelser, så er det langt fra med matematiske teorier i mente, men hvis man "trækker" Kant lidt, kan man med nogen rimelighed sige, at også de mængde teoretiske anomalier er symptomer på en fejlagtig udlægning af fornuftsideer som uendelige totaliteter. Disse må snarere betragtes som regulative ideer, der altså skal spille rollen som ledetråde for den matematiske erkendelse. Disse har deres berettigelse, så længe de spiller denne rolle godt. Kunne der gives et finitistisk konsistens bevis, ville de have Hilberts blå stempel på, at de spillede denne rolle særdeles overbevisende.

Nu har vi set, at det ikke er muligt at påvise konsistens på en rimelig måde. Dette har dog for det meste affødt en pragmatisk holdning, der går ud på at så længe inkonsistens ikke er blevet bevist, så opererer vi videre med de ideelle objekter og sætninger som om Gödel aldrig var kommet med sine sætninger. Denne beskrivelse passer bedst på de matematikkere, hvis områder ligger fjernt fra den mere grundlagsorienterede matematik. I denne søger mere formalistisk orienterede matematikkere bl.a. at undersøge forholdet mellem forskellige systemers styrke. Her kan man f.eks. ordner disse systemer efter styrke startende med svage aritmetiske systemer, videre med analyse og forskellige mængdeteoretiske systemer for at slutte med systemer, der implicerer store kardinaliteter. Ved at undersøge forholdet mellem sådanne systemer kan man få information om, hvor stærkt et bestemt system er, hvor systemet placerer sig i dette (partielt) ordnede hieraki, og hvor stærkt et system der skal til for at bevise konsistens.

Dette berører også et andet problem. Hvis man har et givet matematisk problem, hvor meget matematik skal der stables på benene for at løse det? Specielt hvis dette problem er indenfor det felt S.G. Simpson kalder ordinær matematik d.v.s.;
"Mainstream mon-set-theoretic mathematics, i.e. mathematics as it used to be before the abstract set theoristes got hold of it .....thus ordinary mathematics includes geometry, number theory, calculus, differential equations, real and complex analysis, countable algebra, ability theory. It does not include abstract set theory, abstract funktional analysis, general topology or uncountable algebra". (Simpson 1984 p. 783p).

Man kan se Hilberts program, som et forsøg på at bygge bro mellem den klassiske matematik og datidens konstruktivistiske synspunkter, som især repræsenteredes af Kroenecker og Brouwer. Metamatematikken var imidlertid for restriktiv en konstruktiv matematik til, at programmet kunne gennemføres, men inspireret af et "udvidet" konstruktiv konsistens bevis nemlig beviset for konsistensen af Peano aritmetikken relativ Heyting aritmetikken (se afsnittet om intuitionistisk aritmetik) kan W. Sieg med Bernays bemærke ;
"It thus became apparent that the "finite standpunkt" is not the only alternative to classical ways of reasoning and is not implied by the idea of proftheory. An enlargning of methods of proof theory was therefore suggested : instead of a restriction to finitist metods of reasoning it was required only that the arguments be of a constructive caracter, allowing us to deal with more general forms of inference."(Sieg 1984 p. 174).

Dette giver anledning til en noget blødere formulering af Hilberts program :
"Thus the question, can we prove the system S for this part of mathematics to be consistent by finitist means? Must be replaced by, can this T, which is significant for this part of mathematics, be shown to be consistent by appropriate constructive means? Or, to paraphrase the new question is T reducible to a constructive justified theory? Hilbert and Bernays considered "ordinary analysis" as the most significant T for which this modified goal should be pursued" (Sieg 1984 p. 174).I forbindelse med diskussionen omkring intuitionisme skal vi vende tilbage til nogle af disse og beslægtede temaer.

Jeg har tidligere forsøgt at besrkive Frege udfra en sprogfilosofisk vinkel. Vi skal også se intuitionismen i dette lys, så lad mig prøve -for egen regning- at gøre de filosofiske aspekter ved Hilbert færdige ved en ekstemporering af hans meningsteori. Vi kan først bemærke, at det kun er de reelle sætninger, der er direkte meningsfulde hos Hilbert. De ideelle elementer introduceres, for at bestemte egenskaber skal være almengyldige.

Eksempelvis kan man i geometrien introducere "uendelige" elementer således, at sætningen om at to forskellige linier netop vil skære hinanden en gang har universel gyldighed. Formålet med at introducere sådanne ideelle elementer er at lukke visse egenskaber, således at vi får pæne afrundede teorier;
"Es ist aber bekanntlich durch Einfürung idealer Elemente, nämlich der unendlich fernen Punkte und einer unendlich fernen Geraden zu erreichen, dass der Satz, wonach zwei Geraden sich immer in einem und nur einem Punkte schneiden, allgemein gültig wird." (Hilbert 1930 p.268)

En mere normal formalistisk fremgangsmåde er dog at fastlægge de ideelle sætningers mening via den interpretation, det system, som sætningen er del af, har. Trukket skarpt op vil dette sige, at den væsentligste meningsbærende sproglige entitet hos formalisten er et system af sætninger, i modsætning til Frege hos hvem den enkelte sætning spillede denne rolle. Den enkelte (ideelle) sætning har hos formalisten sin rolle angivet ved dens relation til de andre sætninger i systemet, dvs. i sidste ende har den sin mening forankret i de reelle sætningers mening -vel og mærke hvis systemet er konsistent. Denne forankring er dog på ingen måde uniform, men afhænger af den enkelte ideelle sætnings bevis. Formalistens position er således et udtryk for en meningsteoretisk semi-holisme, men hvor vi så, at Frege gjorde meningsteorien til brændpunktet for sine filosofiske undersøgelser, er den hos formalisten snarere en slags appendix til den ontologiske tese om den del af matematikken, der har et perciperbart genstands område. Specielt kan meningen af de logiske konstanter ikke specificeres. Deres mening er fastlagt via de interpretationer et formelt system har. Hvis dette system har en eller anden overraskende model, eller hvis vi får nogle overraskende sætninger, må konklusionen være, at også disse er med til at fastlægge meningen af konnektiverne. Det er alene i den finitistiske kerne af matematikken, man kan spørge om de enkelte sætningers mening.

Ovenstående beskrivelse passer ikke helt på Hilbert, men uanset hvilken mening han tillægger de ideelle sætninger, så er deres berettiglse i sidste ende afhængig af et konsistensbevis.

Spørgsmålet er nu, om det kan siges, at vi har et matematisk sprog, der fungerer på denne måde; forstår vi f.eks. en sætning fra analysen som kun givet ved den rolle den spiller i forhold til andre sætninger fra analysen, med andre ord kan man først forstå en sætning fra denne del af matematikken, når vi er fortrolige med analysen -punktum ? Tanken synes noget underlig, men den trænger sig selvfølgelig først på, hvis man tager problemstillingen alvorlig. Mere almindeligt er en pragmatisk holdning til sådanne spørgsmål.

Hilbert selv anser en række andre forhold for mere centrale. Her er det især pålæggende for Hilbert at retfærdiggøre den klassiske matematik. Dette ses i en række af de steder hvor vi har citeret Hilbert. Til dette bemærker Kreisel; "....the rejection of the tertium non datur is much more like depriving non -commutative algebra of the rule ab=ba than a boxer of the use of his fists". og "...a characteristic of Cantors set theory is the abundance of transfinite mashinery which Hilbert regarded in the same paper as "ideal" elements to be used ad gadgets to make life smoother" (Bennacerraf 1983 p. 208 og 209).

Det er her klart, at Kreisel peger på den aura af bevarelse, der omgiver Hilbert. Hvor Hilberts paradigme på ideelle genstande nemlig complekse tal faktisk har en mening givet ved meningen af de reelle tal, savner Hilberts ideelle totaliteter og sætninger i høj grad dette forhold. Hermed peges der på en væsentlig forskel på formalister og de grundlagsmatematikkere, der tager Hilberts finitistike synspunkter alvorligt samtidig med, at de anser de bevarings mæssige aspekter for uvæsentlige -f.eks. intuituinisterne.

BROUWER

I det foregående afsnit har vi mest koncentreret os om en skildring af det formalistiske program, samt set på de to grundlæggende teser;
1). Matematik er baseret på en intuition.
2). Gennemførelsen af smuk, klar og enkel matematik kræver indførelse af ideelle entiteter, hvis berettigelse er givet ved et konsistensbevis (og efter Gödel ad pragmatisk vej).

Det er mest den anden tese og dens konsekvenser vi har problematiseret. Derimod har vi ikke beskæftiget os meget med den første tese andet end at have sagt, at Hilberts opfattelse er, at denne basale intuition er en intuition om perceptuelle objekter. Her ligger Brouwer tættere op ad Kant, idet han godtager Kants tids-intuition (samtidig med at han i lyset af den ikke-euklidske geometri afviser Kants rum-intuition). Denne tids-intuition er klart ikke af perceptuel karakter -så mens Hilberts opfattelse næsten tvinger ham over i den empiriske grøft, og at man hermed må sige, at ihverttilfælde den finitte matematik er syntetisk/a-posteriori, så forbliver Kant og Brouwer med ham i den syntetisk/a-priori erkendelsessfære.

Der, hvor den største forskel mellem intuitionister og formalister viser sig, er imidlertid med hensyn til de ideelle entiteter. Deres berettigelse er helt udelukket ifølge intuitionisterne. Betyder dette så, at intuitionistisk matematik blot er finitistisk matematik? Vi skal i det følgende se, at svaret her er nej. For det første er den interessante matematik ifølge formalisten tilknyttet den ikke finitistiske del. Den finitistiske skulle blot tjene til, at vise den infinitistiske dels konsistens. Så længe den finitte matematik holdt sig til ukontroversielle principper mm. og udvikledes tilpas til ovennævnte formål så var den interessant. At undersøge, hvor langt man kunne nå ad finitistisk vej, var derimod knap så interessant - specielt på baggrund af Gödels anden ufuldstændighedssætning, der viser, at den finitte matematik skulle udvides til langt ud over sine grænser for at kunne påvise konsistens af noget interessant matematik. Intuitionisterne derimod er netop interessereret i at udvikle den konstruktive del (som for dem er den eneste "del") så vidt som muligt og vi skal senere se, at man faktisk har gjort dette i en grad, der langt overgår den finitistiske matematik hos formalisterne. Men lad os allerførst vende os mod Brouwers filosofi (eller mangel på samme).

I redegørelsen indtil nu har vi løst skitseret Brouwers filosofi som tilhørende en kantiansk tradition. Dette er der en del sandhed i, og det er ihverttilfælde i overenssemmelse med de fleste udlægninger af Brouwer, men at sige at det er hele sandheden er nok en tilsnigelse. F.eks.

er der i Benacerraf og Putnam (1983) en artikel af Brouwer (Counsciougness, Philosophy and Language, 1948) genoptrykt i en forkortet udgave, der er renset for Brouwers mere ufuldstændige, naive og solipsistiske synspunkter af mystisk tilsnit. Synspunkter der har lige så meget tilfælles med hinduistisk filosofi som med den europæiske filosofi tradition. Dette ses tydligst i Brouwers beskrivelse af, hvori vores intuition består.

Som vi har nævnt ovenfor forstår Brouwer "intuition" på samme måde som Kant nemlig som en intuition om virkelighedens grundstruktur, men hvor Kant (og faktisk også Hilbert) begrundede sin intuition ud fra det faktum, at vi rent faktisk har videnskablig erkendelse og ser denne som blot en blandt flere erkendelsesformer, søger Brouwer at give en slags psykologisk redegørelse af intuitionens beskaffenhed og ser denne som værende andre erkendelsesformer overlegen. Centralt er hans forståelse af den måde vores bevisthed fungerer på, fordi hans synspunkter her har vidtrækkende konsekvenser for hele han tankegang. Det er dog svært på dette punkt at give en præcis beskrivelse af Brouwers tankegang, da han gør udstrakt brug af metaforer, så lad os starte med et citat;
"Consciousness in its deepest home seems to oscillate slowly, will-lessly, and reversibly between stillness and sensation. And it seems that only the status of sensation allows the initial phenomenon of the said transition. The initial phenomenon is a move of time. By a move of time a present sensation gives way to another present sensation in such a way that counsciousnes retains the former one as a past sensation, and moreover, through this distinction between present and past, receds from both and from stillness, and becomes mind. As mind it takes the function of a subject experiencing the present as well as the past sensation as object. And by retteration of the two-ity-phenomenon, the object can extend to a world of sensations of motley plurality. In measure of the irreversibility with wich the subject has receded from an element of the object, this element loses its egoicity, i.e. Gets estranged from the subject, and in measure of the estrangement, mind becomes disposed to desire and apprehension, and consequently to positive or negative conative activity with respect to the element in question. "(Brouwer 1975 p.480).

Det, der er givet for den rene bevisthed, er altså en stadig strøm af indtryk, hvor hukommelsen er i stand til at fastholde foregående indtryk. Bevisthed er i stand til at differentiere mellem et givet indtryk, foregående indtryk og fraværet af indtryk. I og med at bevistheden har denne evne, hvor den centrale struktur er tiden, blever den til "forstand". Den rene forstand kan dog udsættes for forskellige følelser som lyst, angst, forvirring m.m., ved at en genstand, når denne genstand ikke "opleves" umiddelbart, så at sige fjerner sig fra forstanden. Efter denne beskrivelse af "bevistheden", "in its deepest home" og

nærmeste omegn fortsætter Brouwer sin beskrivelse af bevisthedens gøremål, når denne er kommet lidt hjemmefra. Af de forskellige indtryk, som bevistheden udsættes for, er der nogle som vender tilbage igen og igen i bestemte rækkefølger. Der er her tale om kausale følger. Hvis man overhovedet kan give en filosofihistorisk karakteristik af denne meget ufuldstændige redegørelse, må man her snarere sammenligne Brouwer med Hume end med Kant.

Andre indtryk er tidsuafhængige og uden tilknytning til subjektet. Disse kaldes ting, og blandt disse er der individer. Hele sammensuriet af indtryk hos et subjekt kaldes sjælen. Foruden den rene bevisthedsflugt og forstandens organisering af kausaliteter findes der også andre subjekters organisering af kausaliteter. De forskellige subjekters kausale tænkning organiseres i groupers og institutioners kausale tænkning. Om forholdet mellem disse skriver Brouwer;
"In the preceding, account has been rendered of three successive phases of the exodus of consciousness from its deepest home. Of these phases the naive one was opened with the creation of the world of sensations. The isolated causal one with the setting in of causal activity and the social one with being involved in cooperation with other individuals. Regression from the third to the second phase appears to be frequent and easy, but from either of these regression to the naive phase seems hard to realize, more easily a temporary refluence to the deepest home leaving aside naivity, through the free-will-phenomenon of detachment concentration. The question arises, wether and where, on and after this exodus of consciousness, beauty, mutual understanding, wisdom and truth can be found". (Brouwer 1975 p.482).

M.h.t. skønhed mener Brouwer, at denne findes på alle niveauer, dog først og fremmest når bevistheden er i den naive fase;
"But the fullest constructional beauty is the introspective beauty of mathmatics, where instead of elements of playful causal acting, the basic intuition of mathematics is left to free unfolding. This unfolding is not bound to the exterior world, and there by to finiteness and responsibility; consequently its introspective harmonies can attain any degree of richness and clearness. (Brouwer 1975 p. 484).

Det ses, at det er den rene bevistheds virke uden indblanding af følelser eller påvirkning fra virvaret i den ydre verden, der anses for at være den mest ophøjede form for erkendelse. Det er i matematikken man kommer nærmest dette ideal. Nu er det set før i filosofihistorien, at matematikken er trukket frem som eksempel på den bevisthedsmæssige renhed, f.eks. hos rationalisterne var matematikken paradigme videnskaben, og hos Platon kom man i matematikken tæt på ideernes verden. Der er dog afgørende forskelle på disse eksempler og Brouwers synspunkt. Hos

rationalisterne er det den diskursive tænkning, der er i højsæde (Denne måtte dog nødvendigvis bygge på nogle intuitioner.), modsat Brouwers intuition hvorved bevistheden umiddelbart forenes med det erkendte. Også m.h.t. Platon er der forskel. Mens ideverdenen for Platon har en eksistens - endda i højere grad end den materielle verden- så gør Brouwer sig ingen forestilling om, hvorledes "den rene bevisthedsverden" ser ud. Der er ikke her nogen realitet som kun afdækker bevisthedens flugt. Denne skaber efterhåden så at sige en verden, og kun de fænomener, som bevistheden har haft adgang til, eksisterer. Man kan snarere sammenligne dette med træk fra hinduismen.

Dette understøttes af flere forhold. For det første er Brouwers terminologi noget svævende og metaforisk. Herved søges at give en beskrivelse af noget, der fundamentalt er ubeskriveligt -i mystikken det guddommelige/ absolutte, hos Brouwer de dybeste og reneste hjørner af vores erkendelse. For det andet lægger Brouwer ikke skjul på dette forhold, hvilket f.eks. ses af den følgende passage, hvor Brouwer citerer det indiske digt Bhagavad-gita, der er et af hinduernes hellige skrifter;
"Eastern devotion has perhaps better expressed this wisdom (som er en indsigt i at kausal tænkning og handlen er ikke-smuk og en viden om at den exterieure verdens virvar har infiltret bevistheden) than any western man could have done. For instance in the following pasages of the Bhagavao-gita which even in translation have conserved their electrifying power;"a man should not hate any living creature. Let him be friendly and compasoinate to all. He must free himlself from the delusion of I and mine. He must accept pleasure and pain with an equal tranquillity. He must be forgiving, ever contented, self -controlled, united constantly. His resolve must be unshakeable." "He neither molests his fellow-men, nor allows himself to become disturbed by the world. He is no longer swayed by joy and envey, anxiety and fear." " He is pure and independent of the body's desire. He is able to deal with the unexpected : prepared for everything, unperturbed by anything. He is neither vain nor anxious about the results of his actions." "He does not desire to rejoice in what is pleasent. He does not dread what is unpleasent, or greive over it. He remains unmoved by good or evil fortune." "His attitude is the same toward friend and foe. He is indifferent to honour and insult, heat and cold, pleasure and pain. He is free from attachment. He values praise and blame equally. He can control his speech. He is content with whatever he gets. His home is everywhere and nowhere."."

Den mest ophøjede form for erkendelse er hos Brouwer altså den intuitive erkendelse der nås ved en introspektion, der ikke alene forårsager den materielle verden men også intellektets "verden (Brouwer 1975 p.3).

Matematikken er netop et eksempel på en sådan ophøjet

erkendelse. Som sådan bliver matematik altså en mental aktivitet. Dette skal ikke kun forstås derhen, at man skal bruge krydderen, når man laver matematik -det er alle vist enige om, at man skal. Det skal forstås sådan, at matematik kun har berettigelse som mental aktivitet (Vi skal senere se, at f.eks. sprog og logik i denne sammenhæng er sekundære aktiviteter.), og at der ikke findes nogen væsentlig matematisk komponent, der er ikke mental altså ikke givet intuitivt. Hvori denne intuition nærmere skal bestå ifølge Brouwer, skal vi se på om lidt.

Først kan vi konkludere, at Brouwer -stærkt inspireret af træk fra indisk mystik- når frem til at matematisk erkendelse nås ved introspektion og distanceren fra ikke alene den materielle verden men også fra den intellektuelle virksomhed f.eks. som repræsenteret ved den rationelle tænkning. Konsekvensen heraf bliver det ontologiske synspunkt, at matematiske entiteter er mentale størrelser, der er resultatet af den rene bevistheds frie udfoldelse.

Lad os nu se nærmere på, hvori denne meget omtalte intuition består. Ifølge Brouwer har man to basale intuitioner. Den første er restriktiv af karakter, og hvis dette var vores eneste intuition var matematik begrænset til at omfatte de naturlige tals teori. Den anden intuition har dog mere righoldige konsekvenser. Hvis vi ser "teknisk" på sagen, så tillader denne bl.a. intuitionistisk analyse og mængdelære.

Om den første intuition siger Brouwer;
"The first act of intuitionism completly separates mathematics from mathematical language, in particular from the phenomena of language which are described by theoretical logic, and recognizes that intuitionistic mathematics is an essentially languageless activity of the mind having its origin in the perception of a move of time, i.e. of the falling apart of a life moment into two distinct things, one of which gives way to the other, but is retained by memory. If the two-ity thus born is divested of all quality, there remains the empty form of the common substratum of all two-ityes. It is this common substratum, this empty form, which is the basic intuition of mathematics" (Brouwer 1975 p.509).

Vi ser, at denne første intuition indbefatter flere genkendelige temaer, som er direkte følger af de mere mystiske udredninger hos Brouwer; Matematik som sprogløs aktivitet og specielt som værende priori til logik, intuitionen om tidens struktur, der medfører en intuition om to-heden, svarende til på den ene side det der er fastholdt i hukommelsen og det der umiddelbart er stillet over for bevistheden. S. Körner (1971) har en god analogi på forholdet mellem den matematiske virksomhed og sproget. Forholdet mellem disse ser han som værende den samme som forholdet mellem oplevelser ved bjergbestigning og den sproglige beskrivelse heraf. Sproget og hermed logikken er

kun remedier, hvormed denne oplevelse formidles videre, men overhovedet ikke en del af selve oplevelsen. På samme vis har sproget og logikken lige så lidt med den matematiske aktivitet at gøre. Hvis man vil fortælle andre om resultaterne af denne aktivitet, er man selvfølgelig afhængig af sproget, men forsøger man at drive matematik uden den introspektive konstruktive virksomhed, som f.eks. formalisterne gør ved brug af den klassiske logik, så kommer man på afveje.

Brouwer selv nævner her et centralt eksempel på, hvor der optræder divergens mellem den konstruktive sproglige aktivitet, der altså gerne skal afspejle, hvad man rent mentalt kan konstruere og den klassiske sproglige aktivitet, der ikke tager dette hensyn så nøje. Det er ved den uhæmmede brug af det udelukkede tredjes princip. At dette princip ikke er et "konstruktivt" princip vil enhver formalist selvfølgelig ikke benægte, men hvor dette ikke betyder alverden for formalister, er det for intuitionisten et væsentligt eksempel på, hvor man klassisk er galt afmarcheret (Vi skal behandle dette tema senere så lad os hvile med denne noget vage skitse). Ud over dette og nogle få andre eksempler, er Brouwer ikke særlig specifik på dette område, men f.eks. Heyting, der var neget sympatisk stemt overfor Brouwers ideer, gav mere eksplicitte beskrivelser af f.eks. intuitionistisk logik. Intuitionisterne ser iøvrigt også paradokserne som et symptom på, hvor langt på afveje den klassiske matematik er i sin tiltro til de lingvistiske aktiviteter. Uendelige totaliteter er kun noget vi sprogligt kan håndtere. I den mentale verden kan vi kun have begreb om f.eks. de naturlige tal som en fremadskridende følge af entiteter, hvor vi ved vores to-heds intuition konstruerer den n+1'te ved at fastholde de n foregående i vores hukommelse som en totalitet, samtidig med at der for vores bevisthed fremtræder et nyt fænomen. Uendeligheder er således potentielle uendeligheder.

Hvis nu denne første intuition var vores eneste, ville matematik være en sølle størrelse, men her er det, at vi ifølge Brouwer har en anden intuition;
"..., a much wider field of development which includes analysis, and in several places far exceeds the frontiers of classicall mathematics, is opened by the second act of intuitionism which recognizes the possibility of generating new mathematical entities: Firstly in the form of infinitley proceeding sequences $p_1, p_2, \ldots$, whose terms are chosen more or less freely from mathematical entities previously acquired; in such a way that the freedom of choice existing perhaps for the first element p_1 may be subjected to a lasted restriction at some following p_γ, and again and again to sharper lasting restrictions or even abolition at further subsequent p_γ's, while all these restricting interventions, as well as the choice of the p_γ's themselves, at any stage may be made to depend on possible future mathematical experiences of the creating subjekt; secondly in the form of

mathematical species, i.e. properties supposeable for mathematical entities previously aquired, and satisfying the condition that, if they hold for a certain mathematical entity they also hold for all mathematical entities which have been defined to be equal to it, relations of equality having to be symmetric, reflexive and transitive; mathematical entities previously aquired for which the property holds are called elements of the species. (Brouwer 1975 p. 511).

Vi skal senere se på, hvorledes det intuitionistisk kontinuum konstrueres ved brug af disse frie valg følger samt brug af intuitionistiske begreber som det ovennævnte "specie", der er en slags intuitionistisk mængdebegreb. Vi kan dog bemærke, at vi på forhånd kan udelukke, at disse følger, der er givet ved frie valg "hen ad vejen", kan beskrives ved en algoritme, idet samtlige algoritmer er en nummerabel mængde (En algoritme er en endelig symbolstreng der ved Godelnummereringen kan tillægges et naturligt tal). Hvis disse følger kunne beskrives ved algoritmer, ville man ikke kunne hæve sig over en mængde af samme mægtighed som de naturlige tals og i hvertilfælde ikke kunne komme i nærheden af et kontinuum.

Bemærkning: Det er interessant, at ovenfornævnte process, der tæller de beregnelige reelle tal, ikke kan udføres på beregnelig vis. Lad os antage, at denne tælleprocess kan gøres effektiv dvs. udføres af en beregnelig funktion. Følgen af beregnelige reelle tal (a_n) antages altså, som givet ved en beregnelig funktion $\alpha_n(s)$ ($\alpha_n(s)$ er, den beregnelig funktion, der for givet n og s beregner a_n med nøjagtigheden 1/s.). Det kræves her, at ethvert beregneligt tal optræder netop en gang i følgen (a_n). Lad os med $\{\alpha\}$ betegne tallet, der er beregnet ved algoritmen α. Vores antagelse lyder nu, at $\{\alpha_n\}=a_n$. Vi vil nu angive en algoritme β således, at tallet $\{\beta\}$ ikke er med i følgen af beregnelige tal (a_n).
Lad os definere β som følger.
For $10^{k-1} < s < 10^k$ lad $\beta(s)$ være $0, D_1, D_2, \ldots, D_k$, hvor D_i $(i=1,2,\ldots,k)$ fås ved først at lægge 5 til det i'te ciffer i $\alpha_i(10^{i+1})$ og derefter reducere resutatet modulo 10. Nu er a_i bestemt med en nøjagtighed på $\pm 10^{-(i+1)}$ ud fra $\alpha_i(10^{i+1})$, dvs. det i'te ciffer i a afviger højst med 1 fra $\alpha_i(10^{i+1})$, og dermed bliver det i'te ciffer i a_i klart forskelligt fra D_i, som er det i'te ciffer i $\{\beta\}$. Det er klart, at $\beta(s)$ er beregnelig, når $\alpha_n(s)$ er det. På den anden side er $\{\beta\}$ ikke lig noget tal i følgen (a_n), da $\{\beta\}$ ihvertilfælde afviger fra a_i på den i'te plads.

De beregnelige reelle tal er altså ikke tællelige på beregnelig vis. Vi ser iøvrigt, at argumentet løber på samme måde som Cantor's diagonaliseringsargument, hvor det vises, at de reelle tal er overnummerable.

Lad os nu se på en række af de problemer, som Brouwers

synspunkter rejser. For det første opbygges verden ifølge Brouwer ud fra de forskellige bevisthedsindtryk (Brouwer 1975 p. 480). Med dette som erkendelsens grundlag løber man ind i et gammelt problem vedrørende den materielle verden og andre subjekters bevisthed. Dette problem, der er en af sværvægterne i filosofihistorien, kaldes omverdensproblemet, og består i at give en redegørelse for hvordan man alene ud fra sine egne bevisthedstilstande kan etablere en viden om den del af det værende, der er forskellig fra ens bevisthed d.v.s. det materielle værende og det fremmede psykiske værende. Hvis man ikke benytter sig af transcendente argumenter, d.v.s. argumenter der mere eller (som regel) mindre eksplicit gør brug af antagelser, der strengt taget ligger udenfor hvad man alene med bevistheden kan erkende, er det umuligt at nå videre end til første person ental.

Nu er det ikke underligt, at Brouwer løber ind i dette problem, idet hans fokusering på det bevisthedsmæssige i forhold til "omverdenen" fører en skarp sondring mellem sjæl og legeme med sig. Denne sondring ses bl.a. også hos Descartes, Locke og Hume, der således var ude i samme problem. Vi kan også bemærke, hvis vi bevæges os lidt ud på det filosofiske overdrev, at Brouwers forhold mellem den rene bevisthed og fornuften svarer nøje til forholdet mellem Humes oplevelser (sensations) og ideer, men hvor Hume vedkender et problem på baggrund af denne skarpe sondring mellem sjæl og legeme samt en sensualistisk funderet erkendelse, er Brouwer tavs. For det andet kan man spørge om, der er tale om erkendelse, hvis den højeste form af en sådan er således beskaffen, at vi hver især skal tilegne den uafhængigt af andre erkendende subjekter med den klare mulighed, at vi hver især har vores egen forståelse af verdens indretning. Dette synes at stride mod enhver fornemmelse vi har mht. hvad erkendelse er. Bl.a. synes det umuligt at kontrollere, om andre individer har f.eks. matematisk erkendelse, hvis sproget, som vi normalt bruger til at formidle en sådan kontrol, kun er et ufuldstændigt randfænomen, hvormed vi efter bedste evne forsøger at formidle den egentlige erkendelse. Her peges der på en anden problemstilling, der ikke ligger i en lettere vægtklasse end omverdensproblemet nemlig det umulige i at kunne have et privat sprog.

Dette følger efter Wittgensteins privatsprogs argument: At beherske et sprog betyder ifølge Wittgenstein, at man er i stand til at følge regler for korrekt/forkert anvendelse af sproglige udtryk. Antager vi nu, at en person P har et privatsprog mht. fornemmelser (Man kan her tænke på smerte fornemmelser, men også på Brouwers bevisthedsåbenbaringer). Hver gang en bestemt fornemmelse optræder hos P noteres tegnet F. Spørgsmålet er nu ikke om, der findes offentlig tilgængelige regler for den korrekte brug af F -sådanne findes i sagens natur ikke men om P selv kan angive kriterier for korrekt/forkert anvendelse af F og dermed ihvertilfælde tillægges en personlig forståelse af F-

fornemmelsen. Hvis P skal kunne tillægges en sådan forståelse, må han kunne sondre mellem korrekt/forkert brug af F. Nu er det P selv, der skal opstille reglernes for korrekt/forkort brug af F, idet rent private fornemmelser ikke kan udsættes for intersubjektiv kontrol. For P bliver der ingen forskel på at mene at have en F-fornemmelse og at have en F-fornemmelse. Det eneste P kan gøre er at notere et F hver gang F-fornemmelsen optræder (eller menes at optræde), men herved bliver der ikke mulighed for fejltagen, og der kan således ikke skelnes mellem forkert og korrekt anvendelse af F. Herved kan der ikke være tale om en forståelse af F.

Vi ser, at dette argument rammer kernen i Brouwers solipsistiske syn på matmatiske objekter som værende bevisthedsfænomener, idet det ifølge privatsprogsargumentet ikke er muligt at have en privat erkendelse af psykologiske fænomener. Ords korrekte anvendelse er, altså ikke noget vi personligt kan bestemme via private regler men derimod et offentligt anliggende. Vi når hermed til en af den nyere analytiske filosofis hovedesynspunkter nemlig offentlighedsprincippet, der udtrykker, at man ikke kan lægge mere mening i et sprogligt udtryk end det som udtrykket betyder i fælleskabet af kompetente sprogbrugere. Vi skal senere med Dummett se, at en syntese mellem Freges semantiske tilgang til filosofien og offentlighedsprincippet danner grundlaget for en moderne fundering af intuitionismen, der filosofisk er en del sundere end Brouwers fænomenalisme.

Tilsidst kan det kort bemærkes, at Wittgensteins argument ikke udelukker f.eks. bevisthedsfænomeners eksistens som sådan. Disse har man selvfølgelig, og når man tilkalder natlægen, fordi man har ondt i maven, så er autoriteten mht. maveondet patienten og ikke lægen. Det som argumentet omhandler er de erkendelsesmæssige forhold vedrørende private fænomener. (Skulle censor eller eksaminator her alligevel være sympatisk stemt over for Brouwers syn på forholdet mellem sprog og matematisk erkendelse, vil jeg gerne have lov til at pege på, at den redegørelse for dele af den intuitionistiske matematik, der følger, blot er et fattigt levn af de mildest talt geniale tankekonstruktioner og matematiske intuitioner, der ligger til grund).

Disse problemer samt den aura af indisk-mystik, der hviler over Brouwer, gør at mange vælger at se bort fra en del af hans filosofi og går så langt som til at acceptere en matematisk intuition og den nærmere beskrivelse af, hvorledes man når frem til intuitionistisk matematik og -logik ud fra de basale intuitioner. Således forstået bliver Brouwer placeret filosofihistorisk i forlængelse af Kant, samtidig med at han renses for de mere mystiske synspunkter. Dette er selvfølgeligt helt legetimt, men det bliver tilgængæld ikke til en udlægning af Brouwers egne synspunkter. Yderligere kommer Brouwers intuitionisme efter den "forbedrelse" til at

tage sig ud som en temmelig dogmatisk position, der netop savner en redegørelse af, hvorfor det netop er de brouwerske intuitioner man har mht. matematikken, og hvorfor sprog og logik er underordnede fænomener.

Hvis man tilgengæld omfagner Brouwers "mysticme", er der godt nok forbindelse til hans ontologi, men denne kommer til at være tilknyttet en mildest talt ufuldstændig filosofi, der er stillet over for at skulle løse nogle temmelig tunge problemer.

Set i dette lys er det ikke sært, at mange formalister blot har betragtet intuitionistisk matematik som en del af den klassiske matematik. Dette kunne endda have en pointe i en række tilfælde, f.eks. til en beskrivelse af algoritmisk matematik. For intuitionister er dette imidlertid langt fra tilfredsstillende. For det første fordi intuitionisternes anden intuition lægger op til en matematik, der på en række punkter er forskellig fra klassisk matematik, således at intuitionistisk matematik ikke blot bliver en konstruktiv klassisk matematik. For det andet fordi den intuitionistiske matematik for ham repræsenterer den eneste matematik. Hvis intuitionsten skal have noget at sige på dette punkt, må han i hvertilfælde supplere sin ontologi med en langt mere fyldestgørende filosofi. Vi skal i det næste afsnit se, hvorledes en sådan filosofi kan tage sig ud.

DUMMETT

Vi har set, at den traditionelle intuitionist argumenterer for sit standpunkt i ontologiske termer, med en række bizarre implikationer vedrørende især sprogets funktion til følge. Endvidere kan diskussionen mellem intuitionisten og platonisten hurtigt udvikle sig til en diskussion, om i hvilken forstand visse kontroversielle matematiske entiteter eksisterer.

Denne ontologiske diskussion om den matematiske virkeligheds beskaffenhed minder ifølge Dummett ikke alene om andre ontologiske diskussioner med diverse genstandsområder men også om en række traditionelle metafysiske debatter;
"A belief expressed in "Realism" that I still maintain is that there is a range of traditional metaphysical desputes relating to very different subject-matters but sharing a common form,..."(Dummett 1978b p.xxx).

Fælles for disse debatter er, at de udspiller sig mellem på den ene side realistiske positioner og på den anden side positioner, der benægter realismen. Fortalere for de sidste positioner har ofte fine navne, som vi ikke skal komme ind på her. (Vi har set, at forskellen mellem Russell og Frege m.h.t. begrebers ontologiske status netop var af denne karakter. Frege var konceptuel realist, her var Russell anti-realist dvs. nominalist.) Dummett bruger her den farveløse fællesbetegnelse "anti-realisme", og han karakteriserer den generelle debat mellem realister og anti-realister som følger;
"...my preferred characterisation of a dispute between realists and anti-realists one which represents it as relating, not to a class of intities or a class of terms, but to a class of statements, which may be, e.g., statements about the physical world, statements about mental events, processes or states, mathematical statements, statements in the past tense, statements in the future tense, etc. This class I shall, from now on, term "the disputed class". (Dummett 1978b p.146).

Det, der er generelt for disse debatter, er, at realisten hævder, at det er de forhold i virkeligheden, som en given sætning referer til, der bestemmer indholdet af sætningen. Anti-realisten mener derimod, at meningen af en sætning er fastlagt ved de omstændigheder, hvorunder denne er erkendelig for os, dvs.;
"..., the realist holds that the meanings of statements of the disputed class are not directly tied to the kind of evidence for them, that we have, but consist in the manner of the their determination as true or false by state of affairs whose existence is not dependent on our possession of evindence for them. The anti-realist insists, on the contrary, that the meanings of these statements are tied directly to what we count as evidence for them ..." (Dummett

1978b p.146)

Eksempelvis så vi, at debatten mellem nominalister og begrebsrealister drejede sig om hvorvidt begreber havde en objektiv eksistens eller ej. På samme måde er debatten mellem fænomenalister og realister mht. materielle objekter samt debatten mellem intuitionister og platonister en debat om hhv. ydre genstande og abstrakte matematiske størrelser eksisterer som egentlige bestanddele af virkeligheden.

Ifølge Dummett består de traditionelle debatter mellem f.eks. intuitionister og platonister i at forsvare en af to metaforer:
1) Realisten rolle kan sammenlignes med geografens. Det, matematikkeren gør, er at udforske den matematiske virkelighed.
2) Anti-realistens rolle er som billedmagerens. Det, matematikkeren gør, er at skabe det matematiske univers.
De traditionelle debatter er netop gået i hårknude her, fordi der ingen autoritet er til at vælge side i disse debatter; Man skal vælge hvilken en af de to metaforer, der passer bedst på detgenstandsområde man diskuterer.

Med den generelle karakteristik som Dummett giver realisme-debatterne, går vi fra at diskutere om forskellige entiteter har eksistens, til at diskutere om sætninger indenfor et given felt har reference. Spørgsmålet om en sætning indenfor et bestemt område har reference, er tilgengæld et spørgsmål om, den måde vi fastlægger meningen af en sætning på;
"The dispute thus concerns the notion of truth appropriate for statements of the disputed class; And this means that it is a dispute concerning the kind of meaning which these statements have." (Dummett 1978b p.146)

Realisme debatterne er altså dybest set debatter om, hvorledes vores sætninger får deres mening fastlagt. Mange af de traditionelle metafysiske debatter er centrale for et bestemt fagfelts praksis. F.eks har vi set, at Brouwers ontologiske tese om, at matematiske entiteter er bevidstheds fænomer, får vidtrækkende konsekvenser. På samme måde bliver debatten mellem behaviorister og realister mht. ens mentale tilstande stærkt afhængige af hvilken side man vælger i realisme debatten -en afgørelse her vil så have konsekvenser for såvel filosofisk problemer som sjæl/legeme-problemet, som (selvfølgeligt i mindre grad) den psykologike debat.

Dummett kan altså med en vis ret hævde, at en række filosofiske problemer får deres mest generelle behandling i meningsteorien. Dette skal dog ikke få os til med vold og magt at søge at løse alle meningsteoretiske problemer;
"To say that the theory of meaning is the foundation of philosophy is not to say that nothing else can be done until the main problems in the theory of meaning are resolved. On the contrary, progress can be made on problems that arise in other areas in advance of our having a satisfactory theory

of meaning, even when these are problems in the context of which the notion of meaning seems to be naturally invoked. (Dummett 1973 p.672).

Nu praktiseres megen matematik, uden at der skeles til filosofien. Faktisk foregår den daglige matematik som oftest på denne måde. Det er endda muligt gennem et helt forskningsliv at praktisere matematik, uden at lade sig bekymre om matematikken har nogen tilknytning til filosofi -eller anden ikke-matematisk virksomhed for den sags skyld. De fleste betydelige matematikere er dog enige om, at det er ønskeligt for ikke at sige nødvendigt, at matematikken har en vis filosofisk forankring. Et sådant forhold melllem matematik og filosofi er især væsentligt for intuitionisten påpeger Dummett i forordet til "Elements of Intuitionism"; "Intuitionism is a scandal to those who think that philosophy is of no importance, or that it cannot affect anything outside itself, or at least that there are some things which are sacrosanct and beyond the reach of philosophy to meddle with, and that among them are the accepted practices of mathematicans" (Dummett 1978 p.viii).

Også Frege mente, at man skulle tag de filosofiske problemer vedrørende logik, matematik og sprog særdeles alvorlige. Her hører enigheden mellem Dummett og Frege dog ikke op. De er også enige om sprogets rolle;
For at et sprog kan fungere som et kommunikationsmiddel må et udtryk som f.eks. sætningen "I dag regner det." bestemme et indhold, der er forståeligt for andre sprogbrugere, dvs. et udtryks mening er offentlig.

Den nærmere bestemmelse af, hvori denne offentlighed består, kan man så være uenig om. Frege mente f.eks.,at det var de omstændigheder der gjorde en sætning sand/falsk, der bestemte en sætnings mening. En lang række filosoffer, der er enige heri, har udtrykt dette synspunkt i sloganet:" En sætnings mening er givet ved dens sandhedsbetingelser".

Wittgenstein derimod mente, at et udsagns mening er udtømmende givet ved dets brug, og at der ikke er nogen facet af et udtryks mening, der ikke kan udmøntes på denne vis. F.eks. kan der ikke være nogen indre subjektiv ingredient af et udtryks mening, der ikke kommer til udtryk gennem brugen. Dummett tilslutter sig dette synspunkt, og i "The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic" har Dummett 2 generelle argumenter for dette synspunkt -generelle fordi de ikke knytter direkte an til det, at det er matematiske sætninger, vi her har i tankerne.

I det første argument spørges der "Hvad vil det sige, at et individ har forstået et bestemt udtryks mening?", med andre ord "Hvornår kan man siges at have en viden om et udtryks mening?". I en række tilfælde vil man kunne eksplicitere denne viden. F.eks. skal man angive meningen af ordet "ungkarl", kan man komme med et synonym som "ugift mand".

Hvis nu al viden om udtryks mening var af denne beskaffenhed altså som eksplicit viden, ville redegørelsen alene ved hjælp af en henvisning til evnen til at eksplicitere vor sproglig viden være cirkulær. At forklare ords mening med ord ville ikke flytte os ud af stedet. Eller som Dummett udtrykker det; man ville ikke kunne lære et nyt sprog uden på forhånd at være udstyret med samme begrebslige ressourcer som det tillærte sprog (Dummett 1978b p.217).

Vi når altså til den konklusion, at viden om en vis del af sproget må være implicit viden. Men hvordan kan man så tillægge et individ viden mht. det af sproget, hvorom han har implicit viden. Svaret må være, at der er iagttagelige forskelle på det individ, der siges at have denne viden og et individ, der ikke har denne. Vi ser altså, at et individ i det generelle tilfælde manifesterer sin viden om et udtryks mening, ved at bruge dette korrekt eller ved at udføre korrekt adfærd i selskab med andre, der bruger udtrykket.

Ovenstående argument var centreret omkring spørgsmålet, hvad det vil sige at forstå et sprog. Dummetts andet argument knytter an til spørgsmålet om hvad det vil sige at lære et sprog. Når man lærer et sprog, bliver man i stand til manipulere udtryk på bestemte måder, med andre ord man lærer at gøre brug af de forskellige udtryk. Man lærer f.eks. at addere ved at lave en række regneøvelser. Der bliver vist, hvorledes man stiller en addition op, hvilken fremgangsmåde der er den rigtige, og hvis man laver fejl, hvad det er man har lavet galt. Dette giver et bidrag til at lære meningen af symbolet "+" . Skal eleven nu vise at han/hun har forstået symbolet "+" rigtigt, kan vedkommende manifestere dette ved korrekt anvendelse -f.eks. i en prøve som eleven skal op til, før klassen går videre til subtraktion. Gennem denne korrekte anvendelse af sproget og kun gennem denne er læreren (og andre) så i stand til at bedømme, om eleven har fattet meningen med symbolet "+".

At, man kan manifestere sin lærdom gennem korrekt anvendelse, er ikke så kontroversielt, men spørgsmålet er, om man kan siges at have lært noget om f.eks.addition som er rent subjektivt, og som ikke kan manifesteres gennem den brug, man gør af symbolet "+". Svaret er her nej, da dette ville betyde at et udtryks mening ikke er offentlig. Tillægger man således en sprogbruger en mening, der udelukkende er privat, krænker man offentlighedsprincippet. Konklusionen er altså, at et udtryks (et ord, en sætning, et matematisk bevis m.v.) mening fuldt ud konstitueres af den brug der gøres af det.

Vi har set at Dummett argumenter for en meningsteori, hvor "brug" er det centrale begreb. Skal vi redegøre for, hvornår et individ har fattet et udtryks mening, må vi specificere de omstændigheder, der udgør den korrekte anvendelse. Er der tale om en sætning, må vi specificere de omstændigheder,

under hvilke vi med rette kan bruge sætningen til at hævde en påstand p ($\vdash$p) . I en sådan meningsteori har man det, der kaldes hævdelsesbetingelses-semantik. Vi nævnte før, at hos Frege var "brug" ikke det centrale meningsteoretiske begreb, men derimod "sandhed". En sådan semantik kaldes sandhedsbetingelses-semantik. Her er et udtryks mening givet ved dets sandhedsbetingelser. En specifikation af en påstands mening vil her så være en specifikation af de omstændigheder under hvilke p er sand ($\models$ p).

I de tilfælde hvor vi kan hævde p, vil p's sandheds betingelser netop falde sammen med p's hævdelses betingelser. Dette vil dog ikke altid gælde. For en bestemt type sætninger -de ikke effektiv afgørbare- er der ikke dette sammenfald mellem hævdelses- og sandhedsbetingelser. Hvad vil det nu sige at en sætning ikke er effektiv afgørbar?

En effektivt afgørbar sætning er en sætning, hvis sandhedsværdi kan afgøres -i det mindste i princippet- inden for en endeligt tidsrum ved hjælp af en fastlagt procedure. Eksempler på sådanne sætninger kunne være ; "Solen skinner i dag.", "Der er 150 stole i auditoriet 7 på matematisk institut." og "Der er 152,977,581 sandkorn i denne spand.".

Tager vi f.eks. sætningen "Der er 150 stole i aud. 7 på matematisk institut.", vil det være nemt at angive en procedure til bestemmelse af, om sætningen er sand eller falsk -i al fald hvis vi overser diverse skeptiske indvendinger. Da vi ved, at denne procedure, f.eks. ved at tage ud på Universitetsparken nr. 5, gå op i aud.7 og begynde at tælle, vil give os et svar, vil proceduren også bestemme, om vi ville kunne hævde sætningen eller ej. I dette tilfælde ser vi altså, at der et sammenfald mellem en sætnings hævdelsesbetingelser og dens sandhedsbetingelser.

Ser vi derimod på sætninger som "Cæcar sov på maven den og den dag." (sætninger om fortiden), "Alle ravne er sorte." (genneralisationer over uendeligheder), "Mogens har tandpine." (sætn. vedr. det fremmedepsykiske), "Hvis Elkjær ikke havde brændt det staffe, ville Danmark have været europamestre 1984." (kontrafaktiske konditionaler), "I år 1990 vil Schluter stadig være optimist." (sætninger om fremtiden), er situationen en anden. Fælles for disse sætninger er, at vi mangler en afgørelsesprocedure til bestemmelse af deres sandhedsværdi.

Ved sætningen "Cæcar..." kunne det godt være, at der dukkede hidtil ukendte kilder op om kejserens sovevaner, som kunne afgøre sagen, men gennerelt må vi sige, at vi ikke for disse sætningers vedkommende er i stand til at garantere, at vi kan angive en procedure til bestemmelse af deres sandhedsværdi. Sandhedsværdi-semantikeren ville her sige, at dette er uvæsentligt. Vi kan stadig fastlægge meninger af sætninger, idet vi ved, hvad der skal til for at sige, at

sætningen er sand. Dette er forhold ved virkelighedens beskaffenhed. Den lokale realist -her platonisten- fastholder at de uafgørbare sætninger har en sandhedsværdi uafhafhængig af vores evne til at fastslå denne sandhedsværdi (Dummett 1978b p.224). I forhold hertil vil afgørelsesproceduren kun være en ekstra komponent, der afgører, om vi kan hævde vores påstand eller ej. Dette kan formuleres ved princippet om transcendente sandhedsbetingelser, der siger at, at deklarative sætninger har definite sandhedsbetingelser uafhængig af vores erkendemuligheder. Normalt opereres der med to sandhedsværdier og ovenstående princip får følgende udformning, der kaldes bivalensprincippet; virkligheden gør en sætning definitivt sand eller falsk uafhængig uafhængigt af vores erkendemuligheder (Pedersen 1984 p.5).

Hvorledes kan man så siges at have viden om en uafgørbar sætnings mening ? F.eks. vil platonisten hævde, at sætningen "7 optræder 5 på hinanden flg. gange i decimaludviklingen af π", har en mening givet ved dens sandhedsbetingelser (Man kan f.eks. tænke sig en sandhedsspecifikation givet ved T-sætningen, "p" er sandt hvis og kun hvis p, hvor p er en sætning og "p" navnet på denne, dvs. vi får en distinktion mellem objektsprog og metasprog, hvor "p" repræsenterer navnet på en sætning i objektsproget. Objektsproget er groft taget det sprog vi bruger til at beskrive verden). Så langt så godt.

Skal vi nu udæske platonisten om hvad det vil sige, at Lars Oleson har viden om denne sætnings mening, bliver han os svar skyldig. Lars kan i første omgang give en verbaliseret udlægning af sandhedsbetingelserne, men som vi så før, kan al manifestation af viden ikke foregå på denne vis. Der må være offentlig tilgængelige træk ved hans adfærd, der afslører, om han er i besiddelse af denne viden, eksempelvis ved at angive en procedure således, at vi er i stand til at erkende sætningens sandhed/falskhed. Med de ikke effektivt afgørbar sætninger er det pr. definition ikke muligt at give en afgørelses procedure. Men hvorledes vil platonisten så manifestere sin viden ? Det er her platonisten må finde et troværdigt svar, hvis han skal fastholde sit synspunkt.

Vi kan nu kort beskrive forholdet mellem Frege og Dummett, der står på hver deres side i den meningsteoretiske debat mellem realisme og anti-realisme;
Begge er enige om, at en sætnings mening er en offentlig tilgænglig størrelse. Hvor Frege nu mener, at det er en sætnings sandhedsbetingelser, der fastlægger den offentlig tilgænglig mening, mener Dummett, at en sætnings mening er fastlagt ved dens brug (Dette er klart i forlængelse af Wittgenstein). Dummetts nærmere argumentation herfor følger efter nogle overvejelser om de korrekte modeller for hhv. "forståelse" og "viden" -er en sætnings mening ikke her givet ved dens brug, krænker vi offentlighedsprincippet. I

en række tilfælde vil der ikke være forskel på en sætnings sandhedsbetingelserne og dens hævdelsesbetingelser, så her bliver der ikke forskel på de to udredninger af en sætnings mening. Denne overensstemmelse holder dog op ved de ikke effektivt afgørbare sætninger. Her bliver platonisten os svar skyldig mht. hvordan man skal manifestere sin viden om disse sætningers mening. Fastholder han sin meningsteori, må han også kunne angive en udredning af, hvorledes en model for forståelse af sætnings mening skal se ud. Som vi har set, bliver dette vanskeligt for de ikke effektiv afgørbare sætningers vedkommende.

Vi skal ikke her forsøge at referere nogle af de murstensværker fyldt med svar til Dummett, eller referere nogle af de værker hvor han tager til genmæle, men vi kan dog kort antyde, hvorledes kritikken tager sig ud. Der er selvfølgeligt alle de matematikkere, der føler sig begrænset af de intuitionistiske foreskrifter for korrekt matematisk virke. Her må den intuitionistiske position vre temmelig vandtæt for at kunne overleve. En mere detaljeret undersøgelse af disse forhold kommer i det følgende, så lad os gemme den konkrete kritik. Spændende er det imidlertid, at Dummetts anti-realistiske udfordring synes at falde ham i ryggen.

De såkaldte strenge finitister går ind for en skærpelse af det konstruktive bevis i forhold til intuitionisten. Vi så at platonismen måtte vige for intuitionismen, dvs. en sætnings mening måtte gives i relation til konstruktioner, som vi i princippet er i stand at effektuere. Der kan ikke være en facet af en sætnings mening, der transcenderer brug, dvs. Træning i at gennemføre beviser og nedfældning af disse. En sætnings mening gives ikke ved de omstændigheder under hvilke den er sand/falsk, men ved de omstændigheder, hvor den (i princippet) kan bevises/modbevises. Her mener den strenge finitist, at principiel bevislighed ikke er nok, når vi skal kunne manifestere en sætnings brug. F.eks. kan et bevis være så langt, at det ikke kan udføres af samtlige mennesker i hele menneskehedens historie.

Det kan ifølge den strenge finitisk kun være ved de beviser vi rent faktisk kan udføre, at vi kan indfange en sætnings mening. Der kan ikke være en facet af en sætnings mening, der transcenderer den faktiske brug, dvs. den eksplicitte bevisførelse. Umiddelbart synes den traditionelle konstruktivst (intuitionisten) at være fanget af de samme argumenter, som han brugte mod platonisten. Der synes at være en analogi mellem de argumenter, som den strenge finitist bruger mod intuitionisten, og de argumenter som intuitionisten bruger mod platonisten.

Ifølge Dummett er den strenge finitists synspunkt inkoherent ud fra følgende betragtninger.(Dummett 1978b p.248-):
Den strenge finitist operer med prædikater (såkaldte surveyability prædikater), der angiver, hvornår vi faktisk

kan udføre en konstruktion f.eks. af et bevis, en beregning eller en totalitet. Problemet med disse surveyability prædikater er imidlertid, at de er vage, og med vage prædikater løber man ind i sorites paradoks.

"Sorites" er græsk og betyder "bunke". Prædikatet "bunke" er da også vagt; Har man f.eks. en passende stor mængde sandkort, så kan denne siges at være en bunke. Tager vi et sandkort herfra, har vi stadig en bunke, idet et sandkort ikke kan være, det der er forskellen mellem en bunke og nogle få sandkorn. Således kan vi blive ved for tilsidst at stå tilbage med nul sandkorn, der klart ikke er en bunke. Således kan vi ved alle vage prædikater generere tilsvarende paradokser, hvor præmisserne er;
1) Vi kan beskrive en given størrelse ved et vagt prædikat.
2) Hvis vi kan beskrive den n'te størrelse i en mængde med dette prædikat så også den n+1'te. Dette giver, at enhver størrelse i den givne mængde kan beskrives ved prædikatet.

Matematisk løber man ind i Sorites paradoks, når man forsøger at håndtere "store mængder". Den strenge finitist må f.eks ved de naturlige tal operere med totaliteter uden et sidste element, men som er opadtil begrænset. Hvis vi kort beskriver de finitistisk håndterlige mængder, som værende små har man klart at "En mængde med 0 elementer er lille." og "Hvis en mængde med n elementer er lille så er en mængde med n+1 elementer lille". Med mindre den strenge finitist kan give en løsning til Sorites paradoks, må man ifølge Dummett konkludere, at streng finitisme er et inkoherent synspunkt. Skulle den strenge finitist alligevel løse sådanne filosofiske problemer, mangler han derefter at vise, hvorledes matematik efter hans forskrifter tager sig ud. (Der er her faktisk lavet en del matematik i denne retning især af en række tjekkiske matematikkere med Vopenka i spidsen). Lad os nu forlade den strenge finitisme og vende tilbage til Dummett.

Personligt synes jeg, at Dummetts position rummer megen fornuft. I forhold til den brouwerske intuitionisme er hans position filosofisk langt sundere. Vi ser også, at Dummett vender op og ned på forholdet mellem sprog og virkelighed, og han har derved en fundamental anderledes filosofisk tilgang til intuitionismen end Brouwer. Hos Brouwer er ontologien primær og sproget sekundær -eller rettere er slet ikke. Hos Dummett følger vores ontologisk synspunkt af vores syn på sproget -nærmere bestemt efter den meningsteori vi har. Ontologien hos Dummett bliver altså ikke en løst hængende størrelse, der undgår en række centrale filosofiske spørgsmål, med underlige konsekvenser for vores erkendelsesteori, sproglige virke og logik, til følge. Tværtimod får vi via Dummetts meningsteoretiske tilgang til disse filosofiske emner en seriøs og koherent redegørelse. Med en meningsteoretisk afklaring i hånden til fordel for anti-realismen er vi nu i stand til at give en beskrivelse af hvordan intuitionismens logik, ontologi og matematik ser

ud. Hvorledes denne beskrivelse giver sig udslag i praksis, skal vi se i det følgende.

Det næste afsnit om intuitionistisk logik i Dummetts regi, kan ses som en slags anvendt meningsteori, hvor det er meningen af ord som "ikke", "og", "eller", "eksisterer", osv., der skal specificeres.

DE LOGISKE KONNEKTIVERS INTUITIONISTISKE MENING

I afsnittet ovenfor har vi skitseret en kritik af platonistens meningsteori. Ser vi nu på den platonistiske redegørelse for de logiske konnektivers mening, er denne givet ved begreberne sandhed/falskhed via sandhedstabeller. F.eks. er AvB sand netop hvis A er sand eller B er sand. Sandheds betingelserne for sætningen AvB er således givet ved sandhedsbetingelserne for hhv. A og B. Men hvis en af disse sætninger er uafgørbar, så vi ovenfor at, dette betyder, at vi ikke vil være i stand til at manifestere, hvori disse betingelser består. Følgelig er vi ikke kommet nærmere en redegørelse for sætningen AvB's mening. Lignende kommentarer gælder de øvrige logiske konnektiver, hvor vi altså som følge af platonistens uholdbare redegørelse for en sætnings mening, specielt må forkaste hans redegørelse af de logiske konjunktivers mening. Denne kritik af platonisten er så en underbyggelse af intuitionistens negative tese:
At den klassiske måde at praktisere matematik og logik på er illegitim, og redegørelsen for denne virksomhed er inkoherent.

Da nu klassisk logik er den mest udbredte logik, og den man foranledes til at tro på pr. intuition, må det nu være væsentligt, at intuitionisten formulere et alternativ, som er koherent. Et sådan udspil vil være et væsentligt bidrag til den positive intuitionistiske tese:
At intuitionistisk matematik og logik udgør en forståelig og afgrænset mængde teori, og at redegørelsen for den intuitionistiske logiske og matematiske virksomhed er koherent.

Vi vil altså i det følgende skitsere, hvorledes vi når frem til en sådan logik, specielt vil vi som følge af den anti-realistiske meningsteori, vise hvorledes de logiske konstanter får deres mening. Vi vil vise, at den logik der så fremkommer faktisk er væsentlig forskelig fra klassisk logik (Dette er ikke givet på forhånd, bare fordi de logiske konstanter har forskellige meninger klassisk og intuitionistisk. F.eks. kunne en formalisering af de to logikker godt vise sig at være ens i al væsentlighed). Ved nogle eksempler vil vi vise, hvorledes intuitionistisk matematik adskiller sig fra klassisk matematik.

Tager vi udgangspunkt i anti-realistens semantiske position, at en sætnings mening er givet ved dens hævdelsesbetingelser, er det ikke svært, at se hvad dette betyder for de matematiske sætninger; her er man i stand til at hævde (benægte) en sætning, hvis der findes et bevis (modbevis) af denne, d.v.s man kunne foreslå at betingelsen for at kunne hævde en sætning er, at vi er i stand til at bevise denne. Vil det sige, at vi ikke kan hævde en sætning som "950 er ikke et primtal" hvis vi ikke står med et bevis på hånden, f.eks. ved at lave en primopløsning af 950 og se

at bl.a 5 indgår i denne ? Her må det være nok, hvis vi kan angive, hvorledes vi kan komme i besiddelse af et sådan bevis.

Når vi således angiver en procedure til, hvorledes vi kan komme i besiddelse af et bevis, har vi godtgjort, at vores sætning er afgørbar (Det var jo netop de uafgørbare sætninger der skaffede platonisten problemer). Vi skelner altså mellem to former for bevis:
Det "egentlige" bevis som vi kan kalde et direkte bevis eller et kanonisk bevis og vores metode til at komme i besidelse af et sådan, som vi kan kalde et indirekte bevis eller en demonstration. Vi skal se, at denne skelnen ikke hører hjemme i petitesse afdelingen, men mere herom senere. Vi fastholder, at betingelserne for at kunne hævde en sætning er, at vi enten har bevis for denne sætning, eller en metode til at komme i besiddelse af et sådan bevis. Vi ser altså, at anti-realisten som følge af sin semantiske position fremhæver "bevis" som det centrale begreb ved redegørelsen af en sætnings mening. Hvis denne sætning er af en mere kompliceret art, altså hvis den ikke er atomisk, må vi analogt til det klassiske tilfælde identificere den væsentligste logiske konstant og specificere, hvad der skal tælle som bevis af den sammensatte sætning udtrykt ved de udsagn, der konstituerer denne. Lad os nøjes med i det følgende at se på de logiske aritmetiske sætninger, da domainerne for kvantificering her er uproblematiske. Vi får så følgende udlægning.

Vi kan bevise $A \wedge B$, netop hvis vi kan bevise hhv. A og B.

vi kan bevise $A \vee B$, netop hvis en af de to sætninger A og B kan bevises

Vi kan bevise $\exists x\ A(x)$, netop hvis vi kan bevise A(n) for et naturligt tal n.

Vi kan bevise $A \rightarrow B$, netop hvis vi kan finde en konstruktion, der til et bevis for A angiver et bevis for B.

Vi kan bevise $\forall x\ A(x)$, netop hvis vi kan finde en konstruktion, der til hvert tal n angiver et bevis for A(n).

Vi kan bevise $\neg A$, netop hvis vi kan bevise $A \rightarrow 1=0$

Umiddelbart synes det som om vi er ude i den samme cirkularitet som i det klassiske tilfælde. Denne cirkularitet er dog kun tilsyneladende. I redegørelsen af f.eks. konjunktions mening er sætningen på højre side af "netop hvis" afgørbar. Er dette imidlertid nok, skal man ikke kunne manifestere til hvilken side denne afgørelse går, med andre ord skal vi ikke foruden et bevis for hhv. A og B også vise, at disse tilsammen konstituerer et bevis af $A \wedge B$? Svaret må her være jo, men denne viden bliver en implicit viden, som man nemt kan manifestere ved at parre beviserne

for A og B korrekt. Lignende kommentar gælder for disjunktion og eksistens. Men hvad med implikation? For at bevise A->B skal vi finde en konstruktion, der transformerer beviser af A om til beviser for B. At manifestere viden om at denne konstruktion gør, det den skal, synes her mere kompliceret end i tilfældet med konjunktion. Det mest nærliggende vil være at kræve, at denne manifestation har karakter af et bevis. Vi vil så få følgende udredning af implikations mening:

Et bevis af A->B er en konstruktion, der til et vilkårligt bevis af A angiver et bevis af B samt et bevis af, at dette et tilfældet.

Ud fra en lignende argumentation får vi følgende udredning i tilfældet med alkvantoren;

Et bevis af $\forall x\ A(x)$ er en konstruktion, der til hvert tal n angiver et bevis af A(n) samt et bevis af, at dette er tilfældet.

Ser vi lidt nærmere på denne redegørelse, opdager vi, at der er visse problemer. Ser vi f.eks. på implikation, kræves der ikke kun en konstruktion, der transformerer beviser for A om til beviser for B men også et bevis af, at transformationen gør det den skal. Hvis nu sidstnævnte bevis har samme struktur som vores oprindelige bevis, er vi ude i et tilfælde med selvreference. Man har ved de mængdeteoretiske paradokser set, hvilke problemer dette kan give anledning til. Analogt til det mængdeteoretiske tilfælde kunne man her løse problemerne ved at type inddele beviserne. Det er også en løsning langs disse linier Troelstra har foreslået (Troelstra 1969 p.6), i hans noget tekniske forsøg på at udrede konnektivernes mening. Her synes det, at det "bevis" der skal til for at vise, at konstruktionerne gør det den skal at være af en mere primitiv beskaffenhed, bl.a. er et afgørbart. Dummett har en lignende udlægning, hvor altså den manifestation der skal til for at vise, at den søgte konstruktion gør det den skal, skal opfattes mere i retning af vores "parring" end et egentligt bevis. Vi kan lige gengive Dummetts udlægning, som er mindre teknisk end Troelstras:

Et bevis af A->B er em konstruktion, der til et bevis for A angiver et bevis for B samt en anerkendelse af, at dette er tilfældet.

Et bevis af $\forall x A(x)$ er en konstruktion, der til hvert tal n angiver et bevis for A(n) samt en anerkendelse af, at dette er tilfældet.

Lad os prøve og se hvad vi har indtil nu:
1) Redegørelsen for de logiske konnektivers mening synes at dele disse i to grupper efter kompleksitet. I den første gruppe finder vi konjunktion, disjunktion og eksistens.

Redegørelsen for deres mening er ikke kontroversiel (ihverttilfælde ikke blandt kontruktivister), selv om der findes flere fremstillinger. Vi bemærker i øvrigt at beviset for en aritmetisk sætning, hvor disse logiske konnektiver indgår, kun kræver et endeligt antal beregninger (De atomiske sætninger bevises ved ligefrem bereging), idet sprogets termer fremkommer ved addition, multiplikation, eksponentiering eller ved efterfølger operationen og eneste prædikatsymboler er "=" og "<").

I den anden gruppe, hvor implikation og alkvantoren indgår er redegørelsen mere kompliceret. (Negation er ikke noget problem i den forstand diskuteret ovenfor, hvis vi kan give en redegørelse for implikation.) Bevis af en sætning, hvor implikation indgår som hovedkonnektiv, er en konstruktion, der knytter beviser til beviser. Bevis af en sætning, hvor alkvantoren indgår som hovedkonnektiv, er en konstruktion, der knytter bevis til tal. I begge tilfælde kræves en "anerkendelse" af at konstruktionen gør det den skal.

2). Hvorvidt denne "anerkendelse" er en primitiv indsigt, d.v.s en indsigt der ikke lader sig spalte op i en simplere slags som i eksemplet med konjunktion, eller om den er af en mere kompliceret art, som hvis vi ligefrem mener den skal have form af et bevis, er noget kontroversielt. Dummett f.eks. synes at hælde til den første opfattelse uden dog at give en redegørelse for denne "anerkendelses" beskaffenhed. Kan en anerkendelse ikke bare være et synonym for et bevis, og hvis det ikke er, hvor går grænsen mellem anerkendelse og bevis?

En vaghed omkring dette spørgsmål peger hen mod en besværliggørelse af et bevis begreb som "a-priori" given . Dette synes at blive understøttet af Dummetts skelnen mellem uniforme og ikke-uniforme beviser. Antager vi, at vi har bevis for udsagnet A(x) hvor x er fri, da har vi samtidig en procedure til for hvert n at vise A(n), altså et bevis for $\forall x$ A(x). Analogt kan vi forstille, os at vi kan bevise sætningen A->B ved at angive en procedure, der til et vilkårligt bevis for A, forsyner os med et bevis for B. I hvert af disse 2 eksempler har vi en ramme for hhv. A(n) og B. Sådan et "rammebevis" kan vi kalde et uniformt bevis. Det er dog ikke altid, at et bevis antager en så simpel form. Eksempelvis er en af protoeksemplerne på et intuitionistisk bevis -induktionsbeviset- ikke uniformt. I sådan et bevis af $\forall x$A(x) vil beviset af A(n+1) afhænge af beviset for A(n). Tilsvarende kan et bevis af A->B godt afhænge af den specielle konstruktion, der tæller som bevis af A. Dette problem har de mere formaliserede udgaver af implikation og alkvantorens mening ikke. Disse udgaver, der mest hælder mod at "anerkendelsen" skal være en slags bevis, har til gengæld svært ved at komme uden om, at deres redegørelser har en temmelig impredikativ form. Hvorom alt er, det specifikke svar på disse spørgsmål er med til at give en nøjere fastsættelse af det konstruktivistiske standpunkt, man

hælder til.

3). På tværs af denne uenighed er der en konstruktivistisk enighed om, at en redegørelse af konnektivernes mening skal fastlægges i bevistermer. Lad os i det følgende holde os til den intuitionistiske udlægning repræsenteret ved Dummett og se, hvilken betydning den har for intuitionistisk logik og matematik. Prøver vi et øjeblik at sammenligne de intuitionistiske og de klassiske konnektiver, synes det som om, man har bevist "mere" ved et intuitionistisk bevis end ved det tilsvarende klassiske. F.eks. angiver et bevis af $A \to B$ en metode til udfra et bevis for A at bevise B.

Klassisk kan $A \to B$ bevises ved at bevise at B er en tautologi. Vi skal senere se at dette ikke nødvendigvis beløber sig til at bevise B. Udgangspunktet var imidlertid ikke det samme, idet intuitionisten troppede op med et bevis af A, hvilket den klassiske matematikker ikke nødvendigvis har gjort i vores eksempel. Dette synes at pege mod, at en sammenligning af den klassiske og den intuitionistiske mening af de logiske konstanter er mere vanskelig end som så. Dette skal ikke forveksles med det forhold at formaliserede udgaver af de to logikker forholdsvis let lader sig sammenligne. Om dette så skyldes, at formaliseringerne har ramt kernen i de to redegørelser eller om de har skrællet for meget af i forhold til de intenderede meninger er spørgsmål vi evt. kan vende tilbage til.

I vores redegørelse indtil nu er det ikke klart, at der faktisk er forskelle i klassisk og intuitionistisk logik og matematik. Eksempelvis er de formaliserede udgaver af klassisk og intuitionistisk aritmetik i al væsentlighed ens (se nedenfor). Man kan sige at forskellen er et tolkningsspørgsmål. Denne enighed bunder dog i, at de atomiske aritmetiske sætninger er afgørbare. Men hvad sker der, hvis vi har et sprog, hvor der findes uafgørbare sætninger? Lad os i det følgende se på et udsagn som $\neg\neg A \to A$.

Dette er klassisk en tautologi, d.v.s en sætning, der som følge af sandhedstabellerne for negation og implikation, er sand sålænge A er velformet. Kan vi sige det tilsvarende intuitionistisk? Vil vi altid kunne transformere beviser af $\neg\neg A$ til beviser for A, med andre ord vil det faktum, at vi ikke har et bevis for $\neg A$ garantere, at vi i det generelle tilfælde ikke kan hævde $\neg\neg A \to A$. Har vi et bevis for $\neg A$, har vi en konstruktion, der transformerer beviser af A om til beviser af $1=0$. Kan vi bevise $1=0$, kan vi bevise hvad som helst, altså specielt kan vi bevise B, dvs. intuitionistisk opererer man med det svager $\neg A \to (A \to B)$.

Et andet centralt eksempel er udsagnet $A \vee \neg A$. Dette er et klassisk sandt udsagn, men er det også intuitionistisk sandt, med andre ord er vi for en vilkårlig sætning A i stand til at hævde $A \vee \neg A$? Da dette ville kræve, at vi for en vilkårlig sætning A kunne bevise A eller bevise $\neg A$ må svaret

være et klart nej. At $A \vee \neg A$ er klassisk er sandt for velformede A kan udtrykkes således;
$A \vee \neg A$ er en lovmæssighed i klassisk logik. Dette må dog stadigt ikke forveksles med det semantiske princip bivalens, som siger, at enhver sætning enten er sand eller falsk. Hvis man semantisk accepterer bivalens (Platonismen formuleres i nogle fremstillinger ved en sådan accept), bekender man sig også til klassisk logik. Derimod hvis man accepterer loven om det udelukkede 3. og dermed klassisk logik er det samtidig muligt at benægte bivalens. En videre diskussion af dette ville være meget interessant, men ville også føre over i en meningsteoretisk og dermed overvejende filosofisk diskussion. Lad os blot fastholde at vi intuitionistisk ikke generelt vil kunne hævde $A \vee \neg A$.

Dette har den konsekvens, at vi ikke er i stand til at slutte fra $A \to B$ og $\neg A \to B$ til B (*). Klassisk såvel som intuitionistisk kan vi slutte;

$$\frac{A \to B,\ \neg A \to B.}{(A \vee \neg A) \to B}$$

Hvis nu $A \vee -A$ er sandt, kan vi ved modus ponels (der også gælder intuitionistisk) slutte B, men som vi lige har set er $A \vee -A$ ikke intuitionistisk sandt for vilkårlig A.
Bevisstrukturen I (*) er netop den der bruges i det klassiske bevis af sætningen:
Der findes tal x,y og z så $x^y = z$, hvor x og y er irrationale og z er rational.

Bevis: Hvis $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ er rational er vi færdig.

hvis $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ er irrational er $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2} = 2$ □

Vi har altså her et eksempel på et bevis, der klassisk er gyldig men ugyldigt intuitionistisk. Hvis der ikke findes et bevis, der også er intuitionistisk gyldig (og det har man ikke så vidt jeg ved), så har vi her et eksempel på en sætning, der klassisk er sand, men som intuitionistisk ikke er det.

Lad os se på et tredje eksempel. Et bevis af $\exists x\ A(x)$ foregår ved at angive et n, således at A(n) er opyldt. Det er altså ikke som i det klassiske tilfælde muligt i det generelle tilfælde at bevise $\exists x\ A(x)$ ved at bevise $\neg\forall x\ \neg A(x)$, -at det er absurd, at vi i enhver instans ikke kan bevise A(x) forsyner os ikke med et n hvor A(n) er opfyldt. Vi er altså ikke berettiget til generelt at slutte fra $\neg\forall x\ \neg A(x)$ til $\exists x\ A(x)$.

De sidste 2 eksempler kan man samle under en hat ved at pege på det konstruktive i beviserne. I tilfældet disjunktion skulle man pege på hvilken (hvis ikke begge) af de 2 indgående sætninger, det var man bevist da man beviste $A \vee B$. For eksistens, der er en slags generalisation af disjunktion, gælder samme kommentar;

Et bevis af x A(x) skal pege på hvilken n (hvis ikke flere) ud af muligvis uendelig mange der beviser A(n).

Denne distinktion mellem den konstruktive og det ikke konstruktive bevis er fuldt ud acceptabelt klassisk, men hvor intuitionisten fastholder at den konstruktive tolkning af f.eks. disjunktion og eksistens er den eneste mulige, mener den klassiske matematikker, at det måske nok er ønskeligt med et konstruktivt bevis, men at hans udlægning af disse konnektivers mening repræsenterer en konservativ udvidelse i forhold til den konstruktivistiske udlægning. Den klassiske matematikker vil endda gå så vidt som til at søge fremstillinger af dele af matematikken indenfor en konstruktiv ramme eller søge konstruktive beviser i tilfælde, hvor disse ikke findes. Denne fredelige sameksistens er dog utilfredsstillende for intuitionisten, idet noget af pointen med intuitionistisk matematik går af fløjten, hvis denne blot betragtes som en eksotisk form for matematisk virksomhed. Lad os se på et eksempel til belysning af, at sammenligninger mellem konstruktiv klassisk og intuitionistisk matematik er mere speget end som så.

Forestiller vi os, at vi har 2 nye konnektiver i den klassiske logik $\cup$ og $\mathfrak{Z}$, hvor $A \cup B$ betyder at vi har et konstruktiv bevis af AvB og $\mathfrak{Z}x\ A(x)$ betyder, at vi har et konstruktiv bevis af $\exists x\ A(x)$ (Kleene har en lignende udlægning hvor han udskifter alle sætninger af formen AvB og $\exists x\ A(x)$ med hhv. $\neg(\neg A \wedge \neg B)$ og $\neg\forall x\ \neg A(x)$). Ligesom vi før ikke kunne hævde $\neg\forall X\ \neg A(x) \rightarrow \exists x A(x)$ intuitionistisk, kan vi her ikke hævde $\neg\forall x\ \neg A(x) \rightarrow \mathfrak{Z}x A(x)$ klassisk. Men vi kan klassisk hævde $(\forall x(A(x) \vee \neg A(x)) \wedge \neg\forall x\ \neg A(x)) \rightarrow \mathfrak{Z}x A(x)$. D.v.s hvis vi ved, at A(n) vil ikke være falsk for hver n, og vi har en procedure til for hvert n at bestemme om A(n) eller $\neg A(n)$ gælder, kan vi bare gå de naturlige tal igennem og på et eller andet tidspunkt vil A(n) være sandt. Det tilsvarende princip $\forall x(A(x) \vee \neg A(x)) \wedge \neg\forall x\ \neg A(x) \rightarrow \exists x A(x)$ gælder dog ikke intuitionistisk. Grunden hertil er en anden udlægning af meningen af den intuitionistisk alkvantor. $\neg\forall x \neg A(x))$ betyder intuitionistisk, at det fører til absurditet at hævde ,at $\neg A(n)$ gælder for hvert tal n. Vi kan dog ikke på grund af denne udlægning af $\neg\forall x\ \neg A(x)$ være sikker på, at hvis vi gennemgår alle tal n, at vi på et eller andet tidspunkt vil stå med et bevis for A(n).

Vi har altså her et princip formuleret i konstruktive termer uden dette dog er intuitionistisk gyldigt, d.v.s forsøger vi at omfortolke de klassiske konnektiver v og $\exists$, således at disse forstås konstruktivt, får vi stadig divergenser mellem intuitionistiske og klassiske beviser. Disse divergenser må stamme fra divergenser i meningen af de øvrige konnektiver. Nærmere bestemt stammer divergenserne i overstående eksempel i foreskelle i meningen af alkvantoren samt forskellen mellem den klassiske og den intuitionistiske redegørelse af uendelige "mængders"beskaffenhed.

Det er en udbredt opfattelse, at man kan indfange intuitionistisk logik indenfor en klassisk ramme ved at indføre en tredje værdi, som de udsagnslogiske variable kan antage. Ideen er så at angive de intuitionistiske udsagns logiske konnektivers mening ved hjælp af sandhedstabeller med tre værdier svarende til bevisbarhed, refuterbarhed og uafgørbarhed. Der er imidlertid ikke bygget sandhedshuller ind i sådan en kvasi-platonisk fremstilling; intuitionistisk logik må afspejle, at vi er agnostikkere mht. de sætninger, hvis sandhedsværdi vi ikke kan afgøre. Dummett har følgende kommentar i et forsøg på at udskifte to-værdi-logik med tre-værdi-logik.

Ser vi nu på en sætning A, der ikke er bevisbar, så har vi et bevis for $\neg A$. Vi skal her finde en konstruktion, der til et bevis for A angiver et bevis for 1=0. Da A ikke er beviselig, følger dette umiddelbart. Har vi omvendt et bevis af $\neg A$, vil vi kunne transformere et bevis af A om til et bevis af 1=0. Nu er det klart, at vi ikke kan have et bevis af A, da dette straks kan transformeres til et bevis af 1=0, da $\neg A$ er bevisbar. Intuitionistisk er det, at der findes bevis for $\neg A$ altså ækvivalent med, at A ikke kan bevises. På sandhedstabellen for negation ved en tre-værdi logik ser vi, at $\neg A$ er bevisbar er ækvivalent med, at A er refuterbar og ikke, at A ikke kan bevises. At A ikke kan bevises kan skyldes at A er refuterbar, men også at A er uafgørbar.

Dette argument er interessant af flere grunde. Lad os lige gøre klart hvilke strenge, der spilles på. For det første slås der på en ækvivalens mellem et bevis for $\neg A$ og det ikke at have et bevis for A. Formelt;

$$\vdash \neg A \equiv \text{non} \vdash A \qquad (*).$$

Det er klart, at hvis vi har et bevis for $\neg A$, så kan vi ikke komme i besiddelse af et bevis for A, men er det omvendte gyldigt? Svaret er ja ifølge Dummett. Lad os forfølge hans synspunkt lidt.

Vi har til ethvert tidspunkt enten et bevis for en påstand A, eller vi har ikke et sådan bevis. Formelt;

$$\text{non} \vdash A \text{ eller} \vdash A \qquad (**).$$

Tolkes bevisligheden i (*) som pt. bevislighed, får vi af (*) og (**) at $\vdash \neg A$ eller $\neg A$. Dette er bivalensprincippet, som ihvertilfælde Dummett ikke ville finde på at påberåbe sig. Bevisligheden i (*) må altså være absolut bevislighed.For absolut bevislighed vil vi næppe kunne formulere en analog til (**). Klassisk har man imidlertid et modeksempel til (*).

Lad f.eks. A være den (sande) Gödelsætning, der (indirekte) hævder sin egen ubevislighed. Denne ligger jo netop i et tomrum mellem de bevislige og de modbevislige sætninger og

som så gælder non $\vdash A$, men non $\vdash \neg A$. Spørgsmålet er nu, om man ikke intuitionistisk kan finde en sætning af samme beskaffenhed som A, men som ikke afhænger af hele det formelle apparat, der skal til for at lave Gödelnummerering. F.eks. kunne man prøve at konstruere A vha. stopproblemet eller et andet ækvivalent problem. Benægter man eksistensen af sådanne absolut uafgørbare sætninger kan man kun operere med pt. uafgørbare sætninger. Dette giver et næsten platonisk skær over sætningers hævdbarhed. Lad os lade diskussionen hvile her og slå fast, at vi med disse problemer er nået langt ind i den intuitionistiske logiks bagland. Med et svar på disse problemer, vil vi være væsentlig mere afklarede mht. den intuitionistiske sammenhæng mellem beviser og uafgørbarhed.

Vi lagde i dette afsnit ud med at omtale to centrale teser, som er del af den intuitionistiske filosofi;
"..., the intuitionistic philosophy of mathematics compromises two theses: a positiv one and a negative one. The positive one is to the effect that the intuitionistic way of construing mathematical notions and logical operations is a coherent and legitimate one, that intuitionistic mathematics forms an intelligible body of theory. The negative thesis is to the effect that the classical the classical way of construing mathematical notions and logical operations is incoherent and illegitimate, that classical mathematics, while containing, in distortet form, much of value, is, nevertheless, as it stands unintelligible."(Dummett 1978 p.360)

Det er selvfølgeligt muligt kun at acceptere den positive tese samtidig med at man afviser den anden. Dette er imidlertid ikke Dummetts hensigt;
"I know of no argument against such eclecticism, other than the arguments which intuitionists use against classical mathematics in general; but it remains that, if classical mathematics is intelligible, then while intuitionistic mathematics may be intelligible also, it loses much of its point."(Dummett 1978 p.361).

Dummett indtager en kompromisløs position; Han argumenterer for, at såvel den første som den anden intuitionistiske tese holder. Indtil nu har vi set på hans kritik af platonistens meningsteori og dermed set på hans forsøg på at retfærdiggøre den anden intuitionistiske tese i det tilfælde, hvor den klassiske matematik funderes ved en platonistisk meningsteori. I denne forbindelse har Dummett et alternativt bud på, hvorledes intuitionismen skal begrundes filosofisk; Matematikken skal funderes meningsteoretisk, og i denne forbindelse er man pisket til at være anti-realist. Hermed har vi også set, hvorledes Dummett forestiller sig, at man skal vise holdbarheden af den anden intuitionistiske tese. Der er dog langt vej igen, hvis man skal omvende klassiske matematikkere til intuitionismen, især hvis disse matematikkere mener, at

filosofi er noget man laver over en leverpostejmad i frokostpausen.(frit efter Fraenkel 1973 p.181). En sådan omvendelse vil ihvertilfælde kræve langt mere end en ren filosofisk argumentation. Der må også noget matematisk gods på bordet!

I dette afsnit har vi set, hvorledes Dummetts filosofiske overvejelser er blevet udmøntet i noget konkret -nemlig intuitionistens syn på logikken. Herved er der på matematikkerens præmisser skaffet lidt luft til den første intuitionistiske tese, idet vi med denne skitse af den intuitionistiske logik har taget de første skridt fra filosofi til matematik. Vi skal i det følgende se nærmere på, hvordan den intuitionistiske matematik tager sig ud, og i denne forbindelse se på, hvorledes denne kan kædes sammen med såvel de generelle filosofiske overvejelser, vi har skitseret, som den intuitionistiske udlægning af de logiske konnektivers mening.

ARITMETIK

Hvad enten man er intuitionist af ældre dato f.eks. i den kantianske tradition eller af yngre dato f.eks. sprogfilosofisk orienteret, så fastholdes det at matematik angår konstruerede totaliteter, der ikke eksistere a-priori som en totalitet med en eventuel ikke erkendelig struktur. Eksempelvis kan den elementære talteori ikke opfattes som en mængde, hvor der til dennes elementer hører forskellige erkendelses uafhængige relationer. At have kendskab til de naturlige tal vil sige, at man ved hvorledes disse konstrueres, d.v.s at man ved, at de konstrueres en for en ud fra 0 ved hjælp af efterfølger operationen. At kende til egenskaber ved de naturlige tal vil sige, at man har kendskab til et bevis for denne egenskab -et bevis der er i overensstemmelse med intuitionistisk logik.

Videre skal de atomiske sætninger være afgørbare, og i overenstemmelse med de egenskaber de naturlige tal har qua deres konstruktion. Set mere formalistisk giver dette sig udtryk i, at man intuitionistisk accepterer Peano's aksiomer (der oprindeligt skyldes Dedekin -Peano formaliserede dem blot). Selvfølgeligt har aksiomerne en noget anden mening, der hvor de logiske konnektiver indgår. Aksiomerne vedrørende efterfølgeroperationen er evidente ud fra den måde hvorpå de naturlige tal genereres. Aksiomerne vedrørende funktionerne "+" og "." kan ses som rekursive ligninger, der fastlægger meningen af addition og multiplikation. Endeligt er induktionsprincippet evident ud fra konstruktionen af naturlige tal samt meningen af al-kvantoren;
At der intuitionistisk gælder $\forall x\ P(x)$ for et første ordensprædikat P betyder, at man har et bevis der til et vilkårligt tal n knytter et bevis for P(n) (samt et bevis af dette faktum). Hvis man nu har et bevis af P(0) og et bevis, der transformerer beviser for P(m) til beviser for P(m'), hvor m'er m's efterfølger, så har man ved at bruge fremgangsmåden n gange (Det er ikke nødvendigvis samme procedure skridt for skridt, jvf. Brouwers 2. intuition.) et bevis for P(n).

Såvel klassisk som intuitionistisk accepteres Peano's aksiomer altså, hvad enten man ser disse som evidente i lyset af den måde hvorpå de naturlige tal konstrueres eller som de ikke-logiske aksiomer, der ligger til grund for den formelle talteori. Ser vi på de logiske aksiomer, er der en større forskel, der i mange systemer giver sig udslag i forskelle mht. den universelle gyldighed af formlerne $\neg A \vee A$ og $\neg\neg A \rightarrow A$.

I de hilbertske systemer som f.eks. den i Kleene (1952) er sidstnævnte erstattet med formlen $\neg A \rightarrow (A \rightarrow \mathcal{C})$ (Førstenævnte er selvfølgelig ikke med idet $(\neg A \vee A) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow A)$ er en intuitionistisk gyldig formel). Forskellen er dog ikke

større end, at hvis en udsagns logisk formel E kan deduceres ud fra formlerne Γ ($\Gamma \vdash E$) så kan $\neg\neg E$ deduceres intuitionistisk ud fra $\neg\neg\Gamma$ ($\neg\neg\Gamma \vdash_I \neg\neg E$), hvor $\neg\neg\Gamma$ betegner $\{\neg\neg\varphi : \varphi \in \Gamma\}$ (Glivenko 1929).

Lad os nu for en talteoretisk formel definere afbildningen $^\circ$ som følger:

A° er A, hvis A er atomisk

$(A \wedge B)^\circ$ er $A^\circ \wedge B^\circ$

$(A \vee B)^\circ$ er $\neg(\neg A^\circ \wedge \neg B^\circ)$

$(A \to B)$ er $A^\circ \to B^\circ$

$(\neg A)^\circ$ er $\neg A^\circ$

$(\forall x A(x))^\circ$ er $\forall x A^\circ(x)$

$(\exists x A(x))^\circ$ er $\neg\forall x \neg A^\circ(x)$

Man kan vise, at hvis der for en talteoretisk formel E gælder $\Gamma \vdash E$ så $\Gamma^\circ \vdash_I E^\circ$ (Gentzen 1936). Det oprindelige bevis er dog Gödels (1932) fortjeneste. Her benyttedes der endvidere "oversættelsen"; $(A \to B)^*$ er $\neg(A^* \wedge \neg B^*)$. Γ° betegner her følgende mængde formler; $\{\varphi^\circ : \varphi \in \Gamma\}$. Som corollar til denne sætning får man, at den klassiske aritmetik er konsistent, hvis den intuitionistiske er det, idet hvis 1=0 er klassisk bevislig, så er $(1=0)^\circ$ som er 1=0 bevislig intuitionistisk. Lad os se på en række af de kommentarer, der har knyttet sig til disse interessante resultater.

Tager man først de formalistiske briller på, bemærkes det, at den intuitionistiske logik ikke sætter os bedre i stand til at undgå inkonsistens, og dermed er den intuitionistiske aritmetik i ligeså høj grad afhængig af et konsistensbevis som den klassiske aritmetik. De besværligheder, der er forbundet med den intuitionistiske logik, bevirker at man ligeså godt kan holde sig til den klassiske logik. Bortset fra at intuitionisten ikke ser konsistens som et ideal, der i den grad bør forfølges, så kan denne argumentation vendes ved at pege på, at den egentlige forskel mellem intuitionistisk og klassisk logik er lille, og ".... to how small an extent classical number theorists have succeeded in exploiting their platonistic assumptions" (Dummett 1978). Specielt kan intuitionisten bemærke, at det udelukkede tredjes princip er knapt så slagkraftigt som bokserens næver. Endvidere kan man påpege, at intuitionistisk logik er rigere end klassisk logik, idet der her er flere distinktioner, f.eks. er hhv. α og $\neg\neg\alpha$ og $\neg\exists x\, A(x)$ og $\forall x \neg A(x)$ ikke intuitionistisk ækvivalente (Bell m.fl. 1977 p.445). Endeligt peger ovenstående sætning på det forhold, at intuitionistisk matematik ikke blot er en finitistisk del af den klassiske matematik.

Man kunne se ovenstående bevis af konsistensen af den klassiske aritmetik relativt konsistensen af den intuitionistiske aritmetik som et absolut konsistens bevis, hvis den intuitionistiske aritmetik accepteredes som værende finitistisk. Dette er imidlertid ikke tilfældet, og viser at intuitionistisk aritmetik når langt videre, end hvad der er muligt på finitistisk vis (Kleene 1952 p.498, Dummet 1977 p.36).

Vi kan sammenfatte dette afsnit ved at sige, at på tværs af store filosofiske forskelle er der ikke væsensforskelle på intuitionistisk og klassisk aritmetik i formel forstand, omend en klassisk sætning optræder med en noget anden tolkning intuitionistisk. Denne tolkningsforskel, der altså er resultatet af filosofisk divergens, er imidlertid essentiel for intuitionisten (Kleene 1952 p.497).

OM INTUITIONITISK ANALYSE OG BESLÆGTEDE EMNER.

Vi har nu set, at intuitionistisk og klassisk logik er lige stærke m.h.t. konsistens. Specielt kan intuitionistiske aritmetiske sætninger ses som klassiske aritmetiske sætninger med en noget anden interpretation, der alene skyldes en forskel i meningen af de logiske konnektiver, idet Reanos aksiomer også accepteres intuitionistisk. Blandt de forskellige udlægninger af dette resultat så vi ihvertilfælde 2 (divergerende) temaer;
1) Det intuitionistiske formelle system er blot et delsystem af det klassiske, idet hvis $\vdash_I A^\circ$ så $\vdash A^\circ$ da A og A° er klassisk ækvivalente. Her er ingen uenige, men siger nogle, hvis den intuitionistiske aritmetik ikke er stærkere m.h.t. konsistens hvorfor alt besværet?

2) Hermed er vi over i temaet om, at intuitionistisk aritmetik godt nok er mere omstændig men hermed også rigere, idet man skelner mellem f.eks. A og $\neg\neg A$, $\exists x\ A(x)$ og $\forall x\ \neg A(x)$ osv. (jeg skal senere give en mere generel beskrivelse og vurdering af forholdet mellem ubesværlighed/evident og righed/begrundbarhed). Vi skal i det følgende se, at når vi bevæger os over i analysen, så tegner der sig et mere differentieret billede;

ad 1) Dette er direkte forkert, når vi taler om analyse. De klassiske- og intuitionistiske formelle systemer har en række sætninger tilfælles, men vi skal, se at der både findes klassiske sætninger, der intuitionistisk enten pt. ikke er bevislige eller direkte er falske, og intuitionistiske sætninger, som ikke er sande i den klassiske analyse.

ad 2) Vi skal ved nogle eksempler illustrere, hvorledes klassiske begreber bliver opløst i flere begreber i den intuitionistiske matematik. Herved opnår vi igen en righed der ikke findes klassisk. Tilgengæld skal der nogle temmelig store armbevægelser til for at vise nogle forholdsvis simple traditionelle sætninger intuitionistisk. Herved bliver problematikken om forholdet mellem, hvor god en begrundelse man kan give for næsten ækvivalente systemer og eviensen af sætninger i de forskellige systemer særligt påtrængende. Vi skal sidst i kapitlet se om, vi kan få noget overblik over situationen, men allerførst nogle indledende eksempler der bl.a. skal illustrere tema 2.

Eksempel 1: Ser vi på en følge (a_n):, hvor a_n er rational (den klassiske definition er fuldt ud tilfredsstillende intuitionistisk), så er (a_n) en fundamental følge, hvis der tilhvert naturlig tal k findes n=n(k) så $|a_{n+p} - a_n| < 1/k$, for hvert tal p. Følgen, hvor $a = 2^{-n}$, er da en fundamentalfølge.

Lad os nu definere en følge (b_n) som følger;

$$b_n = \begin{cases} 1, & \text{første gang det n'te ciffer i decimaludviklingen af } \pi \text{ er et 9-tal, der følger umiddelbart efter følgen 0,1,2,3,4,5,6,7,8, i samme decimaludvikling.} \\ 2^{-n}, & \text{ellers} \end{cases}$$

Klassisk er dette en fundamentalfølge, da (b_n) højst er forskellig fra (a_n) for en n-værdi, men intuitionistisk kan man ikke angive A så for alle p: $|b_{n+p} - b_n| < 1/2$. Med denne definition af en fundamentalfølge er vi nu i stand til at tale om de såkaldte reelle-tal-frembringere, idet enhver fundamentalfølge kan identificeres med en sådan. To reelle tal-frembringere (a_n) og (b_n) siges at være identiske $((a_n) \equiv (b_n))$ hvis $\forall n\ a(n)=b(n)$. Dette er altså en intensionel lighedsrelation. Vigtigere er den ekstensionelle lighedsrelation "=". Denne defineres som følger;
De reelle-tal- frembringere (a_n) og (b_n) siges at være i overensstemmelse, hvis man for hvert k kan finde n=n(k) så $|a_{n+p} - b_{n+p}| < 1/k$. Denne relation er klart reflexiv, symmetrisk og transitiv. Denne skelnen mellem intensionel og ekstensionel kontekst er et generelt forekommende intuitionistisk fænomen.

En anden tvedeling i forhold til det klassiske tilfælde sker i forbindelse med lighedsrelationen "overstemnelighed med"; Hvis det for to reelle-tal-frembringere a og b kan vises, at a=b fører til modstand, udtrykkes dette ved $a \neq b$. Kan man derimod angive et k så $|a_{n+p} - b_{n+p}| > 1/k$, siges a og b at være adskilte. Dette skrives a#b. Det er klart at a#b=>a=b. Intuitionistisk er det omvendte ikke nødvendigvis tilfældet. Definerer vi imidlertid en lighed som ovenfor klassisk så havde man;

$$a \neq b \iff \neg(\forall k\ \exists n\ |a_{n+p} - b_{n+p} < 1/k) \iff$$

$$\exists k\ \forall n\ |a_{n+p} - b_{n+p}| \geq 1/k \iff a \# b.$$

Foruden at vi har indført lidt reel talteori, ser vi flere eksempler på tema 2. Der er her imidlertid ikke sagt noget, der ikke kunne formuleres ved recursiv analyse og således gives en konstruktiv behandling inden for klassisk matematik. At dette dog ikke holder generelt, skal vi senere se flere eksempler på.

Eksempel 2: I den intuitionistiske "mængdelære" skelnes der mellem to måder at specificere en mængde:
i) Ved en karakteristisk egenskab som elementerne skal besidde. Denne type "mængde"kaldes en specie.
ii) ved en fælles metode hvorefter elementerne frembringes. Denne type "mængde" kaldes en spread. Mere præcist har man følgende definitioner vedrørende species (Heyting 1952).

Definition: En specie er en egenskab som matematiske

entiteter kan antages at besidde.

Definition: Efter definition af en specie S kan man se på de matematiske entiteter, der er konstrueret eller kunne være konstrueret før S. Hvis en entitet blandt disse tilfredsstiller S-betingelsen, kaldes denne et element i S.

Vi ser, at intuitionisten danner mængder som ekstensionen af et begreb, men i modsætning til i den naive cantorske mængdelære accepteres kun forud konstrueres entiteter som tilhørende ekstensionen af begrebet. Herved undgås impredikativt definerede mængder.

Eksempel: Lad (a_n) være en reel-tals-frembringer. Vi kan nu definere en specie som de reel-tals-frembringere, der stemmer overens med (a_n). Denne specie kaldes et reelt tal.

De enkelte reele tal kan altså ses som ækvivalensklasseer af reel-tals-frembringere ækvivalente med en given repræsentant ved ækvivalensrelationen "=". Dette synes at være en naturlig definition for intuitionisten, hvor vi igen ser, at der skeldnes mellem et reelt tal og den måde, hvorpå et sådant konstrueres. Det er sidstnævnte man har tilgang til. Skal man vise at 2 reele tal a og b er ens, må man vise at repræsentanter for hhv. a og b stemmer overens.

Eksempel : Alle reele tal danner som i eksemplet ovenfor den specie. Denne specie kaldes det (endimensionelle) kontinuum. Vi skal senere se, at man intuitionistisk kan frembringe et kontinuum, der minder mere om det klassiske.

Vi kan bemærke, at på grundlag af specie begrebet kan man få et hieraki af species på en måde, der minder om den simple type-teori som vi har nævnt før. Her har Brouwer i hvertilfælde ikke problemer med en uendelig udgangsmængde.Den er givet ham via hans 1. intuition! Lad os nu helt kort for at afrunde vores 2. eksempel introducere spread begrebet.

Vi har i forbindelse med de reelle-tal-frembringere set, at vi kan generere følger. Eksempelvis kan man se på, følgen, der fremkommer ved i en cirkel med radius R lig 1 se på den n'te indskrevne ligesidet polygon P_n med sideantal 2^{n+1} og se på forholdet mellem omkredsen af P_n og 2R (Denne følge repræsenterer den klasse vi kalder π). Alle elementerne i følgen er bestemt ved en på forhånd fastlagt regel. Sådanne følger kaldes lovmæssige følger (lawlike sequences).

Intuitionisten har foruden disse de lovløse følger (Lawless sequences). En sådan følge (a_n) kan frembringes ved at slå en terning (jvf. punkt ii i Heytings sondring mellem specie og spread), hvor a_n bliver udfaldet af det n'te kast. En spread er nu en kollektion af sådanne følger, den mere præcise beskrivelse kommer senere. Mens de lovmæssige følger er temmelig veldefineret (De kan identificeres med en

algoritme), så er de lovløse af en mere svævende karakter. Vi kan til et given tidspunkt kun have kendskab til en endelig del af en sådan lovløs følge. Brouwer kaldte også disse følger for choice sequenses. Fidusen ved disse er, at man kan nå frem til et konstruktivistisk kontinuum, der er langt mere tilfredsstillende end det vi kaldte det endimensionelle kontinuum (jvf. også brouwer 2.intuition). Dette kontinuum bliver ikke på noget tidspunkt et færdigt objekt, men et der er under skabelse. Dette kan sammenlignes med forholdet mellem de naturlige tal intuitionistisk forstået og klassisk forstået.

Med disse to omfattende eksempler, hvor vi også har indført et par intuitionistiske begreber, har vi med spread begrebet og choice sequences taget hul på den intuitionistiske analyse. Lad os nu indføre noget notation.

I første omgang betragter vi naturlige tal samt endelige og uendelige følger af naturlige tal. Lad i,j,k,l,m,n,p betegne enkelte naturlige tal. Bogstaverne a,b,c, ... skal betegne lovmæssige følger af naturlige tal og $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$ skal betegne de lovløse følger. De n'te termer i disse følger betegnes hhv. a(n-1) og $\alpha(n-1)$. Med $\vec{a}(n-1)$ og $\vec{\alpha}(n-1)$ betegner vi hhv. de første n termer i a og α, altså $\langle a_0,a_1,\ldots,a_{n-1}\rangle$ og $\langle\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1}\rangle$. $\vec{\alpha}(0)$ betenes således den tomme følge $\langle\ \rangle$. Med $\vec{u},\vec{v},\vec{w},\ldots$ betegner vi endelige følger af naturlige tal, hvor $\vec{u}_{n-1}$ er den n'te term. $lh(\vec{u})=k \Leftrightarrow \vec{u}=\langle u_0,\ldots,u_{k-1}\rangle$ Sammensætning defineres på sædvanlig vis: $\vec{u}*\vec{v}=\langle u_0,\ldots,u_{k-1},v_0,\ldots,v_{l-1}\rangle$, hvor $\vec{u}=\langle u_0,\ldots,u_{k-1}\rangle$ og $v=\langle v_0,\ldots,v_{l-1}\rangle$. Vi definerer også en ordensrelation ($\prec$) mellem endelige følger: $v\prec u \underset{DEF.}{\Leftrightarrow} \exists\vec{w}\ \vec{v}=\vec{u}*\vec{w}$.

Vi er nu i stand til at give en mere præcis beskrivelse af spreads. En spread-lov s er en effektiv procedure på de endelige følger u, der afgører om en sådan accepteres ($s(\vec{u})=0$) eller ej ($s(\vec{u})=1$). s skal opfylde følgende betingelser;

i) s accepterer mindst en følge - den tomme.
ii) Hvis $s(\vec{u}*k)=0$ så $s(\vec{u})=0$, hvor $\vec{u}*k$ betegner $\vec{u}*\langle k\rangle$.
iii) Hvis $s(\vec{u})=0$, da findes mindst en k således at $s(\vec{u}\hat{\ }k)=0$.

De følger α, hvorom det for hvert n gælder $s(\vec{\alpha}(n))=0$, udgør nu en spread S. Hvis der til hver u kun findes endeligt mange "forlængelses muligheder" umiddelbart efter u, så siges den pågældende spread lov at frembringe en vifte (fan). Formelt udtrykkes det, at en spread s er en vifte (fan(s);

$$Fan(s) \Leftrightarrow Spr(s) \wedge \forall\vec{u}_{s(\vec{u})=0}\ \exists k\ \forall m_{m>k}\, s(\vec{u}\hat{\ }m)=1.$$

Lad os se et par eksempler på spreads.

Eksempel: Den spread der er bestemt ved
$s(\langle 0\rangle)=s(\langle 1\rangle)=\ldots=s(\langle 6\rangle)$
$s(\vec{u}\hat{\ }k)=0$ netop hvis $s(u)=0 \wedge k\leq 6$.
Denne spread består af de følger fra vores terning eksempel. Tager vi istedet en mønt, får vi den binære spread. Disse

spreads er iøvrigt vifter.
Eksempel: Den spread der er bestemt ved $s(\vec{u})=\lambda u0$ kaldes den universelle spread.

Indtil nu har vi kun talt om de såkaldte nøgne spreads dvs. spreads, hvor følgerne er naturlige tal-følger. Skal vi nå frem til en konstruktion af mere interessante spreads, hvor vi har følger med andre entiteter end de naturlige tal, kan vi gøre det at vi associerer f.eks. rationelle tal med hvert element i en naturlig tal-følge i en given spread. Har man en spread-lov s og den tilhørende spread, kan man ved korrelationslov c (denne skal være effektiv) associerer medlemmer af en specie med acceptable følger i s. Denne kaldes en iklædt-spread (dressed spread). En sådan spread er så et par ‹s,c›, hvor c kaldes "iklædningen" af s.

Eksempel: Lad s være defineret som følger;
$s(\langle 0\rangle)= s(\langle 1\rangle)= s(\langle 2\rangle)= 0$ $s(\vec{u}\frown k)=0$ netop hvis $k\leq 2$. Lad os videre definere C som følger;
$c(\langle u_0,\ldots,u_n)=(u_0-1)2^{-1}+(u_1-1)2^{-2}+\ldots+(u_n-1)2^{-n-1}$. Denne (iklædte) spread kaldes det afsluttede interval $[-1;1]$. Vi kan her bemærke, at man kan vise at ethvert interval $[a;b]$ stemmer overens med en endelig (iklædt) spread altså en (iklædt) vifte (Heyting 1956 p.42).

Da vi nu via spread-begrebet er i stand til at producere intervaller, bliver næste skridt en håndtering af disse således, at man kan have med funktioner at gøre. Vigtigt i denne forbindelse er det som Heyting kalder fan-teoremet, og som vi vil kalde de udvidede fan-teorem (EFT).

EFT: Lad der vøre defineret en funktion c på en vifte s, da findes et tal m så for hver $\alpha\in s$ er funktionsværdien af α bestemt ved de første m elementer i α.

Bevis: Denne sætning afhænger af centrale intuitionistiske principper, så beviset vil vi udskyde, til vi har gjort os klart, hvilke principper det præcist er, der kræves. En undersøgelse af disse forhold kommer i det følgende. Vi kan imidlertid bemærke at, det, at c er defineret for enhver $\alpha\in s$, betyder, at for hver α kan n bestemmes så funktionsværdien bestemmes udfra $\bar{\alpha}(n)$. Vi får følgende formelle formulering af sætningen:

EFT: $\mathrm{Fan}(s) \wedge \forall_{\alpha\in s}\exists n\, C(\alpha,n) \Rightarrow \exists m\, \forall_{\alpha\in s}\forall_{\beta\, \beta\in s,\, \beta\in\bar{\alpha}(m)}\, C(\beta,m)$.

Med EFT i hånden er vi i stand til at vise et par intuitionistiske sætninger, hvor især den første er iøjenfaldende.

Sætning: Hvis f er defineret på $[0,1]$, da er f uniform kontinuert på $[0,1]$.

Bevis: Vi repræsentere $[0,1]$ ved en iklædt-spread ‹s,c›. $f(c(\alpha))= f(x)$ for $\alpha\in s$ og $c(\alpha)$ repræsentant for x. Lad nu n

og $x \in [0,1]$ være givet. Vi kan nu finde r så;
$|f(x)-r\cdot 2^{-n-1}| < 2^{-n-1}$, altså $\forall \alpha_{des} \exists r |f(c(\alpha))-r\cdot 2^{-n-1}| < 2^{-n-1}$.

Af EFT får vi nu:

$$\exists m \forall \alpha_{des} \exists r \forall \beta_{\beta \in S, \beta \in \bar{\alpha}(m)} |f(c(\beta))-r\cdot 2^{-n-1}| < 2^{-n-1} \qquad (*)$$

Lad nu $x,y \in [0;1]$ være givet og antag $|x-y| < 2^{-n-1}$. Vi kan finde en repræsentant for x, $c(\alpha_x)$ (Dummett 1977 p.117), og vi kan finde en repræsentant for y, $c(\alpha_y)$, hvor $\bar{\alpha}_x(m)=\bar{\alpha}_y(m)$. Ifølge (*) har vi at der findes r så;

$$\forall \beta \beta \in S, \beta \in \bar{\alpha}(m) |f(c(\beta))-m\cdot 2^{-n-1}| < 2^{-n-1}.$$

Dette bruger vi nu, når vi laver en vurdering på $|f(x)-f(y)|$.

$$|f(x)-f(y)| = |f(c(\alpha_x))-f(c(\alpha_y)) \not\geq$$

$$f(c(\alpha_x))-m\cdot 2^{-n-1} + f(c(\alpha_y))-m\cdot 2^{-n-1}| < 2\cdot 2^{-n-1} = 2^{-n}.$$

Dvs. givet et n kan vi bestemme m, så for vilkårlige $x,y \in [0,1]$: $|x-y| < 2^{-n-1} \Rightarrow |f(x)-f(y)| < 2^{-n}$. Det er klart at dette resultat kan generaliseres til at opfatte ethvert interval $[a;b]$ □

Man burde tro at en funktion som følgende;

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x=0 \\ |x|/x, & \text{ellers på } [-1;1]. \end{cases}$$

var et modeksempel til overstående sætning. Problemer med f er at den ikke er veldefineret for alle $x \in [0;1]$, nemlig ikke for de x om hvilket det gælder, at der er uafgørbart om $x=0$ eller $x \neq 0$. Vi kan vise en sætning, der udstiller dette forhold helt klart, men først en definition.

Definition: Hvis $T \subseteq S$ og $T \cup (S/T)$ er lig S, da er T en aftagelig (detachable) delspecies af S (De sædvanlige mængde teoretiske notatidner betyder det analoge mht. species).

Sætning: Et pointspecies -dvs. et species af reelle tal repræsenteret ved reel-tals-frembringelse-, som er en aftagelig del species af et afsluttet interval, er enten 0-specien eller hele intervallet.

Bevis: Lad Q være den del-species af et interval E, som er aftagelig i forhold til E. Lad nu f(x) være den funktion, der er 1 på Q og 0 på $E \setminus Q$. Denne funktion må nu ifølge kontinuitetssætningen være uniform kontinueret på E, dvs. f(x) er konstant □

Dette betyder f.eks., at den funktion der på $[0;1]$ er lig 1 for $x \in Q \cap [0;1]$ og lig 0 ellers ikke som i det klassiske tilfælde er diskontinuert i ethvert punkt, men snarer i det

intuitionistiske tilfælde er en meningsløs funktion. Her kan mængderne $Q \cap [0;1]$ og $[0;1]/Q$ ikke holdes ud fra hinanden. Denne meget korte smagsprøve viser at man med EFT har et middel til at producere en intuitonistisk analyse, der godt nok er mere restriktiv end den klassiske, men som samtidig giver en så stærk teori, at vi ikke alene bevæger os langt ud over den recursive analyse men også ud over den klassiske matematiks grænser. Mht. forholdet mellem intuitionistisk analyse og recursiv analyse er vi f.eks. her i førstenævnte i stand til at producere en så stærk sætning som Borel's overddækningssætning (Heyting 1956 p.67). Dette kan ikke lade sig gøre i den recursive analyse (Aberth 1980 p.131). Vi skal i næste kapitel se nærmere på dette forhold. Der er selvfølgelig også en række sætninger, der ikke kan produceres intuitionistisk. Her er Bolzano/Weistrass' sætning et centralt eksempel.

Sætning: Hvis S er en uendelig delmængde af et afsluttet interval $[a;b]$, da indeholder $[a;b]$ mindst et grænsepunkt for S.

Bevis: Lad os "konstruere" en følge af intervaller $[a_i;b_i]$ på denne vis: Sæt $a_0=a$, $b_0=b$. Hvis $[a_0;(a_0+b_0)/2]$ indeholder uendelig mange elementer fra S, lad $[a_1;b_1]=[a_0;(a_0+b_0)/2]$. Hvis $[a_0;(a_0+b_0)/2]$ indeholder endelig mange elementer fra S, lad $[a_1;b_1]=[(a_0+b_0)/2;b_0]$. Vi laver samme procedure for $i=2,3,\ldots$, altså for hvert i har vi to tilfælde;

1) $[a_i;(a_i+b_i)/2]$ indeholder uendelig mange elementer fra S.
2) $[a_i;(a_i+b_i)/2]$ inderholder endelig mange elementer fra S.
I dette tilfælde må $[(a_i+b_i)/2;b_i]$ indeholde uendelig mange elementer. Vi vælger $[a_{i+1};b_{i+1}]$ som den af de to, der har uendelig mange elementer fra S. Da længden af intervaller, hvor $[a_{i+1};b_{i+1}] \subseteq [a_i;b_i]$, halveres i hvert skridt, har vi at;

$$A=\bigcap_{i=0}^{\infty}[a_i;b_i], \text{ hvor A er grænseværdien} \square$$

Dette bevis afhænger imidlertid af slutningen; $\frac{(A \vee \neg A) \Rightarrow B}{B}$

Vi har i et tidligere afsnit set, at denne slutning ikke er gyldig, når A er uafgørbar. I dette bevis hvor udsagnet "$[a_i;(a_i+b_i)/2]$ indeholder uendelig mange elementer fra S" spiller rollen af A i ovenfornævnte slutning, er A netop uafgørbar. Nu kunne det godt være, at man alligevel kunne producere et intuitionistisk bevis, så ovenfornævnte indvendinger kun giver, at sætningen er pt. ubevislig. Følgende eksempel af dette forhold findes også hos Brouwer (Heyting 1956).

Eksempel: Lad følgen (a_n) være defineret som følger; $a_n=2^{-n}$, hvis der blandt de første n cifre i decimaludviklingen af π findes ti på hinanden følgende tretaller, og $a=1-2^{-n}$, hvis sådan ti tretaller ikke findes blandt de første n cifre. Da ingen pt. ved om en sådan ti på hinandn følgende tretaller findes i decimaludvikling af π, er grænseværdien,som er

blandt kandidaterne 0 og 1, af (a_n) ikke pt. kendt.

Lad nu dette være godt, som en smagsprøve på den intuitionistiske analyse. Vi vil i stedet for at udvikle denne til en sammenhængende teori tage et skridt tilbage og se på det udvidedet fan-teorems (EFT) stilling fra et bevisteoretiske synspunkt, med andre ord lad os købe den påstand, at EFT er en af de centrale intuitionistiske sætning -da den giver anledning til uoverenstemmelser med den klassiske matematik, er den også en af de kontroversielle intuitionistiske sætninger- og se på hvilke forudsætninger, der ligger til grund for denne, samt om disse sætninger kan begrundes efter de retningslinier, som Dummett har afstukket.

I den klassiske matematik kender man, bl.a. fra kombinatorikken begrebet træer, der svare godt til det intuitionistiske begreb "spread". Her kan stierne i træ indentificeres med choice sequences i en spread. Videre siges et træ at være endeligt, hvis til hver knude i træet (En knude kan repræsenteres ved en endelig følge u.) kun svarer endelig mange knuder under (Billedeligt talt så står træet på hovedet). Klassisk har man en sætning -som vi i første omgang vil kalde det klassiske fan-teorem (CFT)-, der siger, at hvis enhver stig i et endeligt træ har en enelig længde, da er der en øvre grænse på længden af stierne i træet. Klassik viser denne sætning ved Königs lemma.

Königs lemma: Hvis der ingen øvre grænse er på længden af stierne i et endeligt træ, da er mindst en af stierne uendelig lange.

Før vi går igang med beviset for denne sætning, lad os angive et par definitioner således, at vi intuitionistisk er stand til at tale, om det der svare til samlinger af endelige stier (et spread er defineret som en specie af uendelige choice sequences). Vi har ovenfor defineret, hvad det vil sige at en spread er en vifte (svarende til at et træ er endeligt). Nu kan vi bruge følgende defineret begreb til at repræsentere en species af endelige delfølger, hvor følgerne er del af choice sequences hørende til en spread.

Definition: En species R af endelige følger spærrer (bars) en knude u i en spread netop hvis $\forall \alpha_{\in S, \alpha \in \vec{u}} \exists n\ \bar{\alpha}(n) \in R$.

Med disse definitioner får Königs lemma følgende formulering.

Königs lemma: $\mathrm{Fan}(s) \wedge \neg \exists m \forall \alpha_{\in S} \exists n_{n \leq m}\ \bar{\alpha}(m) \in R \Rightarrow \exists \alpha_{\in S} \forall n\ \bar{\alpha}(n) \notin R$.

Lad os se på det klassiske bevis for denne sætning.

Bevis: Vi definere en relation mellem endelige følger $\vec{u}$ og naturlige tal m, som følger;

$$Q(\vec{u},m) \underset{\text{DEF.}}{\Longleftrightarrow} \forall \alpha_{\alpha\in\mathcal{S},\alpha\in\vec{u}} \exists n_{n\in\mathbb{N}} \bar{\alpha}(n)\in R.$$

Vi kan så danne følgende species;

$$A = \{\vec{u}: \exists m\ Q(\vec{u},m)\}.$$

Det er klart, at $R \subseteq A$, idet $Q(\bar{\alpha}(n),n)$ for vilkårlig $\bar{\alpha}(n)$ R. Man kan tænke på Q, som sigende at alle de følger fra s, der går gennem u bestemmer en specie af endelige følger fra R, og at disse følger har en øver grænse m på deres længde. A er så alle de knuder u, hvor en sådan grænse findes. Anden præmis i lemmaet siger så, at $\langle\ \rangle \notin A$. Vi skal nu vise, hvorledes vi kan komme frem til en følge α, hvor $\bar{\alpha}(n) \notin R$ for alle n.

Antag at vi har en acceptabel knude $\vec{u}$ $(s(\vec{u})=0)$, hvor alle 1-forlængelser tilhører A. Formelt;

$$\forall k_{s(\vec{u}\frown k)=0}\ \vec{u}\frown k\in A. \quad \text{Dvs. } \forall k_{s(\vec{u}\frown k)=0} \exists m\ Q(\vec{u}\frown k,m)$$

Da nu s er en vifte er $\{k: s(\vec{u}\frown k)=0\}$ endelig, og vi kan finde q så;

$$\forall k_{k>q}\ s(\vec{u}\frown k)=1.$$

Lad nu $k_1,\ldots,k_p$ være de værdier for $k\leq q$, hvor $s(\vec{u}\frown k)=0$. Til hver af disse findes m, så $Q(\vec{u}\frown k,m)$. Lad nu $m_1,\ldots,m_p$ være de til $k_1,\ldots,k_p$ svarende m-værdier. Lad $M=\max\{m_1,\ldots,m_p\}$. Det er nu klart, at $Q(\vec{u},M)$. Dermed har at $\vec{u}\in A$ og således vist at;

$$s(\vec{u})=0 \wedge \forall k_{s(\vec{u}\frown k)=0}\ \vec{u}\frown k\in A \Rightarrow \vec{u}\in A \qquad (*).$$

Specien A siges hermed at være "opad arvelig". Klassisk er dette ækvivalent med;

$$s(\vec{u})=0 \wedge \vec{u}\notin A \Rightarrow \exists k_{s(\vec{u}\frown k)=0}\ \vec{u}\frown k\notin A \qquad (**).$$

Vi kan nu ud fra vores antagelse om, at $\langle\ \rangle$ A definere en uendelig sti som følger;

$$\beta(n)= \min\{k: s(\bar{\beta}(n))\frown k=0 \wedge \bar{\beta}(n)\frown k\notin A\ .$$

Denne konstruktion følger klart af (**). Lige så klart er det, at $\forall n\ \bar{\beta}(n)\notin A$. Vi har før bemærket at $R\subseteq A$. Hermed har vi også $\forall n\ \bar{\beta}(n)\notin R$ □

CFT kan nu let vises klassisk ud fra Königs lemma ved kontraposition $(A\to B\vdash \neg B\to\neg A)$, samt ved manipulation med kvantorerne ved reglerne $\forall x\ \neg A(x)\sim\neg\exists x\ A(x)$, $\neg\forall x\ A(x)\sim\exists x\neg A(x)$. Intuitionistiske er dette dog ikke en legitim fremgangsmåde, da disse regler ikke gælder indenfor intuitionistisk logik. Skulle man til trods for disse besværligheder alligevel producere et gyldigt intuitionistisk bevis af CFT udfra Königs lemma, er der stadig problemer. Slutningen fra (*) til (**) er ikke intuitionistisk gyldig, dvs. også i Königs

lemma bliver der brugt ugyldige intuitionistiske slutningsregler -iøvrigt de samme som ovenfor.

Intuitionistisk må der et langt mere direkte bevis til for at bevise CFT, hvis dette da overhovedet er muligt. Dvs. vi må til en specie R, der spærer ‹ › i S, effektivt kunne finde m så alle endelige følger i R er af en længde der er mindre end eller lig m. Det synes som om, at hvis vi skal have held med dette forehavende, så må man kræve at R er afgørbar altså $\forall \vec{u}\ (\vec{u} \in R \vee \vec{u} \notin R)$.

Med dette krav bygget ind i præmisserne for vores sætning får vi følgende noget svagere form for "fan-teorem" end CFT. Lad os kalde denne sætning for fan-teoremet og benævne den FT.

FT: $\mathrm{Fan}(s) \wedge \forall \alpha_{des} \exists n\ \bar{\alpha}(n) \in R \wedge \forall \vec{u}\ (\vec{u} \in R \vee u \notin R) \Rightarrow \exists m\ \forall \alpha_{des} \exists n_{n \leq m}\ \bar{\alpha}(n) \in R.$

For at bevise FT intuitionistisk kan vi bruge argumentationen fra beviset for CFT til og med (*). Herefter kan man prøve at styre uden om kontrapositionen fra (*) til (**) og ud fra (*) vise FT ad den direkte vej. Vi har altså

$$s(u)=0 \wedge \forall k_{s(\vec{u}\frown k)=0}\ \vec{u}\frown k \in A \Rightarrow \vec{u} \in A \qquad (*).$$

Foruden (*) altså at A er opad arvelig har vi at R er afgørbar og at $\forall \alpha_{des} \exists n\ \bar{\alpha}(n) \in R$, dvs. R spærer ‹ ›. Vi har også som før at $R \subseteq A$. Formaliserer vi disse præmisser skal vi altså vise følgende;

BI_{DR}: $\mathrm{Fan}(s)$ $\wedge$

$\forall \vec{u}(\vec{u} \in R \vee \vec{u} \notin R)$ $\wedge$

$\forall \alpha_{des} \exists n\ \bar{\alpha}(n) \in R$ $\wedge$

$\forall \vec{u}(\vec{u} \in R \Rightarrow \vec{u} \in A)$ $\wedge$

$\forall \vec{u}_{s(\vec{u})=0}(\forall k_{s(\vec{u}\frown k)=0}\ \vec{u}\frown k \in A \Rightarrow u \in A) \Rightarrow$

‹ › A.

Denne slutning, som kan ses som en slags induktionsslutning med (*) som induktionsskridtet og $R \subseteq A$ som basis, kaldes bar induktion (BI_{DR}) -rettere et specialtilfælde af BI_{DR}, da det i formuleringen af bar induktionen ovenfor kræves, at S skal være en vifte, men blot at S er en spread. Vi skal her i første omgang ikke forsøge hverken at bevise eller retfærdige BI_{DR}, men blot konstatere at med dette princip i hånden er vi i stand til at bevise FT. Vi kan tilsidst bemærke, at BI_{DR} har en ækvivalent formulering BI_D, som er den formulering af bar induktion, vi skal bruge i det følgende. BI_D udtaler sig om bar induktionens gyldighed for den universelle spread.

BI_D: $\forall \vec{u}(\vec{u}\in R \vee \vec{u}\notin R)$ $\wedge$

$\forall \alpha \exists n\, \bar{\alpha}(n)\in R$ $\wedge$

$\forall \vec{u}(\vec{u}\in R \Rightarrow \vec{u}\in A)$ $\wedge$

$\forall \vec{u}(\forall k\ \vec{u}^\frown k\in A \Rightarrow \vec{u}\in A)$

$\Rightarrow \langle\ \rangle\in A$.

Sætning: BI_{DR} og BI_D er ækvivalente.

Bevis: $BI_{DR} \Rightarrow BI_D$ er klart, da BI at specialtilfælde af BI_{DR}.
$BI_D \Rightarrow BI_{DR}$; Antag at smtlige præmisser i BI_{DR} er opfyldt. Vi definerer nu en specie R^* som følger. $R^* = R \cup \{\langle k\rangle \mid s(\langle k\rangle)=1\}$. R^* er specie, der sprærer $\langle\ \rangle$ i den universelle spread. R^* er afgørbar, da R og s er det. Vi har klart, at $\vec{u}\in R^* \Rightarrow \vec{u}\in A^*$ ($A^* = A\cup\{\langle k\rangle \mid s(\langle k\rangle)=1\}$). Vi mangler nu at vise, at A^* er opad arvelig. Vi ser på $\vec{u}^\frown k\in A^*$. Hvis $lh(\vec{u}^\frown k)>2$, har vi $\vec{u}^\frown k\in A$ og dermed $\vec{u}\in A\subseteq A^*$. Hvis $lh(\vec{u}^\frown k)=1$ har vi, at $\vec{u}^\frown k=\langle k\rangle$. Vi skal her vise det sidste skridt i induktionen, altså $\forall k\ \langle k\rangle\in A^* \Rightarrow \langle\ \rangle\in A^*$. For de k, hvor $s(\langle k\rangle)=0$, gælder $\langle k\rangle\in A \Rightarrow \langle\ \rangle\in A$ pga. den fem. præmis i BI_{DR}, dvs. der findes et m, så $Q(\langle\ \rangle,m)$. For de k, hvor $s(\langle k\rangle)=1$, er det klart, at m=1 duer, således at $Q^*(\langle\ \rangle,\max 1,m)$. Dvs. præmis 4 i BI_D er opfyldt for A^*. BI_D giver nu at $\langle\ \rangle\in A^*$. Da $A\subseteq A^* = A\cup\{\langle k\rangle \mid s(\langle k\rangle)=1\}$, har vi nu, at $\langle\ \rangle\in A$, idet $s(\langle\ \rangle)=0$ □

Lad os betragte den specie af choice sequences U, der udgør den universelle spread. Lad os videre se på det system af åbne mængder i U af formen $\{\beta \mid \bar{\alpha}(n_0)=\bar{\beta}(n_0)\}$. Dette system af mængder udgør en basis for en topologi på U: Lad S_1, S_2 være mængder i dette system altså,

$S_1=\{\beta \mid \bar{\gamma}(m_0)=\bar{\beta}(m_0)$ og $S_2=\{\beta \mid \bar{\alpha}(n_0)=\bar{\beta}(n_0)\}$.

For $\delta\in S_1\cap S_2$ findes S_3 så $\delta\in S_3\subseteq S_1\cap S_2$.

Lad $M=\max\{n_0,m_0\}$. $S_1\cap S_2=\{\beta \mid \bar{\delta}(m_0)=\bar{\beta}(m_0)\}$ indeholder klart δ, samtidig med at denne mængde er kandidat til posten S_3, da den er med i systemet. $U=\{\beta \mid \bar{\alpha}(0)=\bar{\beta}(0)\}$ er også med i systemet.

Lad os nu betragte en konstruktiv (lovmæssig) funktion Φ på choice sequence, med værdier indenfor N. Vi vil nu kræve at denne skal være kontinuert mht. ovenstående topologi altså;

$$\forall\alpha\exists n\forall\beta_{\beta\in\bar{\alpha}(n)}\ \Phi(\beta)=\Phi(\alpha).$$

Lad os med "$Cont_{LS}$" betegne klassen af lovmæssige funktioner på choice sequence, hvortil der knyttes naturlige tal og som

er kontinuerte i ovennævnte forstand. Vi kan nu udtrykke det første intuitionistiske kontinuitetsprincip som vi skal se på;

$CP_{\exists n}$: $\forall\alpha\,\exists n\; C(\alpha,n) \Rightarrow \exists\Phi\in Cont_{LS}\;\forall\alpha\, C(\alpha;\Phi(\alpha))$.

Hvorledes dette princip i første omgang skal retfærdiggøres vil vi se på i det følgende.
Intuitionistisk har man en række udvalgsaksiomer. F.eks. medfører et udsagn som $\forall n\;\exists m\; A(n,m)$, at der findes en funktion a, således at $\forall n\; A(n,a(n))$. Dette er dog ikke som i den klassiske matematik et kontroversielt princip, men derimod en simpel følge af en "oversættelse" eksistenskvantoren. På samme vis har man "udvalgsaksiomer" for lovmæssige følger og choice sequences;

$A_{n,b}$: $\forall n\;\exists b\; A(n,b) \Rightarrow \exists a\;\forall n\; A(n,\lambda m\; a(n,m))$.

Variablen a løber her over konstruktive funktioner af to variable.

$A_{n,\beta}$: $\forall n\exists\beta\; A(n,\beta) \Rightarrow \exists\gamma\;\forall n\; A(n,\lambda m\gamma\;(j(n,m)))$.

Variablen γ løber her over choice sequences. Her er der kun direkte involveret en variabel. Parringfunktionen $j(n,m)=m+1/2(m+n)(m+n+1)$ sørger således for, at de to variable bliver "kogt" ned til en.
På samme vis har, at et udsagn som $\forall\alpha\;\exists n\; B(\alpha,n)$ implicerer at vi effektivt kan finde en konstruktiv funktion Φ så $\forall\alpha\; B(\alpha,\Phi(\alpha))$. Formelt kan dette udtrykkes;

$A_{\alpha,n}$: $\forall\alpha\exists n\; B(\alpha,n) \Rightarrow \exists\Phi\forall\alpha\;\; B(\alpha,\Phi(\alpha))$

Disse "udvalgsaksiomer" følger direkte af kvantorernes intuitionistiske mening. Således bliver disse principper ikke kontroversielle - ihvertfald ikke hvis man har accepteret den intuitionistiske udlægning af kvantorernes mening.
Lad os nu antage, at vi kan hævde $A(\alpha)$, dvs. vi har et bevis af A for α. Nu er det ikke sådan at man på noget tidspunkt kan have et fuldstændigt kendskab til α. Der må altså på et eller andet tidspunkt være nok information om α til at kunne bevise A. Formelt kan dette udtrykkes;

SOD: $A(\alpha) \Rightarrow \exists n[\forall\beta_{\beta\in\bar{\alpha}(n)}\; A(\beta)]$.

Det er klart at prædikatet A her skal forstås mht. ekstensionel α. Lad os iøvrigt antage dette, for forholdet mellem alle de prædikater og choice sequences, der indgår i det følgende. Tager vi nu Φ fra $A_{\alpha,n}$ og antager, at vi kan hævde $B(\alpha,\Phi(\alpha))$ for $\Phi(\alpha)=n$, får vi nu ved SOD;

$$\Phi(\alpha)=n \Rightarrow \exists m[\forall\beta_{\beta\in\bar{\alpha}(m)}\;\Phi(\beta)=n],$$

dvs. $$\exists m[\forall\beta_{\beta\in\bar{\alpha}(m)}\;\Phi(\beta)=\Phi(\alpha)]$$

Med andre ord får vi, at $\Phi \in Cont_{LS}$. Vi ser således, at forskellen mellem $A_{\alpha,n}$ og $CP_{\exists n}$ er kravet om Φ's kontinuitet. Dette følger som vist af SOD. Vi skal senere, give en vurdering af kontinuitetsprincippet og dermed af SOD, men først skal vi se på $CP_{\exists n}$'s rolle i den intuitionistiske teori om choice sequences. En funktion $\Phi \in Cont_{LS}$ kan repræsenteres ved en lovmæssig funktion e defineret på endelig følger af naturlige tal. e siges at repræsentere Φ, netop hvis der for enhver α gælder;

$$\text{Der findes n så } e(\bar{\alpha}(n)) = \Phi(\alpha)+1$$

$$\text{og for alle } m<n \; e(\bar{\alpha}(m)) = 0.$$

Intuitivt er, det som e gør, at give udslag når α er tilstrækkelig lang, til at $\Phi(\alpha)$ kan beregnes. Udslagets værdi er så lig $\Phi(\alpha)+1$, idet $\Phi(\alpha)$ godt kan være 0. e fortæller os således både noget om $\Phi(\alpha)$, og om hvor meget af α, der skal med for at kunne beregne $\Phi(\alpha)$. Formelt kan betingelserne på e udtrykkes;

$$\forall\alpha\exists n\,[e(\bar{\alpha}(n)) = \Phi(\alpha)+1 \wedge \forall m_{m<n} e(\bar{\alpha}(m)) = 0\,].$$

For m>n lad os sætte $e(\bar{\alpha}(m)) = e(\bar{\alpha}(n))$. Dette er imidlertid ikke så væsentligt. Nu er e defineret på endelig følger $\bar{\alpha}(n)$, men lad os også bruge notationen "$e(\alpha)$". Hermed mener vi følgende;

$$e(\alpha) \text{ er defineret} \iff \exists n\; e(\bar{\alpha}(n)) > 0$$

$$e(\alpha) = k \iff \exists n\,[e(\bar{\alpha}(n)) = k+1 \wedge \forall m_{m<n} e(\bar{\alpha}(m)) = 0.$$

Med denne notation får vi følgende formulering af ovenfornævnte kontinuitetsprincip;

$$CP_{\exists n}:\; \forall\alpha\exists n\; C(\alpha,n) \Rightarrow \exists e\forall\alpha\,[e(\alpha) \text{ er defineret} \wedge C(\alpha,e(\alpha)).$$

Vi vil også i det følgende se på nogle konsekvenser af et svagere kontinuitetsprincip $CP_{\exists!n}$.

$$CP_{\exists!n}:\; \forall\alpha\exists!n\; C(\alpha,n) \Rightarrow \exists e\forall\alpha\,[e(\alpha) \text{ er defineret} \wedge C(\alpha,e(\alpha)).$$

Dette princip følger klart af $CP_{\exists n}$. Samtidig er det et stærkere end hvad man kan nå frem til ved blot at tilskrive kvantorerne deres intuitionistiske mening; Φ kræves stadig kontinuert. Lad os se på nogle konsekvenser af $CP_{\exists n}$ og $CP_{\exists!n}$.
Med $CP_{\exists n}$ (samt FT) er vi i stand til at vise EFT.

$$EFT:\; Fan(s) \wedge \forall\alpha_{\alpha\in s}\exists n\; C(\alpha,n) \Rightarrow \exists m\forall\alpha_{\alpha\in s}\exists n\forall\beta_{\beta\in s,\,\beta\in\bar{\alpha}(m)} C(\beta,n).$$

Bevis: Den anden præmis giver vha. $CP_{\exists n}$;
$\exists e\forall\alpha_{\alpha\in s}\,[e(\alpha) \text{ er defineret} \wedge C(\alpha,e(\alpha)]$ dvs. der findes e så;

$$\forall \alpha_{\alpha \in S} \ \exists m \ \exists n \left[e(\bar{\alpha}(m)) = n+1 \wedge \forall r_{r<m} \, e(\bar{\alpha}(r)) = 0 \wedge C(\alpha, n) \right].$$

Vi definerer nu en specie R som følger;

$$\vec{u} \in R \underset{\text{DEF.}}{\Longleftrightarrow} e(\vec{u}) > 0 \wedge \forall v_{\vec{u} < \vec{v}} \, e(\vec{v}) = 0.$$

R bliver således den specie af tilstrækkelig lange endelige følger u, hvorefter e giver udslag. R er afgørbar eftersom e for en given u enten er større end 0 eller lig 0. Ifølge e's beskaffenhed har vi klart;

$$\forall \alpha_{\alpha \in S} \ \exists n \, \bar{\alpha}(n) \in R.$$

Vi kan nu bruge FT og vi får;

$$\exists m \forall \alpha_{\alpha \in S} \ \exists n_{n \leq m} \, \bar{\alpha}(n) \in R.$$

For $\alpha \in S$, har vi så for n<m og for en eller anden q;

$$e(\bar{\alpha}(n)) = q+1 \wedge \forall r_{r<n} \, e(\bar{\alpha}(r)) = 0 \wedge C(\alpha, q).$$

(Vi kan tænke på m, som den øvre grænse for længden af de følger $\vec{u}$, hvor e netop giver udslag). For $\beta \in \alpha(m)$, hvor $s(\beta)=0$ har vi $\beta \in \alpha(n)$ dvs. $e(\beta) = q$ (β stemmer tilstrækkelig overens med α, nemlig på de n første pladser) og dermed $C(\beta, q)$.
Vi har altså fundet m (ved FT), så vi for vilkårlige $\alpha \in S$ kan bestemmme n ($\leq$m) så $\beta \in \bar{\alpha}(n)$, for $s(\beta)=0$. Det betyder sa, at $e(\beta(n)) = q+1$ og $C(\beta, q)$. Formelt;

$$\exists m \forall \alpha_{\alpha \in S} \ \exists n \forall \beta_{\beta \in S, \beta \in \bar{\alpha}(m)} \, C(\beta, q).$$

Udfra EFT og $CP_{\exists n}$ er vi nu i stand til at vise CFT. Lad os kalde denne GFT (generel fan-teorem, idet R's afgørbarhed er droppet), hvormed vi antyder, at vi bruger intuitionistiske principper.

GFT: $\quad Fan(s) \wedge \forall \alpha_{\alpha \in S} \ \exists n \ \bar{\alpha}(n) \in R \Rightarrow \exists m \forall \alpha_{\alpha \in S} \ \exists n_{n \leq m} \bar{\alpha}(n) \in R.$

Bevis: $\forall \alpha_{\alpha \in S} \ \exists n [\bar{\alpha}(n) \in R]$ giver ved $CP_{\exists n}$;

$\exists e \forall \alpha_{\alpha \in S} \ C(\alpha, e(\alpha))$, hvor $C(\alpha, n)$ er $\exists n \bar{\alpha}(n)$, dvs. vi har

$\exists e \forall \alpha_{\alpha \in S} \ \bar{\alpha}(e(\alpha))$. For dette e har vi ifølge EFT;

$\exists p \forall \alpha_{\alpha \in S} \ \exists n \forall \beta_{\beta \in S, \beta \in \bar{\alpha}(p)} \ \bar{\beta}(n) \in R.$

Nu er s en vifte, dvs. der findes kun et endeligt antal u, hvor $s(\vec{u})=0 \wedge lh(\vec{u}) \leq p$. Lad $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k$ være disse følger og lad $m = \max_{i \leq k} e(u_i) - 1$. Vi har nu at;

$$\forall \alpha_{\alpha \in S} \ \exists n_{n \leq m} \ \bar{\alpha}(n) \in R \square$$

Vi ser altså, at beviset for EFT som er det "fan-teorem", der giver de stærke intuitionistiske sætninger, hviler på

såvel $CP_{\exists n}$ som FT og dermed BI_{DR}. Samme forhold gør sig gældende mht. GFT (der klassisk er ækvivalent med Königs lemma), da denne bygger på EFT og $CP_{\exists n}$. Vi kan altså konkludere, at den del af den intuitionistiske analyse der gør brug af de forskellige fan-teoremer -og det er den del af analysen, der vil noget (se nedenfor)- hviler kraftigt på bar induktion samt kontinuitetsprincippet $CP_{\exists n}$. Vi skal stadig udskyde en diskussion af disse princippers begrundelse og istedet først angive nogle konsekvenser af det svagere kontinuitetsprincip $CP_{\exists! n}$.

Sætning: $EXT_\alpha A(\alpha) \wedge EXT_\alpha B(\alpha) \wedge \forall\alpha (A(\alpha) \vee B(\alpha)) \Rightarrow$

$\exists e \forall\alpha [e \text{ er defineret} \wedge e(\alpha)=0 \wedge A(\alpha) \vee e(\alpha)=1 \wedge B(\alpha)]$.

Bevis: Da $\forall\alpha (A(\alpha) \vee B(\alpha))$ har vi for hvert α netop en af følgende situationer $A(\alpha) \wedge \neg B(\alpha)$, $B(\alpha)$. Ved situation 1 sæt n=0, ved situation 2 sæt n=1. Vi har nu;

$$\forall\alpha \exists! n [A(\alpha) \wedge n=0 \vee B(\alpha) \wedge n=1].$$

Af $CP_{\exists! n}$ fås nu det ønskede □

sætning: $\neg\forall\alpha (\forall n\ \alpha(n)=0 \vee \neg\forall n\ \alpha(n)=0)$.

Bevis: Antag $\forall\alpha (\forall n\ \alpha(n)=0 \vee \neg\forall\alpha\ \alpha(n)=0$. Her afhænger $\forall n \alpha(n)$ og $\neg\forall n\ \alpha(n)$ klart ikke af den måde hvorpå α er produceret, men kun af hvad der står på den n'te plads i α. Med andre ord egenskaberne $\forall n \alpha(n)$ og $\neg\forall n\ \alpha(n)$ er ekstensionelle. Vi kan altså bruge sætningen ovenfor, og vi får, at der findes e så;

$$\forall\alpha [(e(\alpha)=0 \wedge \forall n\ \alpha(n)=0) \vee (e(\alpha)=1 \wedge \neg\forall n\ \alpha(n)=0)] \qquad (*)$$

Lad nu været givet en choice sequence α og antag at $e(\alpha)=0 \wedge \forall n\ \alpha(n)=0$, dvs. der findes m så;
$e(\alpha(m))=1 \wedge \forall r_{r<m}\ \bar{\alpha}(r)=0$
(intuitivt er e den funktion, der giver udslag, når $\bar{\alpha}(r)$ er lang nok til at bestemme $\forall n \alpha(n)=0$. Vi kan allerede her bemærke at der er noget galt i dette). Vi har altså;

$$\forall\beta\ {}_\beta\bar{\alpha}(m) \forall n\ \beta(n)=0 \qquad (**)$$

Lad nu β være defineret som følger;

$$\beta(n)= \begin{cases} 0 & \text{for } n \leq m. \\ 1 & \text{for } n > m. \end{cases}$$

Her er $\bar{\beta}(m)=\bar{\alpha}(m)$ men $\neg\forall n \beta(n)=0$ og vi har modstrid med (**). Da (*) gælder for alle α, samtidig med at $e(\alpha)=0 \wedge \forall n\ \alpha(n)=0$ fører til modstrid for vilkårlig α, må det for alle α gælde $e(\alpha)=1 \wedge \neg\forall n \alpha(n)=0$ (***). Den α, der for alle n er lig 0 strider imidlertid mod (***). Vi får igen en modstrid □.

Vi ser altså, at CP fører til en sætning, der strider mod klassisk logik. Vi har også set, at EFT fører til sætninger, der er inkonsistent med klassisk matematik. EFT bygger på bar induktion og kontinuitetsprincippet CP . Nu kan bar induktion vises klassisk;

$$BI_{\Delta}: \quad [\forall \vec{u}\ (\vec{u} \in R \vee u \notin R) \wedge \forall \alpha\ \exists n\ \bar{\alpha}(n) \in R \wedge \forall \vec{u}\ (\vec{u} \in R \Rightarrow \vec{u} \in A) \wedge$$

$$\forall \vec{u}\ (\forall k\ \vec{u}\frown k \in A \Rightarrow \vec{u} \in A)] \Rightarrow \langle\ \rangle \in A.$$

Bevis: 1. præmis er klassisk en tautologi, væk med den. lad os antage 3. og 4. præmis, samt $\langle\ \rangle \notin A$. Ved kontraposition af den 4. præmis kan vi ud fra $\langle\ \rangle \notin A$ konstruere en følge β, hvor $\forall n\ \bar{\beta}(n) \notin A$. Ved kontraposition af $\vec{u} \in R \Rightarrow \vec{u} \in A$ i præmis 3 fås nu en modstrid med præmis 2 □

Det er altså de intuitionistiske kontinuitetsprincipper, der er de kontroversielle principper, da det netop må være disse der giver uoverensstemmelserne mellem den intuitionistiske- og den klassiske matematik.

Lad os starte en gennemgang af hvorledes vi intuitionistisk vil begrunde bar induktion og kontinuitetsprincippet med angive Brouwers bevis af bar induktion, som fortolket af andre (se f.eks Heyting 1956 p.43, Dummett 1978 p.94).

Lad os se på bar induktion i form af BI :

i) R spærer $\langle\ \rangle$
ii) R er afgørbar
iii) $R \subseteq A$
iv) $\forall \vec{u}\ (\forall k\ \vec{u}\frown k \in A \Rightarrow u \in A)$.

Brouwer tager udgangspunkt i hvorledes et bevis af den første præmis vil se ud. I overensstemmelse med intuitionistisk udlægning af meningen af implikationen vil han vise, hvorledes dette bevis ved hjælp af de øvrige præmisser kan transformeres til et bevis for $\langle\ \rangle \in A$. I denne forstand er beviset interessant, idet den giver en pejling om hvorledes den noget ufuldstændige udlægning af de logiske konnektiver nærmere skal forstås.

Ifølge Brouwer vil et bevis af "R spærer $\langle\ \rangle$" udelukkende gøre brug af følgende tre-typer slutninger:

η-slutninger;
$$\frac{u \in R}{R \text{ spærer } \vec{u}}$$

$\mathcal{G}$-slutninger;
$$\frac{R \text{ spærer } \vec{u}}{R \text{ spærer } \vec{u}\frown k}$$

$\mathcal{F}$-slutninger;
$$\frac{R \text{ spærer } \vec{u}\frown 0,\ R \text{ spærer } \vec{u}\frown 1, \ldots}{R \text{ spærer } \vec{u}}$$

Et bevis kan ses som et endeligt træ med forgrenninger der slutter ved bevisets præmisser og slutningen R spærer ‹ › som første knude. Hvis vi har givet et sådan bevis, kan vi udskifte alle $\mathcal{G}$-slutninger som følger;
Vi ser på de forskellige grene der løber fra de forskellige præmisser. Første gang vi møder en $\mathcal{G}$-slutning, er der to måder vi kan være kommet i besiddelse af præmissen R spærer $\vec{u}$; a) ved en $\mathcal{F}$-slutning b) ved en $\mathcal{N}$-slutning.

ad a) Hvis baggrunden for "R spærer $\vec{u}$" er en $\mathcal{F}$-slutning, så er R spærer $\vec{u}\hat{\ }k$ blandt præmisserne. Denne er blevet bevist uden brug af $\mathcal{G}$-slutninger. Nu kan vi bruge dette bevis istedet for det, der bruger $\mathcal{G}$-slutninger.

ad b) Hvis vi har, "R spærer $\vec{u}\hat{\ }k$" på baggrund af en $\mathcal{N}$-slutning, så har vi $\vec{u}\hat{\ }R$ som præmis for denne.Betragt nu beviset for "R spærer $\vec{u}\hat{\ }k$" til konklusionen R spærer ‹ ›. Her optræder, der en række udsagn af formen "R spærer $\vec{v}$", hvor $\vec{v}\geq\vec{u}$ eller $\vec{v}=\vec{u}*\vec{w}$ som konklusioner i de enkelte trin i beviset. I hvert sådan skridt formindskes eller forøges længden af $\vec{v}$ med højst 1 for at afslutte med længde 0 ("R spærer ‹ ›"). Et eller andet sted må udsagnet "R spærer $\vec{u}$" fremkomme. Nu; i stedet for for udfra $\vec{u}\in R$ at går over $\mathcal{G}$-slutningen og derefter videre -muligvis i mange trin- til udsagnet "R spærer $\vec{u}$", kan vi erstatte hele denne del af beviset med en $\mathcal{N}$-slutning og dermed er antallet af $\mathcal{G}$-slutninger reduceret med mindst 1.

Vi har nu præmis i) opfyldt i BI_D altså har vi et bevis for "R spærer ‹ ›", kan vi via de i a) og b) nævnte procedure angive et bevis, hvor kun $\mathcal{N}$- og $\mathcal{F}$-slutninger forekommer. Dette bevis kan nu transformeres om til et bevis for "‹ ›$\in$A";Vi erstatter alle forkomster af udsagn af formen "R spærer $\vec{u}$" med udsagn af formen "$\vec{u}\in A$". Således bliver $\mathcal{N}$-slutninger transformeret til (gyldige) slutninger af formen;

$$\frac{\vec{u}\in R}{\vec{u}\in A}$$

, pga. den iii'de præmis i BI_D og $\mathcal{F}$-slutninger bliver transformeret til slutninger af

formen; $\dfrac{\vec{u}\hat{\ }0\in A,\ \vec{u}\hat{\ }1\in A,\ldots}{\vec{u}\in A}$, der også er gyldig pga. iv præmis i BI_D □

Nu er dette bevis imidlertid forkert. Det gør ikke brug af (ii) i BI altså at R er afgørbar. Droppes denne betingelse på BI'_D gyldighed kan man angive en species R på den universelle spread der opfylder de øvrige præmisser i BI_D med som giver anledning til en modsigelse af $CP_{\exists!n}$ (Dummett 1977 p.88). Som man kan have mistanke om, ligger fejlen i Brouwers antagelse om, at vi kun har ovennævnte tre mulige slutnings regler i et bevis af "R spærer ‹ ›". Hvordan får vi så en form for bar-induktion hvis ikke via et bevis, som det Brouwer forsøgte at gennemføre? Dummetts eget svar er;
"Even if we could overcome these difficulties, so as to

render Brouwers proof of the bar theorem convincing, it is better, in any formalization of intuitionistic analysis at present possible, to asume the principle of bar induktion axiomaticlly ..." (Dummett 1978 p.102).

Denne begrundelse af bar induktion ligger langt fra Dummetts meningsteoretisk udgangspunkt. Hvor man kan se logikken, aritmetikken og de dele af den reelle analyse, der kan beskrives på en måde, der ikke ligger så fjernt fra den recurcive analyse, som havende en meningsteoretisk forankring, så er antagelsen af gyldigen af bar induktion som ovenfor beskrevet, en pragmatisk antagelse, hvis eneste berettigelse er, at den giver et bevis for FT, der igen skaffer os adgang til dele af analysen med noget kød på. I bedste fald bliver bar induktionen begrundet udfra den indsigt vi har i teorien om choice sequence -en indsigt der afslører at gyldigheden af bar induktion er en rimelig antagelse. Herved bliver bar induktion en ren ontologisk antagelse uden den kobling til meningsteorien, som Dummett, hvis han skal tages på ordet, nødvendigvis må etablere, hvis hans position tilnærmelsesvis skal skal siges at være gennemført.

Endnu stærkere må disse indvendinger mod Dummett være, hvis vi vender os mod kontinuitetsprincipperne. Den fremstilling vi har set, hvor $CP_{\exists n}$ ses som følge af et intuitionistisk udvalgsaksiom samt skema for åben data (SOD), skyldes Troelstra. Mens de forskellige intuitionistisk udvalgsaksiomer følger direkte af meningen af de logiske konnektiver kan det samme ikke siges om SOD. Hos Troelstra (Troelstra 1977 p.15) er SOD begrundet udfra vores kendskab -eller måske rettere mangel på samme- til choice sequences. Dvs. SOD og dermed $CP_{\exists n}$ søges begrundet ontologisk.

Nu mener Dummett, at kontinuitetsprincipperne er af en mere fundamental karakter (Dummett 1978 p.449), men heller ikke disse kan gives en meningsteoretisk forankring -i al fald i på samme måde som udvalgsaksiomerne (Dummett 1978 p.80). At heller ikke kontinuitetsprincipperne kan begrundes indenfor de meningsteoretiske rammer, der er lagt, må hos Dummett og en række andre intuitionister, der prøver at argumentere for intuitionisme som den eneste legitime måde at drive matematik på, vække en del bekymring, da kontinuitetsprincipperne er inkonsistent med klassisk matematik og -logik.

Kan vi så ikke bare identificere konstruktivitet med Churches tese? Hermed ville man kunne slå bro mellem intuitionisterne og de klassiske matematikkere, idet Churches tese også accepteres klassisk. Da Churches tese desuden er konsistent med en række intuitionistiske principper, begår man vel ikke den store forræderi mod det intuitionistiske synspunkt. Lad os se lidt på disse spørgsmål i det følgende.
Lad os se på en formulering af Churches tese (CT);

CT: $\forall a\ a \in N^N\ \exists e \forall n\ (\{e\}(n)=a(n))$

Her som før løber variablen over lovmæssige følger. Denne formulering siger altså, at enhver lovmæssig følge kan repræsenteres ved en recursiv funktion e, der spytter værdien a(n) ud når vi fodrer den med værdien n. I denne form er Churches tese konsistent med en række principper indenfor den intuitionistiske analyse (Dummett 1978 p.73). Tager man derimod CT som en måde at give et håndfast indhold i begrebet "konstruktivistisk", må denne ifølge intuitionisterne også indbefatte choice sequences og vi får følgende formulering af Churches tese, hvor ovenstående er et specialtilfælde.

CT_α: $\forall \alpha\ \exists n \forall n\ (\{e\}(n)=a(n))$.

Her løber variablen α over choice sequences. Denne formulering af Churche's tese er imidlertid inkonsistent med fan teoremet; CT_α og FT er inkonsistent.
Bevis: Vi vil ifølge CT_α kunne indentificere den binære spread med et primitivt recursivt træ. Her definerer vi en specie R, der er recursiv, hvor der ikke alene ikke findes m så længden af følgerne i R er mindre end m ($\neg\exists m \forall \alpha_{\alpha \in S} \exists n_{n \leq m} \bar{\alpha}(n) \notin R$), men at der til hvert m kan findes en primitiv recursiv følge, den har en længde større end m, formelt kan denne intuitionistisk noget stærkere påstand udtrykkes;

$$\forall m \exists \alpha_{\alpha \in S} \forall n_{n \leq m}\ \bar{\alpha}(n) \notin R.$$

Vi bruger Kleenes T-prædikat, hvor T(n,m,k) intuitivt betyder at algoritmen med Gödelnummer n og indput m giver output k. Lad os her definere følgende;

$$W(i,r,k) \Leftrightarrow [i=0 \wedge T((r)_1,r,k) \wedge \forall j_{j \leq k} \neg T((r)_0,r,j) \vee$$
$$i=0 \wedge T((r)_0,r,k) \wedge \forall j_{j \leq k} \neg T((r)_1,r,j)\ ,$$

hvor $(r)_0$ og $(r)_0$ er eksponenterne af hhv. 2 og 3 i primtals faktoriseringen af r. Intuitivt kan vi tænke på algoritmen med Gödeltallet r opdelt i to algoritmer med Gödeltallene $(r)_0$ og $(r)_1$. W(i,r,k) giver så udslaget 0 eller 1 eftersom det er $(r)_0$ eller $(r)_1$ der først giver udslaget k ved indput r. En af disse to situationer vil forekomme, da algoritmen med Gödeltallet r er recursiv. Herved bliver også W(i,r,k) recursiv.
Vi kan nu definere en specien R;

$$R = \{\vec{u}:\ s(\vec{u})=0 \wedge \exists r_{r \leq lh} \exists k_{k \leq lh(\vec{u})-r}\ W(u_r, r, k)$$

Vi husker at u_r er værdien på den r'te plads i $\vec{u}$, som her altså er 0 eller 1).
For $\alpha \in S$ har vi;

$$\bar{\alpha}(n) \in R \Leftrightarrow \exists r_{r<n}\ \exists k_{k<n-r}\ W(\alpha(r),r,k).$$

Vi så ovenfor, at $W(i,r,k)$ er primitiv recursiv. Denne egenskab bevares ved begrænset kvantorisering. R bliver således afgørbar.
Lad der nu være givet et m. Vi skal vise, at der findes $\alpha \in S$ så $\forall n_{n \leq m}\ \bar{\alpha}(n) \notin R$.

Vi definerer α som følger;

$$\alpha(r) = \begin{cases} 1 \text{ hvis } r<m \wedge \exists k_{k<m-r}\ W(0,r,k) \\ 0 \text{ ellers.} \end{cases}$$

Tag nu $n \leq m$ og antag $\bar{\alpha}(n) \in R$. Dette giver ifølge definitionen af R; $\exists r_{r<n}\ \exists k_{k<n-r}\ W(\alpha(r),r,k)$.

Da α er primitiv recursiv har vi at $\alpha(r)=0 \vee \alpha(r)=1$.

For $\alpha(r)=0$ har man; $\exists k_{k<n-r}\ W(o,r,k)$.
Da $n \leq m$ har vi i følge defintionen af α imidlertid at $\alpha(r)=1$.

For $\alpha(r)=1$ får man; $\exists k_{k<n-r}\ W(1,r,k)$.
Igen får vi en modstrid, idet dette betyder ifølge definitionen af α at $\alpha(r)=0$. Vi ser altså at antagelsen om

$\forall n_{n \leq m}\ \bar{\alpha}(n) \in R$ fører til en modstrid, altså $\forall n_{n \leq m}\ \bar{\alpha}(m) \notin R$.
Dette resultat giver klart, at præmissen for Königs lemma er opfyldt, så hvis fan-teoremet var gyldigt så havde vi;

$$\exists \alpha_{\alpha \in S}\ \forall n\ \bar{\alpha}(n) \notin R \ (*), \text{ for } \alpha \text{ recursiv.}$$

Vi kan imidlertid for recursiv α vise, at der altid vil findes n så $\bar{\alpha}(n) \in R$. Hvis α er recursiv, så er $\{r: \alpha(r)=1\}$ recursiv nummerabel, dvs. der findes index p_0 så;

$$\{r: \alpha(r)=1\} = \{r: \exists k\ T(p\ ,r.k)\}.$$

Det samme gælder for $\{r: \alpha(r)=0\}$. Her fås index p_1. Dette giver et p, hvor $p=2^{p_0}-3^{p_1}$. Lad nu;

$$k = \mu a[(T((p)_0,p,a) \vee T(p)_1,p,a)].$$

Et sådan k findes da α er recursiv.Ser vi nu på $W(i,r,k)$ fra før har vi;

$$W(\alpha(p),p,k) \Leftrightarrow (p)=0 \wedge T((p)_1,p,k) \wedge \forall j_{j \leq k} \neg T((p)_0,p,k)$$
$$\wedge\ (p)=1 \wedge T((p)_0,p,k) \wedge \forall j_{j \leq k} \neg T((p)_1,p,k).$$

Vi vil nu vise at for $n = p+k+1$ har vi $\bar{\alpha}(n) \in R$;
Ser vi på R fra før har vi;

$$\bar{\alpha}(n) \in R \Leftrightarrow \exists r_{r<n}\ \exists k_{k<n-r}\ W(\alpha(r),r,k).$$

Sæt r=p og k=k. For n=p+k+1 giver dette $\bar{\alpha}(n) \in R$.
For enhver recursiv α er vi altså i stand til at finde n så, $\bar{\alpha}(n) \in R$ i strid med (*) $\square$

CT_α og FT er altså inkonsistent, eller hvad der er ækvivalent CT og FT_R er inkonsistent, hvor FT_R betegner fanteoremet begrænset til at omfatte recursive funktioner. Nu er FT ifølge intuitionisterne ikke således begrænset, så hvis intuitionisten skal acceptere Churches tese må det være i form af CT. Denne er som før bemærket konsistent med en række intuitionistiske principper (der bevæger sig udover, hvad der kan beskrives ved recursive funktioner). Troelstra gør imidlertid opmærksom på to grunde til ikke at optage CT blandt de intuitionistiske principper (Troelstra 1977 p.4);

i) I forskellige aksiomsystemer bliver der ikke tilført noget nyt ved at tage CT med i formaliseringen. Denne bliver altså til et ekstra vedhæng.

ii) Churches tese giver en god overensstemmelse mellem begreberne "mekanisk beregning" og "recursiv". Det er imidlertid et spørgsmål om den er i overensstemmelse mellem, hvad der er mekanisk beregning, og hvad der er menneskelig beregning.

Hvad der dog er mere vigtigt ; begrænser vi os til den del af den konstruktive matematik, der kan beskrives ved rekursiv analyse, bliver resultatet derefter. Vi må droppe store dele af den reelle analyse, ikke bare i form men også i indhold. Dette tema, som vi har antydet flere gange, stemmer fint overens med Simpsons bevisteoretiske undersøgelser (Simpson 1984);
Königs lemma over et svagt basis system RCA_0 kaldes WKL_0, hvor "... RCA stands for recurcive comprehension aksiom. Roughly speaking, the aksioms of RCA_0 are only strong enough to prove the existence of recursive sets". (Simpson 1984 p. 784).

Indenfor WKL_0 kan man bevise en række centrale sætninger fra analysen bl.a. Borels overdækningssætning, sætningen om at enhver kontinuert funktion på et afsluttet interval har maximum og sidst men ikke mindst Cauchy/Peanos sætning om, at en kontinuert funktion på rektanglet $|x| \leq a$, $|y| \leq b$, der giver anledning til differential ligningen;

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),\ y(0)=0,$$

har en løsning $y=\Phi(x)$ på intervallet $|x| \leq \alpha$, hvor $\alpha=\min(a,b/m)$, $m=\max\{|f(x,y)| : |x| \leq a, |y| \leq b\}$.

Det er klart at det intuitionistiske udgangspunkt med fanteoremet i stedet for Königs lemma samt den noget anderledes intuitionistiske logik, vil betyde, at disse sætninger får en noget anden udformning. Væsentligst er dog at disse kan produceres (se f.eks. Heyting 1956). Vi bemærker også at

Bolzano-Weierstrass' sætning ifølge Simpson er beviselig ækvivalent til det stærkere sytem ACA_0 (Simpson 1984 p.798) over basissystemet RCA_0. Dette harmonerer også med at Bolzano-Weierstrass' sætning ikke er intuitionistisk teorem.

Königs lemma eller rettere en form for fan-teorem er altså nødvendig for at kunne producere væsentlige dele af den intuitionistiske analyse og dermed bidraget til en retfærdiggørelse af det videre forløb af det, vi har kaldt den første intuitionistiske tese. Svækker vi derimod vores grundprincipper så meget, at vi får noget, der er svagere end Königs lemma, må vi nøjes med langt fattigere dele af analysen. Eksempelvis hvis vi holder os til den recursive analyse må vi opgive Borels overdækningssætning (Aberth 1950 p.131) og Cauchy/Peano's sætning. Lad os se på beviset for sidst nævnte påstand i det følgende afsnit.

EN BEREGNELIG FØRSTE ORDENS DIFFERENTIALLIGNING UDEN BEREGNELIG LØSNING.

Opfylder en kontinuert funktion $F(t,\varphi(t)): \Omega \to V$, hvor Ω er en åben mængde i RxV, lokalalt en Lipchitz betingelse, vil der gennem hvert punkt $(x_0,y_0) \in \Omega$ gå netop en maximalløsning til differentialligningen $\varphi'(x)=F(t,\varphi(t))$ (mat.1y 1968-69 p.49.07).
Løsningen (x) vil her være konstruktiv. Cauchy/ Peano's sætning, som vi har angivet i det foregående kapitel, er af en mere generel karakter end eksistens- og entydighedssætningen som vi lige har citeret, idet den ikke betinger at F skal opfylde en lipchitz betingelse. (Konklusionen er dog også svagere end den i eksistens og-entydighedssætningen). Som vi før har nævnt, kan Cauchy/Peano's sætning vises indenfor systemet WKL_0. (Simpson 1984 p.785). Begrænser vi os derimod til den recursive analyse, har vi ikke et tilsvarende resultat;

Hovedsætning: Der findes en sædvanlig første orden differentialligning

$$\varphi'(t) = F(t,\varphi(t)) \ , \varphi(0) = 0$$

Således at F(x,y) er beregnelig på rektanglet
$\{(x,y): 0 \leq x \leq 1 \wedge -1 \leq y \leq 1\}$,
men således at der ingen beregnelig løsning til differentialligningen på noget interval $[0;\lambda]$, $\lambda > 0$.
Før vi går igang med beviset for denne sætning, skal vi se på nogle definitioner og sætninger fra den recursive analyse. Vi vil her finde definitioner, der minder meget om dem vi har set i forbindelse med den intuitionistiske reelle tals aritmetik.

Lad N være mængden af naturlige tal. En følge af rationale tal (t_m) er recursiv nummerabel netop hvis der findes recursive funktioner q,r og s : N->N således at:

$$t_m = (-1)^{s(m)} \frac{q(m)}{r(m)+1}$$

Dette er klart intuitivt; vi kan finde algoritmer der til hvert m angiver tæller, nævner og fortegn.
Et reelt tal a siges at være et recursivt reelt tal, netop hvis der findes recursive funktioner q,r og s således at;

$$\left| a-(-1)^{s(m)} \frac{q(m)}{r(m)+1} \right| < (1/2)^m$$

Denne definition minder en del om intuitionistens reel tals frembringer. Der er dog væsentlige forskelle;
i) Her lægges der ikke op til en forskel mellem ekstension og intension. I den klassiske matematik er alt ekstensionelt.
ii) intuitionistisk er de reelle tal konstrueret via. Deres

frembringere. Her er, det at et reelt tal er recursivt blot en blandt flere egenskaber, som tallet kan besidde. Man ser her den ontologiske forskel mellem anti-realisten og realisten.

En følge af recursive reelle tal (a_n) er recursiv nummerabel, netop hvis der findes recursive funktioner u,v og w således at,

$$\left| a_n - (-1)^{w(n,m)} \frac{u(n,m)}{v(n,m)} \right| < (1/2)^m$$

(A) Lad os nu definere hvad vi mener med en beregnelig funktion.

Definition: Funktionen $\varphi(x)$ er beregnelig netop hvis;
1) φ afbilder enhver recursiv nummerabel følge af rationale tal (t_m) i en recursiv nummerabel følge af reelle tal $(\varphi(t_n))$
2) φ er effektiv uniform kontinuert, dvs. der findes en recursiv funktion q således at;

$$-n<a,\ b<n \text{ og } |a-b| < \frac{1}{q(n,m)} \Rightarrow |\varphi(a)-\varphi(b)| < (1/2)^m,$$

for alle reelle tal a og b.

Lad os med Pour-el og Richards opremse nogle sætninger som vi skal bruge i det følgende vedrørende beregnelige funktioner;

(B) Hvis (F_n) er en recursiv nummerabel følge af beregnelig funktioner med F som grænsefunktion, således at $|F_n - F_{n+1}| < (1/2)^n$, da er F beregnelig.

(C) Hvis $\varphi(x)$ er en beregnelig funktion og (a_n) er en recursiv nummerabel følge af reelle tal da er $(\varphi(a_n))$ en recursiv nummerabel følge. Lad os til slut her i indledningen give endnu en defintion;

Definition: Disjunkte recursive nummerable mængder A og B siges at være recursivt seperable, netop hvis der findes en recursiv mængde C således at $A \subseteq C$ og $B \subseteq \bar{C}$. Recursivt nummerable mængder, der ikke således er seperable, siges at være recursiv inseperable.

Eksempel: Vil man have nogle gode recursive inseperable mængder af naturlige tal at tænke på i det følgende, kan man se på mængderne $A=\{\#\sigma : \sigma \in Cn\mathcal{A}\}$ og $B=\{\#\sigma : \neg\sigma \in Cn\mathcal{A}\}$, Hvor $\mathcal{A}$ er aksiomerne for et system i de naturlige tals sprog, der er stærkt nok til at repræsentere afgørbare mængder. Her gælder følgende sætning der kaldes fixpunkt lemmaet: For enhver β med netop en fri variabel findes der en sætning σ så $\mathcal{A} \vdash [\sigma \leftrightarrow \beta(S^{\#\sigma} 0)]$. (Enderton 1972 p.227).

Vi så i afsnittet om Hilbert, at en tilstrækkelig righoldig teori i de naturlige tals sprog ikke er fuldstændig. Dermed er mængden af sande sætninger uafgørbar (svarende til A ikke

er recursiv).Overraskende er det, at vi ikke engang kan skille de sande og falske sætninger på recursiv vis:

Sætning: Mængderne $A=\{\#\delta : \delta \in Cn\mathcal{A}\}$ og $B=\{\#\delta : \neg\delta \in Cn\mathcal{A}\}$ er recursiv inseperable.

Bevis: Antager vi at vi kan finde en recursiv mængde R så $A \subseteq R$ og $B \subseteq \bar{R}$, så findes der en formel β med netop en fri variabel, der repræsenterer R. Bruger vi fixpunktlemmaet på $\neg\beta$ får vi at der findes en sætning δ så;

$$\mathcal{A} \vdash [\delta \leftrightarrow \neg\beta(S^{\#\delta}\, 0)].$$

Da R er recursiv har vi $\#\delta \in R \vee \#\delta \in \bar{R}$. For $\delta \in R$ har vi $\mathcal{A} \vdash \beta(S^{\#\delta}\, 0)$, idet β repræsenteret R. Ifølge fixpunktlemmaet betyder dette at $\mathcal{A} \vdash \neg\delta$ og dermed ifølge definition af mængderne A og B $\#\delta \in B \subseteq \bar{R}$. Antager vi at $\#\delta \in \bar{R}$ får vi på analog vis en modstrid $\square$

Bevis for hovedsætningen:
Lad os begynde med at indføre noget terminologi; vi ser på en "halv kasse" (se fig.1) hvorpå der er defineret en funktion K(x,y). Denne giver anledning til en differentialligning $\varphi'(x)=K(x,\varphi(x))$.

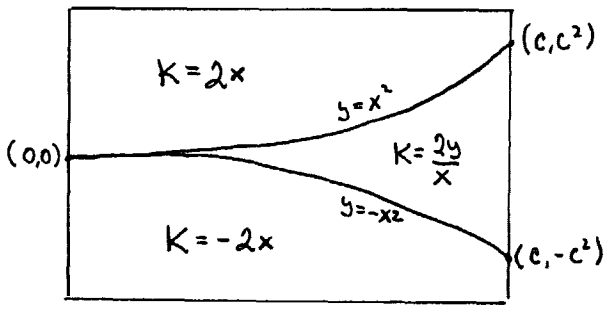

fig.1

Med betingelser $\varphi(0)=0$. Løsninger til denne differentialligning er alle kurver af formen $\varphi(x)=Cx^2$, hvor $|C|\leq 1$;
I området hvor k=2x er løsningen samtlige stamfunktioner til 2x gennem (0,0) her duer kun $\varphi(x)=x^2$. Analogt for det område hvor $K(x,y)=-2x$. Her er $\varphi(x)=-x^2$ eneste løsning. Indenfor det område, hvor $K(x,y)=2y/x$ og udenfor (0,0), opfylder F en Lipchitz betingelse. Her vil der gennem et hvert punkt (x_0,y_0), hvor $-\sqrt{x_0}<y<\sqrt{x_0}$ gå netop en løsningskurve. Denne skare af løsningskurver svarer til alle den af formen $\varphi(x)=Cx^2$, hvor C løber mellem -1 og 1.

De 2 linier med ligningen y=x og y=-x på fig.1 danner således en "spreder" i "kassen" svarende til at den skare af løsningskurver til differentialligningen $K(x,\varphi(x))=\varphi'(x)$. spreder sig ud som en vifte med udgangspunkt (0,0). Dette punkt kaldes iøvrigt "knudepunktet". Forestiller vi os en spejlvendt kasse med samme knudepunkt og områder svarende

til dem ovenfor, får vi en konfiguration som vi kan kalde en samler. Dette svarer til, at differntialligningen som funktionen K definerer på denne kasse, har en skare af løsninger af formen $\varphi(x)=Cx^2$, $|C|\leq 1$, der med forskellige udgangspunkter samles for at mødes i knudepunktet. Vi får så en kasse som den på fig. 2.

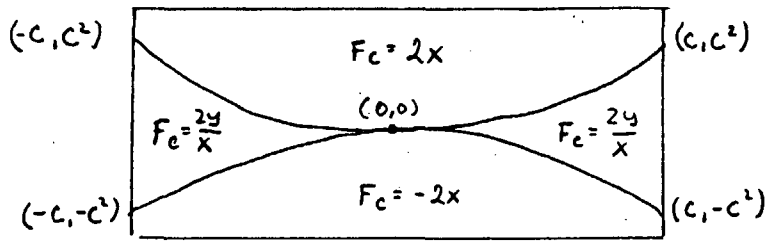

Fig.2.

Nu er ideen den, at disse kasser stykkes sammen som antydet på fig. 3.

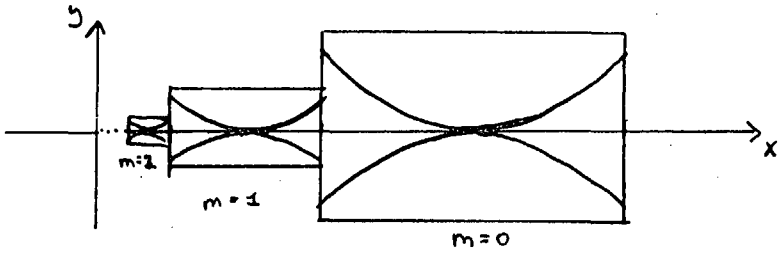

Fig.3

I nogle af kasserne vil vi så, i en omegn om knudepunktet, tilføje en såkaldt pulsfunktion. Arten af denne vil så være bestemt af de rekursivt nummerable mængder A og B; lad a og b være rekursive funktioner der frembringer hhv. mængderne A og B. Hvis a(n)=m lader vi højden af denne pulsfunktion i den m'te kasse være $2^{-(m+n+s)}$ og hvis b(n)=m lader vi pulsen være negativ med et udslag på $2^{-(m+n+s)}$. Hvis $m \notin A \cup B$ så er der ingen puls. Vi vil vise at den funktion der fremkommer som altså består af en "sammenklistring" af kasser med "påklistring" af pulsfunktioner på nogle af disse kasser - er beregnelig, men at differentialligningen som den giver anledning til ikke har en beregnelig løsning.

Lad os først præcisere, hvorledes vores funktion Fc(x,y) skal se ud på en vilkårlig kasse med længde 2c og højde $2c^2$. Fc er altså defineret på mængden $\{(x,y): |x|\leq c \wedge |y|\leq c^2\}$. Denne mængde er så delt op i nogle områder; en yder bræmme, en indre bræmme, en samler, en spreder, området udenfor samleren og sprederen der ikke er del af bræmmerne, samt en interpolatiols bræmme mellem sidstnævnte områder og samleren og sprederen (se fig. 4). Lad os give en præcis karakteristik af disse områder.

Den yderste bræmme;

$$By = \{(x,y):\ 0{,}999c \leq |x| \leq c \vee 0{,}999c^2 \leq |y| \leq c^2\}.$$

Den inderste bræmme;

$$B_I = \{(x,y):\ 0{,}998c \leq |x| < 0{,}999c \vee 0{,}999c^2 \leq |y| \leq 0{,}998c^2\}.$$

Samleren og sprederen;

$$S = \{(x,y):\ |y| \leq 0{,}999x^2 \wedge |x| \leq 0{,}998c\}.$$

Området udenfor S;

$$O = \{(x,y):\ |y| > x^2 \wedge |x| \leq 0{,}998c \wedge |y| \leq 0{,}998c^2.$$

Interpolations området mellem S og O;

$$I = \{(x,y):\ 0{,}999x^2 \leq |y| \leq x^2 \wedge |x| \leq 0{,}998c \wedge |y| \leq 0{,}998c^2\}$$

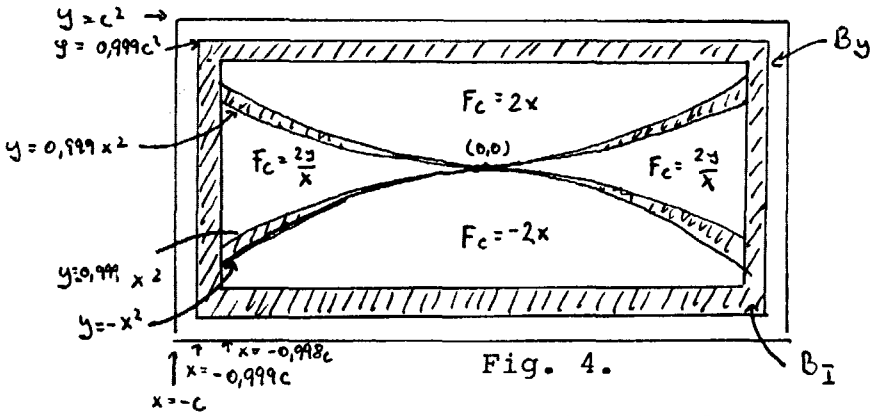

Fig. 4.

Vi kan nu give en præcis karakteristik af Fc;

$Fc(x,y) = 0$	for $(x,y) \in By$.
$Fc(x,y) = 2x$	for $y \geq 0$ og $(x,y) \in O$
$Fc(x,y) = 2y/x$	for $(x,y) \in S$
$Fc(x,y) = -2x$	for $y \leq o$ og $(x,y) \in O$

På den inderste bræmme samt interpolationens område mellem parablerne interpolernes der således at Fc bliver C^∞ udenfor (0,0). Var Fc blot en gang differential med kontinuerte partielt afledede så opfyldte Fc en Lipchitz betingelse. Følgeligt kunne vi sikre eksistens og entydighed af en beregnelig løsning gennem (0,0).

I det område, hvor, $Fc(x,y)=2y/x$, er $|y|<x$. Herved har vi, at $|2y/x| < |2x^2/x| < 2x$, dvs. $Fc(x,y) < 2c$ på hele kassen. Vi skal nu have tilføjet de ovenfor omtalte pulsfunktioner. Lad os først se på funktionen h:

$$h(x,y) = \begin{cases} e^{[1-(1-x^2)^{-1}} & \text{for } |x| < 1 \\ 0 & \text{for } |x| \geq 1. \end{cases}$$

En funktion af denne type skal presses indenfor nogle af

kasserne i en omegn om knudepunktet. Dette kan gøres som følger: Vi ser på funktionen $h_\alpha(x,y)$;

$$h_\alpha(x,y) = h(x/\alpha, y/\alpha).$$

h_α antager maximun for $x=0$ og $h_\alpha(x,y) \geq 0$ for alle (x,y). Det er dog kun for $-\alpha<x<\alpha$ at h_α er forskellig fra 0. På den c'te kasse vil vi nu kunne tilføje en pulsfunktion $\pm h_\alpha(x,y)$, hvor α vælges således at $0<(1/8)c$. I de tilfælde hvor $m \in A$, vil den m'te kasse tilføjes $h_\alpha(x,y)$ og i de tilfælde hvor $m \in B$ vil til den m'te kasse nu være tilføjet $-h_\alpha(x,y)$. Hvis $m \notin A \cup B$ vil vores funktion F på den m'te kasse blot være Fc .
Følgende lemma viser nu hvorledes løsningskurven opfører sig på en vilkårlig kasse Fc med puls.

Lemma: Betragt differentialligningen

$$\varphi'(x) = Fc(x,\varphi(x)) + h_\alpha(x,y).$$

Lad $\varphi(x)$ være en løsningskurve, der kommer ind i kassen i venstre side således, at $-(99/100)c^2 < \varphi(-c) < (99/100)c^2$, da forlader kurven $\varphi(x)$ kassen i højre side således, at $c^2 \geq \varphi(x) > 99/100c^2$.

Bevis: Lad os følgeløsningskurven fra $x=-c$ til $x=c$. Vi vil først vise at løsningskurven kommer indenfor samleren, mere præcist;

$$-0,999\ (0,998c)^2 \leq \varphi(x) < 0,999 \cdot (0,998c)^2,\quad x=-0,998c.$$

Vi bemærker først, at på de yderste to bræmmer er pulsfunktionerne lig 0, dvs. vi skal her kun vurdere på Fc. $Fc(x,y)=0.$, for $-c<x<0,999c$. Middelværdisætningen giver, at der til enhver x, hvor $-0,999c<x<-0,998c$ findes x_0 så;

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(-0,999c)}{1/1000c} = \varphi'(x_0) = F_c(x_0, \varphi(x_0)).$$

Da $Fc(x,y)<2c$ får vi;

$$\varphi(x) - \varphi(-0,999c) \leq (2/1000)c^2.$$

Det vil altså sige, at løsnings kurven over de yderste bræmmer højst ændre sig $(2/1000)c^2$.
Vi har ifølge præmisserne i lemmaet at;

$$-(99/100)c^2 \leq \varphi(-c) \leq (99/100)c^2.$$

Over de yderste bræmmer forandrer $\varphi(x)$ sig højest med $(2/1000)c$ herfra, dvs. for $-c<x<-0,998c$ er;

$$-(99/1000 + 2/1000)c^2 \leq \varphi(x) \leq (99/100 + 2/1000)c^2.$$

Dvs. da $(99/100 + 2/1000) < (0,999)(0,998)$, har vi så, at $\varphi(x)$ holder sig indenfor de to inderste parabelgrene;

$$-0{,}999(0{,}998)c^2 < \varphi(-0{,}998c) < 0{,}999(0{,}998)c^2 .$$

Hvad sker der videre med $\varphi(x)$? For at få svar på dette spørgsmål, lad os se på differentialligningen uden puls. Inden for samleren, altså for mellem de to inderste parabelgrene ser differentialligningen ud som følger;

$$y'(x) = Fc(x,y) = 2y/x, \text{ hvor } y < 0{,}999x .$$

Løsningen til denne er af formen $y(x)=Cx^2$, hvor $|C| < 0{,}999$. Alle disse løsninger går gennem knudepunktet (0,0). Vi vil vise, at pulsen h (x,y) tilføjet til Fc(x,y) betyder at løsningskurverne tvinges væk fra (0,0). Lad os se på differentialligningen;

$$\varphi'(x)=Fc(x,\varphi(x)) + h_\alpha(x,y).$$

Vi vil nu vise at løsningskurven $\varphi(x)$ presses opad således at $\varphi(0) > 0$, vi forlod løsningskurven $\varphi(x)$ på dens vandring gennem kassen ved x=-o,998c. Her er pulsfunktionen ikke begyndt at virke endnu så $\varphi(-0{,}998c) = y(-0{,}998c)$ (For $-c \leq x < 0$ opfylder de to ovennævnte differentialligninger klart en Lipchitz betingelse, så der bliver her ingen problemer vedrørende løsninger). Da $h_\alpha(x,y) \geq 0$ får vi nu, at $\varphi(x)-y(x) > 0$ for $-0{,}998 < x < 0$, idet

$$\varphi(x)-y(x) = \int_{-0{,}998c}^{x} h_\alpha(t,y)\, dt.$$

Dette giver at;

$\varphi(x) \geq y(x) \geq -0{,}999x^2$ og dermed $\varphi(x) > -x^2$ for $x<0$.

På den anden side har vi;

$$Fc(x,y) \to 0 \text{ for } x \to 0, \text{ idet } Fc(x,y) < 2x$$

(For $Fc(x,y)= 2y/x$, har vi, $2y/x < 2x^2/x= 2x$). Samtidig har vi $h_\alpha(x,y) \to \alpha$ for $x \to 0$. Sammenholdt med ovenstående kan vi finde δ så for $-\delta < x < \delta$ og $|y| \leq c^2$ er

$$h_\alpha(x,y) > (1/2)\alpha \text{ og } |Fc(x,y)| < (1/4)\alpha \qquad (*)$$

På grund af senere vurderinger lad os vælge $0 < \delta < (1/4)\alpha$. For $-\delta \leq x \leq 0$ har vi ifølgende (*);

$$\varphi'(x) = Fc(x,y)+h_\alpha(x,y) > (1/4)\alpha \qquad (**)$$

Middelværdisætningen giver nu, at der findes $x_0 \in]-\delta;0[$ så;

$$\varphi'(x_0) = \frac{\varphi(0)-\varphi(-\delta)}{\delta}$$

Af (**) får vi så;

$$\frac{\varphi(0)-\varphi(-\delta)}{\delta} > (1/4)\alpha \quad \text{og dermed } \varphi(0) > \varphi(-\delta)+(1/4)\alpha\delta . \qquad (***)$$

Vi viste ovenfor, at for $x<0$ er $\varphi(x)>-x^2$. Dette giver $\varphi(-\delta) > -\delta^2$. Vi får så følgende vurdering på (***);

$$\varphi(0)> (1/4)\delta\alpha-\delta^2 = ((1/4)\alpha-\delta)\delta.$$

Da $(1/4)\alpha > \delta$ har vi nu at $\varphi(0)> 0$.

Vi har nu set, at den positive puls betyder, at løsningen $\varphi(x)$ ikke går gennem (0,0), men derimod tvinges opad således, at $\varphi(0)$ er i det område af kassen, hvor $Fc(x,y)=2x$. Her ser differentialligningen ud som følger;

$$\varphi'(x) = 2x+ h_\alpha(x ,\varphi(x)).$$

Da $h_\alpha(x,y)\geq 0$ har vi $\varphi'(x)\geq 2x$ og dermed $\varphi(x)\geq x^2$. Når nu løsningskurven møder den højre interpolations bræmme (for $x=0,998c$), har vi så, at $\varphi(0,998c)\geq (0,998c)^2$. Som før når løsningskurven vandrer over de yderste bræmmer ændres den højst med $(2/1000)c^2$, altså forlader $\varphi(x)$ kassen således;

$$\varphi(c)\geq (0,998^2-0,002)c^2> 0,99c^2.$$

Vi skal her tilsidst sikre os, at pulsfunktionen ikke overspiller sin rolle og sender løsningskurven ud over kassens top. Vi skal vise, at løsningskurven $\varphi(x)$ bliver indenfor det område, hvor $Fc(x,y)=2x$, selv om der er puls på.

Vi Husker at pulsfunktionen h_α er defineret for $-\alpha<x<\alpha$, hvor vi valgte $0<\alpha\leq(1/8)c$. Vi har før vist at $|F(x,y)|< 2c$. Samtidig har vi, at $h_\alpha(x,y)\leq \alpha\leq(1/8)c$. Dette giver at;

$$|F(x,y)+ h_\alpha(x,y)|\leq 3c.$$

Af middelværdisætningen får vi nu at der for enhver $x\in\ ]-\alpha;\alpha[$ findes x_0 så;

$$\varphi'(x_0) = \frac{\varphi(x) - \varphi(-\alpha)}{x+\alpha} \qquad ,\text{dvs.}$$

$$\varphi(x)- \varphi(-\alpha)= \varphi'(x_0)(x+\alpha)\leq 3c\cdot 2\alpha\leq 3c\cdot 2(1/8)c = (3/4)c^2.$$

$\varphi(x)$ ændres altså højst $(3/4)c^2$ fra $\varphi(-\alpha)$. $\varphi(-(1/8)c)$ ligger mellem de to parabelgrene med ligninger $|y|= 0,999x^2$, dvs. $\varphi(-\frac{1}{8}c)$ højst er $(1/64)c$. Dermed er;

$$\varphi((1/8)c)\leq ((3/4)+(1/64))c^2< 0,998c^2.$$

Vi ser altså at løsningskurven løber uden om (0,0) ind i den omegn af kassen, hvor $Fc(x,y) =2x$. Her bliver den så indtil den møder den højre interpolations bræmme □

Det er klart, at vi kan formulere et lemma helt tilsvarende for de tilfælde, hvor der er en negativ puls. Her vil løsningskurven blot forlade den nederst hundrededel af højresiden i kassen.

Lad os nu konstruere den ønskede funktion. Denne skal, som vi har skitseret ovenfor, være stykket sammen af en følge af kasser samt pulse på nogle af disse. Lad os kalde slutfunktionen uden puls for $F^*(x,y)$.
Lad c_m betegne den halve længde i den m'te kasse, altså $c_m = c(m)$, $m = 0,1,2...$
Lad v_m betegne knudepunktets x-koordinat i den m'te kasse, altså $v_m = v(m)$, $m = 0,1,2,...$
Vi sætter nu $c_m = 2^{-m-2}$ og $v_m = 2^{-m-1} + 2^{-m-2}$.

Hermed bliver $F^*(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} Fc_m(x-v_m,y)$.

Hver af funtionerne Fc_m er beregnelig. Vi har;

$$\left|\sum_{m=0}^{n+1} Fc_m - \sum_{m=0}^{n} Fc_m\right| = |Fc_{n+1}| < 2c_{n+1} < 2^n.$$

Ifølge punkt (B) i introduktionen er F^* da beregnelig. Nu skal pulsene tilføjes. Lad a og b være recursive funktioner, der frembringer hhv. A og B, dvs. $A = \{m: \exists n\ a(n)=m\}$ og $B=\{l: \exists n\ b(n)=l\}$. Hvis $a(n) = m$ så sætte positiv puls på den m'te kasse, dvs. vi føjer funktionen $h_\alpha(x-v_m,y)$ med højde $\alpha(n) = 2^{-(m+n+5)}$ til $F^*(x,y)$. Hvis $b(n)=l$ så sættes negativ puls på den l'te kasse. Her tilføjes funktionen $h_{\beta(n)}(x-v_l,y)$ med $\beta(n)=2^{-(l+n+5)}$ til $F^*(x,y)$. Hermed får vi funktionen F frem;

$$F(x,y) = F^*(x,y) + \sum_{n=0}^{\infty} h_{\alpha(n)}(x-v_{a(n)},y) - \sum_{n=0}^{\infty} h_{\beta(n)}(x-v_{b(n)},y).$$

Hver af funktionerne h_α er beregnelig og da;

$$\left|\sum_{n=0}^{p+1} h_{\alpha(n)} - \sum_{n=0}^{p} h_{\alpha(n)}\right| = |h_{\alpha(p+1)}| < 2^{-(p+1)} \text{ er;}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} h_{\alpha(n)}(x-v_{a(n)},y)$ beregnelig.

På samme vis bliver summen af de negative pulsfunktioner beregnelig, og dermed bliver $F(x,y)$ beregnelig. Vi mangler nu at vise, at løsningskurven $\varphi(x)$ ikke er beregnelig.

Antag at $\varphi(x)$ er beregnelig. Vi vil nu vise, at vi kan finde en recursiv mængde C, der separerer A og B. Dermed vil vi få en modstrid, da A og B er valgt som værende recursivt inseperable.

Vi ser først på de recursivt nummerable følger v_m og c_m. Disse giver anledning til en recursivt nummerable følge (x_m);

$$x_m = v_m + c_m = 2^{-m-1} + 2^{-m-2} + 2^{-m-2} = 2^{-m}.$$

x_m bliver altså x-koordinaten til den højre side i den m'te kasse. For $\varphi(x)$ beregnelig har vi ifølge punkt (A) ovenfor at følgen $y_m = \varphi(x_m)$ er recursivt nummerabel. Vi kan således til følgen y_m finde en beregnelig følge af rationale tal r_m så;

$$|y_m - r_m| < c_m^2/100 = (2^{-m-2})^2/100 = 4^{-m-2}/100.$$

Lad os nu dfinere mængden C som følger;

$$m \in C \text{ netop hvis } r_m > 0.$$

Tag vilkårligt m. Her er det nemt at vise, om $r_m > 0$ eller ej. C bliver altså klart recursiv. Vi vil nu vise at $A \subset C$ og $B \subseteq \bar{C}$. Hvis $m \in A$, er der en positiv puls i den m'te kasse. Forholdet mellem c_{m+1} og c_m er som 1:2, dvs. forholdet mellem siden i den (m+1)'te kasse og siden i den m'te kasse er som 1:4. Når løsningskurven så forlader højre side i den m+1'te kasse så træder den ind i den m'te kasse på den midderste fjerdedel. Præmisserne i lemmaet er klart opfyldt, og denne giver så, at løsningskurven forlader den m'te kasse i den øverste 1/100 af højre side, eller mere præcist;

$$y_m = \varphi(x_m) > (99/100)c_m^2.$$

Nu er $|y_m - r_m| < c_m^2/100$, dvs. $r_m > 98/100c_m^2 > 0$ dermed har vi at $m \in C$.

Analog betragtninger giver så, at $1 \in B \Rightarrow 1 \in \bar{C}$, og dermed har vi opnået den ønskede modstrid, da dette betyder at A og B er recursivt seperable $\square$

KONKLUSION

Vi har i det historiske kapitel undersøgt, hvorledes Frege, Hilbert og Brouwer har behandlet dele af matematikkens filosofi. Vi har specielt interesseret os for deres bud på, hvorledes man kan give matematikken et filosofisk fundament. Hos Frege tages der filosofisk udgangspunkt i det, han kaldte logik, men som også indbefatter det vi kalder sprogfilosofi. Med dette udgangspunkt forsøgte han at vise, at matematik kunne reduceres til logik. Dette program -det logicistiske- stødte imidlertid på en række forhindringer først og fremmest i form af de inkonsistenser, der opstod i den cantorske mængdelære. Vi må dog fastholde, at Freges filosofiske udgangspunkt var sundt et langt stykke hen ad vejen. Man kan være uenig med Frege på en lang række punkter f.eks. mht. den realisme, der går igen i hans filosofi på forskellige niveauer. På trods af sådanne eventuelle uenigheder må man dog sige, at Frege giver fornuftige bud på en lang række filosofiske spørgsmål - så gode bud at Freges sprogfilosofi idag stadig er til debat.

Som vi har set det i Hilbert afsnittet, søgte også han at give den klassiske matematik et sundt fundament, og han havde i denne forbindelse gode svar på en række fundamentale filosofiske problemer. Spørgsmålet, om det er berettiget at indføre ideelle elementer, samt spørgsmålet, om den transfinitte matematik repræsenterer en konservativ udvidelse i forhold til den finitte, afhang dog stærkt af et absolute konsistensbevis. Med Gödels ufuldstændighedssætninger bliver svaret til disse overvejende filosofiske spørgsmål negativ, men hvad mere væsentligt er for en matematikker som Hilbert; De tilintetgører det formalistiske program i den oprindelige formulering. Vi kan altså konkludere, at såvel Frege som Hilbert fremkom med seriøse bud på, hvorledes en filosofi der skulle danne udgangspunkt for en fundering af den klassiske matematik, skulle tage sig ud. Uheldigvis løb begge deres konkrete forsøg på at gennemføre denne fundereing -det logicistiske- og det formalistiske program - ind i uovervindelige problemer.

Med Brouwer forholdt det sig nogenlunde omvendt. Hans program, der bestod i at praktisere konstruktiv matematik i intuitionistisk forstand, dvs. konstruere matematiske objekter og evt. gengive, hvad det er man har konstrueret, løb ikke ind i de samme tilintetgørende problemer som Frege og Hilbert. Brouwer havde til gengæld andre problemer at slås med. Med det ærkeintuitionistiske synspunkt, at intuitionistis matematik ikke blot er en blandt flere måder at praktisere matematik på, men er den eneste saliggørende, er det iøjenfaldende, at Brouwer har en filosofisk begrundelse for dette synspunkt, der mildest talt er ufuldstændig. Hvis man som traditionel intuitionist ikke vil følge Brouwer i hans syn på den mystiske intuition, der

skal skaffe os adgang til den matematiske sandhed som en anden yogi, der møder den store upersonlige verdens ånd Brahman, må man på temmelig dogmatisk vis vis forfægte det synspunkt, at matematiske entiteter er mentale konstruktioner. Dette er et noget spinkelt grundlag at forkast bl.a. den abstrakte funtionalanalyse, den generelle topologi, samt store dele af den reelle- og den komplekse analyse på.

Skal man med andre ord som intuitionist argumentere for det synspunkt, at intuitionistisk matematik er den eneste legitime form for matematik, må der først og fremmest langt flere filosofiske boller på suppen. Man kan sige, at dette kommer der med Dummet. Via en syntese af Freges sprogfilosofiske tilgang til filosofien samt Wittgensteins overvejelser omkring sproget som offentlig størrelse, får vi en sober behandling af en række filosofiske spørgsmål. Hermed får vi som hos Frege og Hilbert et sundt filosofisk fundament, hvoromkring vi kan bygge et program, der skal fører os fra de generelle filosofiske overvejelser frem til hvordan vi konkret får matematikken -i dette tilfælde intuitionistisk matematik- indpasset i den filosofiske ramme. Hos Dummett går programmet i retning af at angive, hvorledes vi med et meningsteoretisk grundlag kan begrunde den intuitioniske logik samt centrale intuitionistiske principper.

I afsnittet om de logiske konnektivers intuitionistiske mening så vi, hvorledes Dummetts program blev effektueret. I afsnittet om intuitionistisk aritmetik så vi bla. på, hvorledes vi videre kunne placere en meget lille portion matematik indenfor en dummettiansk ramme.

Indtil nu har vi sandsynliggjort, at det vi har kaldt den første intuitionistiske tese holder et langt stykke hen ad vejen i Dummetts regi. Netop i spørgsmålet om intuitionismen er en koherent filosofi, var Brouwer på glatis. Vi kan sige at vi med Dummett har et forsøg på at rehabilitere intuitionismen filosofisk. For at kunne sige, at dette forsøg er lykkedes, må vi kunne godtgøre, at den intuitionistiske matematik falder idenfor Dummetts filosofiske rammer. Med andre ord; "Repræsenterer den intuitionistiske matematik en anseelig portion teori?" og hvis svaret til dette spørgsmål er bekræftigende; "Kan denne portion matematik funderes på samme vis som den intuitionistiske logik og -aritmetik?".

I det andet afsnit af kapitel III gik vi ind på livet af disse spørgsmål. Først så vi nogle eksempler på, at intuitionistisk matematik er mere end blot en konstruktiv del af den klassiske matematik -retfærdiggørelsen af det videre program begynder lovende.

I vores meta-overvejelser skilte vi så nogle principper ud, der er nødvendige, hvis intuitionismen skal praktiseres i

fuld flor. Disse principper bar-induktion og kontinuitetsprincipperne danner sammen med en konstruktiv kerne således grundlaget for den intuitionistiske analyse. Problemet er blot, at bar-induktion (eller hvad der er næsten ækvivalent; Königs lemma) og kontinuitetsprincipperne ikke kan begrundes meningsteoretisk.

Ser vi eksempelvis på kontinuitetsprincippet $CP_{\exists n}$, så kan dette ifølge Troelstra udskilles i et svagt udvalgsaksiom $A_{\alpha,n}$ og skemaet for åben data SOD. $A_{\alpha,n}$ kan begrundes meningsteoretisk, men $CP_{\exists n}$ er netop stærkere end som så.

Hvis vi for et øjeblik glemmer de begrundelse problemer, vi har med bar-induktion og kontinuitetsprincipperne, kan vi godt imødekomme de skeptikkere, der tror, at intuitionistisk matematik er en tynd kop te -ihvertilfælde hvad analysen angår. Der kan faktisk praktiseres en del matematik indenfor en ramme, der hedder;

basal konstruktivisme +
kontinuitetsprincipperne +
bar-induktion.

Denne portin matematik kan dog ikke begrundes udfra det udgangspunkt, der er langt op til med Dummett. Vil man med Dummett have sit filosofiske fundament i orden, må man som intuitionist undvære bar-induktion og kontinuitetsprincipperne. Dette har imidlertid katastrofale følger, som eksemplet i kapitel IV viser; Begrænser man sig i den intuitionistiske analyse til et eller andet basalt konstruktivt system (hos Simpon RCA_0), må man undvære en stærk sætning som Cauchy/Peanos' sætning om løsninger til sædvanlig første ordens differentialligninger (Der er her andre sætninger, man kunne trække frem; eksempelvis har vi antydet, at også Borels overdækningssætning må undværes).

Vi ser altså, at det netop er ved bar-induktion og kontinuitetsprincipperne, at Dummetts program bryder sammen. Hvis disse principper skal med i den intuitionistiske analyse, så er de kun med fordi, de giver os adgang til substantielle dele af den intuitionistiske analyse -dele som man måtte undvære, hvis man var uden disse principper.

Med Brouwer har Dummett som før nævnt det synspunkt, at intuitionistisk matematik repræsentere den eneste form for legitim matematik. Et så skarpt synspunkt kræver et virkelig godt bagland bla. må de to intuitionistiske teser holde et langt stykke hen ad vejen. Vi konkluderede imidlertid, at Dummetts meningsteoretiske forsøg på at retfærdiggøre den første tese mødte problemer , når vi bevæger os over i den del af analysen, der gør brug af kontinuitetsprincipperne og bar-induktion. Indtil disse principper også bliver indlæmmet i Dummetts eller et lignede program -må intuitionisten nøjes med et mere beskedent krav end det, hvor al matematik kræves placeret indenfor en intuitionistisk ramme.

Selvom det er muligt at finde en sådan tilfredsstillende fremstilling, er det selvfølgelig stadig et åbent spørgsmål, om man matematisk skal vælge side til fordel for intuitionisten. Dette ville kræve, at man kunne argumentere for at den anden intuitionistiske tese holder, og sidst men ikke mindst at matematikkeren er parat til at lade en filosofisk argumentation noget at skulle have sagt.

Nu mener jeg ikke, at intuitionisten skal hænge med hovedet fordi, det ikke lykkedes i denne omgang at forankre hans matematik filosofisk. Selv om intuitionismen ikke kan gives en sikker fundering , så er det fra et erkendelsesteoretisk synspunkt da mest tilfredsstillende at arbejde med færrest mulige antagelser indenfor et bestemt matematisk problemfelt. At undersøge, hvorledes vores matematiske erkendelse hænger sammen, og at udforske, hvornår vi matematisk kommer på gyngende grund, er dog langt fra kun et filosofisk spørgsmål. Heri ligger der altså også en matematisk udfordring.

LITTERATURLISTE

Aberth, O., Computable Analysis, 1980.

Beeson, M., "Problematic principles in construktive mathematics" Logic Colloquium '80 (1982) p.11-56.

Brouwer, L.E.J., Collected Works, Amsterdam 1975.

Burgess, J.P., "Dummett's Case for Intuitionism" History and Philosophy of Logic no.5 (1984) p.177-194.

Bell, J. og Machover, M., A Course in Mathemtical Logic, 1977.

Beth, E.W., The foundations of mathematis, 1959.

Benacerraf, P. og Putnam, H. (red.), Philosophy of Mathematics, 1983.

Dauben, J.W., Georg Cantor, Harvard 1979.

Davis, P.J. og Hersh, R., The Mathematical Experience, Boston 1980.

Drake, F.R., "How Recent Work in Mathematical Logic Relates to the Foundations of Mathematics" The Mathematical Intelligencer vol.7. no.4 (1985) p. 27-35

Dummett, M., FREGE Philosophy of Language, London 1973.

Dummett, M., Elements of Intuitionism, Oxford 1978.

Dummett, M., Truth and other Enigmas, London 1978 (b).

Dummett, M., The Interpretation of Frege's Philosophy, London 1981.

Enderton, H.,B., A Mathematical Introduction to Logic, New York 1972.

Fraenkel, A.A., Bar-Hillel,Y. og Levy, A., Foundations of Set Theory, 1973.

Frege G., Die Grundlagen der Arithmetik, Breslau 1884.

Heijenoort, van J., From Freege to Gödel, Harvard 1967

Heyting, A., Intuitionism An Introduction, Amsterdam 1956.

Hilbert, D., Grundlagen der Geometri, VII udgave, Leibzig

193o.

Kleene, S.C., Introduction to Metamathematics, 1952.

Körner, S., The Philosophy of Mathematics, London 1971.

Kragh, H. og Pedersen, S.A., Naturvidenskabsteori, 1981.

Lübcke, P. (red.), Vor tids filosofi, København 1982.

Mac Lane, S., "Mathematical Models: Asketch for the Philosophy of Mathematic" American Mathematic Monthly (1981) p. 462-472.

Matematik 1y, Forelæsningsnoter, København 1968-69.

Pedersen, S.A., "Kan matematiske og fysiske teorier tolkes realistisk?" Nyere dansk filosofi (1984) p.1-19.

Pour-El, M.B. og Rechards, I., "A Computable Ordinary Differential Equation which Possesses no Computable Solution" Annals of Mathematical Logic 17 (1979) p.61-90.

Prawitz, D., "Meaning and Proofs: On the Conflict between Classical and Intuitionistic Logic" Theoria (1977) p.2-40.

Sieg, W., "Foundations for Analysis and Proof Theory" Synthese 60 (1984) p.159-200.

Simpson, S.G., "Which Zet Existence Axioms are Needed to Prove the Cauchy/Peano Theorem for Ordinary Differential Equations?" The Journal of Symbolic Logic vol.49 no.3 (1984) p.783-802.

Smorynski, C., "The Incompleteness Theorems" Handbook of Mathematical Logic (1977) p. 821-865.

Sundholm,G.,"Constructions, Proofs and the Meaning of Logical Constants" Journal of Philosophical Logic 12 (1983) p.151-172.

Troelstra, A.S., Principles of Intuitionism, Heidelberg 1969.

Troelstra, A.S., Metamathematical Investigation of Intuitionistic Arithmetic and Analysis, Heidelberg 1973.

Troelstra, A.S., Choice Sequences, Oxford 1977.

Wilder, R.L., Intruduction to the Foundations of Mathematics, 1958.

1/78 "TANKER OM EN PRAKSIS" - et matematikprojekt. Projektrapport af: Anne Jensen, Lena Lindenskov, Marianne Kesselhahn og Nicolai Lomholt. Vejleder: Anders Madsen

2/78 "OPTIMERING" - Menneskets forøgede beherskelsesmuligheder af natur og samfund. Projektrapport af: Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen, Gert Krenøe og Peter H. Lassen Vejleder: Bernhelm Boss.

3/78 "OPGAVESAMLING", breddekursus i fysik. Af: Lasse Rasmussen, Aage Bonde Kræmmer og Jens Højgaard Jensen.

4/78 "TRE ESSAYS" - om matematikundervisning, matematiklæreruddannelsen og videnskabsrindalismen. Af: Mogens Niss Nr. 4 er p.t. udgået.

5/78 "BIBLIOGRAFISK VEJLEDNING til studiet af DEN MODERNE FYSIKS HISTORIE". Af: Helge Kragh. Nr. 5 er p.t. udgået.

6/78 "NOGLE ARTIKLER OG DEBATINDLÆG OM - lærer-uddannelse og undervisning i fysik, og - de naturvidenskabelige fags situation efter studenteroprøret". Af: Karin Beyer, Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen.

7/78 "MATEMATIKKENS FORHOLD TIL SAMFUNDSØKONOMIEN". Af: B.V. Gnedenko. Nr. 7 er udgået.

8/78 "DYNAMIK OG DIAGRAMMER". Introduktion til energy-bond-graph formalismen. Af: Peder Voetmann Christiansen.

9/78 "OM PRAKSIS' INDFLYDELSE PÅ MATEMATIKKENS UDVIKLING". - Motiver til Kepler's: "Nova Stereometria Doliorum Vinariom". Projektrapport af: Lasse Rasmussen. Vejleder: Anders Madsen.

10/79 "TERMODYNAMIK I GYMNASIET". Projektrapport af: Jan Christensen og Jeanne Mortensen. Vejledere: Karin Beyer og Peder Voetmann Christiansen.

11/79 "STATISTISKE MATERIALER". Af: Jørgen Larsen.

12/79 "LINEÆRE DIFFERENTIALLIGNINGER OG DIFFERENTIALLIGNINGSSYSTEMER". Af: Mogens Brun Heefelt. Nr. 12 er udgået.

13/79 "CAVENDISH'S FORSØG I GYMNASIET". Projektrapport af: Gert Kreinøe. Vejleder: Albert Chr. Paulsen.

14/79 "BOOKS ABOUT MATHEMATICS: History, Philosophy, Education, Models, System Theory, and Works of". Af: Else Høyrup. Nr. 14 er p.t. udgået.

15/79 "STRUKTUREL STABILITET OG KATASTROFER i systemer i og udenfor termodynamisk ligevægt". Specialeopgave af: Leif S. Striegler. Vejleder: Peder Voetmann Ckristiansen.

16/79 "STATISTIK I KRÆFTFORSKNINGEN". Projektrapport af: Michael Olsen og Jørn Jensen. Vejleder: Jørgen Larsen.

17/79 "AT SPØRGE OG AT SVARE i fysikundervisningen". Af: Albert Christian Paulsen.

18/79 "MATHEMATICS AND THE REAL WORLD", Proceedings af an International Workshop, Roskilde University Centre, Denmark, 1978. Preprint. Af: Bernhelm Booss og Mogens Niss (eds.)

19/79 "GEOMETRI, SKOLE OG VIRKELIGHED". Projektrapport af: Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen og Per H.H. Larsen. Vejleder: Mogens Niss.

20/79 "STATISTISKE MODELLER TIL BESTEMMELSE AF SIKRE DOSER FOR CARCINOGENE STOFFER". Projektrapport af: Michael Olsen og Jørn Jensen. Vejleder: Jørgen Larsen

21/79 "KONTROL I GYMNASIET-FORMÅL OG KONSEKVENSER". Projektrapport af: Crilles Bacher, Per S.Jensen, Preben Jensen og Torben Nysteen.

22/79 "SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (1)". 1-port lineært response og støj i fysikken. Af: Peder Voetmann Christiansen.

23/79 "ON THE HISTORY AF EARLY WAVE MECHANICS - with special emphasis on the role af realitivity". Af: Helge Kragh.

24/80 a+b "MATEMATIKOPFATTELSER HOS 2.G'ERE". 1. En analyse. 2. Interviewmateriale. Projektrapport af: Jan Christensen og Knud Lindhardt Rasmussen. Vejleder: Mogens Niss.

25/80 "EKSAMENSOPGAVER", Dybdemodulet/fysik 1974-79.

26/80 "OM MATEMATISKE MODELLER". En projektrapport og to artikler. Af: Jens Højgaard Jensen m.fl.

27/80 "METHODOLOGY AND PHILOSOPHY AF SCIENCE IN PAUL DIRAC's PHYSICS". Af: Helge Kragh.

28/80 "DIELEKTRISK RELAXATION - et forslag til en ny model bygget på væskernes viscoelastiske egenskaber". Projektrapport af: Gert Kreinøe. Vejleder: Niels Boye Olsen.

29/80 "ODIN - undervisningsmateriale til et kursus i differentialligningsmodeller". Projektrapport af: Tommy R. Andersen, Per H.H. Larsen og Peter H. Lassen. Vejleder: Mogens Brun Heefelt.

30/80 "FUSIONSENERGIEN - - - ATOMSAMFUNDETS ENDESTATION". Af: Oluf Danielsen. Nr. 30 er udgået.

31/80 "VIDENSKABSTEORETISKE PROBLEMER VED UNDERVISNINGSSYSTEMER BASERET PÅ MÆNGDELÆRE". Projektrapport af: Troels Lange og Jørgen Karrebæk. Vejleder: Stig Andur Pedersen. Nr. 31 er p.t. udgået.

32/80 "POLYMERE STOFFERS VISCOELASTISKE EGENSKABER - BELYST VED HJÆLP AF MEKANISKE IMPEDANSMÅLINGER". Projektrapport af: Crilles Bacher og Preben Jensen. Vejledere: Niels Boye Olsen og Peder Voetmann Christiansen.

33/80 "KONSTITUERING AF FAG INDEN FOR TEKNISK - NATURVIDENSKABELIGE UDDANNELSER. I-II". Af: Arne Jakobsen.

34/80 "ENVIRONMENTAL IMPACT AF WIND ENERGY UTILIZATION". ENERGY SERIES NO. I. Af: Bent Sørensen Nr. 34 er udgået.

35/80 "HISTORISKE STUDIER I DEN NYERE ATOMFYSIKS UDVIKLING".
Af: Helge Kragh.

36/80 "HVAD ER MENINGEN MED MATEMATIKUNDERVISNINGEN?".
Fire artikler.
Af: Mogens Niss.

37/80 "RENEWABLE ENERGY AND ENERGY STORAGE".
ENERGY SERIES NO. 2.
Af: Bent Sørensen.

38/81 "TIL EN HISTORIETEORI OM NATURERKENDELSE, TEKNOLOGI OG SAMFUND".
Projektrapport af: Erik Gade, Hans Hedal, Henrik Lau og Finn Physant.
Vejledere: Stig Andur Pedersen, Helge Kragh og Ib Thiersen.
Nr. 38 er p.t. udgået.

39/81 "TIL KRITIKKEN AF VÆKSTØKONOMIEN".
Af: Jens Højgaard Jensen.

40/81 "TELEKOMMUNIKATION I DANMARK - oplæg til en teknologivurdering".
Projektrapport af: Arne Jørgensen, Bruno Petersen og Jan Vedde.
Vejleder: Per Nørgaard.

41/81 "PLANNING AND POLICY CONSIDERATIONS RELATED TO THE INTRODUCTION OF RENEWABLE ENERGY SOURCES INTO ENERGY SUPPLY SYSTEMS".
ENERGY SERIES NO. 3.
Af: Bent Sørensen.

42/81 "VIDENSKAB TEORI SAMFUND - En introduktion til materialistiske videnskabsopfattelser".
Af: Helge Kragh og Stig Andur Pedersen.

43/81 1."COMPARATIVE RISK ASSESSMENT OF TOTAL ENERGY SYSTEMS".
2."ADVANTAGES AND DISADVANTAGES OF DECENTRALIZATION".
ENERGY SERIES NO. 4.
Af: Bent Sørensen.

44/81 "HISTORISKE UNDERSØGELSER AF DE EKSPERIMENTELLE FORUDSÆTNINGER FOR RUTHERFORDS ATOMMODEL".
Projektrapport af: Niels Thor Nielsen.
Vejleder: Bent C. Jørgensen.

45/82 Er aldrig udkommet.

46/82 "EKSEMPLARISK UNDERVISNING OG FYSISK ERKENDESE-
1+11 ILLUSTRERET VED TO EKSEMPLER".
Projektrapport af: Torben O.Olsen, Lasse Rasmussen og Niels Dreyer Sørensen.
Vejleder: Bent C. Jørgensen.

47/82 "BARSEBÄCK OG DET VÆRST OFFICIELT-TÆNKELIGE UHELD".
ENERGY SERIES NO. 5.
Af: Bent Sørensen.

48/82 "EN UNDERSØGELSE AF MATEMATIKUNDERVISNINGEN PÅ ADGANGSKURSUS TIL KØBENHAVNS TEKNIKUM".
Projektrapport af: Lis Eilertzen, Jørgen Karrebæk, Troels Lange, Preben Nørregaard, Lissi Pedesen, Laust Rishøj, Lill Røn og Isac Showiki.
Vejleder: Mogens Niss.

49/82 "ANALYSE AF MULTISPEKTRALE SATELLITBILLEDER".
Projektrapport af: Preben Nørregaard.
Vejledere: Jørgen Larsen og Rasmus Ole Rasmussen.

50/82 "HERSLEV - MULIGHEDER FOR VEDVARENDE ENERGI I EN LANDSBY".
ENERGY SERIES NO. 6.
Rapport af: Bent Christensen, Bent Hove Jensen, Dennis B. Møller, Bjarne Laursen, Bjarne Lillethorup og Jacob Mørch Pedersen.
Vejleder: Bent Sørensen.

51/82 "HVAD KAN DER GØRES FOR AT AFHJÆLPE PIGERS BLOKERING OVERFOR MATEMATIK ?"
Projektrapport af: Lis Eilertzen, Lissi Pedersen, Lill Røn og Susanne Stender.

52/82 "DESUSPENSION OF SPLITTING ELLIPTIC SYMBOLS".
Af: Bernhelm Booss og Krzysztof Wojciechowski.

53/82 "THE CONSTITUTION OF SUBJECTS IN ENGINEERING EDUCATION".
Af: Arne Jacobsen og Stig Andur Pedersen.

54/82 "FUTURES RESEARCH" - A Philosophical Analysis of Its Subject-Matter and Methods.
Af: Stig Andur Pedersen og Johannes Witt-Hansen.

55/82 "MATEMATISKE MODELLER" - Litteratur på Roskilde Universitetsbibliotek.
En biografi.
Af: Else Høyrup.

Vedr. tekst nr. 55/82 se også tekst nr. 62/83.

56/82 "EN - TO - MANGE" -
En undersøgelse af matematisk økologi.
Projektrapport af: Troels Lange.
Vejleder: Anders Madsen.

57/83 "ASPECT EKSPERIMENTET"-
Skjulte variable i kvantemekanikken?
Projektrapport af: Tom Juul Andersen.
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen.
Nr. 57 er udgået.

58/83 "MATEMATISKE VANDRINGER" - Modelbetragtninger over spredning af dyr mellem småbiotoper i agerlandet.
Projektrapport af: Per Hammershøj Jensen og Lene Vagn Rasmussen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

59/83 "THE METHODOLOGY OF ENERGY PLANNING".
ENERGY SERIES NO. 7.
Af: Bent Sørensen.

60/83 "MATEMATISK MODEKSPERTISE"- et eksempel.
Projektrapport af: Erik O. Gade, Jørgen Karrebæk og Preben Nørregaard.
Vejleder: Anders Madsen.

61/83 "FYSIKS IDEOLOGISKE FUNKTION, SOM ET EKSEMPEL PÅ EN NATURVIDENSKAB - HISTORISK SET".
Projektrapport af: Annette Post Nielsen.
Vejledere: Jens Høyrup, Jens Højgaard Jensen og Jørgen Vogelius.

62/83 "MATEMATISKE MODELLER" - Litteratur på Roskilde Universitetsbibliotek.
En biografi 2. rev. udgave.
Af: Else Høyrup.

63/83 "CREATING ENERGY FUTURES:A SHORT GUIDE TO ENERGY PLANNING".
ENERGY SERIES No. 8.
Af: David Crossley og Bent Sørensen.

64/83 "VON MATEMATIK UND KRIEG".
Af: Berhelm Booss og Jens Høyrup.

65/83 "ANVENDT MATEMATIK - TEORI ELLER PRAKSIS".
Projektrapport af: Per Hedegård Andersen, Kirsten Habekost, Carsten Holst-Jensen, Annelise von Moos, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
Vejledere: Bernhelm Booss og Klaus Grünbaum.

66/83 "MATEMATISKE MODELLER FOR PERIODISK SELEKTION I ESCHERICHIA COLI".
Projektrapport af: Hanne Lisbet Andersen, Ole Richard Jensen og Klavs Frisdahl.
Vejledere: Jørgen Larsen og Anders Hede Madsen.

67/83 "ELEPSOIDE METODEN - EN NY METODE TIL LINEÆR PROGRAMMERING?"
Projektrapport af: Lone Billmann og Lars Boye.
Vejleder: Mogens Brun Heefelt.

68/83 "STOKASTISKE MODELLER I POPULATIONSGENETIK" - til kritikken af teoriladede modeller.
Projektrapport af: Lise Odgård Gade, Susanne Hansen, Michael Hviid og Frank Mølgård Olsen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

69/83 "ELEVFORUDSÆTNINGER I FYSIK"
- en test i 1.g med kommentarer.
Af: Albert C. Paulsen.

70/83 "INDLÆRINGS - OG FORMIDLINGSPROBLEMER I MATEMATIK PÅ VOKSENUNDERVISNINGSNIVEAU".
Projektrapport af: Hanne Lisbet Andersen, Torben J. Andreasen, Svend Åge Houmann, Helle Glerup Jensen, Keld Fl. Nielsen, Lene Vagn Rasmussen.
Vejleder: Klaus Grünbaum og Anders Hede Madsen.

71/83 "PIGER OG FYSIK"
- et problem og en udfordring for skolen?
Af: Karin Beyer, Sussanne Blegaa, Birthe Olsen, Jette Reich og Mette Vedelsby.

72/83 "VERDEN IFØLGE PEIRCE" - to metafysiske essays, om og af C.S Peirce.
Af: Peder Voetmann Christiansen.

73/83 ""EN ENERGIANALYSE AF LANDBRUG"
- økologisk contra traditionelt.
ENERGY SERIES NO. 9
Specialeopgave i fysik af: Bent Hove Jensen.
Vejleder: Bent Sørensen.

74/84 "MINIATURISERING AF MIKROELEKTRONIK" - om videnskabeliggjort teknologi og nytten af at lære fysik.
Projektrapport af: Bodil Harder og Linda Szkotak Jensen.
Vejledere: Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen.

75/84 "MATEMATIKUNDERVISNINGEN I FREMTIDENS GYMNASIUM"
- Case: Lineær programmering.
Projektrapport af: Morten Blomhøj, Klavs Frisdahl og Frank Mølgaard Olsen.
Vejledere: Mogens Brun Heefelt og Jens Bjørneboe.

76/84 "KERNEKRAFT I DANMARK?" - Et høringssvar indkaldt af miljøministeriet, med kritik af miljøstyrelsens rapporter af 15. marts 1984.
ENERGY SERIES No. 10
Af: Niels Boye Olsen og Bent Sørensen.

77/84 "POLITISKE INDEKS - FUP ELLER FAKTA?"
Opinionsundersøgelser belyst ved statistiske modeller.
Projektrapport af: Svend Åge Houmann, Keld Nielsen og Susanne Stender.
Vejledere: Jørgen Larsen og Jens Bjørneboe.

78/84 "JÆVNSTRØMSLEDNINGSEVNE OG GITTERSTRUKTUT I AMORFT GERMANIUM".
Specialrapport af: Hans Hedal, Frank C. Ludvigsen og Finn C. Physant.
Vejleder: Niels Boye Olsen.

79/84 "MATEMATIK OG ALMENDANNELSE".
Projektrapport af: Henrik Coster, Mikael Wennerberg Johansen, Povl Kattler, Birgitte Lydholm og Morten Overgaard Nielsen.
Vejleder: Bernhelm Booss.

80/84 "KURSUSMATERIALE TIL MATEMATIK B".
Af: Mogens Brun Heefelt.

81/84 "FREKVENSAFHÆNGIG LEDNINGSEVNE I AMORFT GERMANIUM".
Specialerapport af: Jørgen Wind Petersen og Jan Christensen.
Vejleder: Niels Boye Olsen.

82/84 "MATEMATIK - OG FYSIKUNDERVISNINGEN I DET AUTOMATISEREDE SAMFUND".
Rapport fra et seminar afholdt i Hvidovre 25-27 april 1983.
Red.: Jens Højgaard Jensen, Bent C. Jørgensen og Mogens Niss.

83/84 "ON THE QUANTIFICATION OF SECURITY":
PEACE RESEARCH SERIES NO. 1
Af: Bent Sørensen
nr. 83 er p.t. udgået

84/84 "NOGLE ARTIKLER OM MATEMATIK, FYSIK OG ALMENDANNELSE".
Af: Jens Højgaard Jensen, Mogens Niss m. fl.

85/84 "CENTRIFUGALREGULATORER OG MATEMATIK".
Specialerapport af: Per Hedegård Andersen, Carsten Holst-Jensen, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
Vejleder: Stig Andur Pedersen.

86/84 "SECURITY IMPLICATIONS OF ALTERNATIVE DEFENSE OPTIONS FOR WESTERN EUROPE".
PEACE RESEARCH SERIES NO. 2
Af: Bent Sørensen.

87/84 "A SIMPLE MODEL OF AC HOPPING CONDUCTIVITY IN DISORDERED SOLIDS".
Af: Jeppe C. Dyre.

88/84 "RISE, FALL AND RESURRECTION OF INFINITESIMALS".
Af: Detlef Laugwitz.

89/84 "FJERNVARMEOPTIMERING".
Af: Bjarne Lillethorup og Jacob Mørch Pedersen.

90/84 "ENERGI I 1.G - EN TEORI FOR TILRETTELÆGGELSE".
Af: Albert Chr. Paulsen.

91/85 "KVANTETEORI FOR GYMNASIET".
1. Lærervejledning
Projektrapport af: Biger Lundgren, Henning Sten Hansen og John Johansson.
Vejleder: Torsten Meyer.

92/85 "KVANTETEORI FOR GYMNASIET".
2. Materiale
Projektrapport af: Biger Lundgren, Henning Sten Hansen og John Johansson.
Vejleder: Torsten Meyer.

93/85 "THE SEMIOTICS OF QUANTUM - NON - LOCALITY".
Af: Peder Voetmann Christiansen.

94/85 "TREENIGHEDEN BOURBAKI - generalen, matematikeren og ånden".
Projektrapport af: Morten Blomhøj, Klavs Frisdahl og Frank M. Olsen.
Vejleder: Mogens Niss.

95/85 "AN ALTERNATIV DEFENSE PLAN FOR WESTERN EUROPE".
PEACE RESEARCH SERIES NO. 3
Af: Bent Sørensen

96/85 "ASPEKTER VED KRAFTVARMEFORSYNING".
Af: Bjarne Lilletorup.
Vejleder: Bent Sørensen.

97/85 "ON THE PHYSICS OF A.C. HOPPING CONDUCTIVITY".
Af: Jeppe C. Dyre.

98/85 "VALGMULIGHEDER I INFORMATIONSALDEREN".
Af: Bent Sørensen.

99/85 "Der er langt fra Q til R".
Projektrapport af: Niels Jørgensen og Mikael Klintorp.
Vejleder: Stig Andur Pedersen.

100/85 "TALSYSTEMETS OPBYGNING".
Af: Mogens Niss.

101/85 "EXTENDED MOMENTUM THEORY FOR WINDMILLS IN PERTURBATIVE FORM".
Af: Ganesh Sengupta.

102/85 OPSTILLING OG ANALYSE AF MATEMATISKE MODELLER, BELYST VED MODELLER OVER KØERS FODEROPTAGELSE OG - OMSÆTNING".
Projektrapport af: Lis Eilertzen, Kirsten Habekost, Lill Røn og Susanne Stender.
Vejleder: Klaus Grünbaum.

103/85 "ØDSLE KOLDKRIGERE OG VIDENSKABENS LYSE IDEER".
Projektrapport af: Niels Ole Dam og Kurt Jensen.
Vejleder: Bent Sørensen.

104/85 "ANALOGREGNEMASKINEN OG LORENZLIGNINGER".
Af: Jens Jæger.

105/85 "THE FREQUENCY DEPENDENCE OF THE SPECIFIC HEAT AF THE GLASS REANSITION".
Af: Tage Christensen.

"A SIMPLE MODEL AF AC HOPPING CONDUCTIVITY".
Af: Jeppe C. Dyre.
Contributions to the Third International Conference on the Structure of Non - Crystalline Materials held in Grenoble July 1985.

106/85 "QUANTUM THEORY OF EXTENDED PARTICLES".
Af: Bent Sørensen.

107/85 "EN MYG GØR INGEN EPIDEMI",
- flodblindhed som eksempel på matematisk modellering af et epidemiologisk problem.
Projektrapport af: Per Hedegård Andersen, Lars Boye, CarstenHolst Jensen, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
Vejleder: Jesper Larsen.

108/85 "APPLICATIONS AND MODELLING IN THE MATEMATICS CUR - RICULUM" - state and trends -
Af: Mogens Niss.

109/85 "COX I STUDIETIDEN" - Cox's regressionsmodel anvendt på studenteroplysninger fra RUC.
Projektrapport af: Mikael Wennerberg Johansen, Poul Katler og Torben J. Andreasen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

110/85 "PLANNING FOR SECURITY".
Af: Bent Sørensen

111/85 JORDEN RUNDT PÅ FLADE KORT".
Projektrapport af: Birgit Andresen, Beatriz Quinones og Jimmy Staal.
Vejleder: Mogens Niss.

112/85 "VIDENSKABELIGGØRELSE AF DANSK TEKNOLOGISK INNOVATION FREM TIL 1950 - BELYST VED EKSEMPLER".
Projektrapport af: Erik Odgaard Gade, Hans Hedal, Frank C. Ludvigsen, Annette Post Nielsen og Finn Physant.
Vejleder: Claus Bryld og Bent C. Jørgensen.

113/85 "DESUSPENSION OF SPLITTING ELLIPTIC SYMBOLS 11".
Af: Bernhelm Booss og Krzysztof Wojciechowski.

114/85 "ANVENDELSE AF GRAFISKE METODER TIL ANALYSE AF KONTIGENSTABELLER".
Projektrapport af: Lone Biilmann, Ole R. Jensen og Anne-Lise von Moos.
Vejleder: Jørgen Larsen.

115/85 "MATEMATIKKENS UDVIKLING OP TIL RENÆSSANCEN".
Af: Mogens Niss.

116/85 "A PHENOMENOLOGICAL MODEL FOR THE MEYER-NELDEL RULE".
Af: Jeppe C. Dyre.

117/85 "KRAFT & FJERNVARMEOPTIMERING"
Af: Jacob Mørch Pedersen.
Vejleder: Bent Sørensen

118/85 "TILFÆLDIGHEDEN OG NØDVENDIGHEDEN IFØLGE PEIRCE OG FYSIKKEN".
Af: Peder Voetmann Christiansen

119/86 "DET ER GANSKE VIST - - EUKLIDS FEMTE POSTULAT KUNNE NOK SKABE RØRE I ANDEDAMMEN".
Af: Iben Maj Christiansen
Vejleder: Mogens Niss.

120/86 "ET ANTAL STATISTISKE STANDARDMODELLER".
Af: Jørgen Larsen

121/86 "SIMULATION I KONTINUERT TID".
Af: Peder Voetmann Christiansen.

122/86 "ON THE MECHANISM OF GLASS IONIC CONDUCTIVITY".
Af: Jeppe C. Dyre.

123/86 "GYMNASIEFYSIKKEN OG DEN STORE VERDEN".
Fysiklærerforeningen, IMFUFA, RUC.

124/86 "OPGAVESAMLING I MATEMATIK".
Samtlige opgaver stillet i tiden 1974-jan. 1986.

125/86 "UVBY,β - systemet - en effektiv fotometrisk spektralklassifikation af B-,A- og F-stjerner".
Projektrapport af: Birger Lundgren.

126/86 "OM UDVIKLINGEN AF DEN SPECIELLE RELATIVITETSTEORI".
Projektrapport af: Lise Odgaard & Linda Szkotak Jensen
Vejledere: Karin Beyer & Stig Andur Pedersen.

127/86 "GALOIS' BIDRAG TIL UDVIKLINGEN AF DEN ABSTRAKTE ALGEBRA".
Projektrapport af: Pernille Sand, Heine Larsen & Lars Frandsen.
Vejleder: Mogens Niss.

128/86 "SMÅKRYB" - om ikke-standard analyse.
Projektrapport af: Niels Jørgensen & Mikael Klintorp.
Vejleder: Jeppe Dyre.

129/86 "PHYSICS IN SOCIETY"
Lecture Notes 1983 (1986)
Af: Bent Sørensen

130/86 "Studies in Wind Power"
Af: Bent Sørensen

131/86 "FYSIK OG SAMFUND" - Et integreret fysik/historieprojekt om naturanskuelsens historiske udvikling og dens samfundsmæssige betingethed.
Projektrapport af: Jakob Heckscher, Søren Brønd, Andy Wierød.
Vejledere: Jens Høyrup, Jørgen Vogelius, Jens Højgaard Jensen.

132/86 "FYSIK OG DANNELSE"
Projektrapport af: Søren Brønd, Andy Wierød.
Vejledere: Karin Beyer, Jørgen Vogelius.

133/86 "CHERNOBYL ACCIDENT: ASSESSING THE DATA.
ENERGY SERIES NO. 15.
AF: Bent Sørensen.

134/87 "THE D.C. AND THE A.C. ELECTRICAL TRANSPORT IN AsSeTe SYSTEM"
Authors: M.B.El-Den, N.B.Olsen, Ib Høst Pedersen, Petr Visčor

135/87 "INTUITIONISTISK MATEMATIKS METODER OG ERKENDELSESTEORETISKE FORUDSÆTNINGER"
MASTEMATIKSPECIALE: Claus Larsen
Vejledere: Anton Jensen og Stig Andur Pedersen

136/87 "Mystisk og naturlig filosofi: En skitse af kristendommens første og andet møde med græsk filosofi"
Projektrapport af Frank Colding Ludvigsen
Vejledere: Historie: Ib Thiersen
Fysik: Jens Højgaard Jensen

137/87 "HOPMODELLER FOR ELEKTRISK LEDNING I UORDNEDE FASTE STOFFER" - Resume af licentiatafhandling
Af: Jeppe Dyre
Vejledere: Niels Boye Olsen og Peder Voetmann Christiansen.