IMFUFAtekst

- I, OM OG MED MATEMATIK OG FYSIK

Der er en hestesko i dynamikken

Pernille Hviid Petersen

September 2010

nr. 473 - 2010

Roskilde University,
Department of Science, Systems and Models, IMFUFA
P.O. Box 260, DK - 4000 Roskilde
Tel: 4674 2263 Fax: 4674 3020

Der er en hestesko i dynamikken

Af: Pernille Hviid Petersen

IMFUFA tekst nr. 473/ 2010 – 85 sider – ISSN: 0106-6242

Formålet med denne rapport er at give et bud på, hvordan Smales hestesko har bidraget til udviklingen af teorien for dynamiske systemer. Dette søges gjort gennem et litteraturstudium, der tager udgangspunkt i to cases, der handler om, hvordan Smales hestesko har indgået i studiet af hhv. Hénonafbildningen og det begrænsede trelegemeproblem. Indledningsvist introduceres dele af teorien for dynamiske systemer, og både Smales oprindelige hestesko og en nyttig generalisering af denne præsenteres.

Ud fra en analyse og diskussion af de to cases sluttes det, at Smales hestesko set ud fra de to cases har bidraget til udviklingen af teorien for dynamiske systemer ved at synliggøre en struktur, som dynamikkerne i mange forskellige dynamiske systemer har til fælles med hinanden og med skifteautomorfierne. Smales hestesko har derudover bidraget med en metode til at verificere, om denne struktur findes i et konkret dynamisk systems dynamik.

Udgangspunktet i de to cases har ført til, at fokuset i rapporten ligger på det aspekt ved hesteskoen, der omhandler dens forhold til skifteautomorfierne. I diskussionen diskuteres et andet aspekt, der omhandler hesteskoens strukturelle stabilitet, og det fremføres, at det er sandsynligt, at dette aspekt også har bidraget til udviklingen indenfor dynamiske systemer, selvom dette ikke fremgår af de to cases.

Der er en hestesko i dynamikken

Pernille Hviid Petersen

Vejleder:
Carsten Lunde Petersen

Roskilde Universitet
Matematisk videnskabsfagsprojekt
Forår 2010

Forord

Denne rapport er en revideret udgave af min videnskabsfagsprojektrapport, som jeg skrev som en del af min kandidatuddannelse på Roskilde Universitet i foråret 2010. I forbindelse med arbejdet med mit projekt har jeg modtaget hjælp fra forskellige personer, som jeg gerne vil takke. Først og fremmest vil jeg gerne takke min vejleder Carsten Lunde Petersen for mange lange og frugtbare vejledermøder og for at hjælpe mig videre, da projektarbejdet ikke var så sjovt. Derudover vil jeg også gerne takke Tinne Hoff Kjeldsen for gode input til min diskussion. Til sidst vil jeg takke Troels Mortensen for hjælp til at tegne figurer og Flemming Petersen for hjælp til korrektur.

Indhold

Kapitel 1

Indledning

Når man beskæftiger sig med dynamiske systemer, er det idag ikke ualmindeligt at møde et udsagn om, at der for et konkret system er en hestesko i dynamikken. Det er heller ikke ualmindeligt, at et sådan udsagn ikke efterfølges af en præcisering af konsekvenserne af denne hestesko. Forekomsten af denne type udsagn indikerer, at den omtalte hestesko har bidraget til og dermed haft betydning for udviklingen indenfor dynamiske systemer, selvom de ikke siger noget om, hvad dette bidrag har bestået i.

Den hestesko, som denne type udsagn refererer til, er det dynamiske system, som er kendt som Smales hestesko, og som er omdrejningspunktet for denne rapport. Smales hesteko er opkaldt efter matematikeren Stephen Smale, der præsenterede den i to artikler fra hhv. 1965 [Smale, 1965] og 1967 [Smale, 1967]. Den bliver idag i mange oversigtsværker om kaos fremhævet som et system, man er nødt til at forstå for virkeligt at forstå, hvad kaos i dynamiske systemer er (se f.eks. [Wiggins, 1990, s. 420] og [Strogatz, 1994, s. 425]). Det fremgår altså implicit af disse værker, at Smales hestesko har ydet et bidrag til den moderne udvikling af teorien for dynamiske systemer. Ligesom de ovenfor nævnte udsagn siger disse værker dog stort set intet om, hvad dette bidrag konkret består i. Mit formål med denne rapport er at finde ud af, på hvilken måde Smales hestesko har bidraget til den moderne udvikling af teorien for dynamiske systemer.

Ifølge visse kilder bygger Smales hesteskos bidrag til teorien for dynamiske systemer på, at den kan bruges til at sige noget om andre dynamiske systemer [Den Store Danske, 2010]. Derfor har jeg i min undersøgelse valgt at tage udgangspunkt i to cases, der omhandler hhv. Hénonafbildningen og det begrænsede trelegemeproblem. Hénonafbildningen og det begrænsede trelegemeproblem er to dynamiske systemer, som Smales hestesko er blevet brugt til at sige noget om. Jeg har mere præcist valgt at strukturere min undersøgelse således, at jeg først analyserer tre eksempler på, hvordan Smales hesteko har indgået i studiet af disse to dynamiske systemer, hvorefter jeg ud fra en diskussion af resultaterne af disse analyser vil forsøge at konklud-

ere noget mere generelt om, hvordan hesteskoen har bidraget til teorien for dynamiske systemer. Jeg har i mit arbejde været opmærksom på, at det kan være farligt at konkludere noget generelt ud fra kun tre eksempler, men jeg har, som det fremgår af min diskussion i kapitel 6, fundet, at eksemplerne i mine to cases udviser nogle fællestræk, der bevirker, at jeg mener, at det er muligt at konkludere noget generelt på baggrund af disse.

Set ud fra Smales egne artikler fra 1965 og 1967 samt en senere artikel, som han skrev i 1980, er der mindst to mulige aspekter af hesteskoens bidrag til den videre udvikling indenfor dynamiske systemer. Set ud fra mine to cases er det kun det ene af disse aspekter, som bygger på, at hesteskoen er topologisk konjugeret med en skifteautomorfi (se afsnit 2.8 og afsnit 3.3), der vitterligt har fået betydning for den efterfølgende udvikling. Derfor er det dette aspekt, der er i fokus i denne rapport. I min diskussion vil jeg dog også komme ind på det andet aspekt.

Mange oversigtsværker kæder Smales hestesko og dens betydning for teorien for dynaiske systemer sammen med begrebet kaos. Denne sammenkædning fremgår helt eksplicit af følgende citat:

> (...) Smales såkaldte hestesko, der er et eksempel på et kaotisk diskret dynamisk system. Dette eksempel spiller en vigtig rolle, idet mange kaotiske dynamiske systemer netop indeholder et delsystem af hestesko-typen, og den kaotiske opførsel faktisk er påvist som en konsekvens heraf [Den Store Danske, 2010].

I hverken Smales egne artikler eller de kilder, som jeg har bygget mine to cases på, tales der dog eksplicit om kaos. Da jeg ud fra diverse oversigtsværker har fået det indtryk, at begrebet kaos altid er et sted i baggrunden, når man taler om Smales hestesko, har jeg alligevel valgt at inddrage et afsnit om kaos i min præsentation af dele af teorien omkring dynamiske systemer i kapitel 2, og begrebet dukker også op enkelte andre steder i min rapport. I forbindelse med det ovenstående citat kan det iøvrigt bemærkes, at selvom mine cases ikke eksplicit beskæftiger sig med kaos, så vil det fremgå, at det, at mange dynamiske systemer indeholder en indlejret hestesko som et delsystem, ifølge dem er helt essentielt for hesteskoens bidrag til udviklingen af teorien om dynamiske systemer.

1.1 Problemformulering

Med udgangspunkt i to cases om Hénonafbildningen og det begrænsede trelegemeproblem vil jeg undersøge, på hvilken måde Smales hestesko har bidraget til udviklingen af den moderne teori for dynamiske systemer.

1.2 Metode

Jeg har i denne rapport valgt at besvare min problemformulering ud fra et litteraturstudium. I forbindelse med eksemplerne i mine to cases har jeg valgt kun at benytte kilder, der er skrevet før 1980, da jeg anser det for sandsynligt, at en påvirkning fra Smales hestesko vil fremgå mest eksplicit og utilsløret af kilder, der er skrevet forholdsvist kort tid efter, at Smale præsenterede sin hestesko første gange. Dette valg medfører naturligvis, at en udvikling af teorien omkring dynamiske systemer, som Smales hestesko direkte har bidraget til, ikke vil fremgå af mine kilder, hvis den først er opstået efter 1980.

1.3 Struktur

For overskuelighedens skyld vil jeg her kort skitsere, hvordan jeg har valgt at strukturere min rapport. Jeg har i kapitel 2 valgt at starte med en introduktion til dele af teorien om dynamiske systemer, da denne teori er grundlæggende for mit arbejde i resten af rapporten. Efter dette kommer der i kapitel 3 en præsentation af Smales hestesko, hvori jeg både gennemgår Smales oprindelige udgave af hesteskoen samt en i anvendelsessammenhænge mere brugbar generalisering af den. Efter præsentationen af Smales hestesko følger mine to cases i kapitel 4 og 5. Disse to kapitler indeholder udover en præsentation af hhv. Hénonafbildningen og det begrænsede trelegemeproblem også gennemgange af i alt tre eksempler på, på hvilken måde og med hvilke formål Smales hestesko er blevet anvendt i studierne af disse to dynamiske systemer. Derpå kommer i kapitel 6 en diskussion, hvori jeg udover at diskutere, på hvilken måde Smales hestesko set ud fra mine to cases har bidraget til udviklingen af teorien for dynamiske systemer, vil diskutere nogle mere overordnede overvejelser, som mit litteraturstudium har givet anledning til. Derpå præsenterer jeg min konklusion i kapitel 7, hvorefter rapporten i kapitel 8 sluttes af med en perspektivering.

Kapitel 2

Dynamiske systemer

Smales hestesko, Hénonafbildningen og det begrænsede trelegemeproblem er alle dynamiske systemer. Derfor har jeg fundet det naturligt at starte min rapport med at give en introduktion til de dele af teorien om dynamiske systemer, som er nødvendige for forståelsen af mit arbejde. Denne introduktion tjener også til at klargøre, hvad jeg mener, når jeg i resten af rapporten bruger bestemte begreber. På nær nogle ganske få steder har jeg i dette kapitel valgt at fremhæve definitioner ved at sætte de begreber, der bliver defineret, med fed og kursiv. Jeg har valgt at bygge kapitlet op på den måde, at de første afsnit (afsnit 2.1-2.5) indeholder en gennemgang af nogle ret generelle begreber indenfor dynamiske systemer, som dog er vigtige for forståelsen af mit arbejde, mens de sidste afsnit (afsnit 2.6-2.8) beskriver nogle mere specielle begreber, som jeg arbejder med.

Lad os starte med at slå fast, hvad et dynamisk system er. Kort fortalt er et ***dynamisk system*** et system, der udvikler sig over tid [Strogatz, 1994, s. 2]. En mere udtømmende definition af et dynamisk system finder man hos Alligood, Sauer og Yorke:

> A dynamical system consists of a set of possible states, together with a rule that determines the present state in term of past states [Alligood et al., 1996, s. 1].

Jeg har valgt at oversætte „state“ med „tilstand“. Et dynamisk system er altså et system, der består af en mængde tilstande og en fast regel for, hvordan man kommer til den næste tilstand ud fra tidligere tilstande. I en matematisk behandling af et dynamisk sys tem består denne regel typisk af en eller flere ligninger. Man kan altså sige, at ligningerne i et dynamisk system bestemmer systemets opførsel.

Et dynamisk system kan karakteriseres på flere måder. For det første inddeles dynamiske systemer ofte i ***diskrete systemer***, der udvikler sig i diskret tid, og ***kontinuerte systemer***, der udvikler sig i kontinuert tid [Strogatz, 1994, s. 3]. Et diskret dynamisk systems opførsel kan typisk beskrives af et sæt af ligninger, der tager systemets aktuelle tilstand som input

og derudfra giver den næste tilstand som output, hvilket vil sige, at man kommer fra en tilstand til den næste ved iteration [Alligood et al., 1996, s. 2]. Hvis f betegner det sæt af ligninger, der bestemmer systemets opførsel, er denne opførsel altså givet ved $f^n(x)$, hvor n er antallet af iterationer, og x er den tilstand, som systemet befinder sig i ved opførslens start. Et kontinuert dynamisk systems opførsel kan typisk beskrives af et sæt af differentialligninger [Alligood et al., 1996, s. 2]. Hvis f er en løsning til dette sæt af differentialligninger, er systemets opførsel derfor givet ved $f(x,t)$, hvor x er systemets starttilstand, og t er tiden.

Ud over inddelingen i diskrete og kontinuerte systemer, inddeles dynamiske systemer også i ***lineære systemer*** og ***ikke-lineære systemer***, hvilket refererer til de ligninger, der bestemmer systemets opførsel. Sidst, men ikke mindst, inddeles dynamiske systemer i ***deterministiske systemer*** og ***ikke-deterministiske systemer***. Et deterministisk dynamisk system er et system, for hvilket det i hvert fald i teorien er muligt på entydig måde at bestemme systemets aktuelle tilstand ud fra tidligere tilstande [Alligood et al., 1996, s. 2].

2.1 Tilstandsrum

I arbejdet med dynamiske systemer er afbildninger i tilstandsrummet ofte meget nyttige, når man vil danne sig et overblik over et systems dynamik. Et ***tilstandsrum*** for et dynamisk system er ganske enkelt et rum, der har en dimension for hver variabel, det er nødvendig at have kendskab til for at kunne beskrive systemets tilstand [Hilborn, 1994, s. 71]. Hvis man f.eks. arbejder med et dynamisk system, der beskriver et legemes bevægelse gennem rummet, er det nødvendigt at have kendskab til de tre variable, der beskriver legemets position, og de tre variable, der beskriver dets hastighed, for at kunne beskrive systemets tilstand. Derfor vil dette systems tilstandsrum have seks dimensioner. En konsekvens af definitionen af et tilstandsrum er, at ét punkt i tilstandsrummet svarer til én mulig tilstand for systemet.

Et dynamisk systems opførsel - altså ændringen af dets tilstand over tid - kan repræsenteres som en partikel, der bevæger sig rundt i tilstandsrummet. Hvis det dynamiske system er kontinuert, vil partiklen bevæge sig langs en kontinuert kurve i tilstandsrummet. Hvis det derimod er diskret, vil partiklen hoppe fra punkt til punkt i tilstandsrummet. Partiklens bevægelse gennem tilstandsrummet kaldes for en ***bane*** i tilstandsrummet [Strogatz, 1994, s. 7]. En bane i tilstandsrummet repræsenterer altså én bestemt opførsel af systemet. Ifølge Strogatz går der en bane gennem hvert eneste punkt i tilstandsrummet [Strogatz, 1994, s. 7]. For et deterministisk dynamisk system kan der derudover kun gå én bane gennem ét punkt i tilstandsrummet. Hvis to forskellige baner i tilstandsrummet skar hinanden, ville det nemlig betyde, at hvis systemet på et tidspunkt befandt sig i den tilstand, der svarede til

skæringspunktet, ville det kunne udvikle sig på to forskellige måder svarende til de to forskellige baner, og så ville det ikke være muligt at bestemme de senere tilstande entydigt ud fra tidligere tilstande.

Hvis et dynamisk system er deterministisk, bestemmes dets opførsel på entydig måde af dets starttilstand. Derfor kan man i princippet skelne mellem forskellige mulige opførsler af systemet ved at skelne mellem starttilstandene for disse opførsler. Det sæt af værdier, der beskriver starttilstanden for en given opførsel - altså koordinatsættet for det punkt i tilstandsrummet, der svarer til starttilstanden - kaldes for systemets ***begyndelsesbetingelse*** ved denne opførsel. I princippet kan ethvert punkt i tilstandsrummet benyttes som begyndelsesbetingelse for en opførsel af systemet.

I resten af dette kapitel vil jeg betragte et dynamisk systems opførsel som en bane i tilstandsrummet uden eksplicit at gøre opmærksom på, at denne bane svarer til en konkret opførsel for systemet.

2.2 Poincaréafbildninger

Når man arbejder med et kontinuert dynamisk system, kan man nogen gange komme ud for, at baner i systemets tilstandsrum bliver frygteligt komplicerede. I sådanne situationer kan en Poincaréafbildning hjælpe til at forsimple situationen.

Lad os sige, at vi har et kontinuert dynamisk system, hvis tilstandsrum har n dimensioner. I dette tilstandsrum kan man specificere en $(n-1)$-dimensional flade S. S skal være defineret således, at enhver bane for det dynamiske system, der starter på S, starter med at bevæge sig igennem S og ikke parallet med S [Strogatz, 1994, s. 278]. S kaldes for et ***Poincarésnit*** i tilstandsrummet. Lad os nu følge en given bane rundt i tilstandsrummet. Hver gang denne bane skærer S fra en bestemt side, noterer vi skæringspunktet på S [Alligood et al., 1996, s. 48-49]. Derved får vi en følge af skæringspunkter givet ved $\{\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3} \ldots\}$. ***Poincaréafbildningen*** er den iterative afbildning $P : S \mapsto S$, der ud fra et af disse skæringspunkter giver det næste [Strogatz, 1994, s. 278]. Hvis $\boldsymbol{x_k}$ og $\boldsymbol{x_{k+1}}$ er hhv. det k'te og det $(k+1)$'te skæringspunkt mellem banen og S, er Poincaréafbildningen P mere præcist givet ved

$$\boldsymbol{x_{k+1}} = P(\boldsymbol{x_k}) \tag{2.1}$$

Poincaréafbildningen simplificerer altså den visuelle repræsentation af baner i et kontinuert dynamisk systems tilstandsrum ved at repræsentere kontinuerte baner i et n-dimensionalt rum som diskrete baner i et $(n-1)$-dimensionalt rum. I tilfældet $n = 3$ er det nyttige i denne simplificering meget nemt at indse. I teorien kan en Poincaréafbildning også bruges til at simplificere selve det kontinuerte dynamiske system, idet den omdanner et n-dimensionalt kontinuert system til et $(n-1)$-dimensionalt diskret system. I praksis er det dog ofte umuligt at finde en direkte formel for P for et

givet dynamisk system [Strogatz, 1994, s. 279]. Dette betyder, at man for at finde banen for et givet sæt af begyndelsesbetingelser under P er nødt til at finde hele banen i tilstandrummet for dette sæt af begyndelsesbetingelser og så finde alle denne banes skæringer med Poincarésnittet S fra en bestemt side. Dette betyder, at Poincaréafbildningen i praksis ikke nødvendigvis kan bruges til at simplificere opgaven med at finde løsninger til et kontinuert dynamisk system.

Man kan overveje, om man ikke taber for mange informationer om et dynamisk systems opførsel, hvis man vælger at undersøge en Poincaréafbildning af systemet istedet for systemet selv. Man taber selvfølgelig nogle informationer, da en Poincaréafbildning ikke indeholder informationer om, hvordan det dynamiske system præcist udvikler sig i de dele af tilstandsrummet, som ikke ligger i Poincarésnittet S. En Poincaréafbildning af et dynamisk system indfanger dog typisk mange informationer om systemets dynamik. F.eks. kan en Poincaréafbildning indeholde informationer om periodiske opførsel (se afsnit 2.3) i det dynamiske system. Derfor er en Poincaréafbildning på trods af et uundgåeligt informationstab absolut et nyttigt værktøj i arbejdet med kontinuerte dynamiske systemer.

Som en sidste ting skal det nævnes, at for et n-dimensionalt dynamiske system, kan den $(n-1)$-dimensionale flade, der udgør Poincarésnittet for en Poincaréafbildning af systemet, selvfølgelig vælges på mange forskellige måder. Dette medfører, at der kan defineres mange forskellige Poincaréafbildninger for det samme dynamiske system.

2.3 Periodisk opførsel, kvasiperiodisk opførsel og aperiodisk opførsel

Hvis en begyndelsesbetingelse for et dynamisk system medfører, at systemet følger en lukket bane i tilstandrummet og dermed bliver ved med at gennemløbe de samme tilstande igen og igen og altså udviser periodisk opførsel, kaldes denne begyndelsesbetingelse for et ***periodisk punkt*** i systemets tilstandsrum. En særlig form for periodiske punkter er den type punkter, der giver anledning til, at systemet aldrig ændrer tilstand, men forbliver i ro ved begyndelsesbetingelserne. Et sådan punkt kaldes et ***fixpunkt*** [Mosekilde and Feldberg, 1994, s. 67]. Hvis et periodisk punkt ikke er et fixpunkt, kaldes dets bane i tilstandsrummet for en ***cykel*** [Alligood et al., 1996, s. 333]. Ethvert punkt på en cykel er et periodisk punkt. Hvis man ser på en Poincaréafbildning for et dynamisk system, vil et fixpunkt for systemet være repræsenteret ved et fixpunkt for Poincaréafbildningen, såfremt fixpunktet ligger i Poincarésnittet, mens en periodisk cykel vil være repræsenteret af en bane under Poincaréafbildningen med endeligt mange forskellige elementer.

Et sæt af begyndelsesbetingelser kan udover periodisk opførsel også føre til, at et dynamisk system følger en kvasiperiodisk bane rundt i tilstandrum-

met. Lad os sige, at B er en bane i tilstandsrummet for et givet dynamisk system, og $B(t)$ er det punkt, hvori B befinder sig til tidpunktet t, hvis det dynamiske system er kontinuert, eller efter t iterationer, hvis det er diskret. B kaldes en ***kvasiperiodisk bane***, hvis der findes et τ, således at $B(t+\tau)$ forbliver tæt på $B(t)$ for alle t [Lorenz, 1963, s. 132]. En kvasiperiodisk bane er altså en bane, der tilnærmelsesvist gennemløber de samme tilstande igen og igen. Et punkt på en kvasiperiodisk bane kaldes et ***kvasiperiodisk punkt***. Periodiske baner er et særtilfælde af kvasiperiodiske baner [Lorenz, 1963, s. 133]. En bane i tilstandsrummet, som hverken er periodisk eller kvasiperiodisk, kaldes ***aperiodisk***. En aperiodisk bane i et dynamisk systems tilstandsrum kan godt i et stykke tid forblive tæt på nogle tilstande, som den tidligere har gennemløbet, med den kan ikke blive ved med at være tæt på sine tidligere tilstande, for så ville den jo være kvasiperiodisk [Lorenz, 1963, s. 133].

I arbejdet med et dynamisk system er det ofte interessant at undersøge, hvordan baner, der starter indenfor en vis omegn af et periodisk punkt p, opfører sig. Dette skyldes, at periodiske punkter kan have en afgørende indflydelse på hele systemets dynamik [Hilborn, 1994, s. 92]. Lad os starte med at antage, at p er et fixpunkt. En mulig opførsel omkring p er, at alle de baner, der starter indenfor en vis omegn af p, vil bevæge sig mod p i positiv tid. Man kan altså sige, at p tiltrækker alle banerne, der starter tilstrækkeligt tæt på p. I dette tilfælde kaldes p for et ***tiltrækkende fixpunkt*** eller et ***stabilt fixpunkt*** [Mosekilde and Feldberg, 1994, s. 67]. En anden mulig opførsel omkring p er, at alle baner, der starter indenfor en vis omegn af p, vil bevæge sig væk fra eller bliver frastødt af p i positiv tid. I dette tilfælde kaldes p for et ***frastødende fixpunkt*** eller et ***ustabilt fixpunkt*** [Mosekilde and Feldberg, 1994, s. 67]. Et ustabilt fixpunkt er i negativ tid et stabilt fixpunkt og omvendt.

Udover stabile og ustabile fixpunkter findes der også en tredje type fixpunkter. Denne type kaldes for sadelpunkter [Hilborn, 1994, s. 79]. Hvis fixpunktet p er et ***sadelpunkt***, betyder det, at der i enhver omegn af p i tilstandsrummet er en mængde begyndelsesbetingelser, for hvilke banerne går imod p i positiv tid, og en anden mængde begyndelsesbetingelser, for hvilke banerne bevæger sig væk fra p i positiv tid, hvilket betyder at de går mod p i negativ tid. Den totale mængde af begyndelsesbetingelser i tilstandsrummet, for hvilke banerne går imod p i positiv tid, betegnes $W^s(p)$, mens den totale mængde begyndelsesbetingelser, for hvilke banerne går mod p i negativ tid, betegnes $W^u(p)$. Hvis p er et sadelpunkt for det diskrete dynamiske system, hvis opførsel er givet ved

$$x_{n+1} = f(x_n) \tag{2.2}$$

hvor x_n og x_{n+1} er outputtet af hhv. den n'te og den $(n+1)$'te iteration

med f, så er $W^s(p)$ givet ved

$$\forall w \in W^s(p) : \lim_{n\to\infty} f^{(n)}(w) = p \tag{2.3}$$

mens $W^u(p)$ er givet ved

$$\forall w \in W^u(p) : \lim_{n\to-\infty} f^{(n)}(w) = p \tag{2.4}$$

$W^s(p)$ kaldes ***den stabile mangfoldighed*** for p, og $W^u(p)$ kaldes ***den ustabile mangfoldighed*** for p [Hilborn, 1994, s. 92]. Disse betegnelser skyldes, at man kan vise, at den stabile og den ustabile mangfoldighed faktisk udgør to mangfoldigheder[1] i tilstandsrummet [Wiggins, 1990, s. 21]. Både den stabile og den ustabile mangfoldighed er ***invariante mangfoldigheder***, da banen for et punkt på den stabile mangfoldighed vil blive på den stabile mangfoldighed, og banen for et punkt på den ustabile mangfoldighed vil blive på den ustabile mangfoldighed.

Analogt til de tre ovennævnte typer af fixpunkter findes periodiske cykler også i typerne ***stabil cykel***, ***ustabil cykel*** og ***sadel***, der virker hhv. tiltrækkende, frastødende og både tiltrækkende og frastødende på forskellige baner i tilstandsrummet. Et punkt på en stabil cykel kaldes et stabilt periodisk punkt. Tilsvarende bruges betegnelserne ustabil periodisk punkt og sadelpunkt om punkter på hhv. en ustabil cykel og en sadel.

2.4 Attraktorer

Da begrebet attraktor spiller en væsentlig rolle i min case omkring Hénon-afbildningen, vil jeg her kort forklare, hvad der menes med dette begreb. Ifølge Strogatz kan en attraktor for et dynamisk system defineres således:

Definition 2.1 *Lad A være en lukket delmængde af tilstandsrummet for et dynamisk system. A kaldes da en attraktor for det dynamiske system, hvis den er invariant, tiltrækker banerne for en åben mængde af begyndelsesbetingelser og er minimal [Strogatz, 1994, s. 324].*

At mængden A ifølge denne definition skal være minimal, betyder, at der ikke må findes en ægte delvængde af A, der selv er en attraktor [Strogatz, 1994, s. 324]. Ifølge Alligood, Sauer og Yorke skal den åbne mængde af begyndelsesbetingelser i tilstandsrummet, som A tiltrækker banerne for, have et volumen i tilstandsrummet, som er større end 0, for at A er en attraktor [Alligood et al., 1996, s. 240]. Denne åbne mængde af begyndelsesbetingelser kaldes for ***attraktorens bassin***. Ifølge Alligood, Sauer og Yorke er et

[1] En mangfoldighed er et topologisk rum, der lokalt er Euklidisk. Dette betyder, at der for ethvert punkt x på en mangfoldighed findes en omegn U af x, således at U topologisk set er den åbne enhedskugle i $\mathbb{R}^n$. Dette betyder igen, at der eksisterer en homeomorfi, der fører U over i den åbne enhedskugle i $\mathbb{R}^n$ [Rowland, 2010].

yderligere krav til en attraktor A, at den indeholder en ***tæt bane***, hvilket er en bane, der kommer vilkårligt tæt på ethvert punkt på attraktoren [Alligood et al., 1996, s. 240].

Et eksempel på en attraktor for et dynamisk system kunne være et stabilt fixpunkt eller en stabil cykel. En attraktor kan dog sagtens være meget mere kompliceret i sin struktur, end disse to relativt simple eksempler. Dette er f.eks. tilfældet i min case omkring Hénonafbildningen (se kapitel 4). Et dynamisk system kan også sagtens besidde mere end en attraktor [Hilborn, 1994, s. 23].

2.5 Kaos

Visse dynamiske systemer udviser kaotisk opførsel og kaldes derfor kaotiske systemer. Da mange værker fremhæver Smales hestesko i forbindelse med kaos og siger, at en forståelse af Smales hestesko er essentiel for forståelsen af kaos (se f.eks. [Hilborn, 1994, s. 242] og [Strogatz, 1994, s. 425]), finder jeg det naturligt at give en kort forklaring af, hvad kaos er. Et første kendetegn ved kaotiske systemer er, at de er ikke-lineære dynamiske systemer [Hilborn, 1994, s. 3-4]. Derudover giver Strogatz følgende beskrivelse af kaotiske systemer:

> (...) chaos, in which a deterministic system exhibits aperiodic behavior that depends sensitively on the initial conditions, thereby rendering long-term predictions impossible [Strogatz, 1994, s. 3].

Ifølge Strogatz er et karakteristisk træk ved kaotiske systemer altså, at de opfører sig aperiodisk. Dette betyder, at de aldrig gentager sig selv og derfor aldrig falder til ro i en periodisk opførsel [Strogatz, 1994, s. 318]. Dette medfører, at kaotiske systemer kan se ud til at opføre sig fuldstændigt tilfældigt. Dette gør de dog ikke, hvilket skyldes, at et andet karakteristisk træk ved kaotiske systemer, som Strogatz også nævner, er, at de er deterministiske. Dette betyder som tidligere nævnt, at det i teorien er muligt på entydig måde at bestemme kaotiske systemers fremtidige tilstande ud fra deres tidligere tilstande. Kaotisk opførsel er altså ikke det samme som tilfældig opførsel, selvom den ved første øjekast kan virke fuldstændig tilfældig.

Et tredje karakteristisk træk ved kaotiske systemer er ifølge Strogatz, at de udviser følsomhed på begyndelsesbetingelserne. ***Følsomhed på begyndelsesbetingelserne*** betyder, at to begyndelsesbetingelser, som kun afviger ganske lidt fra hinanden, vil føre til to opførsler af systemet, som meget hurtigt afviger ganske meget fra hinanden. Følsomhed på begyndelsesbetingelserne kaldes også for sommerfugleeffekten, hvilket henviser til det billede, at hvis en sommerfugl basker med vingerne i Peking idag, kan det ændre stormfronterne i New York om en måned [Gleick, 1989, s. 14]. Følsomhed på begyndelsesbetingelserne betyder altså, at en lille ændring i begyndel-

sesbetingelserne medfører ganske voldsomme ændringer i den resulterende opførsel.

I arbejdet med kaotiske systemer medfører følsomheden på begyndelsesbetingelserne, at det på trods af systemernes deterministiske natur i praksis er umuligt at forudsige deres opførsel langt ude i fremtiden. Determinismen medfører ellers, at dette i teorien er muligt, hvis man bare kender begyndelsesbetingelserne med uendeligt stor præcision. Problemet er, at vi aldrig kan komme til at kende begyndelsesbetingelserne for et dynamisk system uendeligt præcist, da der ikke findes noget måleudstyr, der måler uendeligt præcist[2]. Der vil altid forekomme afrundinger og lignende unøjagtigheder. De begyndelsesbetingelser, man kan måle sig frem til, vil derfor altid afvige lidt fra de virkelige begyndelsesbetingelser. Følsomheden på begyndelsesbetingelserne medfører derfor, at den opførsel, som man kan forudsige ved hjælp af de målte begyndelsesbetingelser, meget hurtigt vil afvige ganske kraftigt fra systemets faktiske opførsel. Derfor er forudsigelser af kaotiske systemers opførsel langt ude i fremtiden i praksis umulige på trods af systemernes deterministiske karakter.

Strogatz beskrivelse af kaos indfanger mange af de karakteristiske træk ved kaotiske systemer, men den er ikke en rigtig definition af kaos. Faktisk er det ikke så nemt at definere kaos, og der er bestemt ikke enighed om, hvordan en eventuel definition skal se ud [Weisstein, 2010c]. Følgende bud på en definition af kaos findes dog både hos Wiggins og Weisstein [Wiggins, 1990, s. 608-609], [Weisstein, 2010c]:

Definition 2.2 *Lad f være en kontinuert differentiabel afbildning på $\mathbb{R}^n$ og lad $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ være et kompakt invariant mængde under f. Λ kaldes da en kaotisk invariant mængde under f, hvis*

1. *f udviser følsomhed på begyndelsesbetingelserne på Λ.*
2. *f er topologisk transitiv på Λ.*
3. *de periodiske baner under f er tætte i Λ.*

At f er topologisk transitiv på Λ betyder, at givet to relativt åbne mængder $U, V \subset \Lambda$, så vil f på et eller andet tidspunkt fører punkter fra U over i V [Weisstein, 2010d]. Hvis f er en løsning til det sæt af differentialligninger, der bestemmer et givet kontinuert dynamisk systems opførsel, betyder dette, at der findes et tidspunkt t, således at $f(U,t) \cap V \neq \emptyset$. Hvis f derimod betegner det ligningssystem, der bestemmer opførslen af et givet diskret dynamisk

[2]Man kunne her indvende, at hvis arbejdet med et dynamisk system består i, at man foretager computersimuleringer af systemet (se f.eks. det arbejde, der er beskrevet i [Larsen et al., 2006]), så kan man godt komme til at kende begyndelsesbetingelserne uendeligt præcist, da man selv kan bestemme dem. I dette tilfælde vil der så bare være senere tilstande, som man ikke kender uendeligt præcist, hvilket skyldes, at computeren foretager afrundiger under simuleringen.

Figur 2.1: På denne figur er idéen i konstruktionen af Cantormængden illustreret. Figuren er lånt fra [Wikipedia, 2010b].

system, betyder det, at der findes et $n \in \mathbb{Z}$, så $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Sagt med andre ord betyder topologisk transitiv, at punkterne i et lille område i Λ under f med tiden vil blive spredt ud over hele Λ.

2.6 Cantormængden

En af de helt essentielle egenskaber ved Smales hestesko er, at der i dette dynamiske systems tilstandsrum er en invariant mængde, der kan beskrives som en Cantormængde (se afsnit 3.2). Cantormængder findes i flere forskellige udgaver [Hilborn, 1994, s. 396-397], men da alle Cantormængder er homeomorfe, kan man sige, at der kun er én Cantormængde op til homeomorfi. Derfor giver det mening at tale om Cantormæn*den*. Jeg vil her beskrive et klassisk eksempel på konstukrionen af Cantormængden.

Lad os starte med at se på det lukkede interval $S_0 = [0, 1]$. Vi fjerner så det åbne interval $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ - altså den midterste tredjedel af S_0 - fra S_0 og får derved mængden $S_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Derefter fjerner vi den miderste tredjedel i hver af de to disjunkte intervaller i S_1 og får derved mængden $S_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$. Hvis man forsætter denne procedure med at fjerne de midterste tredjedele i det uendelige, får man til sidst en grænsemængde, der er givet ved $lim_{n\to\infty} S_n = C$. Denne mængde kaldes for ***Cantormængden*** [Strogatz, 1994, s. 401]. Konstruktionen af C ses skitseret på figur 2.1.

Cantormængden C besidder en del interessante egenskaber. En af disse er, at den ved uendeligt mange forskellige grader af forstørrelse indeholder kopier af sig selv. Sagt med andre ord er Cantormængden selvsimilær [Strogatz, 1994, s. 402]. Hvis man f.eks. forstørrer den del af C, der er indeholdt i intervallet $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, tre gange, så vil denne forstørrelse være en tro kopi af hele C. Denne egenskab medfører bl.a., at Cantormængden ved vilkårligt store grader af forstørrelse vil blive ved med at have en kompliceret struktur. To andre egenskaber ved Cantormængden, der er værd at nævne, er, at den har en længde på 0 og består af overtælleligt mange punkter [Strogatz, 1994, s. 402].

En generel definition af Cantormængden er, at den er det eneste topologiske rum op til homeomorfi, der er kompakt, fuldstændigt usammenhængende og perfekt [Wiggins, 1990, s. 441-442], [Barile and Weisstein, 2010]. En ***fuldstændig usammenhængende mængde*** er en mængde, hvis største

sammenhængskomponent er et punkt, mens en ***perfekt mængde*** er en mængde, hvorom det gælder, at ethvert punkt x i mængden er grænsepunkt for en følge af punkter i mængden fraregnet x [Wiggins, 1990, s. 436]. Dette er ensbetydende med, at en perfekt mængde er en mængde, der ikke indeholder nogen isolerede punkter. Da Cantormængden altså både er fuldstændigt usammenhængende og perfekt, må dens struktur være temmeligt kompliceret, da det, at den er fuldstændigt usammenhængende, tvinger punkterne i den fra hinanden, mens det, at den er perfekt, tvinger punkterne i den mod hinanden.

2.7 Ikke-vandrende punkter

For at kunne forstå min beskrivelse af Smales hestesko i kapitel 3 er man nødt til at vide, hvad ikke-vandrende punkter[3] er. For at kunne forklare, hvad ikke-vandrende punkter er, vil jeg starte med at forklare, hvad vandrende punkter er. Lad f være en diffeomorfi på mangfoldigheden M. Et ***vandrende punkt*** for f er et punkt x, for hvilket der findes en omegn U, så $\bigcup_{|m|>0} f^m(U) \cap U = \emptyset$ [Smale, 1967, s. 749]. Et vandrende punkt x er altså et punkt, for hvilket det gælder, at alle punkter, der starter med at ligge indenfor en vis omegn af x, aldrig under hverken forlæns eller baglæns iterationer med f vil blive afbildet indenfor denne omegn igen. Hvis x er et ***ikke-vandrende punkt*** for f, betyder det kort fortalt, at det ikke er et vandrende punkt for f. Den præcise definition af et ikke-vandrende punkt er, at x er et ikke-vandrende punkt for f, hvis der for enhver åben omegn U af x findes et $m > 0$, så $f^m(U) \cap U \neq \emptyset$ [Weisstein, 2010b]. x er altså et ikke-vandrende punkt for f, hvis der findes punkter, der starter med at ligge vilkårligt tæt på x, og som under et vist antal iterationer under f igen bliver afbildet vilkårligt tæt på x. Ifølge Smale udgør mængden af ikke-vandrende punkter for f, der benævnes $\Omega = \Omega(f)$, en lukket, invariant mængde i M [Smale, 1967, s. 749].

Ifølge Smale er ikke-vandrende punkter den type punkter, der besidder den mildest mulige form for rekurrens [Smale, 1967, s. 749]. Der findes flere forskellige former for rekurrens. En strengere form end den, som ikke-vandrende punkter besidder, kunne være en, der er defineret på følgende måde: Hvis f er en diffeomorfi på mangfoldigheden M, så er punktet $x \in M$ et rekurrent punkt for f, hvis der findes en delfølge $\{\overline{x_n}\}$ af banen for x under f, således at $\lim_{n\to\infty} \overline{x_n} = x$. Denne definition er ensbetydende med at sige, at x er et rekurrent punkt for f, hvis der for alle $\epsilon > 0$ findes et $n \in \mathbb{Z}$, så $|x - f^n(x)| < \epsilon$. Denne form for rekurrens er strengere end den, som ikke-vandrende punkter besidder, da den kræver, at det rekurrente punkt selv

[3] Smale kalder disse punkter for *nonwandering points*. „Ikke-vandrende punkter“ er min egen oversættelse af dette engelske begreb. Tilsvarende er „vandrende punkter“ min egen oversættelse af det engelske begreb *wandering points*.

under et givet antal iterationer bliver afbildet vilkårligt tæt på sit begyndelsespunkt. Definitionen af ikke-vandrende punkter stiller derimod ingen krav til banerne for selve de ikke-vandrende punkter, men udtaler sig kun om åbne omegne omkring de ikke-vandrende punkter.

2.8 Skifteautomorfier

Skifteautomorfier er yderst essentielle i forbindelse med Smales hestesko, da hesteskoen og skifteautomorfierne i en vis forstand er ækvivalente (se afsnit 3.3). Ligheden mellem Smales hestesko og skifteautomorfierne betyder bl.a., at man kan forstå dele af dynamikken i Smales hestesko ved at forstå skifteautomorfiernes dynamik. Jeg vil derfor nu forklare, hvad en skifteautomorfi er. Lad S være en mængde med N elementer, hvor N er et endeligt, positivt heltal, og lad X_S være mængden af funktioner fra $\mathbb{Z}$ ind i S. En given funktion $a \in X_S$ kan da beskrives som en biuendelig følge af elementer fra S delt af et punktum mellem element 0 og element 1, altså $a = \ldots a_{-1}a_0.a_1a_2\ldots$, hvor a_m er værdien af a i $m \in \mathbb{Z}$ [Smale, 1967, s. 770]. Det er tydeligt, at en bestemt sådan biuendelig følge svarer til én bestemt funktion i X_S, da følgen bestemmer funktionsværdierne til hver eneste punkt i $\mathbb{Z}$. Hvis en biuendelig følge svarede til to forskellige funktioner a og b i X_S, ville det betyde, at funktionsværdierne for a og b var de samme i hvert eneste punkt i $\mathbb{Z}$ - og så er a og b jo den samme funktion. Det er også tydeligt, at man for hver eneste mulige biuendelige følge kan finde en funktion i X_S, der svarer til denne følge. Der er altså et bijektivt forhold mellem X_S og mængden af biuendelige følger. Jeg vil i resten af opgaven derfor tillade mig at benytte betegnelsen X_S om mængden af biuendelige følger bestående af elementer fra S istedet for mængden af funktioner fra $\mathbb{Z}$ til S.

Man kan nu definere en afbildning $\alpha : X_S \mapsto X_S$, således at $(\alpha(a))_m = a_{m+1}$. Da a ifølge den nye definition af X_S er en biuendelig følge bygget op af elementer fra S, er virkningen af α på a, at den flytter punktummet en plads til højre. Afbildningen α er det, der kaldes en ***skifteautomofi*** [Smale, 1967, s. 770].

Hvis man betragter skifteautomorfier som dynamiske systemer, er noget af det, der gør dem interessante, at deres opførsel er kaotisk. Dette kan man vise vha. definition 2.2. Først er man dog nødt til at have defineret en metrik på X_S. Jeg vil her følge Wiggins og benytte den metrik, der er givet ved [Wiggins, 1990, s. 430]

$$\text{For } a, b \in X_S : d(a,b) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{\delta_i}{2^{|i|}} \text{ hvor } \delta_i = \begin{cases} 0 \text{ hvis } a_i = b_i \\ 1 \text{ hvis } a_i \neq b_i \end{cases} \tag{2.5}$$

Ud fra denne formel fremgår det, at afstanden mellem to biuendelige følger $a, b \in X_S$ delvist afhænger af, hvor lang en sekvens i midten af de to følger,

der er ens for dem begge. Jo længere sekvensen er, jo mindre er afstanden mellem de to følger.

Ifølge definition 2.2 er skifteautomorfien α kaotisk på X_S, hvis den udviser følsomhed på begyndelsesbetingelserne på X_S, er topologisk transitiv på X_S og hvis de periodiske baner under α er tætte i X_S. Den sidste af disse betingelser er den, det er lettest at argumentere for. De periodiske baner under α består nemlig af alle de periodiske følger i X_S, og det er relativt let at overbevise sig om, at disse følger er tætte i X_S.

Følsomhed på begyndelsesbetingelserne betyder som nævnt i afsnit 2.5, at banerne for to begyndelsesbetingelser, der ligger meget tæt på hinanden, vil bevæge sig væk fra hinanden under enten forlæns eller baglæns iteration med α. Lad os derfor betragte to forskellige følger a og b i X_S, for hvilke det gælder, at $\{a_{-k}, \ldots, a_0.a_1, \ldots, a_k\} = \{b_{-k}, \ldots, b_0.b_1, \ldots, b_k\}$, hvor k er et positivt heltal. Da a og b er forskellige, kan vi antage, at der findes et $n > k$, således at $a_n \neq b_n$ [4]. Når man gentagne gange bruger α på a og b, bliver a_n ifølge definitionen af α flyttet tættere og tættere ind mod midten af billedfølgen af a, mens b_n bliver flyttet tættere og tættere ind mod midten af billedfølgen af b. Dette betyder, at længden af den sekvens, der er ens i midten af de to billedfølger bliver mindre og mindre, hvilket ifølge den ovenstående metrik er ensbetydende med, at afstanden mellem dem bliver større og større. Derfor har vi nu gjort rede for, at selvom a og b starter med at ligge tæt på hinanden, vil banerne, der starter i dem, under gentagne iterationer med α bevæge sig længere og længere væk fra hinanden, hvilket betyder, at α udviser følsomhed på begyndelsesbetingelserne på X_S.

At α er topologisk transitiv betyder som nævnt i afsnit 2.5, at hvis man har to omegne $U, V \subset X_S$, så vil α under et givet antal iterationer fører punkter fra U over i V. Ifølge den ovenstående metrik på X_S, kan U sættes til at være mængden af følger på formen $\{\ldots, a_k, \ldots, a_0.a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$, hvor $\{a_k, \ldots, a_0.a_1, \ldots, a_n\}$ er en bestemt sekvens. Tilsvarenden kan V sættes til at være mængden af følger på formen $\{\ldots, b_m, \ldots, b_0.b_1, \ldots, b_l, \ldots\}$. Da V indeholder alle følger på denne form, vil den specielt indeholde alle de følger på denne form, der i delfølgen $\{\ldots, b_{m-2}, b_{m-1}\}$ indeholder sekvensen $\{a_k, \ldots, a_0.a_1, \ldots, a_n\}$. Tilsvarende vil U indeholde alle følger på formen $\{\ldots, a_k, \ldots, a_0.a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$, der i delfølgen $\{a_{n+1}, a_{n+1}, \ldots\}$ indeholder sekvensen $\{b_m, \ldots, b_0.b_1, \ldots, b_l\}$. Ud fra definitionen af α medfører disse betragtninger, at α under et givet antal iterationer fører punkter fra U over i V, hvorfor α er topologisk transitiv. Vi har nu fået vist, at skifteautomofien α er kaotisk på X_S.

[4] Vi kunne lige så godt have antaget, at $n < -k$, da dette ville føre til et argument, der er helt analogt til det, der kommer ud af at antage, at $n > k$.

Kapitel 3

Smales hestesko

I dette kapitel vil jeg beskrive det diskrete dynamiske system, der har fået navnet Smales hestesko, og som er omdrejningspunktet for mit projekt. I forbindelse med Smales hestesko henviser mange værker (f.eks. [Alligood et al., 1996, s. 410], [Gleick, 1989, s. 289] og [Hilborn, 1994, s. 169]) til en artikel med titlen *Differentiable Dynamical Systems*, som Stephen Smale skrev i 1967 [Smale, 1967]. I præsentationen af hesteskoen i denne artikel henviser Smale selv til en tidligere artikel med titlen *Diffeomorphisms with Many Periodic Points*, som han skrev i 1965 [Smale, 1965]. Denne tidligere artikel behandler udelukkende idéerne bag hesteskoen og indeholder bl.a. en præsentation af en abstrakt udgave af den, mens artiklen fra 1967 blot behandler hesteskoen som et blandt mange emner. Mens artiklen fra 1965 holder præsentationen af hesteskoen på et så abstrakt niveau, at det kan være svært at se for sig, hvad der geometrisk set foregår, så præsenterer artiklen fra 1967 dog bevidst hesteskoen på en mere geometrisk måde [Smale, 1967, s. 775]. Jeg har derfor i min beskrivelse af Smales hestesko valgt hovedsageligt at tage udgangspunkt i artiklen fra 1967 og benytte Smales betegnelser fra denne artikel for variable størrelser, selvom denne artikel ikke er Smales første præsentation af hesteskoen. Artiklen fra 1965 vil dog også blive inddraget. Ud over disse to artikler vil jeg også støtte mig lidt til sekundære værker, da Smales egne artikler til tider er teknisk meget svært tilgængelige.

I sin artikel fra 1967 præsenterer Smale en undersøgelse af forskellige diffeomorfiers globale opførsel ved gentagen iteration, og som et led i denne undersøgelse beskriver han hesteskoafbildningen. Det egentlige formål med artiklen er at give en oversigt over den globale analyse af differentiable dynamiske systemer [Smale, 1967, s. 747]. Smale starter artiklen med at forklare, at han vil gøre dette ved at studere afbildninger af typen $H : \mathbb{Z} \times M \mapsto M$, hvor M er en mangfoldighed og H er givet ved $H(m, x) = f^m(x)$, hvor f er en diffeomorfi fra M ind i M [Smale, 1967, s. 747]. Med andre ord er det, som Smale arbejder med, iterationer af diffeomorfier på en mangfoldighed M. For en konkret diffeomorfi udgør dette iterationssystem et diskret dy-

namisk system, hvor M fungerer som tilstandsrummet for det dynamiske system, og diffeomorfien styrer systemets opførsel. Smale undersøger disse diskrete dynamiske systemers globale opførsel ved at undersøge alle deres baner. Smale siger, at motivationen til hans undersøgelser kommer fra ordinære differentialligninger, der som nævnt i kapitel 2 beskriver kontinuerte, ikke diskrete, dynamiske systemer. Grunden til at han alligevel arbejder med diskrete dynamiske systemer, er, at problemer og fænomer fra teorien omkring ordinære differentialligninger kan studeres i deres simpleste form ved hjælp af diskrete dynamiske systemer[1] [Smale, 1967, s. 747]. Arbejdet med kontinuerte dynamiske systemer kan altså forsimples, hvis man kan omforme systemerne til diskrete systemer. Denne omformning kan f.eks. opnås vha. en Poincaréafbildning (se afsnit 2.2).

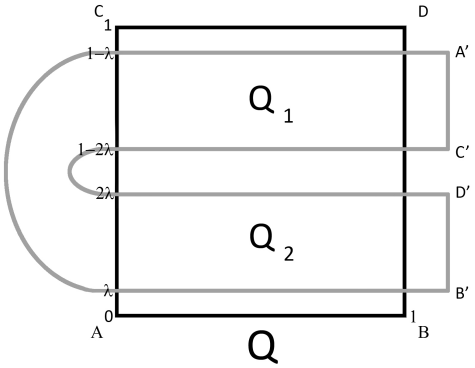
I gennemgangen i afsnit 3.1-3.4 vil jeg tage udgangspunkt i Smales oprindelige hesteskoafbildning, der er en delvis affin afbildning [Smale, 1965, s. 74], [Smale, 1967, s. 771]. Derefter vil jeg i afsnit 3.5 beskrive en måde, hvorpå man kan udvide idéerne bag hesteskoen til også at kunne bruges i forbindelse med ikke-affine afbildninger.

3.1 Smales hestesko

Jeg vil starte med at beskrive den grundlæggende idé bag Smales hestesko. Lad os først se på en diffeomorfi g gående fra en delmængde Q af planen ind i planen. I sin artikel fra 1967 lader Smale Q være kvadratet $Q = \{(x, y)||x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ i $\mathbb{R}^2$, men han gør samtidig opmærksom på, at dette kun er et eksempel på, hvad Q kan være [Smale, 1967, s. 770]. Jeg vil i min definition af Q ikke følge Smale, men Wiggins og lade Q være kvadratet $Q = \{(x, y)|0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ i $\mathbb{R}^2$ [Wiggins, 1990, s. 421]. g defineres nu til at være en afbildning, der trykker Q sammen i vertikal retning og strækker det ud i horisontal retning, således at der bliver dannet et rektangel. Dette rektangel bliver derefter foldet sammen til en hesteskoform og lagt ovenpå Q på en sådan måde, at buen og enderne af hesteskoen rager ud over Q. De dele af hesteskoen, der ligger inde i Q, kommer således til at udgøre to rektangler (Q_1 og Q_2 på figur 3.1). Sagt på en anden måde er g en afbildning, der afbilder Q over i det hesteskoformede område på figur 3.1. g er defineret således, at $g(A) = A'$, $g(B) = B'$, $g(C) = C'$ og $g(D) = D'$. Ifølge Smale kan enhver afbildning, der opfylder følgende to betingelser, benyttes som afbildningen g [Smale, 1967, s. 771]:

Betingelse 3.1.1 *g er en diffeomofi på Q, der afbilder Q surjektivt ind i det hesteskoformede område på figur 3.1 på en sådan måde, at $g(A) = A'$,*

[1] Smale skelner ikke selv mellem diskrete og kontinuerte dynamiske systemer, men derimod mellem differentialligninger og diffeomorfier. Set udfra den moderne sprogbrug vedrørende dynamiske systemer er det, Smale taler om, dog diskrete og kontinuerte dynamiske systemer.



Figur 3.1: På denne figur er det hesteskoformede område, der er afgrænset af den lysegrå linje, billedet af kvadratet Q under g.

$g(B) = B'$, $g(C) = C'$ *og* $g(D) = D'$.

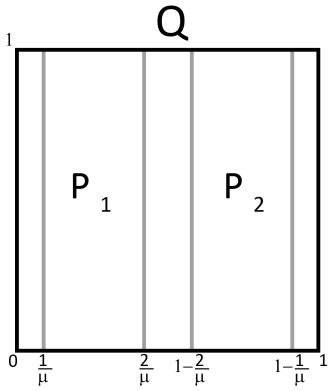
Betingelse 3.1.2 *g er en affin afbildning på hver af komponenterne P_1 og P_2 af $g^{-1}(g(Q) \cap Q)$ (se figur 3.2).*

Ifølge Alligood, Sauer og Yorke bør man udover disse to betingelser kræve, at g trækker afstande sammen og strækker afstande ud på en uniform måde på Q [Alligood et al., 1996, s. 216]. Ifølge betingelse 3.1.2 skal g være en affin afbildning på originalmængden til fællesmængden $g(Q) \cap Q$ under g. En konsekvens af denne betingelse er ifølge Smale, at denne originalmængde består af rektanglerne P_1 og P_2 på figur 3.2, og at P_1 under g føres over i Q_1 på figur 3.1 og at P_2 under g føres over i Q_2 [Smale, 1967, s. 771]. For at gøre hesteskoafbildningen lidt mere håndgribelig vil jeg nu med inspiration fra [Wiggins, 1990, s. 421] give et eksempel på, hvordan g kunne være defineret.

Vi ser på kvadratet Q, der er defineret som ovenfor. Lad nu g være en diffeomorfi fra Q ind i $\mathbb{R}^2$, der fører Q surjektivt ind i det hesteskoformede område på figur 3.1. For at opfylde kravet fra Alligood, Sauer og York defineres g således, at den på Q trykker afstande sammen og strækker afstande ud på en uniform måde. Da vi ønsker at kunne bruge g gentagne gange på billedet af Q under g, og da en del af billedet af Q under g ligger uden for Q, bliver vi nødt til at lade g være defineret på hele $\mathbb{R}^2$ og ikke kun på Q. Udenfor Q er det nok at kræve af g, at den er kontinuert og injektiv [Alligood et al., 1996, s. 218].

Ifølge betingelse 3.1.2 skal g på originalmængden til $g(Q) \cap Q$ under g være en affin afbildning. Denne originalmængde består i mit eksempel af rektanglerne P_1 og P_2 i Q, der ses på figur 3.2, og som er givet ved

$$P_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \frac{1}{\mu} \leq x \leq \frac{2}{\mu}, 0 \leq y \leq 1\} \tag{3.1}$$



Figur 3.2: På denne figur ses kvadratet Q med delmængden $P_1 \cup P_2 = g^{-1}(g(Q) \cap Q)$ indtegnet.

$$P_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 1 - \frac{2}{\mu} \leq x \leq 1 - \frac{1}{\mu}, 0 \leq y \leq 1\} \tag{3.2}$$

hvor $\mu > 4$. g afbilder altså P_1 og P_2 over i $g(Q) \cap Q$, der i mit eksempel består af rektanglerne Q_1 og Q_2 på figur 3.1, der er givet ved

$$Q_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, 1 - 2\lambda \leq y \leq 1 - \lambda\} \tag{3.3}$$

$$Q_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, \lambda \leq y \leq 2\lambda\} \tag{3.4}$$

hvor $\lambda < \frac{1}{4}$. Mere præcist afbilder g P_2 over i Q_2 ved kontraktion, ekspansion og translation, mens P_1 afbildes over i Q_1 ved kontraktion, ekspansion, translation og en rotation på 180 grader. Ud fra dette kan man udlede, at g på P_1 og P_2 er givet ved følgende affine afbildning:

$$g(x, y) = \begin{cases} \begin{pmatrix} -\mu & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 - \lambda \end{pmatrix} & \text{hvis } (x, y) \in P_1 \\ \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 - \mu \\ \lambda \end{pmatrix} & \text{hvis } (x, y) \in P_2 \end{cases} \tag{3.5}$$

Jeg er nu kommet frem til et konkret eksempel på, hvordan en hesteskoafbildning kan se ud. På trods af, at man i mange anvendelsessammenhænge har brug for en hesteskoafbildning, der ikke er affin (se afsnit 3.5),vil jeg i den følgende beskrivelse af egenskaber ved Smales hestesko benytte denne afbildning som hesteskoafbildningen g, da dette modvirker, at mine pointer drukner i regnetekniske teknikaliteter.

3.2 Mængden Λ

Hvis man udsætter Q for gentagne iterationer med enten g eller g^{-1} (g^{-1} er veldefineret, da g er en diffeomorfi), vil en større og større del af de punkter, der starter med at ligge i Q, blive afbildet udenfor Q. I forbindelse med Smales hestesko er det interessante den mængde af punkter i Q, der under vilkårligt mange både forlæns og baglæns iterationer med g forbliver i Q. Denne mængde af punkter benævnes Λ og er givet ved [Smale, 1967, s. 771]

$$\Lambda = \bigcap_{m \in Z} g^m(Q^{(m)}) \tag{3.6}$$

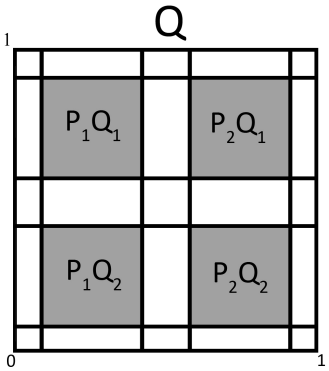
hvor $Q^0 = Q$, $Q^{(m)} = Q \cap$ *billedet af* Q *under* g^{m-1} for $m > 0$ og $Q^{(m)} = g^m(Q^{(m+1)})$ for $m < 0$. Ifølge Smale kan Λ ses som mængden af ikke-vandrende punkter for g [Smale, 1967, s. 771]. Jeg vil nu vise, hvordan Λ kan konstrueres. Vi kan starte med at konkludere, at alle punkter i Λ må starte med at ligge i $P_1 \cup P_2$, for ellers vil de ved første iteration med g havne udenfor $g(Q) \cap Q$ og dermed udenfor Q. Jeg kan derfor i min konstruktion af Λ nøjes med at se på restriktionen af g til $P_1 \cup P_2$, der jo er givet ved ligning 3.5. For at undgå forvirring vil jeg kalde denne restriktion for g_r. Λ er da i min konstruktion af den givet ved

$$\Lambda = \bigcap_{m \in Z} g_r^m(Q^{(m)}) \tag{3.7}$$

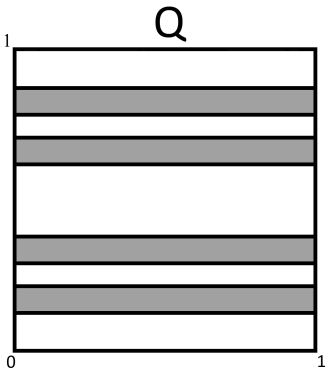
Med inspiration fra Wiggins og Alligood, Sauer og York vil jeg konstruere Λ ved først at konstruere mængderne $\bigcap_{m=0}^{\infty} g_r^m(Q^{(m)})$ og $\bigcap_{-\infty}^{m=0} g_r^m(Q^{(m)})$ og derefter finde fællesmængden imellem dem [Wiggins, 1990, s. 423], [Alligood et al., 1996, s. 218-219]. Lad os starte med at konstruere mængden $\bigcap_{m=0}^{\infty} g_r^m(Q^{(m)})$. Jeg vil her følge Wiggins og konstruere denne mængde et trin af gangen [Wiggins, 1990, s. 423-428]. Lad os derfor starte med mængden $\bigcap_{m=0}^{1} g_r^m(Q^{(m)}) = Q \cap g_r(Q)$. Som vi allerede har konstateret, består denne mængde af rektanglerne Q_1 og Q_2 på figur 3.1. Fatisk består $g_r(Q)$ af disse to rektangler, men da de begge ligger helt inde i Q, må $Q \cap g_r(Q)$ også består af dem. Lad os nu gå videre til at se på mængden givet ved

$$\bigcap_{m=0}^{2} g_r^m(Q^{(m)}) = Q \cap g_r(Q) \cap g_r(g_r(Q)) = (Q_1 \cup Q_2) \cap g_r(Q_1 \cup Q_2) \tag{3.8}$$

Det jeg mangler at vide for at kunne beskrive denne mængde, er, hvordan $g_r(Q_1 \cup Q_2)$ ser ud. Da g_r er restriktionen af g til $P_1 \cup P_2$, kan g_r kun virke på de dele af $Q_1 \cup Q_2$, der ligger i $P_1 \cup P_2$. Da alle andre dele af $Q_1 \cup Q_2$ bliver afbildet udenfor Q under g, betyder disse dele alligevel ikke noget for min konstruktion af Λ. Jeg vil derfor nu bestemme virkningen af g_r på mængden $(Q_1 \cup Q_2) \cap (P_1 \cup P_2)$. Denne mængde er markeret med gråt på figur 3.3. På



Figur 3.3: Kvadratet Q med mængden $(Q_1 \cup Q_2) \cap (P_1 \cup P_2)$ markeret med gråt.



Figur 3.4: Kvadratet Q med mængden $g_r(Q_1 \cup Q_2)$ indtegnet.

denne figur ses det, at $(Q_1 \cup Q_2) \cap (P_1 \cup P_2)$ består af fire disjunkte mængder. To af disse (P_1Q_1 og P_1Q_2 på figuren) er delmængder af P_1 og må derfor ifølge min konstruktion af g_r afbildes til delmængder af Q_1. Ud fra ligning 3.5 kan man se, at de vil blive afbildet over i to rektangler, som ligger i Q_1, og hvis længde er 1 og højde er $\lambda^2 = \lambda$ *gange højden af* Q_1 (se ligning 3.3). På tilsvarende vis er de to andre disjunkte mængder i $(Q_1 \cup Q_2) \cap (P_1 \cup P_2)$ (P_2Q_1 og P_2Q_2 på figur 3.3) delmængder af P_2, der under g_r bliver afbildet over i to rektangler i Q_2, med længden 1 og højden $\lambda^2 = \lambda$ *gange højden af* Q_2 (se ligning 3.4). $g_r(Q_1 \cup Q_2)$ består altså af fire rektangler, der er delmængder af $Q_1 \cup Q_2$ og som alle har længden 1 og højden λ^2. Disse fire rektangler er vist på figur 3.4. Da disse fire rektangler altså ligger i $Q_1 \cup Q_2$, betyder det, at mængden givet ved ligning 3.8 består af netop disse rektangler.

Hvis vi nu ser på mængden givet ved

$$\bigcap_{m=0}^{k} g_r^m(Q^{(m)}) \tag{3.9}$$

så gælder det generelt for $k \geq 1$, at denne mængde består af 2^k disjunkte rektangler, der alle er delmængder af $Q_1 \cup Q_2$, og som alle har længden 1 og højden λ^k [Wiggins, 1990, s. 426]. Dette må betyde, at mængden givet ved

$$\bigcap_{m=0}^{\infty} g_r^m(Q^{(m)}) \tag{3.10}$$

består af uendeligt mange disjunkte rektangler med længden 1 og højden 0, da $\lambda < \frac{1}{4}$. Med andre ord består mængden givet ved ligning 3.10 af uendeligt mange disjunkte horisontale linjer, der alle ligger i $Q_1 \cup Q_2$. Hvis man sammenligner figur 3.1 og figur 3.4 med konstruktionen af Cantormængden i afsnit 2.6, kan man overbevise sig om, at denne mængde af horisontale linjer er produktet mellem Cantormængden og intervallet $[0, 1]$, hvilket Smale også selv pointerer [Smale, 1967, s. 771].

Jeg vil nu konstruere mængden $\bigcap_{-\infty}^{m=0} g_r^m(Q^{(m)})$. Jeg vil igen følge Wiggins og konstruere denne mængde et trin ad gangen [Wiggins, 1990, s. 423-428]. Lad os derfor starte med at se på mængden $\bigcap_{-1}^{m=0} g_r^m(Q^{(m)}) = Q \cap g_r^{-1}(Q)$. Da $g_r : P_1 \cup P_2 \mapsto Q_1 \cup Q_2$, gælder det, at $g_r^{-1} : Q_1 \cup Q_2 \mapsto P_1 \cup P_2$. Dette betyder, at $g_r^{-1}(Q) = P_1 \cup P_2$. Da $P_1 \cup P_2$ ligger i Q, består mængden $Q \cap g_r^{-1}(Q)$ derfor af rektanglerne P_1 og P_2. Jeg vil nu gå videre til at bestemme mængden

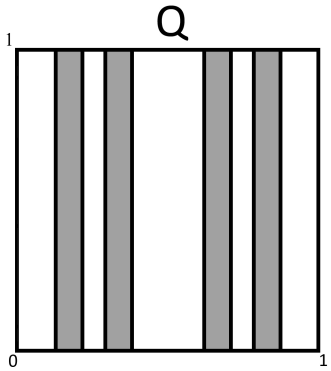
$$\bigcap_{-2}^{m=0} g_r^m(Q^{(m)}) = Q \cap g_r^{-1}(Q) \cap g_r^{-1}(g_r^{-1}(Q)) = (P_1 \cup P_2) \cap g_r^{-1}(P_1 \cup P_2) \tag{3.11}$$

Hvis man husker på, at g_r^{-1} kun er defineret på $Q_1 \cup Q_2$, kan man bruge en fremgangsmåde helt analog til den, vi brugte i tilfældet med mængden givet ved ligning 3.8, og udfra ligning 3.5 komme frem til, at mængden givet ved ligning 3.11 består af fire rektangler, der alle ligger i $P_1 \cup P_2$ og hvis højde er 1 og længde er $\left(\frac{1}{\mu}\right)^2 = \frac{1}{\mu}$ *gange længden af* P_1 [2]. Disse fire rektangler ses på figur 3.5.

Hvis vi nu ser på mængden givet ved

$$\bigcap_{k}^{m=0} g_r^m(Q^{(m)}) \tag{3.12}$$

[2] Man kunne ligeså godt have sagt, at længden af de fire rektangler var $\frac{1}{\mu}$ *gange længden af* P_2, da P_1 og P_2 er lige lange.



Figur 3.5: Kvadratet Q med mængden $(P_1 \cup P_2) \cap g_r^{-1}(P_1 \cup P_2)$ indtegnet.

så gælder det generelt for $k \leq -1$, at denne mængde består af $2^{|k|}$ disjunkte rektangler, der alle er delmængder af $P_1 \cup P_2$, og som alle har højden 1 og længden $\left(\frac{1}{\mu}\right)^{|k|}$. Dette medfører, at mængden givet ved

$$\bigcap_{-\infty}^{m=0} g_r^m(Q^{(m)}) \tag{3.13}$$

består af uendeligt mange disjunkte rektangler med højden 1 og længden 0, da $\mu > 4$. Med andre ord består den ovenstående mængde af uendeligt mange disjunkte vertikale linjer, der alle er delmængder af $P_1 \cup P_2$.

Da mængderne $\bigcap_{m=0}^{\infty} g_r^m(Q^{(m)})$ og $\bigcap_{-\infty}^{m=0} g_r^m(Q^{(m)})$ nu er blevet konstrueret, er det tid til at få beskrevet mængden Λ, der jo ifølge ligning 3.7 er fællesmængden mellem disse mængder. Da $\bigcap_{m=0}^{\infty} g_r^m(Q^{(m)})$ består af uendeligt mange disjunkte horisontale linjer i Q, og $\bigcap_{-\infty}^{m=0} g_r^m(Q^{(m)})$ består af uendeligt mange disjunkte vertikale linjer i Q, må Λ være en fuldstændigt usammenhængende mængde i Q, da fællesmængden mellem en horisontal og en vertikal linje er et punkt. Derudover er Λ en invariant mængde under g. Dette skyldes, at hvis Λ ikke var en invariant mængde, ville nogle punkter i Λ under et givet antal enten forlæns eller baglæns iterationer med g blive afbilledet uden for Λ. Da Λ pr. definition består af alle de punkter, der under vilkårligt mange iterationer med g forbliver i Q, ville det betyde, at nogle punkter i Λ ville blive afbildet i nogle punkter, der under et givet antal iterationer blev afbildet udenfor Q, hvilket er i modstrid med definitionen af Λ.

Ifølge Smale er Λ homeomorf med Cantormængden [Smale, 1967, s. 770]. Dette betyder, at Λ udover at være en fuldstændig usammenhængende mængde også er en perfekt mængde, hvorfor Λ ligesom Cantormængden besidder en yderst kompliceret struktur (se afsnit 2.6).

3.3 Smales hestesko og skifteautomorfier

I afsnit 2.8 sagde jeg, at Smales hestesko på sin vis er ækvivalent med en skifteautomorfi, hvilket betyder, at man kan forstå dele af dynamikken i Smales hestesko ved at forstå skifteautomorfiens dynamik. Jeg vil nu forklare, hvad denne lighed helt præcist består i. Lad os starte med at se på mændgen Λ, der som nævnt er givet ved ligning 3.6. Da $Q \cap g(Q) = Q_1 \cup Q_2$, må alle punkterne i Λ ifølge ligning 3.6 ligge i enten Q_1 eller Q_2. Da Λ er en invariant mængde under g, må billedet af et punkt $\lambda \in \Lambda$ under et givet antal iterationer med g igen ligge i Q_1 eller Q_2. Ifølge Alligood, Sauer og Yorke kan man derfor beskrive ethvert punkt $\lambda \in \Lambda$ med en biuendelig følge af 1 og 2, der er delt af et punktum mellem element 0 og element 1, altså $\lambda = \ldots \lambda_{-1}\lambda_0.\lambda_1\lambda_2 \ldots$ [Alligood et al., 1996, s. 218]. Elementerne i denne følge bestemmes sådan, at λ_m, hvor $m \in \mathbb{Z}$, er 1, hvis $g^m(\lambda) \in Q_1$, og 2, hvis $g^m(\lambda) \in Q_2$. Alligood, Sauer og York kalder denne biuendelige følge for ruten[3] for λ [Alligood et al., 1996, s. 218]. Hvis man repræsenterer punkterne i Λ som ruter, er virkningen af restriktionen af g til Λ, at den flytter punktummerne i ruterne en plads til højre [Alligood et al., 1996, s. 221].

Hvis man sammenligner den ovenstående repræsentation af punkterne i Λ og virkningen af g på disse punkter med beskrivelsen af en skifteautomorfi i afsnit 2.8, er det tydeligt, at hvis man ser på restriktionen af g til Λ, så ligner denne afbildning en skifteautomorfi. Den præcise karakter af denne lighed fremgår af følgende sætning:

Sætning 3.1 *Delmængden Λ af Q er kompakt, invariant under g og indecomposable[4]. Derudover er afbildningen $g : \Lambda \mapsto \Lambda$ topologisk konjugeret med skifteautomorfien $\alpha : X_S \mapsto X_S$, hvor kardinaliteten af S er 2 [Smale, 1967, s. 771].*

At restriktionen af g til Λ er topologisk konjugeret med skifteautomorfien α, betyder, at der findes en homeomorfi $h : \Lambda \mapsto X_S$, således at $\alpha \circ h = h \circ g$ [Weisstein, 2010a]. Denne homeomorfi kaldes en konjugation og er i dette tilfælde den afbildning, der til ethvert punkt i Λ knytter dets rute [Wiggins, 1990, s. 433-434].

Da skifteautomorfierne ifølge afsnit 2.8 er kaotiske, medfører sætning 3.1, at Smales hestesko er kaotisk. Derudover medfører sætning 3.1 ifølge Wiggins også, at følgende sætning gælder [Wiggins, 1990, s. 436]:

Sætning 3.2 *Restriktionen af g til Λ har*

1. *en tællelig, uendelig mængde af periodiske baner af vilkårligt høje perioder. Disse er alle sadler;*

[3] Ordet „rute“ er min egen oversættelse af den engelske betegnelse *itinerary*.

[4] Smales definition af en *indecomposable* mængde lyder således: En lukket, f-invariant mængde H er indecomposable, hvis den ikke kan skrives som $H = H_1 \cup H_2$, hvor H_1 og H_2 er ikke-tomme, disjunkte, lukkede, f-invariante mængder [Smale, 1967, s. 749]. Her er f en afbildning.

2. *en overtællig mængde af aperiodiske baner;*

3. *en tæt bane.*

En tæt bane i Λ er som nævnt i afsnit 2.4 en bane, der kommer vilkårligt tæt på ethvert punkt i Λ.

3.4 Smales hestesko og homokliniske punkter

Ifølge Smale er der en sammenhæng mellem hesteskoen og homokliniske punkter for et dynamisk system. Før jeg forklare, hvad denne sammenhæng går ud på, vil jeg sige lidt om Smales definition af homokliniske punkter, da denne definition ikke er helt konsistent. I sin artikel fra 1965 definerer Smale et homoklinisk punkt for en diffeomorfi $T : M \mapsto M$, hvor M er en mangfoldighed, således, at $x \in M$ er et homoklinisk punkt for T, hvis

$$\lim_{n\to\infty} T^{nm}(x) = \lim_{n\to\infty} T^{-nm}(x) = y, x \neq y \tag{3.14}$$

hvor m er et positivt heltal og y er et sadelpunkt for T [Smale, 1965, s. 64]. Ifølge Smale selv betyder dette, at x er et skæringspunkt i tilstandsrummet mellem den stabile mangfoldighed $W^s(y)$ tilhørende y og den ustabile mangfoldighed $W^u(y)$ tilhørende y [Smale, 1965, s. 78]. Ifølge Smales tidlige artikel er et homoklinisk punkt altså et skæringspunkt mellem den stabile og den ustabile mangfoldighed tilhørende det samme sadelpunkt. Denne definition stemmer overens med den moderne definition af et homoklinisk punkt. I artiklen fra 1967 afviger Smale dog fra denne definition og siger, at et homoklinisk punkt både kan være et skæringspunkt i tilstandsrummet mellem den stabile og den ustabile mangfoldighed tilhørende samme sadelpunkt og et skæringspunkt mellem den stabile og den ustabile mangfoldighed tilhørende to forskellige sadelpunkter [Smale, 1967, s. 774]. Smales definition af homokliniske punkter er altså ikke helt konsistent, hvilket kan skyldes, at Smale var en af de første, der skrev om kaos og homokliniske punkter, hvorfor der, da han skrev sine tekster, endnu ikke var opstået en bred enighed om, hvad der mentes med de forskellige begreber. I forbindelse med sammenhængen mellen homokliniske punkter og hesteskoen siger Smale dog i artiklen fra 1967, at han her kun se på homokliniske punkter, der er skæringspunkter mellem den stabile og den ustabile mangfoldighed tilhørende samme sadelpunkt [Smale, 1967, s. 774-775]. I forbindelse med hesteskoen benytter Smale sig altså af den samme definition af homokliniske punkter i både artiklen fra 1965 og den fra 1967. I artiklen fra 1967 definerer Smale udover homokliniske punkter også begrebet heterokliniske punkter. Denne definition siger, at et heteroklinisk punkt er et skæringspunkt mellem den stabile og den ustabile mangfoldighed tilhørende to forskellige sadelpunkter [Smale, 1967, s. 755]. Heterokliniske punkter er altså ifølge artiklen fra 1967

en delmængde homokliniske punkter. Selvom definitionen af homokliniske punkter fra 1967 ikke stemmer overens med den moderne, så gør definitionen af heterokliniske punkter det faktisk. I det følgende vil homokliniske punkter være defineret som i Smales artikel fra 1965, da det jo hele vejen igennem er denne definition, som Smale bruger i forbindelse med hesteskoen.

Da stabile og ustabile mangfoldigheder er invariante (se afsnit 2.3), vil banen for et homoklinisk punkt udelukkende bestå af homokliniske punkter [Smale, 1967, s. 774]. Dette betyder, at eksistensen af ét homoklinisk punkt i et system er ensbetydende med, at der er uendeligt mange homokliniske punkter for systemet.

Ifølge Smale kompliceres dynamikken i et dynamisk system meget af homokliniske punkter [Smale, 1967, s. 774]. Hesteskoafbildningen kan bruges til at få et overblik over denne komplicerede dynamik. Dette skyldes følgende sætning:

Sætning 3.3 *Lad f være en diffeomorfi på M og lad x være et transversalt homoklinisk punkt for f. Så findes der en Cantormængde $\Lambda \subset M$, $x \in \Lambda$, og $m \in \mathbb{Z}^+$ så $f^m(\Lambda) = \Lambda$ og restriktionen af f^m til Λ topologisk er en skifteautomorfi [Smale, 1967, s. 775].*

At x er et transversalt homoklinisk punkt, betyder, at vinklen imellem tangentvektorerne til de to mangfoldigheder, der skærer hinanden i x, ikke er 0 i x [Alligood et al., 1996, s. 411]. At restriktionen af f^m til Λ topologisk er en skifteautomorfi, betyder, at afbildningen $f^m : \Lambda \mapsto \Lambda$ er topologisk konjugeret med en skifteautomorfi [Weisstein, 2010a].

Man kan overbevise sig selv om, at sætning 3.3 er rigtig ved at tegne et lille kvadrat omkring det homokliniske punkt x og se, hvad der sker med dette kvadrat under gentagen iteration med f. Pga. dynamikken omkring den stabile og ustabile mangfoldighed vil dette lille kvadrat efter et vist antal, m, iterationer blive strukket ud i en retning og foldet tilbage over sig selv på samme måde, som kvadratet Q blev det under g i afsnit 3.1. Dette betyder, at f^m er en hesteskoafbildning, og så følger sætning 3.3 umiddelbart af det, jeg indtil nu har sagt om hesteskoafbildninger.

3.5 En ikke-affin generalisering af Smales hestesko

I hvert fald en del af Smales hesteskos bidrag til udviklingen indenfor dynamiske systemer hviler på, at man kan anvende den til at få indsigt i andre dynamiske systemers dynamik. Som det vil fremgå af eksemplerne i mine to cases (se kapitel 4 og 5), består en sådan anvendelse mere præcist i, at man finder en hesteskoafbildning indlejret som et delsystem i sit dynamiske system, hvorefter man ud fra sin viden om hesteskoens dynamik kan udtale sig om dynamikken i sit dynamiske system. I forbindelse med denne form for anvendelse kan betingelse 3.1.1 og 3.1.2, som Smale som nævnt stiller til

en hesteskoafbildning i sin artikel fra 1967, godt være lidt af en forhindring. Dette skyldes, at disse betingelser er så strenge, at de udelukker mange dynamiske systemer fra at blive betragtet som systemer med indlejrerede hesteskoafbildninger, på trods af at disse systemer faktisk udviser den form for dynamik, der er det essentielle ved Smales hestesko. I sin artikel fra 1965 opstiller Smale da også nogle mildere betingelser til en hesteskoafbildning [Smale, 1965, s. 74], men disse betingelser virker temmeligt svære at anvende og verificere i praksis. Set ud fra et anvendelsesorienteret synspunkt er det derfor meget interessant, at der ifølge Wiggins findes et andet sæt generelle betingelser til dynamiske systemer, som sikrer, at systemerne indeholder en dynamik, der i alt væsentligt ligner Smales hestesko [Wiggins, 1990, s. 420]. Disse krav er ifølge Wiggins blevet opstillet af Charles Conley og Jürgen Moser [Wiggins, 1990, s. 443], og jeg vil i det følgende give en beskrivelse af dem med udgangspunkt i Mosers bog med titlen *Stable and random motions in dynamical systems* fra 1973 [Moser, 1973]. Før dette vil jeg dog forsøge at gøre klart, hvad det essentielle i betingelse 3.1.1 og 3.1.2 er.

Som nævnt i afsnit 3.1 siger betingelse 3.1.1, at hesteskoafbildningen g skal være en diffeomorfi, der afbilder kvadratet Q på figur 3.1 ind i det hesteskoformede område på denne figur på en sådan måde, at $g(A) = A'$, $g(B) = B'$, $g(C) = C'$ og $g(D) = D'$. Denne betingelse er strengere, end den dybest set behøver at være, hvilket skyldes, at vi ikke er interesserede i banerne for de punkter i Q, der efter et vist antal iterationer med g havner udenfor Q. Det vi er interesserede i, er den invarante mængde Λ, og for denne mængde er det ligegyldigt, hvordan billedet af Q under g ser ud udenfor Q. Dette betyder, at det er ligegyldigt, om det totale billede af Q under g er et hesteskoformet område eller et område, der har en vilkårlig anden form. Det vigtige er, at $g(Q)$ skærer Q i to disjunkte mængder, der tilnærmelsesvist er to horisontale rektangler (senere i dette afsnit vil det blive klart, hvad „tilnærmelsesvist“ i denne sammenhæng betyder). Smale er selv opnærksom på, at man kan se bort fra kravet om, at billedet af Q under g er hesteskoformet [Smale, 1967, s. 771-772]. I den forbindelse kommer han med endnu en generalisering af hesteskoen, idet han siger, at man kan konstruere g således, at fællesmængden $g(Q) \cap g$ består af $n > 2$ disjunkte mængder. I det tilfælde vil restriktionen af g til den invariante mængde Λ være topologisk konjugeret med skifteautomorfien $\alpha : X_S \mapsto X_S$, hvor kardinaliteten af S er n [Smale, 1967, s. 772].

Betingelse 3.1.2 siger som nævnt i afsnit 3.1, at hesteskoafbildningen g skal være en affin afbildning på hver af komponenterne P_1 og P_2 af $g^{-1}(g(Q) \cap Q)$. Ligesom i tilfældet med betingelse 3.1.1 er Smale i forbindelse med denne betingelse opmærksom på, at det er muligt at slække på den [Smale, 1965, s. 74]. Da den dog ikke er totalt overflødig, vil jeg kort se på, hvad affiniteten bidrager med. I konstruktionen af den invariante mængde Λ i afsnit 3.2 er det vigtigt, at hhv. højden af de horisontale rektankler i Q og længden af de vertikale rektankler går mod 0, når antallet af iterationer

med hhv. g og g^{-1} går mod uendeligt. Dette medfører nemlig, at mængden Λ er en fuldstændigt usammenhængende mængde, og uden denne egenskab vil Λ ikke være en Cantormængde og restriktionen af hesteskoafbildningen g til Λ vil ikke være topologisk konjugeret med en skifteautomorfi. I konstruktionen af Λ i afsnit 3.2 er det affiniteten af g, der sørger for, at højden af de horisontale rektankler og længden af de vertikale rektankler går mod 0, når antallet af iterationer med hhv. g og g^{-1} går mod uendeligt. Derudover medfører affiniteten også, at P_1 på figur 3.2 under g føres over i Q_1 på figur 3.1 og at P_2 under g føres over i Q_2 [Smale, 1967, s. 771].

Da jeg nu har fået klargjort, hvad det essentielle i betingelse 3.1.1 og 3.1.2 er, er jeg klar til at se på Mosers mere generelle betingelser. Før selve betingelserne giver nogen mening, er jeg dog nødt til at få defineret et par begreber. Jeg vil i disse definitioner følge Moser og udelukkende betragte punkter og kurver i kvadratet Q, der stadig er defineret som i starten af afsnit 3.1 [Moser, 1973, s. 68]. Lad os først få defineret begreberne horisontal kurve og vertikal kurve [Moser, 1973, s. 68-69]:

Definition 3.1 *Lad der være givet et tal $\mu \in (0,1)$. En kurve $y = u(x)$ kaldes en horisontal kurve, hvis $0 \leq u(x) \leq 1$ for $0 \leq x \leq 1$ og*

$$|u(x_1) - u(x_2)| \leq \mu\,|x_1 - x_2| \;\; \textit{for } 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1 \tag{3.15}$$

Tilsvarende kaldes en kurve $x = v(y)$ en vertikal kurve, hvis $0 \leq v(y) \leq 1$ for $0 \leq y \leq 1$ og

$$|v(y_1) - v(y_2)| \leq \mu\,|y_1 - y_2| \;\; \textit{for } 0 \leq y_1 \leq y_2 \leq 1 \tag{3.16}$$

Ud fra denne definition kan vi nu definere begreberne horisontalt bånd og vertikalt bånd[5] [Moser, 1973, s. 68-69]:

Definition 3.2 *Lad $u_1(x)$ og $u_2(x)$ være to horisontale kurver, hvorom det gælder, at $0 \leq u_1(x) < u_2(x) \leq 1$. Mængden givet ved*

$$U = \{(x,y) | 0 \leq x \leq 1; u_1(x) \leq y \leq u_2(x)\} \tag{3.17}$$

kaldes da et horisontalt bånd. Størrelsen

$$d(U) = max_{0 \leq x \leq 1}(u_2(x) - u_1(x)) \tag{3.18}$$

kaldes diameteren af U. Tilsvarende kaldes mængden

$$V = \{(x,y) | v_1(y) \leq x \leq v_1(y); 0 \leq y \leq 1\} \tag{3.19}$$

hvor $v_1(y)$ og $v_2(y)$ er to vertikale kurver, hvorom det gælder, at $0 \leq v_1(y) < v_2(y) \leq 1$, for et vertikalt bånd. Størrelsen

$$d(V) = max_{0 \leq y \leq 1}(v_2(y) - v_1(y)) \tag{3.20}$$

kaldes diameteren af V.

[5] Ordet „bånd“ er min egen oversættelse af det engelske begreb *strip*.

Med disse to definitioner på plads er det nu tid til at få Mosers to betingelser på banen. Disse to betingelser udtaler sig om en afbildning ϕ, der er defineret på kvadratet Q, og lyder som følger [Moser, 1973, s. 71-72]:

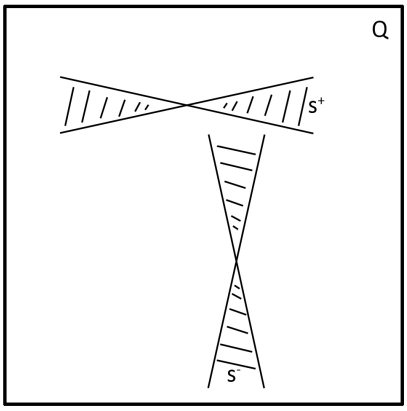
Betingelse 3.5.1 *Lad A være mængden givet ved $A = \{1, 2, \ldots, N\}$, hvis $N < \infty$, og mængden af positive heltal, hvis $N = \infty$. Vi antager da, at U_a og V_a, hvor $a \in A$, er disjunkte hhv. horisontale og vertikale bånd i Q. Det skal da gælde, at afbildningen ϕ fører V_a homeomorft og surjektivt over i U_a, altså $\phi(V_a) = U_a$ for alle $a \in A$. Dette skal den gøre på en sådan måde, at de vertikale sider af V_a føres surjektivt over i de vertikale sider af U_a og de horisontale sider af V_a føres surjektivt over i de horisontale sider af U_a.*

Betingelse 3.5.2 *Hvis V er et vertikalt bånd i $\bigcup_{a\in A} V_a$, så skal det gælde, at $\phi^{-1}(V) \cap V_a = \tilde{V}_a$ for et vilkårligt $a \in A$ er et vertikalt bånd. Ydermere skal det gælde for et fast $\nu \in (0, 1)$, at $d(\tilde{V}_a) \leq \nu d(V_a)$. Tilsvarende kræves det, at hvis U er et horisontalt bånd i $\bigcup_{a\in A} U_a$, så er $\phi(U) \cap U_a = \tilde{U}_a$ for et vilkårligt $a \in A$ er et horisontalt bånd, hvorom det gælder, at $d(\tilde{U}_a) \leq \nu d(U_a)$.*

Det er relativt let at indse, at en afbildning ϕ, der opfylder betingelse 3.5.2, vil sørge for, at højden af alle horisontale bånd og længden af alle vertikale bånd vil gå mod 0, når antallet af iterationer med hhv. ϕ og ϕ^{-1} går mod uendeligt. Derudover siger betingelse 3.5.1 eksplicit, at ϕ afbilder vertikale bånd over i horisontale. I forhold til betingelse 3.5.1 og 3.5.2 kan vi også godt tillade os at nøjes med at betragte restriktionen af ϕ til $\bigcup_{a\in A} V_a$, hvilket tydeligvis vil medføre, at fællesmængden mellem billedet af domænet for ϕ under ϕ og Q består af en mængde disjunkte mængder (en mængde disjunkte horisontale bånd), der hver især tilnærmelsesvist kan ses som et horisontalt rektankel[6]. Derfor indfanger betingelse 3.5.1 og 3.5.2 det essentielle i betingelse 3.1.1 og 3.1.2, selvom de førstnævnte betingelser er væsentligt mere generelle end de sidstnævnte. Moser beviser da også, at hvis ϕ er en homeomorfi, der opfylder betingelse 3.5.1 og 3.5.2 mht. de horisontale og vertikale bånd U_a, V_a for $a \in A$, så indeholder ϕ en delafbildning, der er topologisk konjugeret med skifteautomorfien $\alpha : X_S \to X_S$, hvor kardinaliteten af S er lig antallet af elementer i A. Hvis dette antal er endeligt, er domænet for denne delafbildning i Q en lukket, invariant Cantormængde [Moser, 1973, s. 72]. Denne delafbildning har i dette tilfælde så mange ligheder med Smales hesteskoafbildning (se sætning 3.1), at jeg vil betragte den som en generaliseret udgave af hesteskoen.

Selvom betingelse 3.5.1 og 3.5.2 er væsentligt mere generelle end betingelse 3.1.1 og 3.1.2, medfører de ikke, at situationen bliver væsentligt forbedret

[6] Vi kan godt tillade os kun at se på en restriktion af ϕ til en delmængde af domænet for ϕ, da det, vi i en anvendelsesorienteret sammenhæng er ude på, er at vise, at ϕ indeholder en delafbildning, der er en hesteskoafbildning, og da en delafbildning af en restriktion af ϕ også er en delafbildning af ϕ.



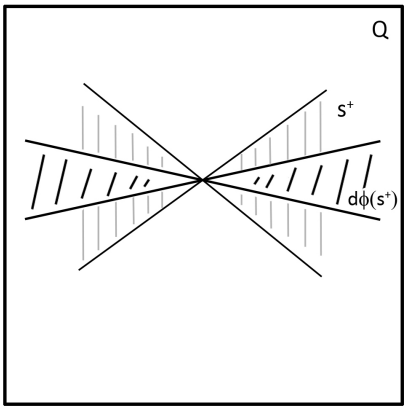
Figur 3.6: På denne figur er en sektor $s^+ \in S_\mu^+$ og en sektor $s^- \in S_\mu^-$ skitseret.

set ud fra et anvendelsessynspunkt. Dette skyldes, at især betingelse 3.5.2 ifølge Moser er meget svær at verificere for et konkret dynamisk system [Moser, 1973, s. 76]. Derfor opstiller han en tredje betingelse, der kan erstatte betingelse 3.5.2, når afbildningen ϕ er kontinuert differentiabel. Denne tredje betingelse udtaler sig om, hvordan vektorer i tangentrummet i et punkt $z_0 = (x_0, y_0) \in Q$ opfører sig, når man bruger ϕ på z_0. I det følgende vil (ξ_{z_0}, η_{z_0}) betegne en vektor i tangentrummet i z_0. Derudover vil $d\phi$ betegne differentialet knyttet til ϕ, der er en afbildning mellem tangentrum. Dette betyder, at hvis ϕ fører z_0 over i z_1, så fører $d\phi$ (ξ_{z_0}, η_{z_0}) over i en vektor (ξ_{z_1}, η_{z_1}).

For at kunne forstå Mosers tredje betingelse er det nødvendigt at få introduceret begreberne sektor og sektorbundt. En sektor er knyttet til et punkt z_0 og består af en mængde vektorer i tangentrummet i z_0, som alle opfylder en nærmere bestemt betingelse. En sektor defineret over z_0 kan f.eks. bestå af alle de vetorer i tangentrummet i z_0, hvis hældning er størrer end en vis værdi. Et sektorbundt er en mængde sektorer, der er defineret over alle punkterne i en given mængde [Wiggins, 1990, s. 459]. I forbindelse med Mosers tredje betingelse er vi særligt interesserede i de to sektorbundter, der er givet ved [Moser, 1973, s. 76]:

$$S_\mu^+ = \left\{ (\xi_z, \eta_z) \in \mathbb{R}^2 | \, |\eta_z| \leq \mu \, |\xi_z| \, ; z \in \bigcup_{a \in A} V_a \right\} \tag{3.21}$$

$$S_\mu^- = \left\{ (\xi_z, \eta_z) \in \mathbb{R}^2 | \, |\xi_z| \leq \mu \, |\eta_z| \, ; z \in \bigcup_{a \in A} U_a \right\} \tag{3.22}$$



Figur 3.7: På denne figur er virkningen af en afbildning ϕ, der opfylder betingelse 3.5.3, på S_μ^+ forsøgt illustreret.

hvor V_a og U_a er hhv. de vertikale og de horisontale bånd i betingelse 3.5.1, og $\mu \in (0,1)$. På figur 3.6 er en sektor $s^+ \in S_\mu^+$ og en sektor $s^- \in S_\mu^-$ skitseret. Med disse begreber på plads er vi nu parate til at præsentere Mosers tredje betingelse. Ligesom de to forrige betingelser udtaler denne betingelse sig om en afbildning ϕ, der er defineret på kvadratet Q, men denne gang antages det, at ϕ er kontinuert differentiabel:

Betingelse 3.5.3 *Sektorbundtet S_μ^+ givet ved ligning 3.21 skal under $d\phi$ afbildes ind i sig selv, altså $d\phi(S_\mu^+) \subset S_\mu^+$. Hvis $(\xi_0, \eta_0) \in S_\mu^+$ og $d\phi(\xi_0, \eta_0) = (\xi_1, \eta_1)$, skal det yderligere gælde, at $|\xi_1| \geq \mu^{-1} |\xi_0|$. Tilsvarende skal sektorbundtet S_μ^- givet ved ligning 3.22 afbildes ind i sig selv under $d\phi^{-1}$, hvilket vil sige, at $d\phi^{-1}(S_\mu^-) \subset S_\mu^-$. Hvis $(\xi_1, \eta_1) \in S_\mu^-$ og $d\phi^{-1}(\xi_1, \eta_1) = (\xi_0, \eta_0)$, skal det yderligere gælde, at $|\eta_0| \geq \mu^{-1} |\eta_1|$ [Moser, 1973, s. 76-77].*

Lad os bruge et øjeblik på at forstå, hvad denne betingelse egentligt siger. Hvis $d\phi(S_\mu^+) \subset S_\mu^+$, vil alle sektorerne i S_μ^+ blive trykket sammen vertikalt under $d\phi$. Hvis det samtidig gælder, at $(\xi_0, \eta_0) \in S_\mu^+$ og $d\phi(\xi_0, \eta_0) = (\xi_1, \eta_1)$ medfører, at $|\xi_1| \geq \mu^{-1} |\xi_0|$, så vil samtlige vektorer i alle sektorerne i S_μ^+ blive strukket ud horisontalt under $d\phi$. Dette betyder, at hvis afbildningen ϕ opfylder betingelse 3.5.3, så vil enhver sektor i S_μ^+ under $d\phi$ bliver trykket sammen vertikalt og strukket ud horisontalt. Dette er forsøgt illustreret på figur 3.7. Udtalelserne om S_μ^- i betingelse 3.5.3 kan tolkes på samme måde, som vi her har tolket udtalelserne om S_μ^+. De to forskellige krav til hhv. $d\phi$'s virkning på S_μ^+ og $d\phi^{-1}$'s virkning på S_μ^- i betingelse 3.5.3 medfører altså, at der i det dynamiske system, som ϕ definerer, på samme tid er indbygget både kontraktion og ekspansion. En sådan samtidig tilstedeværelse af kon-

traktion og ekspansion er helt essentiel i Smales hestesko, hvilket fremgår af beskrivelsen af hesteskoen i afsnit 3.1. Dette betyder, at en afbildning, der opfylder betingelse 3.5.3, har i hvert fald ét af de essentielle træk ved dynamikken i Smales hestesko indbygget i sig.

Ifølge Moser gælder det, at hvis en kontinuert differentiabel afbildning ϕ opfylder betingelse 3.5.1 og betingelse 3.5.3, og μ i betingelse 3.5.3 ligger i det åbne interval $(0, \frac{1}{2})$, så opfylder ϕ også betingelse 3.5.2, hvor ν er lig $\frac{\mu}{1-\mu}$ [Moser, 1973, s. 77]. Dette betyder, at hvis man kan verificere, at et konkret dynamisk system opfylder betingelse 3.5.1 og 3.5.3 med en passende værdi af μ, så indeholder systemet et delsystem, der er topologisk konjugeret med en skifteautomorfi. Hvis denne skifteautomorfi er defineret på et rum af biuendelige følger, der er bygget op af et endeligt antal forskellige elementer, så er domænet for dette delsystem en lukket, invariant Cantormængde. Betingelse 3.5.1 og 3.5.3 medfører altså, at et konkret dynamisk system indeholder et delsystem, der kan opfattes som en generaliseret udgave af Smales hestesko.

Som afslutning på dette kapitel finder jeg det passende at komme med lidt begrebsafklaring. Lige nu har vi nemlig både en oprindelig hestesko og en generaliseret hestesko i spil. En oprindelig hestesko er en afbildning, der opfylder betingelse 3.1.1 og 3.1.2, mens en generaliseret hestesko er en afbildning, der opfylder de mere generelle betingelser, der er givet ved betingelse 3.5.1 og 3.5.3. Disse to typer af afbildninger er meget ens, hvad angår deres forhold til skifteautomorfier og Cantormængder. Når jeg i resten af opgaven taler om Smales hestesko, vil jeg derfor med denne betegnelse mene en afbildning, der enten er en oprindelig hestesko eller en generaliseret hestesko. Med denne brug af begrebet Smales hestesko afviger jeg lidt fra Smales oprindelige definition af hesteskoen. Grunden til, at jeg tillader mig dette, er, at jeg i mit studie af mine to cases har fundet, at betydningen af Smales hestesko i væsentligt højere grad hviler på dens forhold til skifteautomorfier og Cantormængder end på, at den opfylder kravene om en hesteskoformet billedmængde og affinitet i betingelse 3.1.1 og 3.1.2. Og forbindelsen til skifteautomorfier og Cantormængder bliver fuldt ud bevaret, selvom vi betragter en generaliseret hestesko istedet for en oprindelig hestesko. Derudover er der i artiklen fra 1965 tegn på, at Smale selv var interesseret i en generaliseret udgave af hesteskoen. Her opstiller han nemlig sit eget bud på en sådan generalisering, der dog ikke lader til at være så anvendelig i praksis, som den generalisering, der er blevet præsenteret i dette afsnit [Smale, 1965, s. 74].

Kapitel 4

Hénonafbildningen

I dette kapitel vil jeg præsentere min første case, som omhandler det diskrete dynamiske system, der er kendt som Hénonafbildningen. Hénonafbildningen er opkaldt efter matematikeren og astronomen Michel Hénon, der præsenterede afbildningen i sin artikel *A Two-dimensional Mapping with a Strange Attractor* fra 1976 [Hénon, 1976]. I den nedestående præsentation af Hénonafbildningen har jeg valgt at tage udgangspunkt i denne artikel. Efter præsentationen af selve Hénonafbildningen vil jeg gennemgå to eksempler på, hvordan Smales hestesko har indgået i studiet af Hénonafbildningen.

4.1 Hénonafbildningen

Grunden til, at Hénon opstillede Hénonafbildningen, var oprindeligt, at han ønskede at opstille et simpelt dynamisk system, der udviser nogle af de samme egenskaber som det kontinuerte dynamiske system, som er kendt som Lorenzligningerne[1]. I sin artikel fra 1976 nævner han eksponentiel sammentrækning af volumen i tilstandsrummet, eksistensen af en attraktor, der ved nogle parametervædier er en kaotisk attraktor, baners tilsyneladende uregelmæssige bevægelser rundt på attraktoren og systemets følsomhed på begyndelsesbetingelserne som de essentielle egenskaber ved Lorenzligningerne, som han godt vil indfange i et væsentligt simplere system [Hénon, 1976, s. 69]. Hans formål med at opstille et sådan simpelt system er at gøre nummeriske undersøgelser af egenskaber, som dem Lorenzligningerne udviser, hurtigere og mere præcise og matematiske analyser af disse egenskaber væsentligt lettere [Hénon, 1976, s. 69-70].

Hénon starter sin artikel med at sige, at han vil se på en Poincaréafbildning af Lorenzligningerne istedet for Lorenzligningerne selv [Hénon, 1976, s. 70]. Derved bliver i hvert fald den visuelle repræsentation af løsninger til det dynamiske system simplificeret. Selve systemet bliver i teorien også simplificeret, da det går fra at være et tredimensionelt kontinuert system til

[1] I bilag A findes en præsentation af Lorenzligningerne.

at være et todimensionelt diskret system. Da det ofte er umuligt at finde en eksplicit formel for en Poincaréafbildning til et givet dynamisk system, er en sådan simplificering af systemet dog ofte uopnåelig i praksis (se afsnit 2.2). Dette problem er Hénon opmærksom på, men han klarer det ved at tage et set ud fra hans formål med sin afbildning ganske drastisk skridt. Han smider nemlig Lorenzligningerne væk og opstiller istedet direkte en to-dimensionel iterativ funktion $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$. Hénon er klar over, at hans afbildning T og det diskrete dynamiske system, som den bestemmer opførslen af, ikke vil svare direkte til Lorenzligningerne, men han argumenterer for, at hvis man definerer T på den rigtige måde, vil den besidde mange af de essentielle egenskaber ved Lorenzligningerne [Hénon, 1976, s. 70-72].

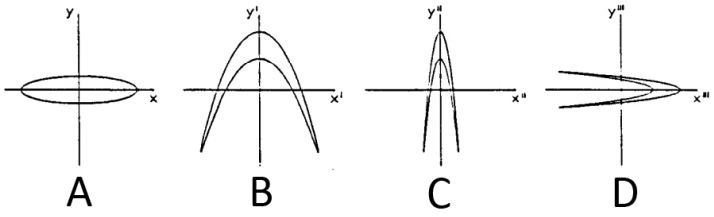
I opstillingen af sin diskrete afbildning T tager Hénon udgangspunkt i tidligere nummeriske undersøgelser af Lorenzligningerne. Disse undersøgelser har vist, at hvis man tager et volumen i tilstandsrummet for Lorenzligningerne, så vil dette volumen i løbet af ganske kort tid blive strukket ud i en retning, samtidig med at det bliver foldet tilbage over sig selv [Hénon, 1976, s. 70]. Det er denne dynamik, som Hénon vil indfange med sin diskrete afbildning. Han ønsker altså en afbildning T, der er defineret således, at hvis man tager et areal i det todimensionelle tilstandsrum for T (som jo er en model af et Poincarésnit i Lorenzligningernes tredimensionelle tilstandsrum), så vil det under T blive strukket ud i en retning og samtidig blive foldet tilbage over sig selv. Denne afbildning T bygger han op via tre simple skridt, som jeg nu vil gengive. Lad os først betragte et vilkårligt areal i tilstandsrummet for T. Dette areal kunne være det, der er indtegnet på figur 4.1A. Det første skridt er at få strukket dette areal ud, samtidig med at det bliver foldet lidt sammen. Dette kan gøres ved at afbilde det over i arealet på figur 4.1B vha. afbildningen givet ved

$$T' : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y + 1 - ax^2 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

hvor a er en justerbar parameter [Hénon, 1976, s. 70-71]. Jeg følger her Hénons notation, således at T' angiver den første delafbildning i opbygningen af T og ikke den afledte af T med hensyn til tiden. Ligeledes er (x', y') outputtet af den første delafbildning. Det næste trin i opbygningen af T er at gøre foldningen af arealet lidt skarpere ved at trække arealet på figur 4.1B sammen langs x-aksen og derved få arealet på figur 4.1C. Dette kan gøres med afbildningen givet ved

$$T'' : \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bx' \\ y' \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

hvor $|b| < 1$ [Hénon, 1976, s. 71]. Det sidste trin i opbygningen af T er at få arealet på figur 4.1C roteret 90 grader, så den længste side af det igen følger x-aksen. Dette kan gøres ved at afbilde det over i arealet på figur 4.1D vha.



Figur 4.1: På denne figur ses den kæde af transformationer, som Hénonafbildningen udfører på et areal i dens todimensionelle tilstandsrum. Figuren er lånt fra [Hénon, 1976, s. 70].

afbildningen givet ved [Hénon, 1976, s. 71]

$$T''' : \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'' \\ x'' \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

Vi har nu fået vores areal strukket ud i den ene retning og foldet tilbage over sig selv, hvilket var hvad T skulle gøre. Derfor kan vi nu definere T på følgende måde [Hénon, 1976, s. 71]:

$$T = T''' \circ T'' \circ T' : \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n + 1 - ax_n^2 \\ bx_n \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

Her er (x_n, y_n) outputtet af den n'te iteration med T og (x_{n+1}, y_{n+1}) outputtet af den $(n+1)$'te iteration med T. T er altså den afbildning, som Hénon opstillede som en model af en Poincaréafbildning af Lorenzligningerne, og som senere er blevet kendt som Hénonafbildningen.

4.1.1 Ligheder og forskelle mellem Hénonafbildningen og Lorenzligningerne

Efter at have opstillet sin afbildning T argumenterer Hénon for, at denne afbildning besidder mange af de samme egenskaber som Lorenzligningerne. For det første konkluderer han, at T ligesom Lorenzligningerne trækker volumen sammen i tilstandsrummet [Hénon, 1976, s. 71]. Hvis man ser på de tre afbildninger T', T'' og T''', som T er sammensat af, vil T' og T''' bevare areal i tilstandsrummet, mens T'' ganger arealer i tilstandsrummet med b. Da $|b| < 0$ vil sammensætningen af T', T'' og T''' derfor trække areal sammen med en faktor b.

Hénon konkluderer også, at afbildningen T har en invers afbildning på hele $\mathbb{R}^2$. Denne afbildning findes let ud fra ligning 4.4 og er givet ved

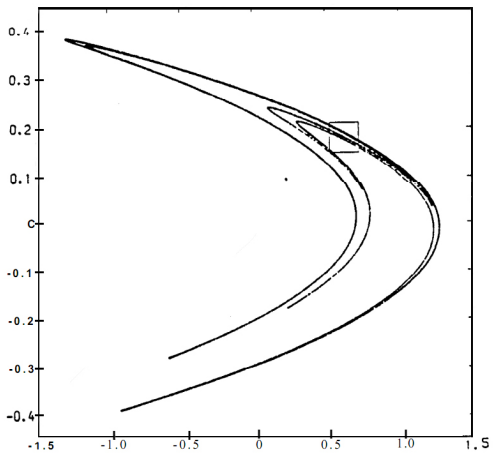
$$T^{-1} : \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y_{n+1}}{b} \\ x_{n+1} - 1 + a(\frac{y_{n+1}}{b})^2 \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

Det at T har en invers afbildning på hele $\mathbb{R}^2$ betyder, at T er en bijektiv afbildning på hele $\mathbb{R}^2$. Denne egenskab ved Hénonafbildningen svarer ifølge Hénon til den egenskab ved Lorenzligningerne, at der gennem ethvert punkt i tilstandsrummet for Lorenzligningerne går en og kun en bane [Hénon, 1976, s. 71].

Ud over de to nævnte ligheder mellem Hénonafbildningen og Lorenzligningerne nævner Hénon også en forskel. Hvor det for Lorenzligningerne gælder, at enhver bane i tilstandsrummet med tiden vil blive fanget i et begrænset underrum af tilstandsrummet (se afsnit A.1 i bilag A), så vil der altid være baner i tilstandsrummet for Hénonafbildningen, der går mod uendeligt [Hénon, 1976, s. 72]. Dette skyldes, at for tilpas store x-værdier vil leddet $-ax_n^2$ i ligning 4.4 kontrollere dynamikken. Hénon viser dog, at for i hvert fald ét sæt af a- og b-værdier findes der et begrænset område i tilstandsrummet, der bliver afbildet ind i sig selv under T, hvilket betyder, at baner, der enten starter i dette område eller bliver afbildet ind i det under et vist antal iterationer med T, aldrig vil forlade dette område igen [Hénon, 1976, s. 75-76]. Dette betyder, at selvom Hénonafbildningen ikke besidder den egenskab, at alle banerne i dens tilstandsrum bliver fanget i et begrænset underrum af tilstandsrummet, så er det muligt at vælge a og b således, at en mængde af banerne i tilstandsrummet gør dette. Det begrænsede underrum af tilstandsrummet, som visse baner med tiden vil blive fanget i, kalder Hénon for en *trapping region*.

4.1.2 Hénonafbildningens attraktor

I sin artikel bruger Hénon meget tid på at undersøge opførslen af det konkrete dynamiske system, han får frem ved at vælge parameterværdierne $a = 1,4$ og $b = 0,3$ [Hénon, 1976, s. 72]. Ved disse parameterværdier har det dynamiske system en attraktor, som der er vist en meget god approksimation afpå figur 4.2. Hénon siger faktisk, at denne approksimation er så god, at den kan siges essentielt set at være selve attraktoren [Hénon, 1976, s. 73]. Hénon undersøger strukturen af denne attraktor ved gentagene gange at forstørre et lille udsnit af attraktoren. Det billede, man får frem ved at forstørre billedet i den lille firkant på figur 4.2 op, ses på figur 4.3. Hvis man forstørrer endnu engang, kommer billedet i den lille firkant på figur 4.3 til at se ud som billedet på figur 4.4. Af denne sidste figur fremgår det, at det udsnit af attraktoren, der på figur 4.3 ser ud til at bestå af tre linjer, nu

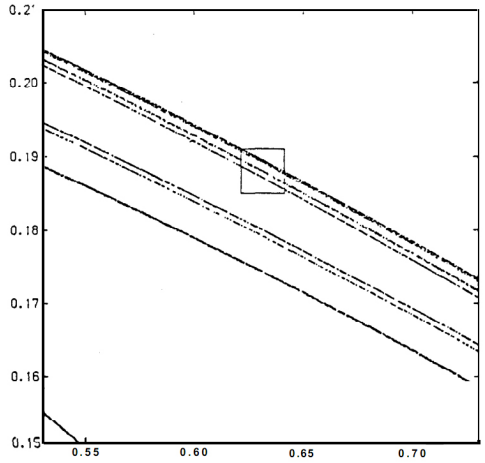


Figur 4.2: På denne figur ses attraktoren for Hénonafbildningen ved parameterværdierne $a = 1,4$ og $b = 0,3$. Figuren er lånt fra [Hénon, 1976, s. 74].

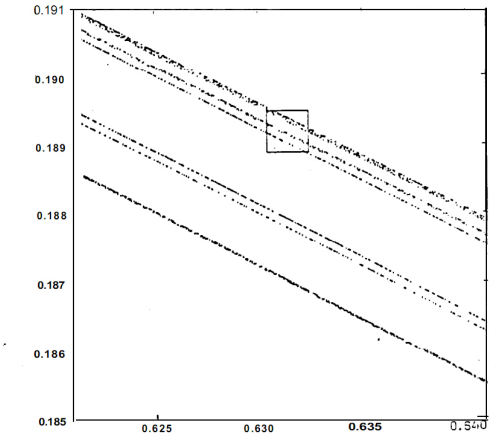
ser ud til at bestå af seks linjer[2]. Ved at blive ved med at forstørre et lille udsnit af attraktoren godtgør Hénon for, at denne multiplicering af antallet af linjer højst sandsynligt vil forsætte i det uendelige, uanset hvor meget man forstørrer attraktoren [Hénon, 1976, s. 75]. Af figur 4.3 og 4.4 ses det også, at selvom figur 4.4 er en forstørrelse af et lille udsnit af figur 4.3, så er strukturen på de to figurer stort set ens. Gennem gentagne forstørrelse godtgør Hénon for, at dette fænomen ikke bare er en særlig relation mellem netop de to grader af forstørrelse af attraktoren, der ses på figur 4.3 og 4.4. Tværtimod argumenterer han for, at der findes en hierarkisk følge af niveauer i attraktorens struktur, således at strukturen ser fuldstændigt ens ud på to forskellige niveauer, selvom de forskellige niveauer er udtryk for, at attraktoren har været udsat for forskellige grader af forstørrelse [Hénon, 1976, s. 75]. Denne egenskab ved attraktorens struktur kan også udtrykkes ved at sige, at strukturen er selvsimilær [Weisstein, 2010f]. Hénon påpeger, at attraktoren deler denne meget komplicerede struktur med Cantormængden [Hénon, 1976, s. 75].

Hénon pointerer, at selvom Hénonafbildningens attraktor altså har en meget kompliceret struktur, så kan man argumentere for, at alt det komplicerede kun foregår i en „retning“ [Hénon, 1976, s. 74]. Hvis man foretager et snit ned gennem attraktoren langs med linjen L_1 på figur 4.5 (eller langs med en anden linje gennem attraktoren, der er „parallel“ med L_1), er struk-

[2]Det er vigtigt at huske på, at da Hénonafbildningen ikke er et kontinuert dynamisk system, er linjerne på figur 4.2, 4.3 og 4.4 ikke kontinuerte baner i tilstandsrummet. De er derimod en samling af punkter på en diskret bane, der approksimerer attraktoren [Hénon, 1976, s. 72-75]. Dette betyder bl.a., at punkterne frit kan hoppe rundt på linjerne.



Figur 4.3: På denne figur ses en forstørrelse af den lille firkant på figur 4.2. Figuren er lånt fra [Hénon, 1976, s. 75].

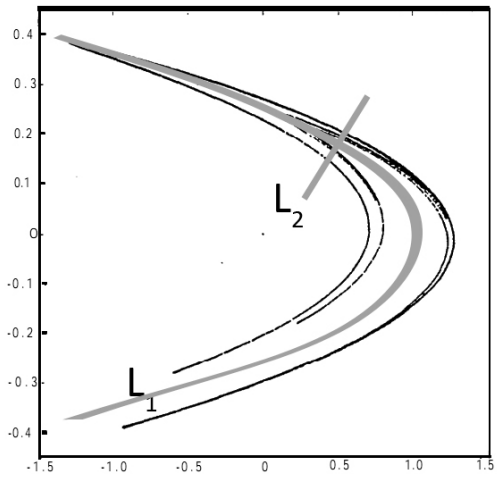


Figur 4.4: På denne figur ses en forstørrelse af den lille firkant på figur 4.3. Figuren er lånt fra [Hénon, 1976, s. 76].

turen i dette snit ikke særligt kompliceret, da det er lagt langs med linjerne, der udgør attraktoren. Hvis man derimod foretager et snit gennem attraktoren langs med linjen L_2 på figur 4.5 (eller langs med en anden linje gennem attraktoren, der er parallel med L_2), vil hele attraktorens konplicerede struktur fremgå af dette snit, fordi det er lagt på tværs af attraktorens linjer.

Ifølge Hénon ligger der et sadelpunkt s for Hénonafbildningen på randen af Hénonafbildningens attraktor. Dette punkt har koordinaterne

$$(0,63135448\ldots;0,18940634\ldots) \tag{4.6}$$



Figur 4.5: På denne figur ses attraktoren for Hénonafbildningen ved parameterværdierne $a = 1,4$ og $b = 0,3$. De lysegrå linje L_1 og L_2 er ikke en del af attraktoren, men derimod nogle linjer, som jeg selv har indtegnet. Den originale figur er lånt fra [Hénon, 1976, s. 73].

Lige ved s ligger den ustabile mangfoldighed for s langs med attraktorens linjer (den ligger altså langs med L_1 på figur 4.5), mens den stabile mangfoldighed for s går på tværs af disse linjer (den ligger altså langs med L_2 på figur 4.5) [Hénon, 1976, s. 73]. Ifølge Hénon kan s i hvert fald lokalt forklare attraktorens selvsemilaritet [Hénon, 1976, s. 75]. Ved hver iteration med T bliver attraktorens struktur nemlig trukket sammen langs den stabile mangfoldighed og strukket ud langs den ustabile mangfoldighed. Dette skaber ifølge Hénon lokalt selvsemilariteten. Ifølge Strogatz har man efter udgivelsen af Hénons artikel fundet ud af, at s spiller en afgørende rolle for attraktorens struktur. I 1991 blev det nemlig bevist, at attraktoren er afslutningen af en del af den ustabile mangfoldighed for s [Strogatz, 1994, s. 434].

4.2 Anvendelser af Smales hestesko i studiet af Hénonafbildningen

I dette afsnit vil jeg gennemgå to eksempler på, hvordan Smales hestesko er blevet anvendt i studiet af Hénonafbildningen. Det første eksempel er fundet i en artikel af James H. Curry fra 1979 med titlen *On the Hénon Transformation* [Curry, 1979]. Currys anvendelse af Smales hestesko i forbindelse med Hénonafbildningen er det tidligste eksempel på en sådan anvendelse,

som jeg har fundet i mit litteraturstudium[3]. Det andet eksempel er fundet i en artikel af Robert Devaney og Zbigniew Nitecki med titlen *Shift Automorphismens in the Hénon Mapping*, der ligeledes er fra 1979 [Devaney and Nitecki, 1979].

4.2.1 Currys anvendelse

I sin artikel præsenterer Curry resultaterne af forskellige nummeriske undersøgelser af Hénonafbildningen. Denne præsentation deler han op i tre dele, der hver især præsenterer resultater, der er blevet til med udgangspunkt i én bestemt metode eller teori [Curry, 1979, s. 131]. I forbindelse med Smales hestesko er det den tredje del af Currys præsentation, der er den interessante. I denne del af artiklen ser han ved alle væsentlige konklusioner kun på Hénonafbildningen ved de parameterværdier, som Hénon selv arbejdede med.

Curry starter sin artikel med at fortælle læseren, at Hénon i sin artikel fra 1976 [Hénon, 1976] præsenterede en række figurer (tre af disse figurer er i denne opgave gengivet som figur 4.2, 4.3 og 4.4), der kraftigt indikerer, at for de parameterværdier, som Hénon arbejdede med, har Hénonafbildningens attraktor en lokal struktur, der er et produkt mellem Cantormængden og en en-dimensionel mangfoldighed [Curry, 1979, s. 129]. Da attraktoren må ligge helt inde i tilstandsrummets trapping region (se afsnit 4.1.1) betyder dette, at Hénon præsenterer indikationer på, at denne trapping region indeholder en Cantormængde. Efter udgivelsen af Hénons artikel har nogle dog udtrykt tvivl om, hvorvidt denne trapping region faktisk indeholder en Cantormængde [Curry, 1979, s. 130]. I tredje del af sin artikel bruger Curry Smales hestesko til at frembringe et stærkt argument for, at der faktisk er en Cantormængde i Hénonafbildningens tilstandsrums trapping region.

Curry tager udgangspunkt i Smales sætning, der siger, at hvis en diffeomorfi $f : M \mapsto M$ på mangfoldigheden M har et transversalt homoklinisk punkt, så indeholder det dynamiske system, som defineres af f og M tilsammen, et delsystem, der er en hestesko (denne sætning er i denne opgave præsenteret som sætning 3.3). Denne sætning siger mere præcist, at hvis diffeomorfien $f : M \mapsto M$ har et transversalt homoklinisk punkt, så findes der en Cantormængde $\Lambda \subset M$ og et positivt heltal m, så f^m er en hesteskoaf-

[3]Man kan måske undre sig over denne påstand, da Currys artikel optræder i et senere nummer af tidsskriftet *Communications in Mathematical Physics* end artiklen af Devaney og Nitecki [Devaney and Nitecki, 1979], som er mit andet eksempel på en anvendelse af Smales hestesko i forbindelse med Hénonafbildningen. I Devaneys og Niteckis artikel beskrives noget af Currys arbejde, og der henvises til et preprint, som han har skrevet. Jeg vil mene, at hvis man sammenholder Currys artikel fra 1979 med beskrivelsen af hans arbejde i Devaneys og Niteckis artikel, er der belæg for at antage, at det preprint, som Devaney og Nitecki refererer til, er et forlæg til den artikel af Curry, som jeg bruger. Derfor mener jeg, at det er berettiget at sige, at Currys brug af Smales hestesko i forbindelse med Hénonafbildningen er tidligere end Devaneys og Niteckis.

bildning, hvis mængde af ikke-vandrende punkter er lig Λ. Curry slutter ud fra denne sætning, at hvis han kan finde et transversalt homoklinisk punkt i Hénonafbildningens tilstandsrums trapping region, så kan han bevise, at denne trapping region faktisk indeholder en Cantormængde [Curry, 1979, s. 135]. Ved hjælp af nummeriske metoder frembringer Curry derefter billeder af den stabile og den ustabile mangfoldighed for det sadelpunkt for Hénonafbildningen, som ligger på randen af Hénonafbildningens attraktor (se afsnit 4.1.2), og derved finder han stærke indikationer på, at Hénonafbildningens trapping region indeholder et transversalt homoklinisk punkt [Curry, 1979, s. 136]. Curry er gennem hele sin artikel meget opmærksom på afrundingsfejl ved brug af computere, og han argumenterer for, at selvom hans nummeriske undersøgelser stærkt indikerer, at der er et transversalt homoklinisk punkt i Hénonafbildningens trapping region, så kan de pga. computerens afrundingsfejl ikke ses som et bevis for dette [Curry, 1979, s. 140]. Derfor har han ikke bevist, at Hénonafbildnings trapping region indeholder en Cantormængde, men kun fundet stærke indikationer på dette.

I sin konklusion gør Curry det klart, hvorfor et bevis for, at der er en Cantormængde i Hénonafbildningens trapping region, er betydningsfuldt for forståelsen af Hénonafbildningen. Her siger han nemlig, at fundet af et transversalt homoklinisk punkt og dermed af en Cantormængde i Hénonafbildningens trapping region delvist kan forklare den struktur i Hénonafbildningens attraktor, som ses på Hénons figurer [Curry, 1979, s. 137]. Da Curry bruger Smales sætning om sammenhængen mellem hestesko-en og transversale homokliniske punkter som en genvej til at finde indikationer på eksistensen af en Cantormængde i Hénonafbildningens trapping region, fungerer Smales hestesko i Currys anvendelse af den altså som en genvej til at opnå en øget forståelse af Hénonafbildningens attraktors struktur. Currys brug af Smales hestesko vil blive diskuteret nærmere i kapitel 6

Som en sidste ting kan det bemærkes, at Curry faktisk ikke bruger betegnelsen „Smales hestesko“ i sin artikel. Han understreger dog, at den nævnte sætning fra Smale er meget central for de ovenfor beskrevne dele af hans undersøgelser [Curry, 1979, s. 129], og man kan ikke komme udenom, at idet han med udgangspunkt i denne sætning begynder at lede efter et transversalt homoklinisk punkt, så er det i bund og grund en hestesko, han leder efter, også selvom han ikke bruger denne betegnelse. Ydermere er det fundet af indikationer på eksistensen af en sådan hestesko, som sætter ham i stand til at give et bud på en delvis forklaring af Hénonafbildningens attraktors struktur.

4.2.2 Devaneys og Niteckis anvendelse

I deres artikel fra 1979 starter Devaney og Nitecki med at give en ultra kort beskrivelse af nogle tidligere opnåede resultater om Hénonafbildnin-

gen. Her siger de klart og tydeligt, at Curry har vist, at for de parameterværdier, som Hénon selv arbejdede med, indeholder det dynamiske system, som Hénonafbildningen definerer, en hestesko [Devaney and Nitecki, 1979, s. 137]. Selvom Curry i sin artikel ikke selv bruger betegnelsen „Smales hestesko“, er der altså i Devaneys og Niteckis artikel ingen tvivl om, at det netop er en hestesko, som Curry har fundet i sin søgen efter en Cantormængde.

Formålet med Devaneys og Niteckis egen artikel er ifølge forfatterne selv at kaste lys over Hénonafbildningens opførsel ved parameterværdier, der ligger langt fra dem, som i hvert fald Hénon har præsenteret undersøgelser af [Devaney and Nitecki, 1979, s. 137]. Devaney og Nitecki vælger i deres artikel at arbejde med en afbildning F, der er topologisk konjugeret med afbildningen T givet ved ligning 4.4. F er givet ved

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + by - x^2 \\ x \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

hvor a og b er de samme parametre som i T [Devaney and Nitecki, 1979, s. 138]. At F og T er topologisk konjugerede ses let ved at betragte homeomorfien givet ved

$$h\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{a} \\ \frac{by}{a} \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

Det gælder nemlig, at

$$T \circ h\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} \frac{x}{a} \\ \frac{by}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{by}{a} - \frac{x}{a}^2 \\ \frac{bx}{a} \end{pmatrix} = h\begin{pmatrix} a + by - x^2 \\ x \end{pmatrix} = h \circ F \tag{4.9}$$

hvilket pr. definition betyder, at F og T er topologisk konjugerede [Weisstein, 2010a].

Hvor Curry studerede Hénonafbildning vha. nummeriske undersøgelser, må Devaneys og Niteckis arbejde med deres afbildning F, sådan som det præsenteres i deres artikel, karakteres son væsentligt mere analytisk. Størstedelen af deres artikel består nemlig af en præsentation af et bevis for en sætning, der udtaler sig om, hvordan mængden af ikke-vandrende punkter $\Omega(F)$ for F ser ud, når værdien af parameteren a varieres, og parameteren b holdes fast på en værdi forskellig fra 0. Denne sætning sammenfatter ifølge Devaney og Nitecki resultaterne af deres arbejde med afbildningen F [Devaney and Nitecki, 1979, s. 138]. Før Devaneys og Niteckis formulering af denne sætning giver mening, er det dog nødvendigt at få et par grundlæggende definitioner på bordet. For en fast værdi af b forskellig fra 0 defineres følgende tre a-værdier [Devaney and Nitecki, 1979, s. 138]

$$a_0 = \frac{-(1 + |b|)^2}{4} \tag{4.10}$$

$$a_1 = 2(1 + |b|)^2 \tag{4.11}$$

$$a_2 = \frac{(5+2\sqrt{5})(1+|b|)^2}{4} \tag{4.12}$$

Derudover defineres for en given værdi af a følgende størrelse [Devaney and Nitecki, 1979, s. 138]

$$R = R(a) = \frac{1}{2}(1+|b|+\sqrt{(1+|b|)^2+4a}) \tag{4.13}$$

Med disse definitioner på plads er vi nu parate til at se på Devaneys og Niteckis sætning [Devaney and Nitecki, 1979, s. 138]

Sætning 4.1 *1. For $a < a_0$, $\Omega(F) = \emptyset$.*

2. For $a \geq a_0$ er $\Omega(F)$ indeholdt i kvadratet i planen, der er givet ved $S = \{(x,y) | \, |x| \leq R, |y| \leq R\}$.

3. For $a \geq a_1$ er $\Lambda_F = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} F^n(S)$ en topologisk hestesko. For $b \neq 0$ er der en kontinuert semi-konjugation, der fører $\Omega(F) \subset \Lambda_F$ surjektivt over i X_S, hvor kardinaliteten af S er 2 (X_S er som nævnt i afsnit 2.8 definitionsmængden for en skifteautomorfi og består af mængden af biuendelige følger bygget op af elementer fra S).

4. For $a > a_2$ har $\Lambda_F = \Omega(F)$ en hyperbolsk struktur og er homeomorf med X_S, hvor kardinaliteten af S er 2.

At mængden $\Lambda_F = \Omega(F)$ i punkt 4 har hyperbolsk struktur, betyder, at der for ethvert punkt p i $\Lambda_F = \Omega(F)$ findes to lineært uafhængige linjer i tangentrummet i p, som varierer kontinuert med p, og hvorom det gælder, at den ene linje trækkes sammen under dF, mens den anden linje strækkes ud under dF [Moser, 1973, s. 79]. Af Devaneys og Niteckis bevis for punkt 3 i denne sætning fremgår det, at de ved en semi-konjugation forstår en kontinuert afbildning fra et rum til et andet, der bevarer baner og er surjektiv, men som ikke nødvendigvis er injektiv [Devaney and Nitecki, 1979, s. 142-143]. Af det nedenstående bevis for punkt 3 vil det fremgå, hvad de forstår ved en topologisk hestesko.

Af punkt 3 i sætning 4.1 fremgår det, at Devaney og Nitecki forstår noget lidt andet ved en hestesko, end jeg indtil nu har gjort. Hvor jeg ved en hestesko indtil nu har forstået en restriktion af en afbildning til en invariant mængde for denne afbildning, så er en hestesko ifølge Devaney og Nitecki selve den invariante mængde. I min analyse af Devaneys og Niteckis brug af Smales hestesko har jeg dog valgt at se bort fra Devaneys og Niteckis lidt anderledes brug af begrebet hestesko og istedet fortsat holde fast i, at en hestesko er en afbildning.

Ifølge Devaney og Nitecki kunne man godt benytte nogle lavere værdier for a_1 og a_2, end de selv gør, uden at man derved ændrer på resultaterne i sætning 4.1 [Devaney and Nitecki, 1979, s. 139]. Grunden til at de bruger de

værdier, som de gør, er, at disse værdier simplificerer de udregninger, som skal til for at bevise sætningen.

I forhold til Smales hestesko er det punkt 3 og 4 i sætning 4.1, der er interessante. Jeg vil derfor i det følgende gennemgå, hvordan Devaney og Nitecki beviser disse to punkter. Før dette bør det dog bemærkes, at Devaney og Nitecki til tider skriver meget indforstået. De kommer f.eks. ikke med eksplicitte definitioner af, hvilken mening de tillægger begreber som f.eks. topologisk hestesko, og der er også en god del af deres tankegang igennem artiklen, som de ikke indvier læseren i. Det er muligt, at denne indforståede stil er symptomatisk for den tid, som Devaney og Nitecki skriver i. Hvis man på dette tidspunkt f.eks. har fundet visse tankegange omkring hesteskoen indlysende, så har det været overflødigt for Devaney og Nitecki eksplicit at forklare dem. Uanset hvad årsagen til den noget indforståede stil er, så har den medført, at jeg i de følgende gennemgange af beviserne for punkt 3 og 4 i sætning 4.1 flere steder har været nødt til selv at forsøge at stykke tankegangen bag Devaneys og Niteckis konklusioner sammen. I disse situationer har jeg dog gjort opmærksom på, at forklaringerne ikke eksplicit optræder i Devaneys og Niteckis artikel.

4.2.2.1 Beviset for punkt 3

I beviset for punkt 3 i sætning 4.1 gør Devaney og Nitecki brug af følgende to lemmaer [Devaney and Nitecki, 1979, s. 139]

Lemma 4.1 *1. R er et reelt tal hvis og kun hvis $a \geq a_0$. Hvis $a \geq a_0$ er R positiv og lig med den største rod i polynomiet $R^2 - (|b|+1)R - a = 0$*

2. $a - |b|\, R > R$ hvis og kun hvis $a > a_1$

Lemma 4.2 *1. Billedet af den horisontale stribe $|y| \leq c$ under F er området afgrænset af de to parabler, der er givet ved $x = a - |b|\, c - y^2$ og $x = a + |b|\, c - y^2$. Billedet af den vertikale stribe $|x| \leq c$ under F er den horisontale stribe $|y| \leq c$.*

2. Billedet af den vertikale stribe $|x| \leq c$ under F^{-1} er området afgrænset af de to parabler, der er givet ved $by = -c - a - x^2$ og $by = c - a - x^2$. Billedet af den horisontale stribe $|y| \leq c$ under F^{-1} er den vertikale stribe $|x| \leq c$.

I beviset for punkt 3 starter Devaney og Nitecki med at se på billedet af kvadratet i planen givet ved $S = \{(x,y) |\, |x| \leq R, |y| \leq R\}$ under F. De to horisontale sider af S er givet ved linjestykkerne

$$\begin{aligned} s_1 &= \{(x,y) |\, |x| \leq R, y = R\} \\ s_2 &= \{(x,y) |\, |x| \leq R, y = -R\} \end{aligned} \tag{4.14}$$

Ifølge punkt 1 i lemma 4.2 må disse to linjestykker under F blive afbildet over i de to parabelstykker, der er givet ved

$$\begin{aligned} F(s_1) &= \left\{(x,y)|x = a + |b|\,R - y^2, |y| \leq R\right\} \\ F(s_2) &= \left\{(x,y)|x = a - |b|\,R - y^2, |y| \leq R\right\} \end{aligned} \tag{4.15}$$

De to vertikale sider af S er givet ved linjestykkerne

$$\begin{aligned} s_3 &= \{(x,y)|x = R, |y| \leq R\} \\ s_4 &= \{(x,y)|x = -R, |y| \leq R\} \end{aligned} \tag{4.16}$$

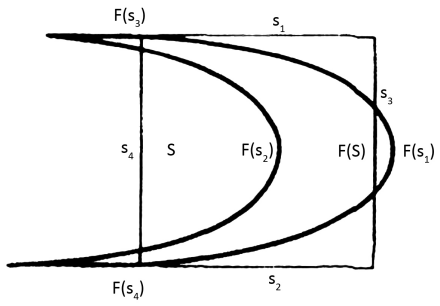
Ifølge punkt 1 i lemma 4.2 må s_3 under F blive afbildet over i et linjestykke, for hvilket $y = R$. Hvis man igen sammenholder dette med punkt 1 i lemma 4.2, må det betyde, at x for dette linjestykke ligger i intervallet fra $a - |b|\,R - R^2$ til $a + |b|\,R - R^2$. Dette betyder, at s_3 under F bliver afbildet over i linjestykket, der er givet ved

$$F(s_3) = \left\{(x,y)|a - |b|\,R - R^2 \leq x \leq a + |b|\,R - R^2, y = R\right\} \tag{4.17}$$

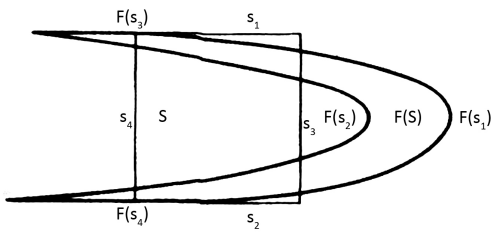
En tilsvarende analyse for s_4 viser, at dette linjestykke under F bliver afbildet over i linjestykket givet ved

$$F(s_4) = \left\{(x,y)|a - |b|\,R - R^2 \leq x \leq a + |b|\,R - R^2, y = -R\right\} \tag{4.18}$$

Denne analyse af billederne af siderne af S under F viser, at S under F bliver afbildet over i området, der er vist på figur 4.6 [Devaney and Nitecki, 1979, s. 142]. På denne figur ses det tydeligt, at det punkt på den venstre side af $F(S)$ - eller sagt med andre ord på $F(s_2)$ - der ligger længst mod højre, er toppunktet for $F(s_2)$ set fra y-aksen. Dette toppunkt er ifølge ligning 4.15 givet ved punktet $(a - |b|\,R, 0)$. Når værdien af a stiger, flyttes dette punkt mod højre. Når $a > a_1$, følger det af punkt 2 i lemma 4.1, at dette toppunkt ligger til højre for punktet $(R, 0)$. Dette betyder, at når $a > a_1$ krydser den venstre side af $F(S)$ den højre side af S. Denne situation er illustreret på figur 4.7. Ifølge Devaney og Nitecki betyder dette, at når $a > a_1$, så indeholder det dynamiske system, som F definerer, en topologisk hestesko [Devaney and Nitecki, 1979, s. 142]. Devaney og Nitecki kommer ikke med en eksplicit forklaring på, hvad de forstår ved en topologisk hestesko. I deres præsentation af beviset for punkt 3 i sætning 4.1 siger de dog, at det at det dynamiske system, som F definerer, indeholder en topologisk hestesko, medfører, at billedet af ethvert horisontal linjestykke i S under F er en parabel, hvis fællesmængde med S er to disjunkte parabelstykker [Devaney and Nitecki, 1979, s. 142]. Af beviset for punkt 3 fremgår det derudover implicit, at en topologisk hestesko er en afbildning, der ligner en hesteskoafbildning, men som ikke nødvendigvis er topologisk konjugeret med en skifteautomorfi, da det ikke kræves at afbildningen, der fører den topologiske hestesko



Figur 4.6: På denne figur ses kvadratet S samt billedet af dette kvadrat under F, når $a < a_1$. Figuren er lånt fra [Devaney and Nitecki, 1979, s. 142] og modificeret til mit brug af den.



Figur 4.7: På denne figur ses kvadratet S samt billedet af dette kvadrat under F, når $a > a_1$. Figuren er lånt fra [Devaney and Nitecki, 1979, s. 142] og modificeret til mit brug af den.

over i skifteautomorfien, er en konjugation, men derimod kun at den er en semi-konjugation [Devaney and Nitecki, 1979, s. 142-143]. At det dynamiske system, som F definerer, indeholder en topologisk hestesko betyder bl.a., at fællesmængden $F(S) \cap S$ består af to disjunkte mængder i S.

Devaney og Nitecki går nu videre til at se på den invariante mængde givet ved

$$\Lambda_F = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} F^n(S) \tag{4.19}$$

der består af alle de punkter i S, der under et vilkårligt antal iterationer med F altid vil blive afbildet i S. Når $a > a_1$ kan man definere en afbildning ψ, der til ethvert punkt i Λ_F knytter en biuendelig følge af 0'er og 1'er, der bestemmer dets rute i forhold til, i hvilken af de to disjunkte mængder i $F(S) \cap S$ dets billede under et givet antal iterationer med F ligger [Devaney and Nitecki, 1979, s. 142], [Wiggins, 1990, s. 429]. Sagt med andre ord er ψ altså en afbildning fra Λ_F til X_S, hvor S har kardinaliteten 2. ψ er kontinuert, banebevarende og surjektiv, men ikke nødvendigvis injektiv [Devaney and Nitecki, 1979, s. 142-143]. Dette betyder, at ψ er en semi-konjugation mellem Λ_F og X_S.

Devaney og Nitecki går nu over til at bevise, at ψ også er en semi-konjugation mellem mængden $\Omega(F)$, der som nævnt er mængden af ikke-vandrende punkter for F, og X_S. De starter med at sige, at $\Omega(F) \subset \Lambda_F$ [Devaney and Nitecki, 1979, s. 143], og går derefter videre til at argumentere for, at ψ afbilder $\Omega(F)$ surjektivt over i X_S. De starter denne argumentation med at konstatere, at enhver periodisk biuendelig følge i X_S svarer til minimum ét periodisk punkt i Λ_F [Devaney and Nitecki, 1979, s. 143]. Derefter siger de, at afslutningen af mængden af disse periodiske punkter er en mængde af ikke-vandrende punkter i Λ_F, hvorfor den må være en delmængde af $\Omega(F)$. Dette er egentligt ret let at indse, da et ikke-vandrende punkt x pr. defintion er et punkt, for hvilket enhver åben omegn U omkring x indeholder mindst ét punkt, der under et givet antal iterationer med F vender tilbage til U (se afsnit 2.7). Da enhver åben omegn for ethvert punkt i afslutningen af mængden af periodiske punktet indeholder mindst et periodisk punkt, betyder det, at ethvert punkt i denne afslutning er et ikke-vandrende punkt. Devaney og Nitecki afslutter derefter deres argumentation med at sige, at afslutningen af de periodiske punkter i Λ_F under ψ afbildes surjektivt over i X_S. Dette følger af, at ψ er en semi-konjugation mellem Λ_F og X_S, hvilket bl.a. betyder, at den bevarer banestrukturen i Λ_F. Dette betyder, at de periodiske punkter i Λ_F afbildes over i de periodiske punkter i X_S, og at afslutningen af de periodiske punkter i Λ_F afbildes over i afslutningen af de periodiske punkter i X_S. Og da de periodiske punkter i X_S er tætte i X_S, må deres afslutning udgøre hele X_S. Dette betyder, at ψ afbilder $\Omega(F)$ surjektivt over i X_S, hvilket medfører, at ψ er en semi-konjugation mellem $\Omega(F)$ og X_S.

Med denne sidste argumentation omkring $\Omega(F)$ har Devaney og Nitecki fået bevist punkt 3 i sætning 4.1. De har nemlig fået vist, at for $a \geq a_1$ indeholder det dynamiske system, som F definerer, en topologisk hestesko, og de har også fået vist, at der findes en kontinuert semi-konjugation, der afbilder $\Omega(F) \subset \Lambda_F$ surjektivt over i X_S, hvor kardinaliteten af S er 2.

4.2.2.2 Beviset for punkt 4

Som tidligere nævnt siger punkt 4 i sætning 4.1, at hvis $a > a_2$, så har $\Lambda_F = \Omega(F)$ en hyperbolsk struktur og er homeomorf med X_S, hvor kardinaliteten af S er 2. Beviset for dette punkt er den mest indforståede del af Devaneys og Niteckis artikel, og for mig at se er der nogle ting, som Devaney og Nitecki implicit må antage for at kunne sige, at dette bevis faktisk beviser punkt 4 i deres sætning. I dette afsnit vil jeg starte med af forklare, hvad Devaneys og Niteckis bevis for punkt 4 faktisk beviser, hvorefter jeg vil komme med mit bud på, hvordan man kan slutte fra dette resultat til punkt 4.

Det bør bemærkes at Smales hestesko hverken nævnes eksplicit i selve punkt 4 eller i Devaneys og Niteckis bevis for dette punkt. I indledningen til deres artikel siger Devaney og Nitecki dog, at $\Omega(F)$ for $a > a_2$ er definitionsmængden for Smales hestesko [Devaney and Nitecki, 1979, s. 137]. Derfor forstår jeg anden halvdel af punkt 4 som ensbetydende med, at restriktionen af F til $\Omega(F)$ er en hesteskoafbildning.

Devaneys og Niteckis bevis for punkt 4 drejer sig om sektorbundter. De starter med at definere to sektorbundter givet ved

$$S_\lambda^+ = \left\{(\xi_z, \eta_z) \in \mathbb{R}^2 | \lambda\, |\eta_z| \leq |\xi_z|\,; z \in \mathbb{R}^2\right\} \tag{4.20}$$

$$S_\lambda^- = \left\{(\xi_z, \eta_z) \in \mathbb{R}^2 | \lambda\, |\xi_z| \leq |\eta_z|\,; z \in \mathbb{R}^2\right\} \tag{4.21}$$

hvor $\lambda > 1$, (ξ_z, η_z) er en vektor i tangentrummet i z under F og $z = (x, y)$ [Devaney and Nitecki, 1979, s. 143]. Derefter viser de, at hvis man tager restriktionen af hver af disse to sektorbundter samt F til mængden af baner under F, der er helt indeholdt i mængden givet ved

$$W_\lambda = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, |x| \geq \frac{\lambda(1 + |b|)}{2}\right\} \tag{4.22}$$

så opfylder denne restriktion af F betingelse 3.5.3 beskrevet i afsnit 3.5 med hensyn til restriktionerne af de to ovenstående sektorbundter [Devaney and Nitecki, 1979, s. 143-144]. Til sidst slutter de deres bevis for punkt 4 af med at vise, at hvis $a > a_2$, kan man vælge λ således, at alle punkter i fællesmængden $S \cap F^{-1}(S)$ ligger i W_λ [Devaney and Nitecki, 1979, s. 144-145]. Da $\Lambda_F = \Omega(F) = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} F^n(S)$ er alle baner i $\Omega(F)$ altså helt indeholdt i W_λ. Dette betyder, at Devaneys og Niteckis bevis for punkt 4 i sætning 4.1 egentligt beviser, at hvis $a > a_2$ kan man vælge λ således, at restriktionen af F til $\lambda_F = \Omega(F)$ opfylder betingelse 3.5.3 med hensyn til restriktionerne af sektorbundterne givet ved ligning 4.20 og 4.21 til $\Omega(F)$.

I præsentationen af deres bevis for punkt 4 slutter Devaney og Nitecki altså fra det, at F opfylder betingelse 3.5.3, til at sige, at punkt fire gælder. I forhold til anden halvdel af punkt 4 fremgår det af den teori, der blev gennemgået i afsnit 3.5, at indholdet i denne halvdel ikke kan konkluderes alene på baggrund af, at F opfylder betingelse 3.5.3. Derimod skal F også opfylde

betingelse 3.5.1 og λ skal være større end 2 (se side 38), før denne del af punkt 4 gælder. Disse to krav forholder Devaney og Nitecki sig ikke eksplicit til i deres bevis - de nævner dem faktisk slet ikke. Ud fra de tegninger, som Devaney og Nitecki præsenterer af hhv. $F(S)$ og $F^{-1}(S)$ for $a > a_1$ virker det dog ikke helt urimeligt at antage, at når a er stor nok, så opfylder F betingelse 3.5.1, hvor $S \cap F(S)$, der består af to disjunkte, horisontale mængder, fungerer som de horisontale bånd, og $S \cap F^{-1}(S)$, der består af to disjunkte, vertikale mængder, fungerer som de vertikale bånd (billedet af $F(S)$ er i denne rapport gengivet som figur 4.7) [Devaney and Nitecki, 1979, s. 142 og 145]. Jeg vil derfor mene, at det er rimeligt at antage, at Devaney og Nitecki i deres bevis for punkt 4 implicit antager, at F opfylder betingelse 3.5.1 samt det krav, at λ skal være større end 2. En sådan antagelse kan i hvert fald forklare, hvordan de kan slutte fra deres bevis for punkt 4 og til anden halvdel af punkt 4.

Hvis man antager, at Devaney og Nitecki implicit antager, at F opfylder betingelse 3.5.1, og at λ opfylder visse krav, så forklarer det også, hvordan de kan slutte fra beviset for punkt 4 til første halvdel af punkt 4. Ifølge Wiggins gælder det nemlig, at hvis F er en kontinuert differentiabel afbildning, der opfylder betingelse 3.5.3 og 3.5.1, og hvis λ er større end en værdi, der er bestemt af determinanten af dF, så er $\Omega(F)$ en hyperbolsk mængde, hvilket betyder, at den har en hyperbolsk struktur [Wiggins, 1990, s. 464].

Afslutningsvis bør det bemærkes, at Devaneys og Niteckis anvendelse af Smales hestesko på i hvert fald et punkt adskiller sig fra både Currys anvendelse af den og Mosers anvendelse, som vil blive gennemgået i afsnit 5.3. Hvor Curry og Moser bruger Smales hestesko til at opnå et andet resultat om hhv. Hénonafbildningen og det begrænsede trelegemeproblem, så er fundet af en hestesko i Hénonafbildningen i sig selv det resultat, som Devaney og Nitecki præsenterer i deres artikel. Devaneys og Niteckis resultat siger nemlig basalt set, at det er muligt at vælge parametrene i Hénonafbildningen således, at det dynamiske system, som Hénonafbildningen definerer, indeholder en hestesko. En mulig årsag til denne forskel vil blive diskuteret i kapitel 6.

Kapitel 5

Det Begrænsede Trelegemeproblem

I dette kapitel vil jeg beskrive min anden case, der handler om det begrænsede trelegemeproblem. Det begrænsede trelegemeproblem er et særtilfælde af det mere generelle problem, der er kendt som trelegemeproblemet, og som er et berømt problem indenfor himmellegememekanikken, der kan beskrives vha. et kontinuert dynamisk system. Der findes mange forskellige udgaver af det begrænsede trelegemeproblem, der alle svarer til forskellige former for simplificering af trelegemeproblemet. Den udgave af det begrænsede trelegemeproblem, som min case omhandler, bliver af flere kilder tilskrevet Sitnikov [Moser, 1973, s. 83], [Llibre and Simó, 1980, s. 444]. I den nedenstående beskrivelse af det har jeg dog valgt at tage udgangspunkt i en gennemgang af det hos Moser [Moser, 1973]. Før jeg gør rede for det begrænsede trelegemeproblem, vil jeg kort beskrive selve trelegemeproblemet. Efter beskrivelsen af det begrænsede trelegemeproblem vil jeg gennemgå et eksempel på, hvordan Smales hestesko er blevet anvendt i studiet af det begrænsede trelegemeproblem.

I forbindelse med det begrænsede trelegemeproblem er det interessant at bemærke, at Smale selv er opmærksom på, at den udgave af det begrænsede trelegemeproblem, som Poincaré arbejdede med, indeholder en indlejret hestesko [Smale, 1965, s. 79]. Dette argumenterer han for ved at sige, at dette system ifølge Poincaré indeholder homokliniske punkter, hvorfor man kan anvende sætning 3.3 til at sige, at det indeholder en indlejret hestesko. Smale siger derefter, at denne indlejrede hestesko kan bruges til at opnå informationer om dynamikken i det begrænsede trelegemeproblem, men han går ikke ind i, hvilke informationer man mere præcist kan opnå vha. den [Smale, 1965, s. 79]. I denne forbindelse skal det dog pointeres, at Poincarés udgave af det begrænsede trelegemeproblem ikke er den samme som den, min case handler om [Barrow-Green, 1997, s. 11].

5.1 Trelegemeproblemet

Trelegemeproblemet er et matematisk problem, der i sin substans går tilbage til Newtons værk *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* [Wikipedia, 2010a]. Det er et problem, der er enkelt at formulere, men meget kompliceret at løse - faktisk er der stadig mange aspekter af trelegemeproblemet, der endnu ikke er forstået [Barrow-Green, 1997, s. 7]. Trelegemeproblemet kan formuleres således:

> [T]hree particles move in space under their mutual gravitational attraction; given their initial conditions, determine their subsequent motion [Barrow-Green, 1997, s. 7].

I det følgende vil jeg udlede det sæt af differentialligninger, som beskriver de tre partiklers opførsel. Dette sæt af differentialligninger kan udledes fra Newtons universelle gravitationslov. Denne lov siger, at hvis man har to partikler med masserne m og M, så vil de tiltrække hinanden med en kraft F, der er parallel med linjen mellem de to partiklers centre, og hvis størrelse er givet ved [Knudsen and Hjort, 2000, s. 10]

$$F = G\frac{mM}{r^2} \tag{5.1}$$

I denne formel er G en universel gravitationskonstant og r afstanden mellem de to partikler.

Vi er nu klar til at se på situationen i trelegemeproblemet, hvor vi har tre partikler P_1, P_2 og P_3, der bevæger sig i rummet under påvirkning af tiltrækningskræfterne imellem dem. Vi antager, at partiklerne ikke bliver påvirket af andre kræfter end disse tiltrækningskræfter. De tre partikler har masserne m_1, m_2 og m_3, og i et givet koordinatsystem, i hvilket Newtons først lov gælder[1], er deres positioner givet ved vektorerne $\boldsymbol{p_1}$, $\boldsymbol{p_2}$ og $\boldsymbol{p_3}$. Lad os starte med at se på de kræfter, der virker på P_1. For det første må P_1 blive påvirket af tiltrækningskraften mellem P_1 og P_2, hvis størrelse ifølge formel 5.1 er givet ved:

$$F_{P_1P_2} = G\frac{m_1m_2}{|\boldsymbol{p_2} - \boldsymbol{p_1}|^2} \tag{5.2}$$

Tiltrækningskraften mellem P_1 og P_2 virker på P_1 som en kraft, hvis retning er givet ved $\frac{\boldsymbol{p_2}-\boldsymbol{p_1}}{|\boldsymbol{p_2}-\boldsymbol{p_1}|}$, hvorfor tiltrækningskraften fra P_2 til P_1 med retning er givet ved:

$$\boldsymbol{F_{P_1P_2}} = Gm_1m_2\frac{\boldsymbol{p_2} - \boldsymbol{p_1}}{|\boldsymbol{p_2} - \boldsymbol{p_1}|^3} \tag{5.3}$$

[1] Newtons første lov lyder således: „A body remains in its state of rest or in uniform linear motion as long as no external forces act to change that state“ [Knudsen and Hjort, 2000, s. 27]. Det er ikke i alle koordinatsystemer, at denne lov gælder [Knudsen and Hjort, 2000, s. 31].

Tilsvarende må påvirkningen fra tiltrækningskraften mellem P_1 og P_3 på P_1, være givet ved:

$$\boldsymbol{F_{P_1 P_3}} = Gm_1m_3\frac{\boldsymbol{p_3} - \boldsymbol{p_1}}{|\boldsymbol{p_3} - \boldsymbol{p_1}|^3} \tag{5.4}$$

Da vi har antaget, at de tre partikler ikke bliver påvirket af andre kræfter end deres indbyrdes tiltrækningskræfter, er den samlede kraft $\boldsymbol{F_1}$ på P_1 givet ved:

$$\boldsymbol{F_1} = Gm_1m_2\frac{\boldsymbol{p_2} - \boldsymbol{p_1}}{|\boldsymbol{p_2} - \boldsymbol{p_1}|^3} + Gm_1m_3\frac{\boldsymbol{p_3} - \boldsymbol{p_1}}{|\boldsymbol{p_3} - \boldsymbol{p_1}|^3} \tag{5.5}$$

Tilsvarende formler gælder for kræfterne på P_2 og P_3. Ifølge Newtons anden lov er kraften F, der virker på et legeme, givet ved $F = ma$, hvor m er legemets masse og a dets acceleration. Da vektoren $\boldsymbol{p_1}$ angiver positionen af P_1, er accelerationen af P_1 givet ved $\frac{d^2\boldsymbol{p_1}}{dt^2}$. Dette betyder, at ligning 5.5 kan skrives således:

$$m_1\frac{d^2\boldsymbol{p_1}}{dt^2} = Gm_1m_2\frac{\boldsymbol{p_2} - \boldsymbol{p_1}}{|\boldsymbol{p_2} - \boldsymbol{p_1}|^3} + Gm_1m_3\frac{\boldsymbol{p_3} - \boldsymbol{p_1}}{|\boldsymbol{p_3} - \boldsymbol{p_1}|^3} \tag{5.6}$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{p_1}}{dt^2} = Gm_2\frac{\boldsymbol{p_2} - \boldsymbol{p_1}}{|\boldsymbol{p_2} - \boldsymbol{p_1}|^3} + Gm_3\frac{\boldsymbol{p_3} - \boldsymbol{p_1}}{|\boldsymbol{p_3} - \boldsymbol{p_1}|^3} \tag{5.7}$$

Hvis vi siger, at $\boldsymbol{p_j} = (p_{j1}, p_{j2}, p_{j3})$, så kan ligning 5.7 skrives som et sæt af tre ligninger på følgende måde:

$$\frac{d^2p_{1i}}{dt^2} = Gm_2\frac{p_{2i} - p_{1i}}{|\boldsymbol{p_2} - \boldsymbol{p_1}|^3} + Gm_3\frac{p_{3i} - p_{1i}}{|\boldsymbol{p_3} - \boldsymbol{p_1}|^3}, i = 1, 2, 3 \tag{5.8}$$

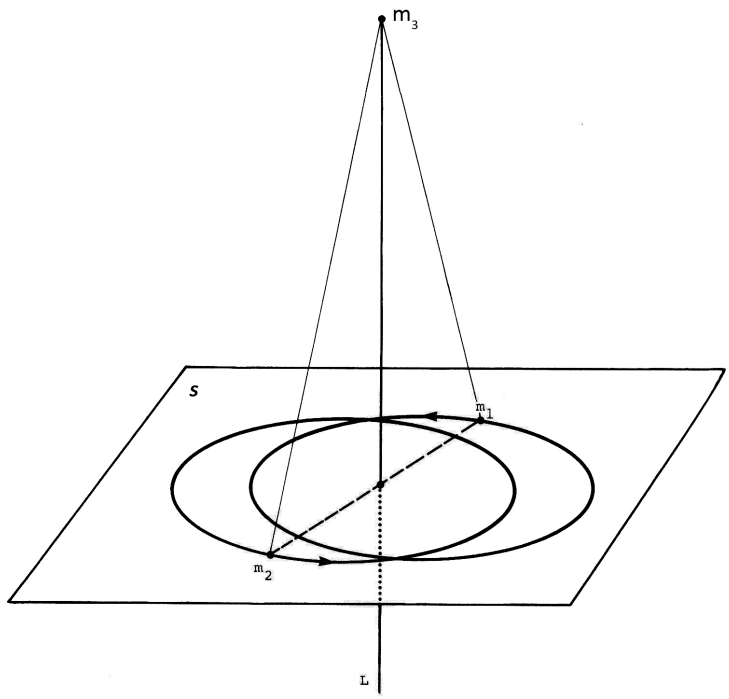
Da alt, hvad jeg indtil nu har sagt om P_1, direkte kan overføres til P_2 og P_3, kan vi nu konkludere, at trelegemeproblemet fuldstændigt beskrives af følgende sæt at ni andenordensdifferentialligninger [Barrow-Green, 1997, s. 8]:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2p_{1i}}{dt^2} &= Gm_2\frac{p_{2i} - p_{1i}}{|\boldsymbol{p_2} - \boldsymbol{p_1}|^3} + Gm_3\frac{p_{3i} - p_{1i}}{|\boldsymbol{p_3} - \boldsymbol{p_1}|^3} \\
\frac{d^2p_{2i}}{dt^2} &= Gm_1\frac{p_{1i} - p_{2i}}{|\boldsymbol{p_1} - \boldsymbol{p_2}|^3} + Gm_3\frac{p_{3i} - p_{2i}}{|\boldsymbol{p_3} - \boldsymbol{p_2}|^3} \\
\frac{d^2p_{3i}}{dt^2} &= Gm_1\frac{p_{1i} - p_{3i}}{|\boldsymbol{p_1} - \boldsymbol{p_3}|^3} + Gm_2\frac{p_{2i} - p_{3i}}{|\boldsymbol{p_2} - \boldsymbol{p_3}|^3}
\end{aligned} \tag{5.9}$$

hvor $i = 1, 2, 3$.

5.2 Det begrænsede trelegemeproblem

Efter den ovenstående korte beskrivelse af trelegemeproblemet vil jeg nu beskrive den udgave af det begrænsede trelegemeproblem, som min anden



Figur 5.1: På denne figur er scenariet i det begrænsede trelegemeproblem skitseret. Figuren er på nær en lille modifikation lånt fra [Moser, 1973, s. 84]

case omhandler. Igen ser vi på tre partikler, der bevæger sig rundt i rummet under påvirkning af tiltrækningskræfterne imellem dem. To af disse partikler, P_1 og P_2, antages at have lige store masser, $m_1 = m_2 > 0$. Disse to partikler befinder sig konstant i et plan s, hvori de bevæger sig rundt i hver sin elliptiske bane. De to elliptiske baner er ens og ligger symmetriske om det indbyrdes massecentrum for P_1 og P_2, der er i ro. Den tredje partikel P_3 har massen m_3, der er så lille i forhold til m_1 og m_2, at man kan se bort fra den, hvilket betyder, at man kan se bort fra P_3's indflydelse på P_1 og P_2. Dette betyder, at P_1 og P_2 danner et tolegemesystem hvis løsning man idag kender [Barrow-Green, 1997, s. 11]. P_3 bevæger sig frem og tilbage langs linjen L, der står vinkelret på planet s og går igennem massecentrummet for P_1 og P_2. Selvom P_3 ikke påvirker P_1 og P_2, så påvirker P_1 og P_2 P_3. Pga. symmetrien i systemet vil P_3 aldrig forlade L. Det begrænsede trelegemeproblem går ud på at bestemme P_3's opførsel ud fra et givet sæt af begyndelsesbetingelser [Moser, 1973, s. 83]. Det netop beskrevne scenarium er skitseret på figur 5.1.

Jeg vil nu gøre rede for, hvordan man kan beskrive opførslen af P_3 vha. en differentialligning. Jeg vil her følge Moser og antage, at enhederne er valgt således, at P_1 og P_2 har masserne $m_1 = m_2 = \frac{1}{2}$, at gravitationskonstanten G er lig 1 og at tiden, det tager for P_1 og P_2 at bevæge sig en gang rundt i deres baner, er lig 2π [Moser, 1973, s. 83-85]. Lad os nu lægge det ovenfor beskrevne scenarium ind i et koordinatsystem på en sådan måde, at planen s ligger i xy-planen og linjen L ligger på z-aksen. I dette koordinatsystem er positionerne af P_1, P_2 og P_3 givet ved vektorerne $\boldsymbol{p_1}$, $\boldsymbol{p_2}$ og $\boldsymbol{p_3}$, der har koordinaterne

$$\boldsymbol{p_1} = (p_{1x}, p_{1y}, 0) \tag{5.10}$$

$$\boldsymbol{p_2} = (p_{2x}, p_{2y}, 0) \tag{5.11}$$

$$\boldsymbol{p_3} = (0, 0, z) \tag{5.12}$$

Da opførslen af P_3 bestemmes af tiltrækningskræfterne fra P_1 og P_2, er der set fra dette legeme ikke nogen forskel på trelegemeproblemet og det begrænsede trelegemeproblem. Da P_3 aldrig vil forlade linjen L, fordi kræfterne i x- og y-retningen i systemet udlignes pga. symmetri, kan P_3 med det aktuelle valg af koordinatsystem kun accelereres i z-aksens retning. Hvis man sammenholder alt dette med ligning 5.9 betyder det, at opførslen af P_3 beskrives fuldstændigt af følgende differentialligning:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{0-z}{|\boldsymbol{p_1} - \boldsymbol{p_3}|^3} + \frac{1}{2}\frac{0-z}{|\boldsymbol{p_2} - \boldsymbol{p_3}|^3} \tag{5.13}$$

Ved at betragte figur 5.1 kan man for det første let indse, at $|\boldsymbol{p_1} - \boldsymbol{p_3}| = |\boldsymbol{p_2} - \boldsymbol{p_3}|$, og for det andet, at denne værdi er lig $\sqrt{z^2 + r^2(t)}$, hvor $r(t)$ er afstanden fra enten P_1 eller P_2 til deres indbyrdes massecentrum til tiden t [Moser, 1973, s. 85]. Dette betyder, at ligning 5.13 kan skrives således:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{-z}{(z^2 + r^2(t))^{\frac{3}{2}}} \tag{5.14}$$

Vi er nu kommet frem til, at P_3´s opførsel beskrives fuldstændigt af ligning 5.14.

5.3 Mosers anvendelse af Smales hestesko i studiet af det begrænsede trelegemeproblem

Jeg er nu parat til at gennemgå et eksempel på, hvordan Smales hestesko er blevet anvendt i studiet af det begrænsede trelegemeproblem. Dette eksempel er fundet i en bog af Jürgen Moser med titlen *Stable and random motions in dynamical systems* fra 1973 [Moser, 1973].

5.3.1 Mosers hovedresultat

I tredje kapitel af sin bog fra 1973 bruger Moser idéerne bag Smales hestesko til at bevise et fascinerende resultat vedrørende den lille partikels, P_3's, skæringer med planet s i det begrænsede trelegemeproblem. En sådan skæring er det samme som et nulpunkt for en løsning til ligning 5.14. Lad os starte med at betragte en løsning $z(t)$, der har uendeligt mange nulpunkter. Disse nulpunkter forekommer til tidspunkterne givet ved følgen $\{t_k\}$, hvor $k \in \mathbb{Z}$. Hvis t_k og t_{k+1} er tidspunkterne for hhv. det k'te og det $(k+1)$'te nulpunkt for $z(t)$, er antallet af hele omgange, som P_1 og P_2 foretager rundt i deres baner imellem disse to tidspunkter, givet ved

$$\sigma_k = \left[\frac{t_{k+1} - t_k}{2\pi}\right] \tag{5.15}$$

hvor $[x]$ betegner det største heltal, der er mindre eller lig med x [Moser, 1973, s. 85]. Ud fra dette kan man til enhver løsning $z(t)$ til ligning 5.14 med uendeligt mange nulpunkter knytte en biuendelig følge af heltal givet ved $\sigma = \{\sigma_k\}$, $k \in \mathbb{Z}$, hvor σ_k er antallet af hele omgange, som P_1 og P_2 foretager rundt i deres baner imellem det k'te og det $(k+1)$'te nulpunkt for z(t). Det hovedresultat, som Moser bruger Smales hestesko til at bevise, siger:

Sætning 5.1 *Givet en tilpas lille excentricitet $\epsilon > 0$ findes der et heltal $m = m(\epsilon)$, således at enhver følge $\sigma = \{\sigma_k\}$, hvorom det gælder, at $\sigma_k \geq m$, svarer til en løsning til ligning 5.14 [Moser, 1973, s. 85].*

Excentriciteten er en størrelse, der kan opfattes som et udtryk for forholdet mellem den store akse a_s og den lille akse a_l i de elliptiske baner, som P_1 og P_2 følger. Excentriciteten er givet ved formlen

$$\epsilon = \sqrt{1 - \frac{a_l^2}{a_s^2}} \tag{5.16}$$

af hvilken det fremgår, at jo mindre forskellen er imellem a_s og a_l, jo mindre er ϵ [Weisstein, 2010e].

Sætning 5.1 siger altså, at hvis man har en vilkårlig biuendelig følge af heltal, i hvilken alle elementerne er større eller lig med et fast heltal, så vil man kunne finde en løsning til ligning 5.14, således at antallet af hele omgange, som P_1 og P_2 foretager rundt i deres baner imellem det k'te og det $(k+1)$'te nulpunkt for denne løsning, er lig det k'te element i følgen. Ifølge Moser kan denne sætning forstærkes yderligere, idet man kan tillade, at følgen $\sigma = \{\sigma_k\}$ i sætningen ikke er en biuendelig følge, men derimod enten en halvt uendelig følge[2], der i den ene ende slutter med et ∞, eller en

[2]En halvt uendelig følge er en følge, der på en naturlig måde kan deles i en venstre og en højre del, således at den ene del er uendelig, mens den anden er endelig [Moser, 1973, s. 75].

endelig følge, der i begge ender slutter med et ∞ [Moser, 1973, s. 86]. Man kan altså tillade, at følgen σ istedet for at være en biuendelig følge er en følge på en af de tre nedenstående former:

$$\{\ldots, \sigma_{-n}, \ldots, \sigma_{-1}, \sigma_0.\sigma_1, \ldots, \infty\} \tag{5.17}$$

$$\{\infty, \ldots, \sigma_{-1}, \sigma_0.\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \ldots\} \tag{5.18}$$

$$\{\infty, \ldots, \sigma_{-1}, \sigma_0.\sigma_1, \ldots, \infty\} \tag{5.19}$$

For at blive i stand til fuldt ud at forstå Mosers brug af Smales hestesko er vi nødt til at bruge et øjeblik på at relatere denne type af halvt uendelige og endelige følger til skifteautomorfierne. I forbindelse med skifteautomorfier betegner X_S som nævnt i afsnit 2.8 mængden af biuendelige følger af elementer fra mængden S. Lad nu $\bar{X}_S$ være mængden af biuendelige følger samt halvt uendelige og endelige følger af den ovenstående type af elementer fra mængden S. Så er X_S en ægte delmænge af $\bar{X}_S$. Ifølge Moser kan man udvide skifteautomorfien $\alpha : X_S \mapsto X_S$ til en afbildning $\bar{\alpha} : D(\bar{\alpha}) \mapsto R(\bar{\alpha})$ defineret ligesom skifteautomorfierne i afsnit 2.8, og hvor $D(\bar{\alpha}) = \left\{a \in \bar{X}_S | a_0 \neq \infty\right\}$ og $R(\bar{\alpha}) = \left\{a \in \bar{X}_S | a_1 \neq \infty\right\}$ [Moser, 1973, s. 75]. Det er nødvendigt at have kendskab til disse betegnelser for at forstår Mosers anvendelse af Smales hestesko.

5.3.2 Afbildningen ϕ

I arbejdet med at bevise sætning 5.1 ser Moser på det dynamiske system, der ud fra ligning 5.14 beskriver opførslen af den lille partikel i det begrænsede trelegemeproblem. Da dette dynamiske system er kontinuert, og da Smales hestesko er diskret, er Moser nødt til at gøre det dynamiske system givet ved ligning 5.14 diskret for at kunne bruge Smales hestesko i studiet af det. Dette gør han ved indirekte at definere en Poincaréafbildning ϕ af det dynamiske system givet ved ligning 5.14. Det bør bemærkes, at Moser ikke selv bruger betegnelserne tilstandsrum og Poincaréafbildning i sin konstruktion af ϕ [Moser, 1973, s. 86-87]. På baggrund af den terminologi, som blev introduceret i kapitel 2, vil jeg dog mene, at Mosers konstruktion af ϕ bliver lettere at forstå, hvis den forklares ud fra disse to begreber.

Lad os starte med at bestemme tilstandsrummet for det dynamiske system, der ud fra ligning 5.14 beskriver opførslen af den lille partikel P_3 i det begrænsede trelegemeproblem. Dette tilstandsrum må i hvert fald have en dimension for positionen z af P_3 og en for hastigheden v af P_3, da systemets tilstand ikke kan beskrives uden kendskab til disse to størrelser. Ifølge Moser kan man lade variablen v beskrive den nummeriske værdi af hastigheden [Moser, 1973, s. 87]. Udover positionen og hastigheden af P_3 afhænger systemets tilstand også af positionerne af P_1 og P_2, da disse positioner bestemmer, hvordan P_1 og P_2 påvirker P_3. Positionerne af P_1 og P_2 afhænger udelukkende af tiden t. Da P_1 og P_2 er 2π om at bevæge sig

en hel omgang rundt i deres baner, kan vi i forbindelse med beskrivelsen af tilstandsrummet udskifte variablen t med den periodiske variabel $\tau = t \mod 2\pi$. Da systemets tilstand ikke afhænger af andre variable end z, v og τ, er tilstandsrummet altså et tredimensionalt rum med en dimension for hver af disse tre variable (se afsnit 2.1). Ifølge Moser kan man forstå variablene v og τ som polære koordinater i $v\tau$-planet i dette tilstandsrum [Moser, 1973, s. 87].

Det næste skridt er nu at få defineret en Poincaréafbildning af det dynamiske system med dette tilstandsrum. Som Poincarésnit bruger Moser planet givet ved $z = 0$. Dette Poincarésnit er altså det plan, der består af alle de mulige nulpunkter for løsninger til ligning 5.14. Afbildningen ϕ defineres nu til at være Poincaréafbildningen, der afbilder et skæringspunkt mellem en bane i tilstandsrummet og Poincarésnittet over i det næste sådanne skæringspunkt, såfremt dette findes [Moser, 1973, s. 87]. Det bør pointeres, at ϕ afviger lidt fra den generelle beskrivelse af en Poincaréafbildning i afsnit 2.2, idet ϕ ikke kun giver de punkter, hvori en bane skærer Poincarésnittet fra en bestemt side, men derimod giver alle skæringer mellem banen og Poincarésnittet.

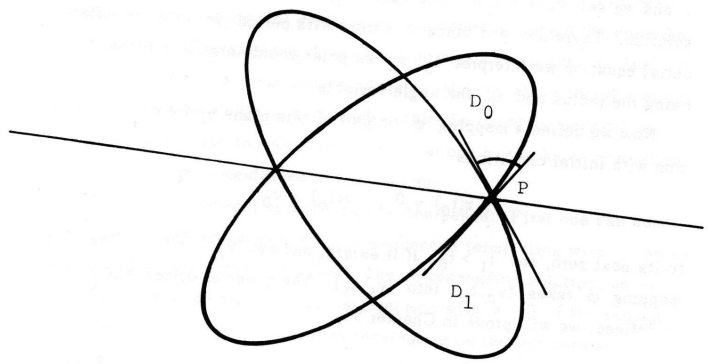
Efter at have konstrueret afbildningen ϕ definerer Moser domænet i planet $z = 0$ for ϕ. Det er nemlig muligt, at et nulpunkt for en løsning til ligning 5.14 ikke efterfølges af flere nulpunkter for løsningen. Da ϕ afbilder et nulpunkt for en løsning over i det næste, betyder dette, at ϕ ikke er defineret overalt på planet $z = 0$. Ifølge Moser er ϕ's domæne D_0 bestemt som det indre af en reelt analytisk, simpelt lukket kurve [Moser, 1973, s. 87]. Derudover siger Moser også, at ϕ afbilder D_0 surjektivt over i området D_1, der fås ved at bruge afbildningen $\rho : (v, \tau) \mapsto (v, -\tau)$ på D_0 [Moser, 1973, s. 87]. Om forholdet mellem D_0 og D_1 siger Moser, at hvis excentriciteten ϵ er lille nok og positiv, så er $D_0 \neq D_1$, og de to randkurver ∂D_0 og ∂D_1 skærer hinanden tranversalt i et punkt P [Moser, 1973, s. 87]. D_0, D_1 og P er skitseret på figur 5.2.

5.3.3 Mosers delresultat

Som nævnt bruger Moser Smales hestesko til at bevise sætning 5.1. Dette gør han mere præcist ved at bruge Smales hestesko til at bevise et andet resultat - et delresultat - hvorefter han argumenterer for, at hovedresultatet i sætning 5.1 følger af dette delresultat. Mosers delresultat lyder således

Sætning 5.2 *Afbildningen ϕ på D_0 besidder skifteautomorfien $\bar{\alpha}$ på $D(\bar{\alpha})$ (se afsnit 5.3.1) som et delsystem. Derudover eksisterer der en hyperbolsk invariant mængde I, som er homeomorf med X_S, på hvilken ϕ er topologisk ækvivalent med skifteautomorfien α [Moser, 1973, s. 92].*

At ϕ er topologisk ækvivalent med skifteautomorfien α, betyder, at ϕ og α er topologisk konjugerede. Det bør bemærkes, at S i ovenstående sæt-



Figur 5.2: På denne figur ses mængderne D_0 og $D_1 = \phi(D_0)$ samt skæringspunktet P mellem randkurverne ∂D_0 og ∂D_1. Figuren er lånt fra [Moser, 1973, s. 88].

ning er en tællelig, uendelig mængde, hvilket betyder, at skifteautomorfien α i denne sætning er defineret på en mængde af biuendelige følger, der er bygget op af tælleligt, uendeligt mange forskellige elementer. Dette er umiddelbart i modstrid med definitionen af en skifteautomorfi i afsnit 2.8, hvor mængden S blev defineret som en endelig mængde. Ifølge Mosers definition af en skifteautomorfi kan S dog enten være endelig eller tællelig og uendelig [Moser, 1973, s. 62]. Derudover giver det ifølge betingelse 3.5.1, 3.5.2 og 3.5.3, der blev præsenteret i afsnit 3.5, fint mening at tale om en hestesko, der er topologisk konjugeret med en skifteautomorfi, der er defineret på mængden X_S, hvor S er tællelig og uendelig. Derfor vil jeg ikke gå ind i yderligere overvejelser omkring kardinaliteten af S i sætning 5.2.

Især anden halvdel af sætning 5.2 minder meget om sætning 3.1 i afsnit 3.3, der udtaler sig om forholdet mellem Smales hestesko og skifteautomorfier. I Mosers bevis for sætning 5.2 er det faktisk kun denne del af sætningen, der reelt set bliver bevist, mens beviset for sætningens første halvdel blot består i, at Moser siger, at denne halvdel kan bevises vha. en fremgangsmåde, der ligner den, som han bruger til at bevise sætningens anden halvdel [Moser, 1973, s. 97].

I sit bevis for anden halvdel af sætning 5.2 starter Moser med at se på mængderne $D_0(\delta)$ og $D_1(\delta)$, hvor $\delta > 0$ er tilpas lille. $D_0(\delta)$ defineres som mængden af punkter i D_0, hvis afstand til ∂D_0 er mindre end δ, og $D_1(\delta)$ defineres tilsvarende for punkter i D_1 [Moser, 1973, s. 90]. Af figur 5.2 fremgår det, at fællesmængden $D_0(\delta) \cap D_1(\delta)$ ikke er tom. Derfor kan

Moser gå videre med af betragte

$$R \subset D_0(\delta) \cap D_1(\delta) \tag{5.20}$$

som er en symmetrisk mængde, der indeholder skæringspunktet P mellem ∂D_0 og ∂D_1 i sin afslutning [Moser, 1973, s. 93]. R er skitseret på figur 5.3. Ifølge Moser vil R for et tilstrækkeligt lille δ være begrænset af fire differentiable kurver, som Moser kalder sider [Moser, 1973, s. 93]. Som det fremgår af figur 5.3, skærer to af disse sider ∂D_0 transversalt. Derfor kan Moser bruge et lemma, der siger, at hvis en differentiabel kurve γ skærer ∂D_0 transversalt i sit ene endepunkt og resten af γ er indeholdt i D_0, så vil $\phi(\gamma)$ være en kurve i D_1, der spirallerende nærmer sig ∂D_1 [Moser, 1973, s. 89-90]. Dette lemma medfører, at billedet af de to sider i R, der skærer ∂D_0 transversalt, under ϕ er to kurver i D_1, der spirallerer ud mod ∂D_1, hvilket igen betyder, at $\phi(R)$ er et bånd i D_1, der spirallerer ud mod ∂D_1. Dette bånd er illustreret på figur 5.3. Ifølge Moser skærer $\phi(R)$ og R hinanden i uendeligt mange disjunkte mængder [Moser, 1973, s. 93]. Bortset fra endeligt mange af disse mængder vil hver mængde forbinde to sider i R, der står overfor hinanden (se figur 5.3). Moser smider derfor endeligt mange af disse disjunkte mængder væk, ordner resten efter placering i R og betegner dem $U_1, U_2, \ldots$ [Moser, 1973, s. 93-94]. Derefter konstruerer Moser en ny mængde disjunkte mængder $V_1, V_2, \ldots$ ved at sige at

$$V_k = \rho(U_k) \tag{5.21}$$

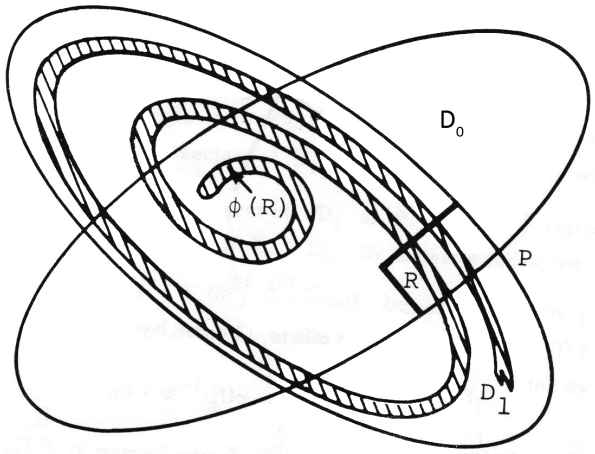
hvor ρ som tidligere nævnt er afbildningen givet ved $\rho : (v, \tau) \mapsto (v, -\tau)$ [Moser, 1973, s. 94]. Mængderne $U_1, U_2, \ldots$ og $V_1, V_2, \ldots$ er skitseret på figur 5.4. Uden bevis siger Moser derefter, at

$$\phi(V_k) = U_k \tag{5.22}$$

og at V_k ligesom U_k er disjunkte, lukkede mængder [Moser, 1973, s. 94-95]. Efter at have konstrueret mængderne $U_1, U_2, \ldots$ og $V_1, V_2, \ldots$ viser Moser, at disse mængder opfylder kraverne til hhv. horisontale og vertikale bånd, som blev beskrevet i definition 3.2 i afsnit 3.5, hvorefter han viser, at restriktionen af ϕ til $V_1, V_2, \ldots$ opfylder betingelse 3.5.1 og 3.5.3 beskrevet i afsnit 3.5 [Moser, 1973, s. 95-96]. Ifølge afsnit 3.5 følger det deraf, at det dynamiske system, som ϕ beskrive opførslen af, indeholder en hestesko som et delsystem, og af dette følge anden halvdel af sætning 5.2 umiddelbart. Moser beviser altså anden halvdel af denne sætning ved at finde en hestesko i det dynamiske system, han kigger på.

5.3.4 Sammenhæng mellem Mosers hovedresultat og delresultat

Efter at have bevist sætning 5.2 forklarer Moser kort, hvordan sætning 5.1 - som jo er den sætning, som han i virkeligheden vil bevise - følger af sætning 5.2. Denne forklaring forstås lettest ved at relatere de vertikale bånd

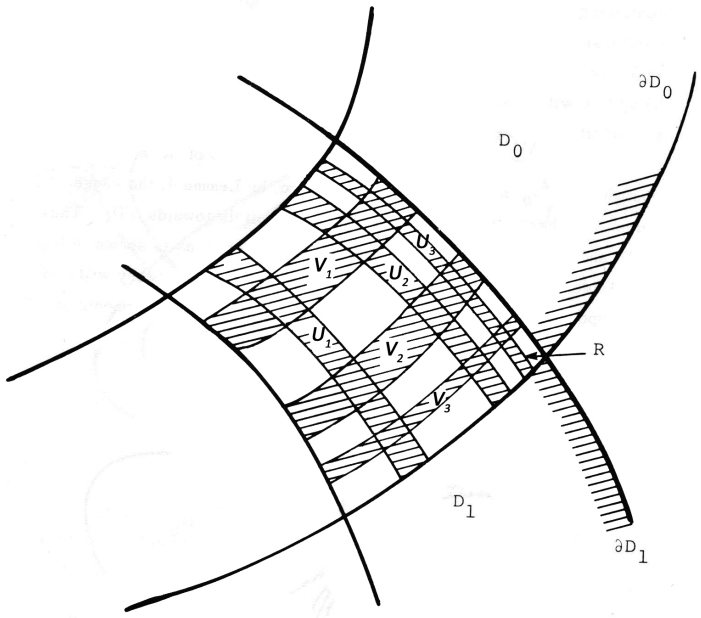


Figur 5.3: På denne figur er mængderne D_0 og $D_1 = \phi(D_0)$ samt mængderne $R \subset D_0(\delta) \cap D_1(\delta)$ og $\phi(R)$ skitseret. Figuren er lånt fra [Moser, 1973, s. 93].

$V_1, V_2, \ldots$, som Moser konstruerede i beviset for sætning 5.2, til ruten for et punkt i den invariante mængde Λ for en hesteskoafbildning g, som blev beskrevet i afsnit 3.3. Ligesom et punkt i Λ altid vil havne i et af rektanklerne Q_1 eller Q_2 under et givet antal iterationer med g, så vil et punkt i den invariante mængde I beskrevet i sætning 5.2 altid blive afbildet i et af de vertikale bånd $V_1, V_2, \ldots$ under et givet antal iterationer med afbildningen ϕ. Derfor kan man på entydig måde til ethvert punkt i I knytte en rute, der angiver, i hvilken V_k dette punkt bliver afbildet efter et givet antal iterationer med ϕ.

Moser knytter sætning 5.1 til sætning 5.2 ved at sige, at banen for en løsning til ligning 5.14, hvis begyndelsesbetingelser ligger i V_k og altså svarer til et nulpunkt for denne løsning, vil opleve sit næste nulpunkt efter et tidsrum, der afhænger entydigt af k [Moser, 1973, s. 97]. Sagt med andre ord besidder hvert eneste V_k den egenskab, at en bane, der skærer Poincarésnittet i dette vertikale bånd, efter denne skæring vil bevæge sig rundt i et bestemt tidsrum afhængigt af k, før det næste nulpunkt for banen indtræffer. Dette betyder, at en rute for et punkt i I angiver tidsrummene mellem to på hinanden følgende nulpunkter for den løsning til ligning 5.14, der har dette punkt som begyndelsesbetingelse. Da den topologiske konjugation mellem ϕ og skifteautomorfien medfører, at der til enhver mulig rute svarer et punkt i I, følger sætning 5.1 derfor af sætning 5.2.

I det gennemgåede eksempel bruger Moser Smales hestesko til at be-



Figur 5.4: På denne figur er mængderne $U_1, U_2, \ldots$ og $V_1, V_2, \ldots$ skitseret. Figuren er på nær få ændringer lånt fra [Moser, 1973, s. 94].

vise, at der er et delsystem af det dynamiske system, der beskriver den lille partikels opførsel i det begrænsede trelemeproblem, som er topologisk konjugeret med en skifteautomorfi. Med andre ord bruger Moser altså Smales hestesko til at relatere det begrænsede trelegemproblems dynamik til en skifteautomorfis dynamik. Mosers brug af Smales hestesko vil blive diskuteret nærmere i kapitel 6.

Som en sidste ting bør det bemærkes, at Moser ligesom Curry ingen steder direkte bruger betegnelsen Smales hestesko. Moser er dog helt klar over, at en del af hans arbejde bygger på Smales idéer [Moser, 1973, s. 66], og selvom han ikke bruger selve betegnelsen Smales hestesko, så kan der ikke være nogen tvivl om, at Moser beviser sit hovedresultat ved at finde en hestesko indlejret i sit dynamiske system.

Kapitel 6

Diskussion

Efter gennemgangen af mine to cases i kapitel 4 og 5 er jeg nu nået frem til den afsluttende diskussion. I dette kapitel vil jeg starte med at opsummere, hvordan Smales hestesko indgår i hver af de tre eksempler i mine to cases, og diskutere en mulig glidning i hesteskoens status og måden, hvorpå man taler om den, som fremgår af disse eksempler. Derefter vil jeg diskutere, på hvilken måde Smales hestesko set ud fra mine cases har bidraget til den moderne udvikling af teorien for dynamiske systemer. Efter dette vil jeg gå over til at se på et aspekt ved Smales hestesko, som Smale selv i en artikel fra 1980 fremhæver som vigtigt [Smale, 1980], men som ingen af de tre eksempler i mine to cases beskæftiger sig med. Jeg vil i den forbindelse diskutere, hvordan det kan være, at et aspekt af Smales hestesko, som Smale selv ser som betydningsfuldt, ud fra mine cases ikke ser ud til at have bidraget med noget synderligt til den videre udvikling af teorien for dynamiske systemer. Til sidst vil jeg afslutte diskussionen med et par overvejelser om brugen af betegnelsen „Smales hestesko“ og forholdet mellem Smales hestesko og kaos.

Lad os starte med at se på, hvordan Smales hestesko indgår i hvert af de tre eksempler i mine to cases. I eksemplet med Curry (se afsnit 4.2.1) bruges Smales hestesko til at argumentere for en mulig delvis forklaring på strukturen i Hénonafbildningens attraktor. Mere præcist bruger Curry den sandsynliggjorte tilstedeværelse af en indlejret hestesko i Hénonafbildningen til at argumentere for, at der er en Cantormængde i Hénonafbildningens tilstandsrums trapping region. Grunden til, at Curry kan bruge hesteskoen til dette er dens forbindelse til skifteautomorfierne. I Currys anvendelse af Smales hestesko fungerer hesteskoen altså som et redskab i studiet af Hénonafbildningen, og den centrale egenskab ved dette redskab er for Curry dets forhold til skifteautomorfierne.

Ligesom i eksemplet med Curry er det i eksemplet med Moser (se afsnit 5.3) hesteskoens forhold til skifteautomorfierne, der er det centrale. I dette eksempel bruger Moser nemlig hesteskoen til at bevise et fascinerende resultat vedrørende opførslen af den lille partikel i det begrænsede trelege-

meproblem. Dette gør han ved at vise, at der i det dynamiske system, som beskriver den lille partikels opførsel, er et delsystem, der er en hestesko, hvorfor dette delsystems dynamik kan beskrives vha. skifteautomorfier. Ligesom hos Curry fungerer hesteskoen hos Moser altså som et redskab, der især er nyttigt, fordi det kan oversætte imellem dynamikken i det begrænsede trelegemeproblem og skifteautomorfiernes dynamik.

Som nævnt i slutningen af afsnit 4.2.2 adskiller eksemplet med Devaney og Nitecki sig fra eksemplerne med Curry og Moser ved det, at Smales hestesko i dette eksempel ikke bruges som et redskab til at bevise et andet resultat. Derimod er fundet af en hestesko i Hénonafbildningen i sig selv en del af det resultat, som Devaney og Nitecki præsenterer i deres artikel. Da eksemplet med Devaney og Nitecki er det seneste af mine tre eksempler, er det meget muligt, at denne forskel er udtryk for, at der fra de to første eksempler og til dette er sket en glidning i hesteskoens status. Hvor hesteskoen hos Curry og Moser fungerede som et værktøj, har den hos Devaney og Nitecki fået status som et begreb, der har værdi i sig selv. Denne udvikling er et eksempel på det generelle fænomen, at matematiske begrebers status ikke er fastlåste, men ændrer sig over tid og i forhold til den kontekst, de indgår i [Kjeldsen, 2009, s. 108-110]. På trods af hesteskoens ændrede status fremhæver Devaney og Nitecki ligesom Curry og Moser hesteskoens forbindelse til skifteautomorfien. Hos Devaney og Nitecki bruges denne forbindelse dog ikke til at bevise et konkret resultat ligesom hos Curry og Moser. Derimod kan det godt virke som om, at pointen med fremhævelsen af forbindelsen til skifteautomorfien hos Devaney og Nitecki er, at denne forbindelse medfører nogle aspekter ved dynamikken i Hénonafbildningen, der anses for at være så indlysende, at de ikke behøver at blive foldet ud. Som nævnt i afsnit 4.2.2 er det muligt, at denne form for indforståethed er symptomatisk for den tid, som Devaney og Nitecki skriver ind i. Det er nemlig muligt, at man på dette tidspunkt anså visse tankegange omkring hesteskoen for så indlysende, at en udfoldning af dem ville virke overflødig.

Den noget indforståede stil hos Devaney og Nitecki kan muligvis ses som udtryk for endnu et aspekt af den glidning, der nok er fundet sted fra de to første af mine eksempler og til det seneste. Både Curry og Moser præsenterer nemlig den teori omkring hesteskoen, som de bruger, væsentligt mere eksplicit end Devaney og Nitecki. I den forbindelse skal det dog siges, at eksemplet med Moser er hentet fra en bog på ca. 200 sider, hvorfor det er naturligt, at det teoretiske grundlag foldes mere ud der, end i eksemplet med Devaney og Nitecki, der er hentet fra en artikel på 10 sider. Eksemplet med Curry er dog også hentet fra en artikel på ca. samme længde. Derfor er det muligt, at den indforståede stil hos Devaney og Nitecki, som ikke findes hos Curry og Moser, er udtryk for en glidning i opfattelsen af, hvilke informationer der skal præsenteres, for at man kan formidle et budskab om hesteskoen.

Jeg har nu sandsynliggjort, at der imellem eksemplerne med Curry og

Moser og eksemplet med Devaney og Nitecki er sket en udvikling mht. hesteskoens status og den måde, hvorpå man formidler resultater om hesteskoen. I den forbindelse kan man indvende, at da eksemplerne med Curry og med Devaney og Nitecki begge er fundet i artikler fra 1979, er der også ting, der taler imod, at der er sket den store udvikling imellem disse to eksempler. Imod en sådan indvending kan det for det første fremføres, at der kan gå langt tid mellem, at første udkast til en artikel skrives, og at artiklen faktisk udgives. Derfor er det, at to artikler udgives det samme år, ikke ensbetydende med, at det arbejde, der præsenteres i dem, er udført på samme tid. For det andet kan man fremføre, at en ny udvikling ikke behøver at slå lige hurtigt igennem i alle dele af det matematiske samfund.

Lad os nu gå over til at se på, på hvilken måde Smales hestesko set ud fra de tre eksempler i mine to cases har bidraget til udviklingen indenfor dynamiske systemer. Af disse tre eksempler fremgår det, at Smales hesteko i hvert fald har bidraget på en ganske konkret måde til studiet af hhv. Hénonafbildningen og det begrænsede trelegemeproblem. I eksemplerne med Curry og Moser fungerer Smales hestesko nemlig som et værktøj, vha. hvilket konkrete resultater bevises eller sandsynliggøres, og i eksemplet med Devaney og Nitecki bidrager hesteskoen på en meget implicit måde gennem sit forhold til skifeautomorfierne til at øge overblikket over Hénonafbildningens dynamik. Mere overordnet set har Smales hestesko i hvert af mine tre eksempler bidraget til at skabe overblik over dynamikken i hhv. Hénonafbildningen og det begrænsede trelegemeproblem. Dette har den gjort ved at fungere som en form for oversætter mellem disse to dynamiske systemer og skifteautomorfierne, hvorved det er blevet gjort muligt at forstå de to systemers dynamik ud fra skifteautormofierne. Ud fra mine tre eksempler kan man derfor udlede, at Smales hestesko i hvert fald har bidraget til udviklingen af teorien for dynamiske systemer ved at skabe en mulighed for, at dynamikkerne i tilsyneladende meget forskellige dynamiske systemer på sin vis kan ses som ækvivalente, hvorfor resultater vedrørende ét system kan overføres til et andet. I denne forbindelse er hesteskoens forhold til skifteautomorfierne helt essentiel, da det medfører, at dynamikkerne i dynamiske systemer, som man ellers ikke ved så meget om, gennem hesteskoen kan forstås ud fra de velforståede skifteautomorfier. Man kan altså sige, at i hvert fald en del af Smales hesteskos bidrag til udviklen af teorien for dynamiske systemer har bestået i, at den har synliggjort en struktur, som går igen i mange ellers meget forskellige dynamiske systemer, og som kan forstås ud fra skifteautomorfier.

I forbindelse med hesteskoens evne til at skabe overblik over dynamiske systemers dynamikker skal det nævnes, at Smale selv i sine artikler fra 1965 og 1967 var opmærksom på, at denne evne kunne få betydning videre frem. F.eks. siger han som nævnt, at hesteskoen via dens forbindelse til homokliniske punkter kan bruges til at opnå informationer om dynamikken i det

begrænsede trelegemeproblem[1] [Smale, 1965, s. 79]. Smale er i det hele taget særligt opmærksom på styrken ved denne evne hos hesteskoen i forbindelse med homokliniske punkter, hvilket eksplicit kommer til udtryk af følgende citat:

> A great advantage of the horseshoe approach [...] is that one gets a satisfactory picture of the orbit structure and stability while a given homoclinic point at first glance seems to defy analysis [Smale, 1967, s. 775].

Homokliniske punkter komplicerer ifølge Smale dynamikken i et dynamisk system meget, hvorfor han ser hesteskoens evne til at synliggøre en relativt let forståelig (men dog ikke ukompliceret) dynamik omkring et homoklinisk punkt som et kraftfuldt værktøj i studiet af dynamiske systemer. At denne evne ved hesteskoen da også er blevet brugt og dermed har bidraget til udviklingen indenfor dynamiske systemer, fremgår af mit eksempel med Curry.

I sine artikler fra 1965 og 1967 er Smale altså fuldt ud opmærksom på, at hesteskoens evne til gennem skifteautomorfier at skabe overblik over et dynamisk systems dynamik kunne få betydning for den videre udvikling indenfor dynamiske systemer. I artiklen *On How I Got Started in Dynamical Systems* fra 1980, i hvilken han ser tilbage på sine første år med dynamiske systemer, er det dog et andet aspekt ved hesteskoen, som han fremhæver som det vigtigste. Her siger han nemlig indirekte, at det vigtigste ved hesteskoen er, at den var „the first structurally stable dynamical system[2] with an infinite number of periodic solutions“ [Smale, 1980, s. 150]. Hesteskoens strukturelle stabilitet påpeges også i Smales artikel fra 1967 [Smale, 1967, s. 769-771], men her siger Smale ikke, at dette aspekt er det vigtigste ved den. Fremhævelsen af strukturel stabilitet i artiklen fra 1980 er interessant i forbindelse med mine to cases, da ingen af de tre eksempler i dem så meget som nævner strukturel stabilitet i forbindelse med hesteskoen. Ud fra dem ser det altså ikke rigtigt ud til, at dette aspekt ved hesteskoen har bidraget til den efterfølgende udvikling indenfor dynamiske systemer. Det er efter min mening værd at overveje, hvorfor eksemplerne i mine cases slet ikke nævner strukturel stabilitet, når Smales sene artikel fremhæver det som det vigtigste aspekt ved hesteskoen.

En mulig forklaring på, at mine eksempler er uenige med Smales sene artikel i, hvad det vigtigste ved hesteskoen er, kan være, at aspektet omkring

[1] Det skal bemærkes, at Smale i denne sammenhæng som nævnt taler om den udgave af det begrænsede trelegemeproblem, som Poincaré arbejdede med, og ikke den udgave, som min anden case handler om.

[2] En strukturel stabil afbildning f er en afbildning, for hvilken det gælder, at enhver afbildning i en vis omegn af f er topologisk konjugeret med f [Moser, 1973, s. 16]. Et strukturelt stabilt dynamisk system er et dynamisk system, hvis opførsel bestemmes af en strukturel stabil afbildning.

strukturel stabilitet ikke er særligt betydningsfuldt i forhold til deres anvendelser af den. I alle mine tre eksempler indgår Smales hestesko nemlig enten som redskab eller som resultat i konkrete beviser. Ud fra Smales artikel fra 1980 får man det indtryk, at betydningen af det aspekt ved hesteskoen, der vedrører strukturel stabilitet, ikke er knyttet til konkrete beviser, men derimod snarere til mere overordnede teoretiske diskussioner og overvejelser om dynamiske systemer [Smale, 1980]. Dette må betyde, at selvom mine eksempler ikke giver udtryk for, at hesteskoens strukturelle stabilitet har bidraget på nogen betydelig måde til udviklingen af teorien for dynamiske systemer, så ville man måske ud fra andre eksempler, der i højere grad end mine omhandler overordnede teoretiske diskussioner, kunne finde ud af, at dette aspekt af hesteskoen faktisk har bidraget til denne udvikling.

Hvis man løfter denne del af min diskussion op på et lidt mere overordnet niveau, kan grunden til, at Smales sene artikel og eksemplerne i mine cases er så uenige om, hvad det vigtigste ved hesteskoen har været, være, at Smale og eksemplerne ser på hesteskoen ud fra forskellige kontekster. Eksemplerne bruger hesteskoen som et værktøj eller et resultat i et konkret bevis, mens Smale i sin artikel fra 1980 ser hesteskoen som et argument i et forsøg på at forstå strukturen i rummet bestående af alle ordinære differentialligninger [Smale, 1980] - og set ud fra disse to kontekster er det ikke det samme aspekt af hesteskoen, der er vigtigt. Ifølge Tinne Hoff Kjeldsen kan den kontekst, hvori et matematisk resultat indgår, have meget stor betydning for, hvordan resultatet opfattes [Kjeldsen, 2009, s. 108-110]. Derfor virker det rimeligt, at det er en forskel i kontekst, der er årsagen til, at Smales sene artikel og mine eksempler er uenige om, på hvilken måde Smales hestesko har bidraget til udviklingen af teorien for dynamiske systemer.

I denne opgave har jeg hele vejen igennem ved Smales hestesko forstået enten en diskret afbildning, der bestemmer opførslen i et dynamiske system, eller selve dette dynamiske system. Denne begrebsforståelse har jeg fået fra flere forskellige oversigtsværker om dynamiske systemer og kaos [Wiggins, 1990, s. 420], [Alligood et al., 1996, s. 216], [Strogatz, 1994, s. 425]. Ud fra mine tre eksempler er det dog tydeligt, at der på ingen måde er fuldstændig enighed om det præcise indhold af begrebet Smales hestesko. Som nævnt i afsnit 4.2.2 bruger Devaney og Nitecki f.eks. ikke betegnelsen Smales hesteko om en afbildning, men derimod om afbildningens definitionsmængde. Curry og Moser bruger heller ikke betegnelsen Smales hestesko om en afbildning, men det skyldes ikke, at de har givet den et andet indhold, men derimod at de overhovedet ikke bruger den. Disse overvejelser om brugen af betegnelsen Smales hestesko viser, at selvom de samme idéer går igen flere steder, så behøver de betegnelser, som bruges i forbindelse med disse idéer, ikke at være de samme.

Som en sidste ting i min diskussion vil jeg knytte en ende tilbage til den sammenhæng mellem Smales hestesko og kaos, som blev nævnt i indledningen i kapitel 1. Da jeg i afsnit 3.3 redegjorde for, at Smales hestesko er et

kaotisk dynamisk system, må fundet af en indlejret hestesko i et konkret dynamisk system medføre, at dette system udviser kaotisk opførsel. Derfor må Smales hestesko også kunne bruges som et værktøj, hvormed man kan eftervise, at et dynamisk system er kaotisk. Ingen af de tre eksempler, som jeg har kigget på, bruger dog eksplicit Smales hestesko til dette formål.

Kapitel 7

Konklusion

Jeg er nu nået til at kunne give mit svar på min problemformulering, der som nævnt i kapitel 1 med udgangspunkt i mine to cases stiller spørgsmålet om, på hvilken måde Smales hestesko har bidraget til udviklingen af den moderne teori for dynamiske systemer. Ud fra min analyse og diskussion af de to cases må mit svar på dette spørgsmål blive, at Smales hestesko har bidraget til denne udvikling ved at synliggøre en struktur, som dynamikkerne i mange forskellige dynamiske systemer har til fælles med hinanden og med skifteautomorfierne. Smales hestesko har derudover bidraget med en metode til at verificere, at denne struktur findes i et konkret dynamisk systems dynamik, således at man kan bruge forbindelsen til skifteautomorfierne til at udtale sig om aspekter af denne dynamik. Denne metode går ud på at finde en indlejret hestesko i det dynamiske system. I forbindelse med denne metode må det bemærkes, at Smale alene ikke kan tildeles hele æren for dens bidrag til udviklingen indenfor dynamiske systemer, hvilket skyldes, at hans oprindelige betingelser til en hesteskoafbildning som nævnt i afsnit 3.5 ikke rigtigt er brugbare i forsøget på at finde en indlejret hestesko i et dynamisk system. Derimod må de mere generelle betingelser, som i afsnit 3.5 blev præsenteret i Mosers udgave, også tildeles en del af æren for metodens bidrag til udviklingen indenfor dynamiske systemer. Det skal dog pointeres, at Smales hesteskos bidrag til teorien for dynamiske systemer primært består i synliggørelsen af en fælles struktur i dynamikkerne i mange dynamiske systemer, og at metoden til at verificere denne strukturs tilstedeværelse i et konkret system kun er et biprodukt af det primære bidrag.

Kapitel 8

Perspektivering

Som det fremgik af min diskussion, er jeg i mit arbejde med denne rapport stødt ind i nogle aspekter omkring Smales hestesko, som ikke direkte bidrager til svaret på min problemformulering, men som alligevel er interessante. Et af disse er den glidning i både hesteskoens status og den måde, som man formidler resultater om den på, som kommer til udtryk gennem mine tre eksempler. Denne glidning kan for mig at se både være interessant i forbindelse med en undersøgelse af den historiske udvikling af begrebet Smales hestesko og som et eksempel på det generelle fænomen, at matematiske begrebers status kan ændrer sig over tid og i forhold til den kontekst, de indgår i. Som nævnt i afsnit 1.2 har jeg i denne rapport bevidst valgt kun at se på eksempler fra før 1980. Hvis man tog fat i nogle senere eksempler, er det meget muligt, at denne glidning ville fremstå endnu tydeligere. På grund af de tidsmæssige rammer for mit arbejde, er dette ikke gjort her, men det er efter min mening et spor, der kunne være interessant at følge på et senere tidspunkt.

Et andet spor, der kunne være interessant at følge, men som på grund af tidsmæssige begrænsninger ikke er fulgt her, handler om hesteskoens strukturelle stabilitet og dennes bidrag til udviklingen indenfor dynamiske systemer. Som nævnt i diskussionen er det muligt, at selvom det ikke fremgår af mine to cases, at dette aspekt ved hesteskoen har haft betydning for udviklingen indenfor dynamiske systemer, så er det meget muligt, at dette ville fremgå af andre cases. I forhold til min problemformulering kunne det næste logiske skridt derfor være at lede efter sådanne cases, da de ville kunne være med til at fuldende billedet af Smales hesteskos bidrag til udviklingen indenfor dynamiske systemer.

Selvom hverken mine eksempler eller Smales artikler eksplicit har forholdt sig til eller benyttet forbindelsen mellem Smales hestesko og kaos, så er denne forbindelse kommet til syne flere steder i min rapport. Da Smales hestesko som nævnt i diskussionen kan benyttes som et redskab til at verificere, at et dynamisk system er kaotisk, vil jeg mene, at der er en god chance for, andre

cases end mine vil vise, at dette aspekt ved hesteskoen også har bidraget til udviklingen indenfor dynamiske systemer. En interessant fortsættelse af mit arbejde kunne tage denne tråd op og direkte fokusere på forbindelsen mellen Smales hestesko og kaos og denne forbindelses bidrag til udviklingen indenfor dynamiske systemer.

Bilag A

Lorenzligningerne

I dette bilag vil jeg give en præsentation af Lorenzligningerne, der er opkaldt efter meterologen Edward N. Lorenz. Lorenz skrev i 1963 en artikel med titlen *Deterministic Nonperiodic Flow* [Lorenz, 1963], hvori Lorenzligningerne for første gang blev præsenteret [Strogatz, 1994, s. 301], [Alligood et al., 1996, s. 365]. I min præsentation af Lorenzligningerne vil jeg tage udgangspunkt i denne artikel.

Ifølge flere kilder var Lorenz, der arbejdede som meterolog ved M.I.T., en af de første, der satte kaos på dagsordenen igen, efter at emnet efter Poincaré for en tid var gået i glemmebogen[1] [Gleick, 1989, s. 31-33], [Strogatz, 1994, s. 3-5]. Noget af det mest fascinerende ved historien om Lorenz og kaos er, at det skyldtes en ren tilfældighed, at han blev opmærksom på, at et bestemt dynamisk system udviste kaotisk opførsel. I sit arbejde som meterolog udførte Lorenz bl.a. computersimuleringer af en yderst simplificeret model af atmosfæren, der bestod af et system af tolv differentialligninger [Alligood et al., 1996, s. 359]. En dag i 1961 forsøgte han at reproducere en allerede gennemført simulering ved at benytte nogle værdier, som computeren havde skrevet ud midt under den tidligere simulering, som begyndelsesbetingelser for en ny simulering [Gleick, 1989, s. 19]. Disse udskrevne værdier havde kun tre decimaler, mens computeren i den tidligere simulering havde arbejdet med mange flere. Dette betød, at Lorenzs nye begyndelsesbetingelser afveg med under en tusindedel fra værdierne, som computeren havde regnet på i den forrige simulering. Lorenz havde regnet med, at denne lille afvigelse var fuldstændig uden betydning, og at den nye simulering derfor ville ligne den gamle i det tidsrum, hvor de overlappede hinanden [Alligood et al., 1996, s. 360]. Det gjorde den bare ikke. Da den nye simulering var kørt, viste det sig nemlig, at den lille afvigelse mellem

[1] Ifølge Strogatz var Poincaré den første, der opdagede muligheden for kaotisk opførsel i et dynamisk system. Denne opdagelse gjorde han i forbindelse med sit arbejde med trelegemeproblemet [Strogatz, 1994, s. 2-3]. Fra Poincarés opdagelse sidst i 1800-tallet og til 1950'erne og 1960'erne beskæftigede forskningen i dynamiske systemer sig dog ikke med kaos, men fokuserede istedet på andre aspekter ved systemerne.

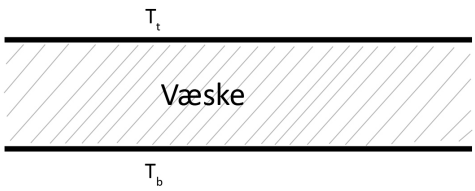
begyndelsesbetingelserne havde ført til, at den nye simulering meget hurtigt opførte sig helt anderledes end den gamle. Lorenz havde med andre ord ved et rent tilfælde opdaget, at hans dynamiske system udviste følsomhed på begyndelsesbetingelserne [Alligood et al., 1996, s. 360].

Efter at Lorenz havde opdaget følsomheden på begyndelsesbetingelserne i sin vejrmodel, begyndte han at lede efter et simplere dynamisk system, som ligeledes udviste en sådan følsomhed. Grunden til dette var, at Lorenz ønskede at retfærdiggøre, at følsomheden på begyndelsesbetingelserne ikke bare var et særtræk ved hans vejrmodel [Alligood et al., 1996, s. 360]. Et sådan simpelt system fandt han ved at simplificere et system af ordinære differentialligninger, som Barry Saltzman havde udledt udfra et system af partielle differentialligninger, der beskriver konvektion i en Rayleigh-Bénard-celle [Lorenz, 1963, s. 134-135]. En Rayleigh-Bénard-celle er kort fortalt en celle med væske, der overalt har den samme højde, og hvor temperaturen T_b i bunden af cellen er højere end temperaturen i T_t i toppen [Hilborn, 1994, s. 29]. Længden og bredden af cellen har i denne forbindelse ingen betydning. Idéen i en Rayleigh-Bernard-celle er illustreret på figur A.1. Temperaturforskellen $\Delta T = T_b - T_t$ mellem bunden og toppen af cellen bliver hele tiden holdt konstant. Hvis ΔT er tilpas lav, vil varmen blive transporteret fra bunden til toppen, uden at væsken bliver sat i bevægelse. Hvis ΔT bliver øget lidt, vil den varme væske i bunden af cellen begynde at stige til vejrs, hvilket fører til, at den kolde væske i toppen bliver presset ned mod bunden. Dette starter en jævn, cirkulær bevægelse fra bunden af cellen til toppen [Hilborn, 1994, s. 29-30]. Den varme væske, som stiger op og dermed starter denne bevægelse, er et eksempel på det fænomen, som er kendt som konvektion [Gleick, 1989, s. 27]. Et eksempel på jævn konvektion i en Rayleigh-Bernard-celle er skitseret på figur A.2. Hvis ΔT øges yderligere, vil den cirkulære bevægelse fra bunden af cellen til toppen begynde at variere uregelmæssigt i retning og intensitet. Denne bevægelse kan f.eks. blive så voldsom, at væsken ikke når at tilpasse sin temperatur alt efter, om den er i toppen af cellen eller i bunden, således at der kan forekomme tidspunkter, hvor det er varm væske, der stiger ned, og kold væske, der stiger op.

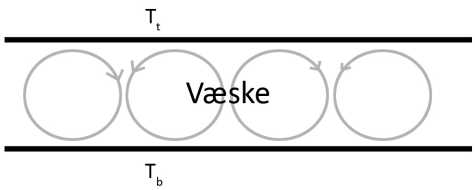
Lorenz tog altså fat i Saltzmans dynamiske system til beskrivelse af konvektion og simplificerede det ganske voldsomt. Derved kon han frem til det dynamiske system, der består af følgende tre ordinære differentialligninger [Lorenz, 1963, s. 135]:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= -\sigma X + \sigma Y \\ \frac{dY}{dt} &= -XY + rX - Y \\ \frac{dZ}{dt} &= XY - bZ \end{aligned} \tag{A.1}$$

Dette ligningssystem er senere blevet kendt under navnet Lorenzligningerne.



Figur A.1: På denne figur ses en skitse af en Rayleigh-Bérnard-celle.



Figur A.2: På denne figur ses en skitse af en Rayleigh-Bérnard-celle, hvori der er konvektion.

I Lorenzligningerne er σ, r og b konstante parametre. X er en variabel, der er proportional med den cirkulerende væskes hastighed i Rayleigh-Bénard-cellen [Alligood et al., 1996, s. 362]. Fortegnet af X indikerer, i hvilken retning den cirkulære bevægelse foregår [Lorenz, 1963, s. 137]. Hvis $X > 0$ foregår bevægelsen med uret, og hvis $X < 0$ foregår bevægelsen mod uret. Y er en variabel, der er proportional med temperaturforskellen mellem den væske, der stiger op, og den væske, der stiger ned. Hvis X og Y har samme fortegn, betyder det, at det er varm væske, der stiger op, og kold væske, der stiger ned, mens forskellige fortegn for X og Y betyder, at det er kold væske, der stiger op, og varm væske, der stiger ned [Lorenz, 1963, s. 135 og 137]. Denne sidste type opførsel optræder kun, når ΔT er så stor, at væskens bevægelse er uregelmæssig. Z er en variabel, der er proportional med afvigelsen i den lodrette temperaturprofil i cellen fra en lineær temperaturprofil [Lorenz, 1963, s. 135]. En lineær lodret temperaturprofil betyder, at væsken står stille, og at der derfor ikke er nogen konvektion i cellen [Hilborn, 1994, s. 29]. Z kan altså ses som et udtryk for, hvor langt syste-

met er fra den ligevægttilstand, hvor væsken i cellen står stille. Lorenz gør tydeligt opmærksom på, at Lorenzligningerne er resultatet af så voldsomme forsimplinger i forhold til den oprindelige model for konvektion, at man ikke kan regne med, at de kan bruges til at repræsentere konvektion [Lorenz, 1963, s. 135]. Han gør det dog også helt klart, at det han er interesseret i, ikke er Lorenzligningernes evne til at sige noget om konvektion, men derimod de forskellige typer af opførsler, som forskellige løsninger til disse ligninger udviser [Lorenz, 1963, s. 134].

Selvom Lorenzligningerne altså ikke kan bruges til at repræsentere konvektion i en Rayleigh-Bénard-celle, kan de faktisk godt bruges til at sige noget om et andet fysisk system. Lorenzligningerne beskriver nemlig opførslen af et lidt specielt vandhjul ganske præcist [Strogatz, 1994, s. 301-302]. Dette vandhjul består af nogle beholdere, der hænger på et hjul ligesom kurvene i et pariserhjul. Alle beholderne har et hul i bunden. Der tændes nu for en vandstråle, der hælder vand ned i den øverste beholder. Hvis vandstrålen er meget tynd, vil beholderen pga. hullet i bunden aldrig nå at blive fyldt nok op til at sætte vandhjulet i bevægelse, og vandhjulet vil derfor blive ved med at stå stille. Hvis vandstrålen er lidt tykkere, vil der blive fyldt så meget vand i den øverste beholder, at den vil blive trukket nedad pga. vægten, og derfor sættes vandhjulet i bevægelse. Denne bevægelse vil efter et kort stykke tid blive til en jævn rotation [Strogatz, 1994, s. 302]. Hvis vandstrålen bliver endnu tykkere, vil beholderne ikke nå at blive tømt, før de bliver ført op til vandstrålen igen. Dette betyder, at der vil være beholdere på begge sider af vandhjulet, der har så meget vand i sig, at de bliver trukket nedad. Dette resulterer i, at vandhjulet bevæger sig temmeligt uforudsigeligt og snart kører i den ene retning, snart i den anden.

A.1 Lorenzs analyse af Lorenzligningernes opførsel

I Lorenzs artikel fra 1963 ligger det primære fokus på de aperiodiske løsninger til Lorenzligningerne (deraf artiklens navn, *Deterministic Nonperiodic Flow*). Lorenz studerer både disse aperiodiske løsninger og andre løsninger til Lorenzligningerne ved at betragte dem i tilstandsrummet for det dynamiske system, som Lorenzligningerne beskriver opførslen af. Efter at have opstillet Lorenzligningerne starter han med at konkludere, at da dette dynamiske systemet er et drevet, dissipativt[2] system, vil alle løsninger bliver fanget i et begrænset underrum af tilstandsrummet, når $t \to \infty$ [Lorenz, 1963, s. 131-132 og s. 135]. Dette underrum vil have et volumen på 0. Derudover konkluderer han, at alle aperiodiske løsninger til systemet på sigt vil være ustabile. I teorien er det muligt, at de starter med at være stabile, men dette vil i så fald være en transient egenskab ved løsningen, der med tiden dør ud

[2]Et dissipativt system er et system, der kontraherer volumen i tilstandsrummet for systemet [Strogatz, 1994, s. 429].

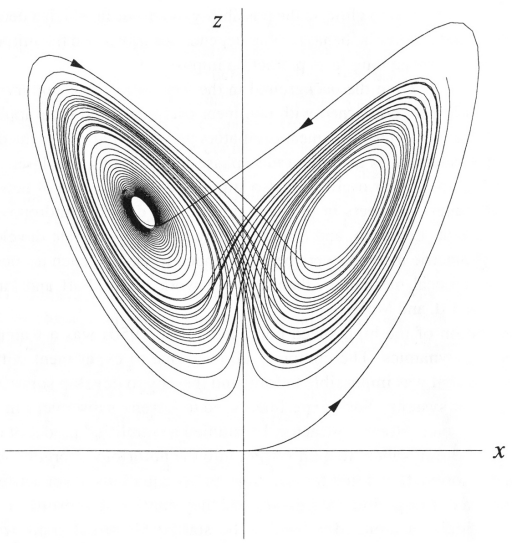
[Lorenz, 1963, s. 133 og s. 135].

Efter at have fastslået denne overordnede opførsel af løsninger til Lorenzligningerne, undersøger Lorenz, hvilke fixpunkter systemet har for faste værdier af σ og b og forskellige værdier af r, når $r > 0$. For alle positive r-værdier har systemet fixpunktet $(0, 0, 0)$. I forhold til situationen i Rayleigh-Bénard-cellen svarer dette fixpunkt til, at væsken overhovedet ikke bevæger sig. Ved hjælp af en lineariseret udgave af Lorenzligningerne og en beregning af egenværdierne for dette lineariserede system finder Lorenz ud af, at dette fixpunkt er stabilt for $r < 1$, men bliver ustabilt for $r \geq 1$ [Lorenz, 1963, s. 135]. At dette fixpunkt bliver ustabilt svarer i Rayleigh-Bénard-cellen til, at konvektionen går i gang. For $r \geq 1$ har systemet yderligere to fixpunkter givet ved $(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$ og $(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$. Disse to fixpunkter svarer i Rayleigh-Bénard-cellen til, at væsken udfører en jævn, cirkulær bevægelse, der går enten med uret (det første fixpunkt) eller mod uret (det andet fixpunkt). Disse to nye fixpunkter er stabile for alle r-værdier, der er mindre end den r-værdi, der er givet ved [Lorenz, 1963, s. 136]

$$r = \sigma \frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1} \tag{A.2}$$

Dette betyder, at hvis $\sigma \leq b+1$, vil de to nye fixpunkter aldrig blive ustabile, da ligning A.2 i den situation aldrig kan bive opfyldt af positive r-værdier [Lorenz, 1963, s. 136]. Hvis derimod $\sigma > b+1$, vil de to nye fixpunkter blive ustabile for tilstrækkeligt store værdier af r. For disse r-værdier vil systemet opfører sig kaotisk [Alligood et al., 1996, s. 363-365].

Lorenz slutter sin artikel af med en grundig analyse af en bestemt løsning til Lorenzligningerne, som han har opnået vha. numeriske løsningsmetoder. Før han kan opnå en sådan løsning, bliver han nødt til at specificere værdierne af de tre konstante parametre i Lorenzligningerne, så han får et konkret dynamisk system. Han starter med at sætte $\sigma = 10$ og $b = \frac{8}{3}$. For disse parameterværdier er den kritiske r-værdi givet ved ligning A.2 lig $24,74$, hvilket betyder, at systemet begynder at opføre sig kaotisk ved denne r-værdi. Lorens vælger at sætte $r = 28$. For at få en konkret løsning ud af det dynamiske system, vælger han begyndelsesbetingelserne $(0, 1, 0)$ [Lorenz, 1963, s. 136-137]. Lorenz finder stærke indicier for, at for det konkrete dynamiske system, som han har undersøgt især en konkret løsning for, er alle løsninger ustabile [Lorenz, 1963, s. 140]. Dette betyder flere ting. For det første vil de løsninger, der ser ud til at opfører sig fuldstændigt aperiodisk, ikke kunne bortforklares med, at de bare er løsninger, der er langt tid om at finde hen til den periodiske grænseopførsel, som de går imod. Da alle løsninger er ustabile, vil de periodiske løsninger nemlig ikke kunne fungere som grænseopførsel for andre løsninger. Derfor er de overtælleligt mange løsninger, der ser ud til at opføre sig aperiodisk, reelt aperiodiske løsninger. Udover dette betyder det, at alle løsninger er ustabile, at systemet udviser følsomhed på begyndelsesbetingelserne [Lorenz, 1963, s. 133].



Figur A.3: På denne figur ses en projektion af Lorenzattraktoren på XZ-planet i tilstandsrummet for Lorenzligningerne med parameterværdierne $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$ og $r = 28$. Figuren er lånt fra [Strogatz, 1994, s. 4].

Som sagt konkluderer Lorenz ret tidligt i sin artikel, at alle løsninger til Lorenzligningerne vil blive fanget i et begrænset underrum af tilstandsrummet. Med de konkrete parameterværdier, som Lorenz arbejder med, viser det sig, at mange løsninger bliver tiltrukket af en meget specielt udseende attraktor, der nærmest ligner et par sommerfulgevinger eller to spiraler, der er viklet ind i hinanden [Lorenz, 1963, s. 138]. Lorenz argumenterer for, at denne attraktor i virkeligheden er bygget op af uendeligt mange flader i tilstandsrummet, der hver især ligger meget tæt op ad én af to sammensmeltede flader [Lorenz, 1963, s. 140]. Denne komplicerede attraktor, som senere har fået navnet Lorenzattraktoren [Gleick, 1989, s. 31], ses på figur A.3.

Litteratur

Kathleen T. Alligood, Tim D. Sauer, and James A. Yorke. *Chaos - An Introduction to Dynamical Systems.* Springer, 1996.

Margherita Barile and Eric W. Weisstein. Cantor set. *MathWorld - A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/CantorSet.html*, 2010. Set d. 18. april 2010.

June Barrow-Green. *Poincaré and the Three Body Problem.* American Mathematical Society, 1997.

James H. Curry. On the hénon transformation. *Communications in Mathematical Physics*, 68:129–140, 1979.

Den Store Danske. Dynamiske systemer. *Den Store Danske - Gyldendals åbne encyklopædi. http://www.denstoredanske.dk/It,_teknik_og_naturvidenskab/Matematik_og_statistik/Analyse,_vektor-_og_matrixregning_og_funktionsteori/dynamisk_system*, 2010. Set d. 1. april.

Robert Devaney and Zbigniew Nitecki. Shift authomorphisms in the hénon mapping. *Communications in Mathematical Physics*, 67:137–146, 1979.

James Gleick. *Kaos - En ny videnskabs tilblivelse.* Munksgaard, 1989.

Robert C. Hilborn. *Chaos and Nonlinear Dynamics - An Introduction for Scientists and Engineers.* Oxford University Press, 1994.

Michel Hénon. A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Communications in Mathematical Physics*, 50:69–77, 1976.

Tinne Hoff Kjeldsen. Egg-forms and measure-bodies: Different mathematical practices in the early history of the modern theory of convexity. *Science in Context*, 22:85–113, 2009.

Jens M. Knudsen and Poul G. Hjort. *Elements og Newtonian Machanics - Including Nonlinear Dynamics - Third, Revised and Enlarged Edition.* Springer-Verlag, 2000.

Nicolai Overgaard Larsen, Pernille Hviid Petersen, Sif Ingibjørg Magnusdottir Skjoldager, Troels Frostholm Mogensen, and Truls Anders Mosegaard. Riding a saddlepoint. Technical report, NSM, RUC, 2006.

Jaume Llibre and Carles Simó. Some homoclinic phenomena in the three-body problem. *Journal of Differential Equations*, 37:444–465, 1980.

Edward N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20:130–141, 1963.

Erik Mosekilde and Rasmus Feldberg. *Ikke-lineær Dynamik og Kaos.* Polyteknisk Forlag, 1994.

Jürgen Moser. *Stable and random motions in dynamical systems - With special emphasis om celestial mechanics.* Princeton University Press, 1973.

Todd Rowland. Manifold. *MathWorld - A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/Manifold.html*, 2010. Set d. 6. maj 2010.

Stephen Smale. Diffeomorphisms with many periodic points. In Stewart S. Cairns, editor, *Differential and Combinatorial Topology*, pages 63–80. Princeton University Press, 1965.

Stephen Smale. Differentiable dynamical systems. *Bullentin of the American Mathematical Society*, 73:747–817, 1967.

Stephen Smale. On how i got started in dynamical systems. In Stephen Smale, editor, *The Mathematics of Time - Essays on Dynamical Systems, Economic Processes and Related Topics*, pages 147–150. Springer-Verlag, 1980.

Steven H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos - With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering.* Addison-Wesley Publishing Company, 1994.

Eric W. Weisstein. Topologically conjugate. *MathWorld - A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/TopologicallyConjugate.html*, 2010a. Set d. 23. marts 2010.

Eric W. Weisstein. Nonwandering. *MathWorld - A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/Nonwandering.html*, 2010b. Set d. 1. april 2010.

Eric W. Weisstein. Chaos. *MathWorld - A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/Chaos.html*, 2010c. Set d. 10. april 2010.

Eric W. Weisstein. Topologically transitive. *MathWorld - A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/TopologicallyTransitive.html*, 2010d. Set d. 10. april 2010.

Eric W. Weisstein. Eccentricity. *MathWorld - A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/Eccentricity.html*, 2010e. Set d. 13. maj 2010.

Eric W. Weisstein. Self-similarity. *MathWorld - A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/Self-Similarity.html*, 2010f. Set d. 18. maj 2010.

Stephen Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos.* Springer-Verlag, 1990.

Wikipedia. Three-body problem. *Wikipedia, The Free Encyclopedi. http://en.wikipedia.org/wiki/Three-body_problem*, 2010a. Set d. 29. marts 2010.

Wikipedia. Cantor set. *Wikipedia, The Free Encyclopedi. http://en.wikipedia.org/wiki/Cantor_set*, 2010b. Set d. 6. maj 2010.