

TEKST NR 302

1995

KOMPRESSORER

**- Analyse af en matematisk model
for aksialkompressorer**

Projektrapport af:

Stine Bøggild

Jakob Hilmer

Pernille Postgaard

Vejleder:

Viggo Andreasen

TEKSTER fra

IMFUFA

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES
FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, Postboks 260, 4000 Roskilde

KOMPRESSORER - Analyse af en matematisk model for aksialkompressorer

Projektrapport af: Stine Bøggild, Jakob Hilmer, Pernille Postgaard

Vejleder: Viggo Andreasen

IMFUFA tekst nr. 302/95

84 sider

ISSN 0106-6242

Abstract

Dette projekt omhandler en matematisk analyse af en kompressormodel opstillet af Morten Brøns fra DTU. Modellen beskriver de to instabiliteter, som forekommer i aksialkompressorer; surge og rotating stall. Modellen består af tre koblede ordinære differentialligninger. I analysen benyttes bifurkations- og differentialligningsteori.

I projektet er der gjort rede for, hvordan modellen indfanger instabiliteterne surge og rotating stall og hvilke tilstande i modellen, der fører til de to instabiliteter.

Forord

Denne projektrapport er et produkt af et semesters arbejde på matematiske koverbygningen på Roskilde Universitetscenter. Den er udarbejdet som projektdelen af model-modulet, således at den beskæftiger sig med en model udarbejdet til at beskrive fænomener udenfor fagområdet matematik.

Projektgruppen består af:

- Stine Bøggild
- Jakob Hilmer
- Pernille Postgaard

Vejleder:

- Viggo Andreasen

Vi takker Morten Brøns for projektforslag, gode råd og vejledning, og Mette Hass Nielsen for gennemlæsning af projektet.

Indhold

Indledning	3
1 Kompressorsystemet	7
1.1 Fysiske principper bag kompressorer	8
1.2 Instabiliteter	11
1.2.1 Rotating stall	11
1.2.2 Surge	13
1.3 Opsamling	14
2 Kompressormodellen	17
2.1 Matematiske modeller	17
2.2 Modellering af kompressorsystemet	19
2.2.1 Greitzers model	20
2.2.2 Brøns' model	24
2.3 Antagelser i modellen	29
2.4 Status af modellen	30
2.5 Opsamling	31
3 Analyse af den matematiske model	33
3.1 Ligevægtspunkter	34
3.2 Ligevægtspunkternes stabilitet	38
3.2.1 Stabilitet af ligevægtspunkterne i to dimensioner	39
3.2.2 Stabilitet af ligevægtspunkterne i tre dimensioner	41

3.3	Bifurkationspunkter	42
3.3.1	Bifurkationer i Brøns' todimensionale system	43
3.3.2	Bifurkationer i modellen	44
3.4	Opsamling	54
	 Diskussion	 57
	 Konklusion	 65
	 Litteraturliste	 67
	 A Stabilitet af ligevægtspunkter	 69
A.1	Eksempler i to dimensioner	69
A.2	Stabilitets undersøgelse ved hjælp af Routh-Hurwitz kriteriet .	72
A.2.1	Routh-Hurwitz i to dimensioner	73
A.2.2	Routh-Hurwitz i tre dimensioner	73
	 B Bifurkationsteori	 75
B.1	Lokale bifurkationer	76
B.1.1	Saddelpunkts-bifurkation	77
B.1.2	Transkritisk bifurkation	78
B.1.3	Hopf-bifurkation	79
B.2	Globale bifurkationer	81
B.2.1	Saddelforbindelses-bifurkation	81
	 C Hjælpesætninger	 83
C.1	Eksistens og entydighed	83
C.2	Sætningen for implicitte funktioner	83

Indledning

Dette projekt er et model-projekt på RUC's matematikoverbygning. Kravet til et sådant projekt er, at det skal behandle matematiske modeller opstillet til at repræsentere genstandsområder uden for matematikken. Den matematiske model, der her behandles, er en model for kompressorer udarbejdet af Morten Brøns fra DTU.

Kompressorer har mange anvendelser bl.a. bruges de i turboladere og flymotorer. Der findes flere forskellige typer af kompressorer, der har forskellige geometriske udformninger. De forskellige udformninger gør kompressorer velegnede til mange typer af opgaver. Vi vil i dette projekt beskæftige os med en bestemt type kompressor nemlig aksialkompressoren, som er den type der bla. bruges i flymotorer. Fremover vil vi betragte kompressorer som en del af en flymotor.

I grove træk består et kompressorsystem af en kompressor, en beholder kaldet plenum, og et regulerbart udstødningsspjæld. Kompressoren skaber en trykforøgelse ved, at dens rotorblade presser luft ind i plenum. Herved bliver trykket i plenum større end trykket i omgivelserne. Trykket i plenum, bliver så udlignet via det regulerbare udstødningsspjæld. I en flymotor skaber den udstødte luft en fremdrift.

For et kompressorsystem kan omdrejningshastigheden af kompressorens rotorblade reguleres, ligeledes kan udstødningsspjældets åbning og derved trykket i plenum reguleres. Forholdet mellem rotorbladenes omdrejningshastighed og trykket i plenum er afgørende for, om strømningen igennem kompressoren er stabil.

I aksialkompressorer forekommer der to former for instabiliteter, de kaldes i fagsproget henholdsvis *surge* og *rotating stall*. Surge er en instabilitet, der forekommer, når trykket i plenum bliver for stort i forhold til omgivelsernes tryk. Kompressoren kan derved ikke opretholde trykforøgelsen, og luftstrømmen igennem kompressoren bliver ustabil. Surge betyder, at der er luft som svinger frem og tilbage inde i selve kompressoren. Rotating stall er en spærring af luftstrømmen imellem en eller flere af rotorbladene, og opstår, hvis

luftens indgangsvinkel bliver for stor. Herved dannes turbulens imellem blade, som resulterer i en "prop", således at der ikke kommer luft igennem en del af kompressoren. Rotating stall sænker således den gennemsnitlige luftgennemstrømning og dermed også kompressorens effekt.

Brøns' model er en model, der er i stand til at beskrive de instabiliteter, der kan forekomme i aksialkompressoror. Modellen består af tre koblede ordinære differentialligninger, som tilsammen beskriver hele kompressorsystemets dynamik. Modellen er en videreudvikling af en model udarbejdet af Greitzer i 1976. Greitzers model afgrænses sig ikke kun til at beskrive aksialkompressoror, men er en mere generel model, der er i stand til at beskrive flere forskellige typer af kompressoror. Modellen indfanger til gengæld kun instabiliteten surge.

Begge disse modeller (Greitzers og Brøns') er simple. Det betyder, at de er gode til at undersøge de instabiliteter der kan opstå i en kompressor, men ikke til at beskrive hvornår de forekommer for en given kompressor. Formålet med modellerne er da heller ikke at beskrive en bestemt kompressors virkemåde, men at undersøge nogle generelle træk ved kompresorer.

Dette fører os frem til følgende problemstilling:

- Hvordan indfanger Morten Brøns' model instabiliteter som surge og rotating stall i aksialkompressoror?
- Hvilke tilstande i Morten Brøns' model fører til de to former for instabiliteter.

For at besvare denne problemstilling har vi sat os ind i baggrunden for og opstillingen af Brøns' model og analyseret denne, ved hjælp af hhv. matematisk og nummerisk analyse.

Læsevejledning

Kapitel 1 belyser de fysiske fænomener, som det er nødvendigt at kende til, for at forstå hvad der foregår i en kompressor.

Kapitel 2 beskriver den del af Greitzers model, som Brøns' model bygger på, og af Brøns' model.

Kapitel 3 indeholder en analyse af Brøns' model. Dette indebærer en lokal stabilitetsanalyse og en analyse af de bifurkationer, der finder sted i modellen.

Diskussionen indeholder en diskussion af flere af de problemstillinger, der har været under vejs i projektet. Herunder bl.a. en modeldiskussion og en diskussion af de forskellige bifurkationsparametre.

Konklusionen indeholder primært svar på ovenstående problemformulering, men også en kort gennemgang af de resultaterne fra analysen viste.

Appendiks A indeholder først relevante eksempler på stabilitet i to dimensioner. Herefter udregnes ud fra Routh-Hurwitz sætning de krav, der stilles til egenværdierne for lineariseringen omkring et ligevægtspunkt, for at differentialligningssystem er stabilt.

Appendiks B beskriver de forskellige typer af bifurkationer, som forekommer i modellen.

Appendiks C indeholder to hjælpesætninger, som er centrale for projektet: Sætningen for eksistens og entydighed af løsninger til differentialligningssystemer, samt sætningen for implicitte funktioner

Kapitel 1

Kompressorsystemet

En kompressor er en maskine, som etablerer en trykforskel mellem to kamre. Denne trykforskel kan i en jetmotor benyttes til at skabe en fremdrift.

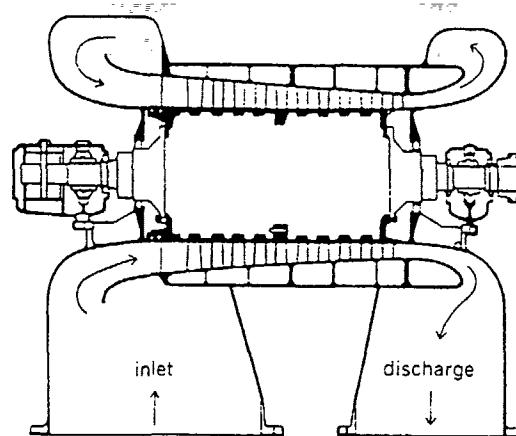
For at benytte en kompressor til industrielt brug er det nødvendigt, at kompressorsystemet er stabilt. Med stabilt menes her; en tilstand hvor kompressoren yder en konstant og maksimal effekt. Erfaringen viser, at når et kompressorsystem presses til at yde meget, stiger risikoen for instabiliteter. Det medfører i bedste fald en nedsættelse af effekten og i værste fald totalt sammenbrud. Sådanne instabiliteter er derfor meget uønskede, og det er derfor væsentligt at finde en øvre grænse for kompressorens ydeevne. Grænsen findes på en sådan måde, at kompressorens effekt er så stor som muligt samtidigt med, at risikoen for instabiliteter er lille.

Der findes to former for instabiliteter i kompressorer; rotating stall og surge, som har hver deres egenskaber. For at undgå instabiliteter er det derfor væsentligt at vide, under hvilke forhold de opstår. Det er ligeledes vigtigt at vide, hvordan systemet bringes tilbage til en stabil tilstand, således at en instabilitet ikke bliver permanent.

Matematiske modeller kan benyttes til at undersøge de forskellige egenskaber ved kompressorsystemer. For at kunne opstille en sådan model, er det nødvendigt at vide, hvad der forventes af denne. Vi vil derfor starte dette kapitel med at beskrive de fysiske principper bag et kompressorsystem, og de instabiliteter som det forlanges, at modellen skal kunne indfange.

1.1 Fysiske principper bag kompressorer

Der findes flere typer af kompressorer, som i princippet fungerer på samme måde. Her vil vi kun beskrive, hvorledes aksialkompressorer fungerer, da den model vi vil analysere, er en model af en aksialkompressor.



Figur 1.1: En teknisk tegning af en aksialkompressor. Luften føres ind i kompressoren (inlet), hvor den vha. rotorbladene presses ud af kompressoren (discharge) og ind i plenum, som ikke ses på billedet.[Mcg.92]

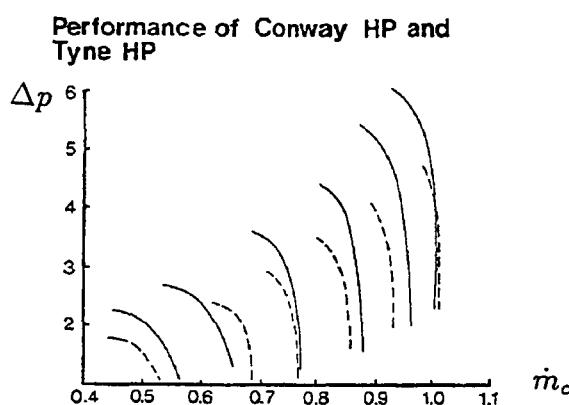
Et aksialt kompressorsystem består af en kompressor i et cylindrisk rør, som fører luft fra omgivelserne ind i et kammer, kaldet plenum. Et reguleringspjæld i den modsatte ende af plenum bestemmer herefter, hvor meget luft der føres ud til omgivelserne. En forsimpleret model af et kompressorsystem ses på figur 2.1 i kapitel 2.

Selve kompressoren består af en række rotorblade, der tvinger luft fra omgivelserne ind i plenum, på trods af at trykket her i forvejen er større end trykket i omgivelserne (se figur 1.1). Uden påvirkning vil luften bevæge sig fra et sted med højt tryk til et sted med lavere tryk. Herved etablerer kompressoren en trykforskel imellem plenum og omgivelserne: $\Delta p = p_{plenum} - p_{omgivelser}$. Når luften lukkes ud via reguleringspjældet, kan overtrykket i plenum bruges til fremdrift af en jetmotor. Ved at regulere på spjældet ændres massestrømmen, \dot{m}_c , igennem kompressoren, da et lavere tryk i plenum medfører, at kompressoren kan presse mere luft herind¹.

Til en given kompressor er der knyttet en kompressorkarakteristik. Denne karakteristik angiver størrelsen af trykforskellen imellem plenum og omgivel-

¹Det bemærkes her, at en prik over en variabel betyder den afledede med hensyn til tiden.

serne som funktion af massestrømmen igennem kompressoren ved en given omdrejningshastighed (se figur 1.2). Almindelige kompressorkarakteristikker angiver, som karakteristikken på figur 1.2, kun værdier for kompressorer, der er i stabil drift. Dette skyldes, at det til almindeligt industrielt brug ikke er relevant at kende effekten for en kompressor, hvor der er opstået instabiliteter. (Det er ikke rentabelt at benytte kompressorer i tilstandsområder, hvor der forekommer instabiliteter).

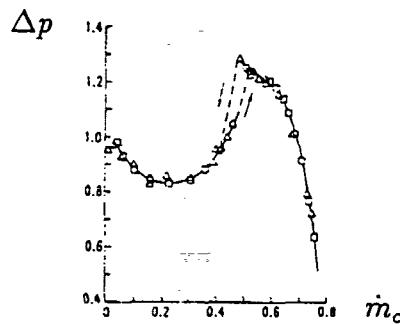


Figur 1.2: Typiske kompressorkarakteristikker til industrielt brug fra Rolls Royce. De stiplede og de optrukne linier svarer til hver sin kompressor. De enkelte liniestykke er kompressorkarakteristikker for en given omdrejningshastighed i det stabile område.[Mck.84]

En kompressorkarakteristik, der både indeholder det stabile og det ustabile område, er svær at lave, da det er svært at måle præcis, hvad der sker, når systemet er ustabilt. Der findes dog karakteristikker, der bygger på eksperimentelle data f.eks. figur 1.3.

Her gælder det, at tilstande til højre på karakteristikken er stabile og svarer til en af kompressorkarakteristikkerne på figur 1.2, mens tilstande på venstre side er ustabile. Da karakteristikken skal være sammenhængende, må der være et sted imellem det stabile og det ustabile område, hvor hældningen er nul. Dette sted kalder vi fremover for kompressorkarakteristikkens "top". Systemet er altid ustabilt på venstre side af toppen, samt et lille stykke til højre for denne².

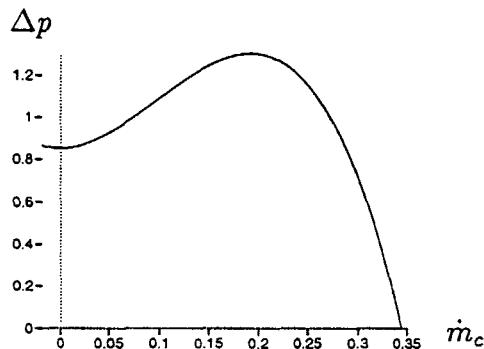
²For fremtiden vil vi tale om, at instabiliteterne begynder at opstå på højre side af toppen, da vi følger karakteristikken fra højre mod venstre — fra det stabile mod det ustabile område.



Figur 1.3: En kompressorkarakteristik som både viser resultater for det stabile og det ustabile område, med $\Delta p = p_{plenum} - p_{omgivelser}$ op ad y-aksen og massestrømmen m_c ud af x-aksen. De forskellige punkter er målinger lavet af Greitzer. Pilene mellem målingerne på den stabile og den ustabile side af karakteristikken indikerer, at her opstår et hysterese fænomen.

Det er almindeligt, at karakteristikker til modellering af både det stabile og det ustabile område i en kompressor approksimeres til et polynomium.

Approksimerede karakteristikker baseres dels på eksperimentelle data og dels på matematiske/fysiske fortolkninger af systemerne³ (se figur 1.4). I jetmo-



Figur 1.4: Kompressorkarakteristik approksimeret til følgende trediegradspolynomium: $\Gamma(x) = 0.85 + 36.6x^2 - 127x^3$, hvor x er en dimensionsløs massestrøm

torer ønskes så stor en trykforskelse mellem plenum og omgivelserne som mulig. Derfor er det optimalt at benytte kompressoreren i området tæt på højre side af toppen, men så langt fra at instabiliteter undgås.

Efter nu at have beskrevet de fysiske principper bag kompressorer, vil vi

³Med matematisk og fysisk fortolkning menes følgende: Det er muligt at foretage målinger, hvor der pustes luft ud gennem kompressoren. Man må forvente, at karakteristikkerne vil være ens symmetrisk i et lille interval omkring $m_c = 0$, og målingerne for den "omvendte kompressor" benyttes til at udtale sig om en del af det ustabile område.

gå over til at beskrive de forskellige instabiliteter, der kan forekomme i en kompressor.

1.2 Instabiliteter

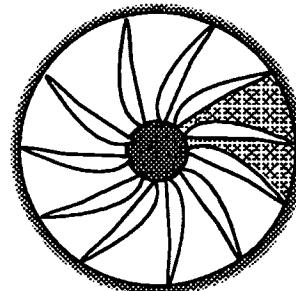
Det er naturligvis målet at få en kompressors effekt så stor som mulig. Som før beskrevet er der større sandsynlighed for instabiliteter, jo mere kompressoren yder. Det er derfor ønskværdigt at finde en øvre grænse for, hvornår de forskellige instabiliteter indtræder. Fysisk er det let at, se om der er indtrådt en instabilitet, da kompressoren ryster og larmer.

De to mest almindelige instabiliteter, som findes i en kompressor, kaldes surge og rotating stall. Ved at foretage adskillige eksperimenter med en given kompressor er det muligt at finde en grænse for, hvornår disse opstår. Denne grænse kaldes både *stall-linien* og *surge-linien*, da både surge og rotating stall dannes, når trykforholdet imellem omgivelser og plenum bliver for stort i forhold til massestrømmen (dvs. når grænsen overskrides). Hvilken af instabiliteterne der opstår, afhænger af omdrejningshastigheden af kompressoren. Almindelige kompressorsystemer arbejder derfor, som før beskrevet, med en margin til denne grænse for at undgå de uønskede instabiliteter. På figur 1.2 kan surgelinien indentificeres som en linie, der forbinder de venstre endepunkter af karakteristikken for hver kompressor.[Gre.80]

Under særlige omstændigheder kan der dog godt optræde instabiliteter under denne stabilitetsgrænse. Dette kan eksempelvis forekomme, hvis omdrejningshastigheden af rotorbladene forbigående ændres, hvis luftindstrømnningen eller luftudstrømnningen er ustabil eller hvis strømningsretningen ændres. Stall-linien kan derfor siges at være et mål for, hvornår det er uacceptabelt at bruge kompressoren pga. for stor sandsynlighed for instabiliteter.

1.2.1 Rotating stall

Rotating stall er en instabilitet, som kun befinder sig inde i kompressoren. Fænomenet består af en "prop", kaldet en stall-celle, imellem to eller flere af rotorbladene i kompressoren (se figur 1.5). Proppen blokerer for luftgennemstrømningen, hvorved gennemsnittet af denne nedsættes. Blokeringen skyldes, at indgangsvinklen imellem luften og rotorbladene bliver for stor, og luften derfor kommer "skaævt" ind. Dette medfører turbulens imellem rotorbladene, og turbulensen udmynter sig i en blokering. Blokeringen gør, at gennemstrømningen i rotoren bliver lavere, og trykket i plenum reduceres (se



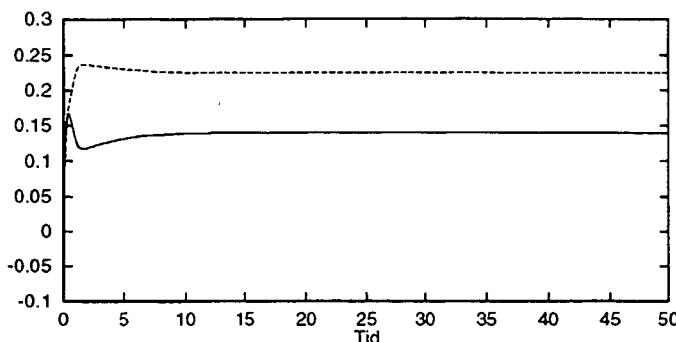
Figur 1.5: Stall-celle i kompressoren ved rotating stall. I cellen er der ingen luftgennemstrømning, hvorved kompressorens gennemsnitlige effekt bliver konstant lavere.

figur 1.6). Stall-cellen roterer med en konstant hastighed på 20 – 70% af rotorkrallenes omdrejningshastighed [Gre.80]. Årsagen til at stall-cellen rotere i kompressoren er, at indgangsvinklen imellem lufttilførslen i blade på hver side af en celle ændres. Vinklen af lufttilførslen imellem de efterfølgende blade stiger, hvilket medfører en ny stall-celle. Vinklen af lufttilførslen imellem de førliggende blade falder, og den forrige stall-celle forsvinder [Brø.87].



Figur 1.6: Turbulens imellem rotorenens blade medfører, at der kommer en stallcelle, dvs. en “prop” hvor der ikke kan trænge luft igennem. Til højre ses jævn strømning og til venstre ses en stall-celle. [Spa.84]

Rotating stall er kendetegnet ved, at gennemsnitsstrømmen i kompressoren er konstant, men lavere end det normale og ønskede (se figur 1.7). [Brø.90] Rotating stall er ikke specielt farligt i små mængder, da det bare nedsætter effekten lidt. Hvis der opstår store stall-cellere, kan effekten nedsættes meget, og der kan forekomme overopvarmning i kompressoren med totalt sammenbrud til følge. Dette er selv sagt ikke en situation, som nogen ønsker at komme i. Det er derfor nyttigt at vide, hvordan et system, der er plaget af rotating stall, kan bringes tilbage til den stabile tilstand. For at komme



Figur 1.7: Grafisk illustration af rotating stall. — angiver massestrømmen igennem kompressoren og - - - angiver mængden af rotating stall, begge som funktion af tiden. Som det ses, er massestrømmen igennem kompressoren stabil selvom der er rotating stall, men den er mindre end den ville have været, hvis der ikke var rotating stall.

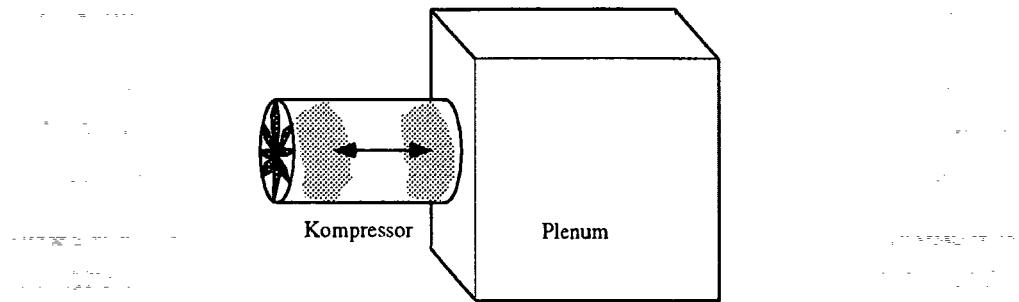
af med rotating stall skal omdrejningshastigheden i kompressoren sænkes, hvorved turbulensen forsvinder, og kompressoren igen kan fungere normalt. I mange tilfælde er det dog problematisk at nedsætte hastigheden i kompressoren, da dette medfører en lavere effekt. I flyvemaskiner, hvor effekten har temmelig stor betydning, er det meget slemt, hvis der opstår rotating stall. Effekten bliver lavere end nødvendigt for at holde flyveren oppe, og det er ikke muligt at slippe af med instabiliteten, da sænkning af rotorhastigheden vil medføre, at flyet taber højde [Gre.80].

1.2.2 Surge

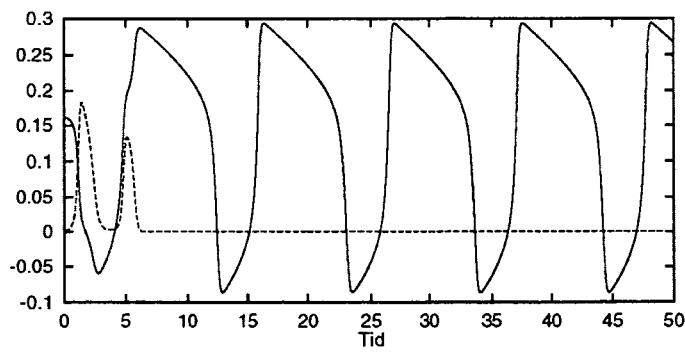
Surge er en instabilitet, der kun finder sted i kompressoren, men påvirker massestrømmen igennem hele systemet. Det kendetegnes ved, at luften i kompressoren svinger frem og tilbage (se figur 1.8).

Surge opstår, fordi der kommer så højt et tryk i plenum, at kompressoren ikke kan opretholde det. Luftindstrømningen vil derfor i et kort tidsinterval være mindre end ellers. Det kan blive så slemt, at luften presses ud af kompressoren, hvilket kaldes deep surge. Efter denne lavere indstrømning bliver trykket i plenum formindsket, og kompressoren er igen i stand til at øge trykket i plenum. Trykket bliver igen for højt osv. Systemet svinger. Dette slider hårdt på systemet og kendes på, at kompressoren larmer.

Surge kan kendetegnes ved, at luftgennemstrømningen svinger periodisk, hvorved effekten af kompressoren også svinger (se figur 1.9). Det sker des-



Figur 1.8: Surge i en kompressor. Luften i kompressoren svinger som en pude frem og tilbage.



Figur 1.9: Grafisk illustration af surge. — angiver massestrømningen igennem kompressoren og - - - angiver mængden af rotating stall, begge som funktion af tiden. Som det ses, svinger massestrømmen igennem kompressoren så meget, at der i perioder er negativ strømning, dvs. luften strømmer ud af kompressoren. Dette kaldes deep surge.

uden af og til, at der opstår en mild grad af rotating stall inden for surge-svingningerne, hvilket gør surge endnu mere uønsket. Herved bliver effekten gennemsnitlig lavere, samtidig med at der opstår svingninger. [Gre.80]

Surge er i modsætning til rotating stall forholdsvis let at komme af med, da det skyldes et overtryk i plenum, som forsvinder hvis spjældet åbnes.

1.3 Opsamling

Et kompressorsystem består af en kompressor, et plenum og et spjæld. Kompressoren danner et overtryk ved at presse luft ind i plenum, således at $\Delta p = p_{plenum} - p_{omgivelser} > 0$. Ved at lukke noget af dette overtryk ud af spjældet, drives en flyvemaskine fremad.

Der kan til en hvilken som helst kompressor, opstilles en kompressorkarakteristik, som fortæller, hvormeget trykforholdet ændres som funktion af massestrømmen igennem kompressoren til en given omdrejningshastighed.

Når et kompressorsystem tvinges til at yde meget, kan der opstå to forskellige slags instabiliteter i kompressoren; rotating stall og surge.

Rotating stall indtræder pga. turbulens imellem to eller flere af rotorbladene i kompressoren. Der opstår en "prop", hvor der ikke kan komme luft igennem, og gennemsnits gennemstrømningen falder i kompressoren. Rotating stall fjernes ved at sænke rotorhastigheden.

Surge opstår, når trykket i plenum bliver for højt i forhold til trykket i omgivelserne. Når der er surge, svinger luften frem og tilbage i kompressoren og kan kun fjernes ved at åbne spjældet.

Begge disse instabiliteter er meget uønskede, da de sænker effekten og i værste fald medfører totalt sammenbrud af systemet. Det er derfor meget vigtigt at finde ud af under hvilke forudsætninger, disse instabiliteter opstår, således at de kan undgås.

For at finde en maximal effekt og stadig undgå instabiliteter kan der opstilles matematiske modeller. Morten Brøns fra DTU har opstillet en sådan model, som vi i det følgende vil beskrive og analysere.

Kapitel 2

Kompressormodellen

I dette kapitel beskrives en matematisk model, der er udarbejdet af Morten Brøns. Modellen er lavet for at give en idé til, hvordan man kan videreudvikle de kompressoror, der benyttes i jetmotorer.

Da en del af vores problemstilling går ud på, at vi skal undersøge hvordan Brøns' model indfanger de fysiske instabiliteter surge og rotating stall, er det en fordel at opdele matematiske modeller i forskellige kategorier. Den opdeling, der bruges i dette projekt, vil blive beskrevet først i kapitlet. Herefter argumenteres for den matematiske model, som Morten Brøns opstiller i sin artikel fra 1990 [Brø.90]. Dette gøres ved først at beskrive den meget simple model opstillet af Greitzer i 1976 [Gre.76], som Morten Brøns bygger på. Herefter gennemgås den endelige model i detaljer. Til sidst benyttes opdelingen af matematiske modeller til at vurdere modellens karakter.

2.1 Matematiske modeller

Man kan dele matematiske modeller op på mange måder. I denne rapport vil vi skelne mellem simple og detaljerede modeller og mellem teoribaserede og ad-hoc modeller.

Opdelingen mellem simple og detaljerede modeller er således:

1. Med en simpel model menes en model, der i store træk beskriver en del af virkeligheden på en sådan måde, at den indfanger få, men karakteristiske træk ved den del af virkeligheden, der modelleres. En simpel model kan give kvalitative oplysninger.

2. Med en detaljeret model menes en model, der forsøger at indfange så mange træk som muligt af den del af virkeligheden, der modelleres. En detaljeret model kan give kvantitative oplysninger.

Hvis en simpel model udviser de ønskede karakteristika, er det en indikation af, at de elementer, der er taget med i beskrivelsen, netop er de karakteristiske træk. Simple modeller vil således være velegnede til at give overblik over hvilke dele af virkeligheden, der forårsager bestemte fænomener.

Som et eksempel, på at en simpel model kan være mere nyttig end en detaljeret, kan nævnes et landkort. Hvis en person skal fra København til Barcelona i bil, er det en fordel at have et simpelt kort, der kun viser hovedvejene i Europa. Derimod vil et detaljeret kort, hvor alle småveje er indtegnet, gøre aflæsningen af de nødvendige oplysninger meget kompliceret. Det er altså lettere at uddrage de nødvendige oplysninger af det kort, hvor kun det nødvendige er medtaget.

En simpel kompressormodel kan eksempelvis bruges til at udpege de faktorer, der forårsager instabiliteter. Når man kender årsagerne til en instabilitet, kan man forsøge at finde en metode, der kan forhindre, at denne opstår.

Detaljerede modeller er velegnede til at give et billede af, hvordan en bestemt situation vil udvikle sig, hvis alle relevante detaljer ved systemet kendes.

Et eksempel, hvor detaljerede modeller er nyttige, er en matematisk model over et atomkraftværk. Her er det vigtigt at vide præcis, hvordan systemet vil udvikle sig ved en given temperatur og i hvilken som helst situation. Derved kan det siges præcis, hvornår nedsmeltnings eller andre ulykker vil ske. I dette tilfælde er det ikke nok at vide, hvornår det måske sker, det skal vides meget præcist.

En detaljeret model for en bestemt kompressor vil være velegnet til at undersøge, hvor meget brændstof denne kompressor bruger, hvor stor en effekt den giver eller lignende. En detaljeret model for en kompressor, f.eks. baseret på Navier-Stokes ligninger, kan der regnes på specifikke tilfælde, men gør det svært at identificere årsagerne til, at de forskellige instabiliteter forekommer.

Som tidligere antydet, har vi valgt at lave endnu en opdeling af matematiske modeller. Opdelingen mellem teoribaserede og ad-hoc modeller er således:

1. En teoribaseret model er en model, som er baseret på love der udspringer fra en teori. Sådanne modeller kan kontrolleres både empirisk og teoretisk. [Høj.80]

2. En ad-hoc model er en model, der udelukkende bygger på observationer. De er således ikke en del af en større teoribygning, og derfor kan sådanne modeller kun evalueres ud fra, hvor godt de reproducerer virkeligheden.
[Høj.80]

Et eksempel på teoribaserede modeller er modeller for planeternes bevægelse. Disse bygger på Newtons gravitationslov, der beskriver tiltrækningen mellem masser. Man kan ved observationer kontrollere, hvorvidt de forudsigelser modellen giver, stemmer overens med planeternes faktiske baner.

For kompressoror, der arbejder i det stabile område, er det ganske naturligt at lave en teoribaseret model. De mekanismer, der foregår inde i den, er kendte, og det er efterfølgende muligt at tjekke resultaterne med empiriske data. At opstille en teoribaseret model for en kompressor vil dog være et meget stort arbejde, da der er mange ting at tage højde for.

Et eksempel på en ad-hoc model kunne være en trafikmodel, som beskriver hvor mange uheld, der finder sted i et bestemt lyskryds. Det er ikke muligt teoretisk at beregne, hvor mange bilister der vil køre galt om året i netop det bestemte kryds. Til gengæld er det empirisk let at se, hvor mange uheld der forekommer, og derudfra vurdere om en omstrukturering af vejene ville være hensigtsmæssig.

En kompressorkarakteristik for en given kompressor er et typisk eksempel på en ad-hoc model. Disse bygger på empiriske data. Der findes ingen teori for kompressorkarakteristikkens forløb. Derfor kan man se eksempler på, at den approksimeres til forskellige funktioner.

Som det ses, er der fordele og ulemper ved de forskellige slags modeller. Der er noget de kan, og noget de ikke kan.

De modeller, der er beskrevet i dette projekt, er alle simple modeller, som indeholder såvel teoribaserede som ad-hoc dele. Vi vil i slutningen af kapitlet diskutere, hvad der er hvad.

2.2 Modellering af kompressorsystemet

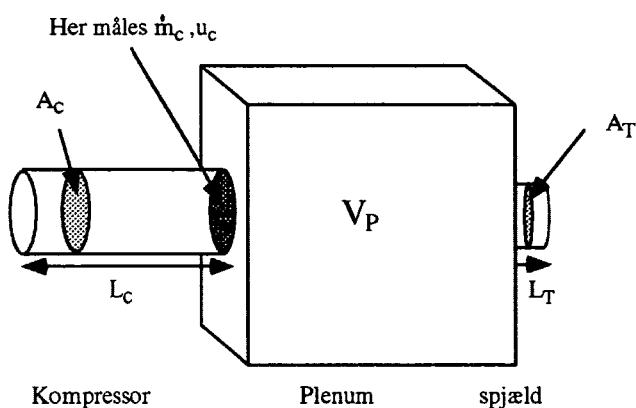
Der findes flere simple modeller, som beskriver de forskellige instabiliteter, der forekommer i kompressoror. Fælles for disse er, at de alle bygger på fysiske og matematiske antagelser, som gør at de ikke passer helt med virkeligheden. Flertallet af modellerne er f.eks. for optimistiske med hensyn til at

forudsige, hvornår instabiliteterne opstår. I de fleste simple kompressormodeller opstår instabiliteterne nemlig på venstre side af toppen af kompressor-karakteristikken. Dette bevirker, at modellerne forudsiger, at kompressorerne kan klare en højere effekt, før instabiliteterne optræder, end eksperimentelle data viser.

Flere af de simple modeller er desuden ikke skruet sammen til at beskrive både rotating stall og surge. Et eksempel på dette er, den model Greitzer lavede i 1976. Modellen er meget simpel og udviser instabiliteten surge, men ikke instabiliteten rotating stall. Denne model vil vi i det følgende beskrive, da det er den Brøns bygger videre på.

2.2.1 Greitzers model

For bedre at kunne beskrive de fysiske instabiliteter i en kompressor forsimples kompressorens udformning en del i Greitzers model. Det antages, at systemets kompressor er udformet som et rør med længden, L_c , og tværsnitsarealet, A_c . Endvidere betragtes plenum som "en stor kasse" med et meget større tværsnitsareal, A_p , og volumen, V_p , end kompressoren. I den modsatte ende af plenum sidder et reguleringssspjæld i et rør med længden, L_T , og tværsnitsarealet, A_T , (se figur 2.1).



Figur 2.1: En simpel model af et aksialkompressorsystem, som det antages at se ud i Greitzers model.

Tværsnitsarealet af plenum er meget større end tværsnitsarealet af de to rør (kompressor og spjæld). Da der er massebevarelse, betyder dette, at luften vil have meget mere fart på i rørene, end den har i plenum, hvor luften derfor kan antages at stå stille.

Ved at lave denne antagelse om systemet bliver det nu meget nemt at beregne energien af luftmolekylerne forskellige steder i systemet. Energien er almindeligvis givet ved:

$$E_{total} = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2}mv^2 + pV \quad (2.1)$$

hvor m er massen af luften, v er hastigheden af luften, p er luftens tryk og V er volumenet af plenum.

I rørene er der med ovenstående antagelser kun kinetisk energi, da hastigheden af luften er meget stor og trykket derfor meget lille¹. I plenum er der derimod kun potentiel energi, da trykket her er meget stort og hastigheden af luften er lille [Gre.76]. Ved at lave denne antagelse er det nu nok kun at regne på trykket i plenum for at finde ud af hvor meget energi, der er i systemet.

Som før nævnt er der massebevarelse, hvilket for plenum giver følgende relation:

$$\dot{m}_c - \dot{m}_T = V_p \frac{d\rho_p}{dt} \quad (2.2)$$

hvor \dot{m}_c er massestrømmen gennem kompressoren, \dot{m}_T er massestrømmen gennem spjældet, og massen i plenum er givet ved $m_p = V_p \rho_p$.

Ligningen (2.2) siger således, at differencen imellem den massestrøm der, kommer fra kompressoren og ind i plenum, \dot{m}_c , og den massestrøm, der kommer ud af spjældet, \dot{m}_T , er proportionalt med plenums masseændring i samme tidsinterval. Plenums masseændring er givet ved volumenet af plenum, V_p , multipliceret med ændringen i massefylden, $\frac{d\rho_p}{dt}$ [Gre.76].

Da varmeudvekslingen med omgivelserne (energitabet) er meget lille, antager Greitzer desuden, at processen er adiabatisk. Trykændringen i plenum skyldes således udelukkende det arbejde, der er tilført via motoren i kompressoren. Denne antagelse kan gøres, da energitabet til omgivelserne er meget mindre end den energimængde, der løber igennem systemet [Gre.76]. For en adiabatisk proces gælder det, at:

$$p = K \rho^\gamma \quad (2.3)$$

hvor K er en konstant, p er trykket, ρ er massefylden af gassen og γ er forholdet imellem varmekapaciteten for fastholdt tryk og fastholdt volumen [Brø.87].

¹Dette følger af Bernoullis ligning: $\frac{1}{2}\rho v^2 + p = konst$, hvor ρ er massetætheden, v er hastigheden af de enkelte molekyler og p er trykket i væsken. Bernoullis ligning gælder kun for væske som kan antages at være inkompressible og strømme uden turbulens.

Da det er luft, der gennemløber kompressoren i en jetmotor, antages det desuden, at gasligningen gælder:

$$p = \rho \frac{R}{M} T \quad (2.4)$$

hvor R er gaskonstanten, M er luftens molmasse og T er den absolutte temperatur.

Ved at lave de sidste to antagelser kan der opstilles en ligning, som angiver en sammenhæng imellem trykket, p , og masseylden, ρ :

$$d\Delta p = \gamma \frac{R}{M} T d\rho = a^2 d\rho \quad (2.5)$$

hvor $a = \sqrt{\gamma \frac{R}{M} T}$ ud fra bølgeligningen kan identificeres med lydens hastighed [Brø.87]. Som det ses, skriver vi fremover Δp i stedet for p .²

Af ligning (2.2) og ligning (2.5), fås følgende relation:

$$\frac{d\Delta p}{dt} = \frac{a^2}{V_p} (\dot{m}_c - \dot{m}_T) \quad (2.6)$$

Ligningen siger, at ændringen af trykket i plenum er proportionalt med ændringen af massen i plenum, idet volumenet af plenum er konstant.

Hvis man benytter, at systemet, der kun består af "kompressor rør" og plenum, kan betragtes som en helmholtz resonator³, har dette system en karakteristisk svingningsfrekvens givet ved:

$$\omega = a \sqrt{\frac{A_c}{L_c V_p}} \quad (2.7)$$

Herved fås følgende relation, som er en af de dynamiske ligninger i Greitzers model:

$$\frac{d\Delta p}{dt} = \omega^2 \frac{L_c}{A_c} (\dot{m}_c - \dot{m}_T) \quad (2.8)$$

I et system, hvor der er to kamre med hver sit tryk, vil luften strømme fra det kammer, hvor trykket er højt til det, hvor trykket er lavt, indtil trykforskellen er udlignet ($\Delta p = 0$). Da en kompressor netop etablerer en trykforskel, kan

²I stedet for at se på differencen imellem et tryk p og $p = 0$, ses på differencen imellem trykket i to forskellige kamre. De to forskellige kamre er i dette tilfælde plenum og omgivelserne. Dette kan gøres, da trykket i omgivelserne antages at være konstant.

³En Helmholz resonator er et system bestående af et tyndt rør, der fører ind i et stort volumen. Det gælder, at den eneste masse, der svinger, er massen i det tynde rør.

dens indvirken på systemet beskrives ved en størrelse, C , med dimensionen tryk. C er kompressorkarakteristikken, som er afhængig af massestrømmen gennem kompressoren (se afsnit 1.1). Indbygget i karakteristikken for kompressoren er alt, der påvirker kompressoren pånær, trykforskellen imellem plenum og omgivelser. Som eksempel kan nævnes modstanden mod strømning (der er proportional med massestrømmen \dot{m}_c) og varmetab mm., der ville kunne beskrives for en specifik kompressor ved brug af Navier-Stokes ligning. I praksis findes karakteristikken ved målinger på en specifik kompressor. En karakteristik passer derfor kun til en bestemt kompressor.

Det er, som før skrevet, antaget, at kompressorer er udformet som et rør, med tværsnitsareal, A_c , og længde, L_c , (se figur 2.1) Således kan følgende udtryk opstilles for kompressoren ud fra Newtons 2. lov;

$$F = A_c(-\Delta p + C) = \rho L_c A_c \ddot{u} \quad (2.9)$$

hvor u er luftens hastighed i aksialretningen og \ddot{u} er accelerationen. u regnes positiv i retningen fra kompressoren og ind i plenum. Denne ligning er koblet til ligning (2.8) gennem følgende relation;

$$u = \frac{1}{\rho A_c} \dot{m}_c \quad (2.10)$$

hvor det er antaget, at ρ er uafhængig af tiden, stedet og trykket. Denne antagelse er god, da ændringen af masseylden i plenum er meget mindre end ændringen af aksialhastigheden u (jvf. antagelsen om helmholtz resonator). Det kan se ud som om antagelsen er i modstrid med opstillingen af ligning (2.8), der netop er opstillet ud fra ændringer i masseylden. Dette er dog ikke tilfældet, da ændringer af masseylden i plenum godt kan have en stor indflydelse på masseændringen samme sted og en meget lille indflydelse på aksialhastigheden i kompressorøret.

Greitzer indsætter udtrykket for u og opstiller følgende dynamiske ligning;

$$\frac{L_c}{A_c} \ddot{\dot{m}}_c = (-\Delta p + C) \quad (2.11)$$

hvor $\ddot{\dot{m}}_c$ er masseaccelerationen.

Ved brug af nøjagtig de samme argumenter som før kan der opstilles en ligning for strømningen ud af plenum. Her er F_T udstødningskarakteristikken, der er analog til kompressorkarakteristikken, L_T er længden af røret som spjældet sidder i, og A_T er tværsnitsarealet af spjældet:

$$(\Delta p - F_T) = \frac{L_T}{A_T} \ddot{\dot{m}}_T$$

Efter dette opstiller Greitzer et ligningssystem med fire differentialligninger. Disse ligninger vil vi ikke beskæftige os med, da Brøns' model kun bygger videre på ligning (2.9).

2.2.2 Brøns' model

Formålet med Brøns' model er, som i Greitzers model, at kunne give nogle generelle retningslinier for hvornår og hvorfor der opstår surge i en kompressor, og herudover også de samme retningslinier for rotating stall. For at gøre dette lettest, er modellen opstillet så den kun gælder for aksialkompressorer. Modellen kan dog ifølge Morten Brøns overføres direkte til også at beskrive centrifugalkompressorer, da der optræder de samme instabiliteter i disse.

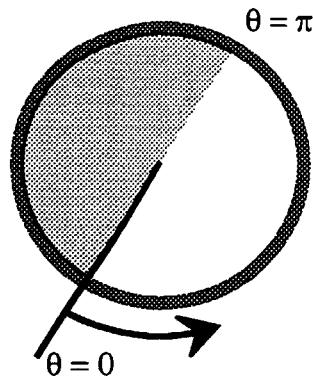
Som beskrevet i det ovenstående er Brøns' model fra 1990 en udbygning af Greitzers model. Den bygger videre på de samme principper, men indeholder en ekstra dimension, en vinkelafhængighed, som er lavet netop for at kunne indfange instabiliteten rotating stall. Hvis der er rotating stall i en kompressor, er der dele af kompressoren hvor der ikke kommer luft igennem (der er en prop). Luftstrømningen er forskellig for forskellige vinkler i kompressoren. Brøns modellerer dette, ved at lade luftstrømmen igennem kompressoren være afhængig af vinklen. Vinklen antages at være nul i slutningen af stallcellen, og roterer derfor rundt i kompressoren sammen med stallcellen. Desuden antages det, at stallcellen altid fylder halvdelen af kompressoren, således at der altid er rotating i intervallet $[\pi, 2\pi]$ (se figur 2.2).

Denne vinkelafhængighed betyder, at kompressorkarakteristikken, der tidligere var defineret for hele kompressoren, nu gælder for hver enkel vinkel. Ved at lave disse antagelser om luftstrømmen igennem kompressoren, kan u udtrykkes ved en middelværdi \bar{u} og en svingning $a(t) \sin(\theta)$, hvor amplituden a beskriver mængden af rotating stall⁴. Svingningerne skyldes, at der kommer mindre luft igennem kompressoren, når der optræder rotating stall, dvs:

$$\begin{aligned} u(t, \theta) &= \bar{u}(t) + a(t) \sin(\theta) \\ u &= \bar{u} + a \sin(\theta) \end{aligned} \quad (2.12)$$

I modellen opstilles en ligning, der approksimerer kompressorkarakteristikken C med \mathcal{C} . Den nye karakteristik tager højde for, at strømningen igennem kompressoren (og dermed trykstigningen) ændres, når der optræder rotating stall, og at denne ændring er sinuid. \mathcal{C} udtrykkes som middelstrømmen ved normal strømning, \bar{u} , adderet med en negativ værdi, hvor der optræder

⁴Det bemærkes at udtrykket for u er de første to led af en fourierrække.



Figur 2.2: Kompressorkarakteristikken er i Brøns' model defineret for hver enkel vinkel og ikke for hele kompressoren. Vinklen er nul ved stallcellens slutning og roterer med samme hastighed som stall-cellens. Cellen fylder altid halvdeln af kompressoren

rotating stall (der kommer mindre luft igennem, når der optræder rotating stall).

$$C = \begin{cases} C(u) & 0 \leq \theta < \pi \\ C(u) + K a \sin(\theta) & \pi \leq \theta < 2\pi \end{cases} \quad (2.13)$$

hvor K er en konstant, der repræsenterer, hvor kraftig rotating stall påvirker kompressorkarakteristikken.

Fra Greitzers model benytter Morten Brøns ligning (2.9), samt de antagelser der er til grund for ligningen:

$$L_c \rho \dot{u} = C - \Delta p \quad (2.14)$$

Ved antagelsen om at aksialhastigheden u er afhængig af vinklen, ændres Greitzers ligning til:

$$L_c \rho \frac{\partial u}{\partial t} = C - \Delta p \quad (2.15)$$

hvor u er en funktion af tiden, t , og vinklen, θ .

Ved at indsætte ligning (2.13) i ligning (2.15) fås en relation, der tager højde for rotating stall:

$$\rho L \frac{\partial u}{\partial t} = \begin{cases} C(\bar{u} + a \sin(\theta)) - \Delta p & 0 \leq \theta < \pi \\ C(\bar{u} + a \sin(\theta)) + K a \sin(\theta) - \Delta p & \pi \leq \theta < 2\pi \end{cases} \quad (2.16)$$

Denne ligning svarer til ligning (2.9) (i Greitzers model), men gælder for hver enkel vinkel.

Det er muligt at omskrive denne ligning til koblede ordinære differentialequationer med \bar{u} og a som de variable ved hjælp af Galerkins metode. Først udregnes middelhastigheden som det indre produkt mellem $f(\theta) = 1$ og ligning (2.16). Herefter findes et udtryk for amplituden a ved at udregne det indre produkt mellem $f(\theta) = \sin(\theta)$ og ligning (2.16). Det indre produkt er defineret som:

$$\langle f | g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta)g(\theta)d\theta \quad (2.17)$$

Ved at danne netop disse indre produkter, projiceres systemet over i et andet koordinatsystem med 1 som enheden ud af den ene akse og $\sin(\theta)$ som enheden ud af den anden akse.

For at opnå et udtryk der kan behandles analytisk, approksimeres $C(u)$ med et trediegradspolynomium:

$$C(u) = C_0 + C_1 u + C_2 u^2 + C_3 u^3 \quad (2.18)$$

Ved eksperimentelle data og fysiske/matematiske antagelser, er den første afledede i nul fundet til at være nul (se afsnit 1.1), således at:

$$C(u) = C_0 + C_2 u^2 + C_3 u^3 \quad (2.19)$$

Det ses af figur 1.3, at en god approksimation vil være et polynomium, hvor $C_2 > 0$ og $C_3 < 0$.

Herved fås for middelhastigheden \bar{u} udtrykket:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho L \dot{\bar{u}} d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C(\bar{u} + a \sin(\theta))d\theta \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} K a \sin(\theta) d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta p d\theta \Leftrightarrow \\ \frac{\rho L}{2\pi} [\dot{\bar{u}}\theta - a \cos(\theta)]_0^{2\pi} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (C_0 + C_2 u^2 + C_3 u^3) d\theta \\ &\quad - \frac{K a}{2\pi} [-\cos(\theta)]_{\pi}^{2\pi} - \Delta p \Leftrightarrow \\ \rho L \dot{\bar{u}} &= C_0 + C_2 \bar{u}^2 + C_3 \bar{u}^3 + \frac{C_2 a^2 \bar{u}}{2} + \frac{3C_3 a^2 \bar{u}}{2} \\ &\quad - \frac{K}{\pi} a - \Delta p \Leftrightarrow \\ \rho L \dot{\bar{u}} &= C(\bar{u}) + \frac{1}{4} C''(\bar{u}) a^2 - \frac{K}{\pi} a - \Delta p \end{aligned} \quad (2.20)$$

I den sidste omskrivning er det benyttet, at $C'(u) = 2C_2 u + 3C_3 u^2$, $C''(u) = 2C_2 + 6C_3 u$ og til den efterfølgende beregning desuden, at $C'''(u) = 6C_3$.

Et udtryk for amplituden a , dvs. mængden af rotating stall, fås ved den samme slags beregninger:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho L \bar{u} \sin(\theta) d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C(\bar{u} + a \sin(\theta)) \sin(\theta) d\theta \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K a \sin(\theta)^2 d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta p \sin(\theta) d\theta \Leftrightarrow \\ \frac{\rho L}{2\pi} [\bar{u} \sin(\theta) + a \sin^2(\theta)]_0^{2\pi} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (C_0 + C_2 u^2 + C_3 u^3) \sin(\theta) d\theta \\ &\quad + \frac{K a}{2\pi} \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{4} \right]_{-\pi}^{\pi} \Leftrightarrow \\ \frac{1}{2} \rho L a &= \frac{2C_2 a \bar{u}}{2} + \frac{3C_3 a \bar{u}^2}{2} + \frac{3C_3 a^3}{8} + \frac{K}{4} a \\ &= \frac{1}{2} C'(\bar{u}) a + \frac{1}{16} C'''(\bar{u}) a^3 + \frac{K}{4} a \end{aligned} \quad (2.21)$$

Der er desuden en sidste fysisk relation, som gør, at systemet kan beskrives fuldstændigt. Brøns antager, som Greitzer gjorde det i sin model, at der er massebevarelse i systemet, og at det er adiabatisk. Herved kan ligning (2.8) antages at gælde, og den er således identisk med den tredie ligning i Brøns' ligningssystem nemlig:

$$\frac{d\Delta p}{dt} = \omega^2 \frac{L_c}{A_c} (\dot{m}_c - \dot{m}_T) \quad (2.22)$$

For at simplificere systemet indføres dimensionsløse variable x , y , z og τ . Dette gøres ved at indføre en karakteristisk rotationshastighed U , og en karakteristisk frekvens ω således, at

$$\bar{u} = Ux \quad (2.23)$$

$$a = Uy \quad (2.24)$$

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho U^2 z \quad (2.25)$$

$$t = \frac{1}{\omega} \tau \quad (2.26)$$

Helmholtzfrekvensen ω defineres til at være den nye tidsenhed, og $\frac{1}{2} \rho U^2$ defineres som den nye trykenhed. Det ses, at x er et udtryk for, hvor stor luftstrømmen gennem kompressoren fra omgivelserne ind i plenum er. Således vil negativ x betyde, at luften strømmer ud af plenum gennem kompressoren. Surge kan altså karakteriseres ved, at værdien af x svinger, og deep surge ved at, fortegnet på x skifter.

y er et udtryk for hvor meget rotating stall, der er i systemet. Tilfælde hvor $y = 0$ svarer til et system hvor der ikke er rotating stall, hvilket er beskrevet i Greitzers model, hvor der slet ikke er gjort et forsøg på at beskrive denne form for instabilitet.

z er et udtryk for hvor meget luft der lukkes ud af spjældet, denne størrelse vil altså altid være positiv, da det er utænkeligt at trykket i plenum er lavere end trykket i omgivelserne.

Nu kan det færdige ligningssystem for kompressoren opstilles. Vi gør opmærksom på, at prikken i \dot{x} , \dot{y} og \dot{z} , nu står for den tidsaflede mht. τ og ikke mht. t .

For at gøre det mere overskueligt indføres tre nye forkortelser: $B = \frac{U}{2\omega L}$, $D = \frac{K}{\rho U}$ og $M(z) = \sqrt{\frac{z}{S}}$, hvor S er en parameter for hvor lukket udstødnningen er. Når S stiger, lukkes således spjældet. Da D er afhængig af K , er den et udtryk for, hvor meget rotating stall påregnes at påvirke kompressor-karakteristikken.

Ligning (2.20) omformes til følgende udtryk, hvor der dog ikke er skiftet parameter i funktionen $\mathcal{C}(\bar{u})$ endnu:

$$\begin{aligned}\dot{x} = \frac{dx}{d\tau} &= \frac{U}{2\omega L} \left(\frac{2}{\rho U^2} \mathcal{C}(\bar{u}) + \frac{1}{4} \frac{2}{\rho} \mathcal{C}''(\bar{u}) y^2 - \frac{2}{\rho U} \frac{K}{\pi} y - z \right) \\ &= B \left(\frac{2}{\rho U^2} \mathcal{C}(\bar{u}) + \frac{1}{4} \mathcal{C}(\bar{u}) + \frac{1}{4} \frac{2}{\rho} \mathcal{C}''(\bar{u}) y^2 - \frac{2}{\pi} D y - z \right)\end{aligned}\quad (2.27)$$

Ligeledes kan ligning (2.21) omformes til:

$$\begin{aligned}\dot{y} = \frac{dy}{d\tau} &= \frac{1}{\rho L \omega} \left(\mathcal{C}'(\bar{u}) y + \frac{1}{8} \mathcal{C}'''(\bar{u}) U^2 y^3 + \frac{K}{2} y \right) \\ &= B y \left(\frac{2}{\rho U} \mathcal{C}'(\bar{u}) + 2 \frac{U}{8\rho} \mathcal{C}'''(\bar{u}) y^2 + D \right)\end{aligned}\quad (2.28)$$

Til slut kan også ligning (2.22) omskrives på følgende måde:

$$\begin{aligned}\dot{z} = \frac{dz}{dt} &= \frac{2\omega^2}{\rho U^2} \frac{L_c}{A_c} (\dot{m}_c - \dot{m}_T) \\ &= \frac{1}{B} (x - M(z))\end{aligned}\quad (2.29)$$

Kompressorkarakteristikken \mathcal{C} gøres også dimensionsløs, hvorved en ny karakteristik Γ defineres som: $\Gamma(x) = \frac{2}{\rho U^2} (\mathcal{C}_0 + \mathcal{C}_2 U^2 x^2 + \mathcal{C}_3 U^3 x^3)$.

Nu kan de tre ligninger opstilles, som de ser ud i Morten Brøns artikel [Brø.90]:

$$\dot{x} = B[\Gamma(x) + \frac{1}{4}\Gamma''(x)y^2 - \frac{2}{\pi}Dy - z] \quad (2.30)$$

$$\dot{y} = By[\Gamma'(x) + \frac{1}{8}\Gamma'''(x)y^2 + D] \quad (2.31)$$

$$\dot{z} = \frac{1}{B}(x - M(z)) \quad (2.32)$$

Det er i ligningerne benyttet, at $\Gamma(x) = \frac{2}{\rho U^2}C(\bar{u}) = \gamma_0 + \gamma_2x^2 + \gamma_3x^3$ og $\Gamma'(x) = \frac{2}{\rho U}C'(\bar{u}) = 2\gamma_2x + 3\gamma_3x^2$ og $\Gamma''(x) = \frac{2}{\rho}C''(\bar{u}) = 2\gamma_2 + 6\gamma_3x$ og $\Gamma'''(x) = \frac{2U}{\rho}C'''(\bar{u}) = 6\gamma_3$.

I (2.30) er der opstillet en ligning for \dot{x} , som beskriver luftens acceleration i aksialkompressoren. I (2.31) er der opstillet en ligning for \dot{y} , som beskriver ændringen af rotating stall i kompressoren. Der er begrænsninger på, hvilke værdier y kan antage. Dette skyldes måden, hvorpå rotating stall er indført i modellen. Således vil $y < 0$ være uden mening, da dette betyder, at der er en større luftstrøm igennem stallcellen end gennem resten af kompressoren. I (2.32) er der opstillet en ligning for \dot{z} , som beskriver trykændringen i kompressoren.

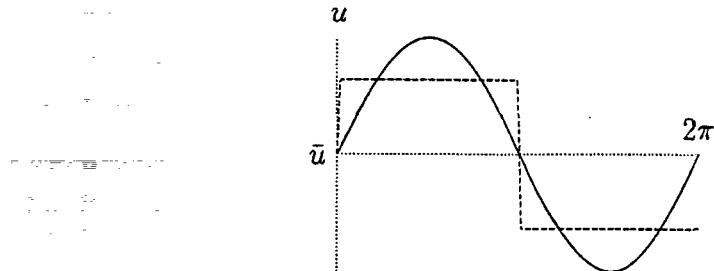
For hele ligningssystemet gælder det, at sætningen for eksistens og entydighed garanterer, at der for et givent begyndelsespunkt vil være netop en trajektorie (se appendiks C).

2.3 Antagelser i modellen

For at udlede denne model er der lavet flere antagelser. Det er blandt andet antaget, at massestrømmen i kompressoren er stabil, når der ikke er surge og rotating stall i den. Normalt vil der kun være tilnærmelsesvis stationære tilstande i kompressoren, og der vil altid være små variationer i den mængde af luft, der transporterer igennem kompressoren. Almindeligvis findes der dog mekanismer tilknyttet kompressorsystemet, som regulerer rotorbladenes omdrejningshastighed således, at massestrømmen bliver næsten stabil. Antagelsen er derfor grov, men de faktiske resultater afviger ikke væsentligt fra virkeligheden.

Det er desuden antaget, at luftstrømmen kan beskrives ved en middelværdi og en negativ swingning, når der er rotating stall i kompressoren (ligning 2.13). Dette er endnu en grov antagelse. Det ville være mere rigtigt at beskrive

luftstrømmen ved at sige, at den nogle steder er høj, og andre steder nul (se fig 2.3). Antagelsen er dog gjort, da det er en del nemmere matematisk



Figur 2.3: Når gennemstrømningen gennem en kompressor varierer med vinklen, sker dette ikke med en sinuid variation, men snarere ved at gennemstrømningen er nul for nogle vinkler og normal for andre.

at beskrive systemet ved en sinuid funktion. At der kun er taget eet led med i fourierrækken skyldes, at der derved kommer en klar betydning af parameteren a (svarer til mængden af rotating stall). Ifølge Morten Brøns giver det ikke væsentligt bedre resultater at medtage flere af rækvens led.

Karakteristikken er desuden antaget at gælde for hver enkelt vinkel i kompressoren. Dette er en udvidelse i forhold til den oprindelige karakteristik, der blev bestemt for hele kompressoren.

Det er antaget, at karakteristikken C kan beskrives ved et trediegradspolynomium, hvor den første afledede i nul er nul (ligning 2.18 og 2.19). Konstantledene i ligningen er fundet ved eksperimenter. Antagelsen må siges at være rimelig, når der ses på et lille område. Hvis der ses på et stort område, er det svært at approksimere ligningen, da den virkelige luftstrøm ikke er mulig at beskrive så simpelt.

2.4 Status af modellen

Som det fremgår af afsnit 2.2.2, hvor Brøns' model opstilles, er modellen grundlæggende bygget på teori om kompressoren som et fysisk fænomen. Den grundlæggende model er derfor teoribaseret. Kompressorkarakteristikken modelleres dog ved, at empiriske data fittes til et polynomium. Argumentationen for at polynomiet skal se ud, som det gør, bygger udelukkende på empiri, således at denne del af modellen altså er ad-hoc. Måden hvorpå rotating stall indføres er heller ikke teoribaseret. Denne udbygning af modellen

foretages ikke ud fra strømningsteori, men udelukkende ud fra en konstatering af, at luftstrømmen gennem en stall celle er stærkt nedsat. Brøns' model er derfor en teoribaseret model med enkelte ad-hoc elementer, hvorfor man kan eftervise modellens generelle træk ved empiriske forsøg.

Alle de fysiske relationer, som er benyttet til at opstille modellen, bygger hver især på antagelser om systemet (se afsnit 2.3). Mange antagelser er lavet med det ene formål at forsimple modellen mest muligt. Dette betyder, at modellen ikke er god til at beskrive en bestemt kompressors effekt. I stedet er modellen god til at beskrive generelle træk ved et kompressorsystem; i dette tilfælde de to instabiliteter surge og rotating stall. Brøns model er en udvidelse i forhold til Greitzers, den er derfor mere detaljeret end Greitzers. Denne detaljering er lavet for, at modellen skal kunne indfange et fænomen, som den meget simple model ikke beskriver. Detaljeringen medfører, at modellen afgrænses til kun at beskrive aksialkompressorer og ikke som den simple model beskrive kompressoror generelt. Brøns' model er derfor en simpel model, som giver få, men kvalitative oplysninger om et aksialt kompressorsystem.

2.5 Opsamling

For at beskrive fænomenet surge opstillede Geitzer i 1976 en model, som udelukkende bygger på fysikken i systemet. Ud fra denne model gjorde han det muligt at beskrive surge, og se hvorfor det opstår.

I et almindeligt kompressorsystem er volumenet af plenum meget større end volumenet af hhv. kompressor og spjæld. Geitzer antager derfor uden større tab af information, at kompressorsystemet kan opfattes som to rør (kompressoren og spjældet), som har meget mindre tværsnitsareal end den kasse (plenum), som sidder i midten. Dette gør, at energibetrægtingerne i systemet bliver meget enkle. I rørene kan det nu antages, at der kun er kinetisk energi (luftens hastighed er her meget stor i forhold til volumenet), mens der kun er potentiel energi i plenum (her er hastigheden meget lille i forhold til volumenet).

I Greitzers model antages det også, at systemet er adiabatisk. Dette kan gøres, da energitabet til omgivelserne er meget mindre end den energistrøm, der gennemløber systemet. Da modellen er lavet til at beskrive luft i en kompressor, kan tilstandsligningen antages at gælde. For at forsimple modellen yderligere antages det også, at kompressorkarakteristikken C beskriver alle de tryktab, der er til omgivelserne, således, at det samlede tryk kan beskrives ved Δp og C . Dette er de væsentligste af Greitzers fysiske antagelser, som alle er med til at forsimple modellen.

Morten Brøns udvidede i 1988 modellen til også at beskrive rotating stall. For at få instabiliteten med indførte han en afhængighed af vinklen θ . Rotating stall er en “prop”, som medfører en sænket ydeevne for kompressoren. Denne lille udvidelse af modellen er derfor en ad-hoc del, da den kun er tilføjet for at indfange det specielle fænomen, rotating stall, ud fra observationer af virkeligheden.

Begge modeller er simple modeller, da de i store træk beskriver, hvad der sker i en kompressor, uden at en specifik kompressor beskrives.

Kapitel 3

Analyse af den matematiske model

Vi vil i dette kapitel undersøge, hvilke instabiliteter den beskrevne kompressormodel kan udvise. Dette vil vi gøre ved at udføre en lokal stabilitetsanalyse af modellen. De dynamiske ligninger i modellen er ligningerne (2.30), (2.31) og (2.32).

Vi vil starte med at finde ligevægtspunkter i systemet, og finde frem til hvor disse er stabile, og hvor de er ustabile. Herefter vil vi undersøge, hvilke bifurcationstyper systemet udviser, og hvor i parameterrummet de forskellige bifurkationer finder sted.

Kapitlet er delt op i to dele. En opsummering af Brøns' analyse af en to dimensionale model, som ikke medtager rotating stall, svarende til ligning (2.30) og (2.32) med $y = 0$ [Brø.88] og en analyse af den tredimensionale model, som er beskrevet i kapitel 2. Under analysen af den tredimensionale model vil vi skelne imellem $y = 0$ og $y > 0$ ($y < 0$ giver som beskrevet i afsnit 2.2.2 ingen fysisk mening). Den væsentligste årsag til denne opdeling er, at $y = 0$ svarer til den todimensionale model, som Brøns allerede har analyseret ($y = 0$ betyder, at der ikke er rotating stall).

Da $y = 0$ er en invariant mangfoldighed¹, vil en trajektorie, der starter i $y = 0$, aldrig komme over i et område, hvor $y \neq 0$. I et virkeligt kompressorsystem vil det dog ikke være muligt at eftervise dette. Systemet vil helt sikkert blive utsat for små rystelser eller forstyrrelser af luftstrømmen, der betyder, at det skubbes ud af $y = 0$ tilstanden.

¹En invariant mangfoldighed er (fortalt i ord) en flade, hvorom det gælder, at løsninger, der startes på fladen, vil forblive på fladen. I dette tilfælde skyldes det, at $\dot{y} = 0$ for $y = 0$, hvilket betyder, at ændringen i y -retningen er 0.

Analysen er så vidt mulig generel, men der hvor det ikke har været muligt, benyttes den kompressorkarakteristik, som Brøns har brugt i sin beskrivelse af modellen:

$$\Gamma(x) = \gamma_0 + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^3 = 0.85 + 36.6x^2 - 127x^3 \quad (3.1)$$

Denne karakteristik gælder for en specifik kompressor, hvor $B = 0.98$ (konstant rotationshastighed). Da D er en parameter, der angiver hvor stor indflydelse rotating stall har på kompressorkarakteristikken, er denne svær at bestemme størrelsen af. Derfor vil vi undersøge systemet for forskellige D -værdier. Som den primære bifurkationsparameter har vi valgt S , dette skyldes at denne parameter er direkte knyttet til spjældet og dermed til hvor meget luft, der lukkes ud af plenum. Det er altså en parameter, som det er muligt at regulere på i et fly.

3.1 Ligevægtspunkter

Det første led i analysen er at finde systemets ligevægtspunkter. Ligevægtspunkterne er de punkter (x^*, y^*, z^*) , for hvilke $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (0, 0, 0)$.

Derfor bliver ligevægtspunkterne de punkter, hvor følgende tre betingelser er opfyldt. Fra ligning (2.30):

$$z^* = \Gamma(x^*) + \frac{1}{4}\Gamma''(x^*)y^{*2} - \frac{2}{\pi}Dy^* \quad (3.2)$$

fra ligning (2.31) fås følgende to tilfælde:

$$y^* = \sqrt{-8 \frac{D + \Gamma'(x^*)}{\Gamma'''(x^*)}} \quad \text{for } y > 0 \quad (3.3)$$

eller

$$y^* = 0 \quad (3.4)$$

og fra ligning (2.32)

$$x^* = M(z^*) = \sqrt{\frac{z^*}{S}} \quad (3.5)$$

Der kan altså være ligevægtspunkter for $y = 0$ og for $y > 0$. Indsættes ligningerne (3.3) og (3.4) i ligning (3.2), fås to udtryk for z^* , der gælder for hhv. $y > 0$ og $y = 0$.

$$z^* = \begin{cases} \phi(x^*) & y > 0 \\ \Gamma(x^*) & y = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

hvor

$$\phi(x) = \Gamma(x) - 2\Gamma''(x) \frac{D + \Gamma'(x)}{\Gamma'''(x)} - \frac{2}{\pi} D \sqrt{-8 \frac{D + \Gamma'(x)}{\Gamma'''(x)}} \quad (3.7)$$

For $y > 0$ gælder, som det ses, at D er den eneste parameter, som ændrer på $\phi(x)$, da $\Gamma(x)$ som nævnt er en fastlagt funktion for en given kompressor. For $y = 0$ gælder, som det ses af ligning (3.6), at $z^* = \Gamma(x^*)$.

Ligning (3.5) omskrives til en funktion af x :

$$N_S(x) = M^{-1}(x) = Sx^2 \quad (3.8)$$

Her er S den eneste parameter, som det er muligt at variere på.

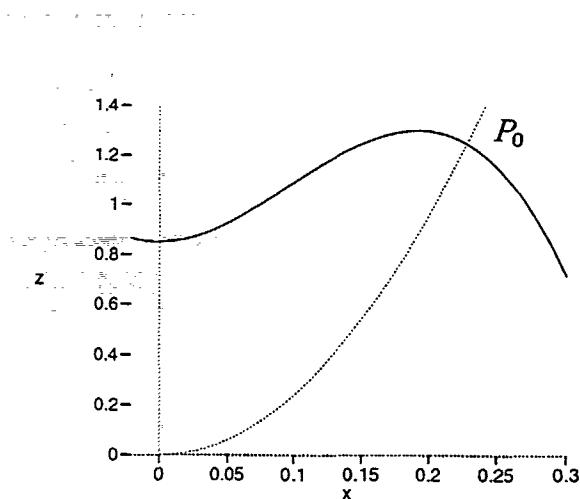
Disse ligninger vil vi nu afbilde grafisk, for at få et indtryk af hvor i systemet ligevægtspunkterne er.

Afbildning af ligevægtspunkter for $y = 0$

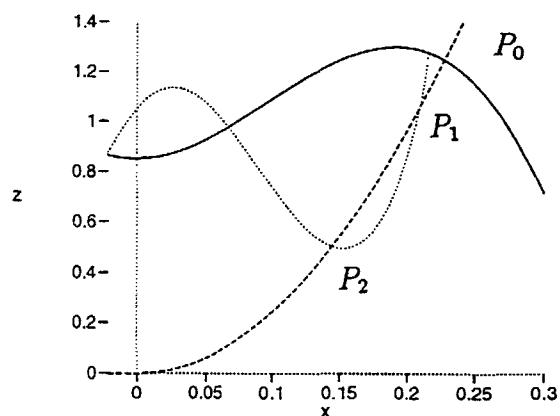
Ligevægtspunkter vil forekomme, hvor $\Gamma(x) = N_S(x)$. Ved at indtegne graferne $\Gamma(x)$ og $N_S(x)$ i et x - z -koordinatsystem kan det umiddelbart ses, hvor ligevægtspunkterne er (se figur 3.1). Ligevægtspunktet, som fremkommer ved denne skæring, kalder vi fremover for P_0 .

Som det ses på figur 3.1, er $N_S(x)$ kun indtegnet for $x \geq 0$, da der ikke eksisterer ligevægtspunkter for $x < 0$ ifølge ligning (3.5). Det giver ikke nogen mening at lede efter ligevægtspunkter for $z < 0$, da $z < 0$ betyder at der er et lavere tryk i plenum end udenfor. En sådan tilstand vil medføre, at luften strømmer ind i plenum, da både trykforskellen og kompressoren vil tvinge luftstrømmen til dette.

For $y = 0$ er der altid kun eet punkt, hvor de to grafer mødes. Dette punkt er netop systemets eneste ligevægtspunkt, idet det er det eneste sted hvor både $\dot{x} = 0$ og $\dot{z} = 0$. Punktet er en funktion af S , idet S bestemmer hældningen af $N_S(x)$.



Figur 3.1: x - z -koordinatsystem som det ser ud for $y = 0$. De indtegnde funktioner er $\Gamma(x)$:— og $N_S(x)$:···. Ligevægtspunktet, P_0 , er der, hvor $\Gamma(x)$ skærer $N_S(x)$.



Figur 3.2: x - z -koordinatsystem som det ser ud, når $y \geq 0$. De indtegnde funktioner er $\phi(x)$:···, $\Gamma(x)$:— og $N_S(x)$:---. Ligevægtspunkterne er dels de punkter hvor $N_s(x) = \phi(x)$ og dels de punkter hvor $N_s(x) = \Gamma(x)$.

Afbildning af ligevægtspunkter for $y \geq 0$

For $y > 0$ indtegnes alle tre grafer $\phi(x)$, $\Gamma(x)$ og $N_S(x)$ i et x - z -koordinatsystem (se figur 3.2). Et ligevægtspunkt for systemet vil her enten svare til skæringen mellem $N_S(x)$ og $\phi(x)$ eller mellem $N_S(x)$ og $\Gamma(x)$. Som det ses på figuren (3.2), gælder det som for $y = 0$, at ligevægtspunkter ligger i området, hvor $x > 0$ og $z > 0$. Ligevægtspunktet hvor $N_S(x) = \Gamma$ er det samme som for $y = 0$, og kaldes derfor P_0 . Ligevægtspunkterne hvor $N_S(x) = \phi(x)$ kalder vi hhv. P_1 og P_2 , hvor P_2 er punktet med den laveste x -værdi.

Om $\phi(x)$ gælder det, at den kun er defineret for $y > 0$ dvs. når:

$$-8 \frac{D + \Gamma'(x)}{\Gamma'''(x)} > 0$$

Da $\Gamma'''(x) = 6\gamma_3$ altid er negativ (γ_3 er en negativ konstant), vil uligheden reduceres til

$$D + \Gamma'(x) > 0$$

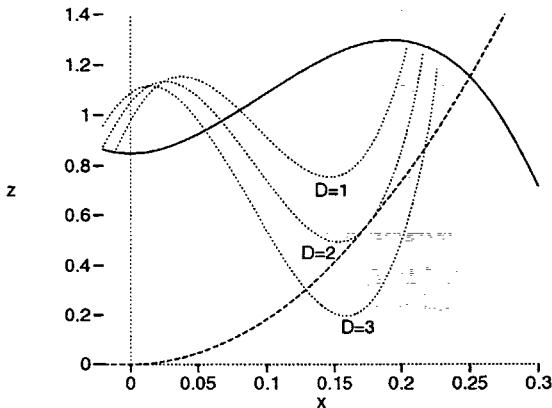
Dette er en andengradsulighed, hvor løsningen er de x , der ligger i intervallet $[x_{min}; x_{max}]$. x_{min} og x_{max} er nulpunkterne for ligningen:

$$\begin{aligned} D + \Gamma'(x) &= 0 \Leftrightarrow \\ D + 3\gamma_3 x^2 + 2\gamma_2 x &= 0 \Rightarrow \\ x_{max} &= \frac{-\gamma_2 - \sqrt{\gamma_2^2 - 3\gamma_3 D}}{3\gamma_3} \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$x_{min} = \frac{-\gamma_2 + \sqrt{\gamma_2^2 - 3\gamma_3 D}}{3\gamma_3} \tag{3.10}$$

Det gælder derfor, da x_{min} som det ses af ligning (3.10) med $\gamma_3 < 0$ og $\gamma_2 > 0$ er negativ, at ligevægtspunkterne skal findes i intervallet $0 \leq x \leq x_{max}$, $y \geq 0$ og $0 \leq z \leq \Gamma(x_{max})$.

Ligevægtspunkterne for dette system er både de punkter, hvor $N_S(x) = \phi(x)$, og de punkter, hvor $N_S(x) = \Gamma(x)$, idet det i disse punkter gælder, at $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$ og $\dot{z} = 0$. Det er til gengæld ikke så let at se, om der er éet, to eller tre ligevægtspunkter, idet det afhænger af S og D . Alle de tre tilfælde er mulige (se figur 3.3). Da vi fremover kun vil beskæftige os med ligevægtspunkter, vil vi i det følgende benytte notationen x^* istedet for x^* osv...



Figur 3.3: Alt efter værdierne af S og D er det muligt, at der er éet, to eller tre ligevægtspunkter. $\Gamma(x)$:—, $\phi(x)$:· · ·, $N_S(x)$: - - -.

3.2 Ligevægtspunkternes stabilitet

For i næste afsnit at kunne finde frem til de mulige bifurkationspunkter er det væsentligt at kende ligevægtspunkternes stabilitetsforhold. Der tænkes nu på stabilitet i matematisk forstand².

Idet vi betragter $\Phi_t(x_1)$ som trajektorien, der til tiden $t = t_0$ går igennem begyndelsespunktet x_1 , vil definitionen på asymptotisk stabilitet for et ligevægtspunkt være:

- x_0 kaldes asymptotisk stabilt hvis følgende er opfyldt: Der eksisterer en omegn U om ligevægtspunktet x_0 så der for alle $U_1 \subseteq U$ gælder følgende: For alle $x_1 \in U$ gælder, at der for enhver U_1 findes et T for hvilket $t > T$ så $\Phi_t(x_1) \in U_1$.

Hvis alle egenværdier for jacobimatrizen $Df(x_0)$ har negative realdele, da er ligevægtspunktet x_0 asymptotisk stabilt.

Definitionen på et asymptotisk ustabilt ligevægtspunkt kan ligeledes opskrives:

- Et ligevægtspunkt x_0 kaldes asymptotisk ustabilt, hvis der for enhver omegn U eksisterer en trajektorie $\Phi_t(x_1)$ med $x_1 \in U$, således at der for ethvert T eksisterer et $t > T$ så $\Phi_t(x_1) \notin U$.

²Vi har i hele den fysiske beskrivelse af kompressorsystemet benyttet ordene stabilt og ustabilt system. Dette har udelukkende hentydet til fysikken i systemet. Nu da vi vil beskrive systemet matematisk, er det en anden slags stabilitet. Et fysisk stabilt system er ikke nødvendigvis matematisk stabilt - f.eks er et system med rotating stall et fysisk ustabilt system, mens det forekommer i et matematisk stabilt ligevægtspunkt.

Man kan vise, at hvis jacobimatricen $Df(x_0)$ har mindst en egenværdi med positiv realdel, da er x_0 asymptotisk ustabilt.

For ligevægtspunkter, som har en eller flere egenværdier med realdel lig med nul, kræves der en nøjere undersøgelse for at bestemme, om punktet er asymptotisk stabilt eller ustabilt. Dette vil vi ikke komme ind på i nærværende projekt. Vi vil gennem resten af projektet kalde et asymptotisk stabilt punkt for stabilt (tilsvarende for asymptotisk ustabile punkter). I litteraturen benyttes ofte et svagere krav til stabilitet, som vi ikke vil benytte i dette projekt.

For at undersøge om et system er stabilt, opstilles først systemets jacobimatrix. Ved at analysere lineariseringen omkring ligevægtspunkterne er det herefter muligt at finde disse stabilitetsforhold (se appendiks A).

3.2.1 Stabilitet af ligevægtspunkterne i to dimensioner

Jacobimatricen for ligevægtspunkterne har følgende udseende:

$$A = \begin{pmatrix} B\Gamma'(x) & -B \\ \frac{1}{B} & \frac{-M'(z)}{B} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Et todimensionalt system er stabilt, hvis alle egenværdier er negative. For at sikre at dette gælder, er der to betingelser, der skal være opfyldt for jacobimatricen (se appendiks A)

- Et punkt i et todimensionalt system er stabilt, hvis det for jacobimatricen i punktet gælder, at

- 1 $TrA < 0$
- 2 $DetA > 0$

I ligevægtspunkter kan vi eliminere z i udtrykkene for TrA og $detA$. Fra ligning (3.5) fås:

$$M'(z) = \frac{1}{2S} \sqrt{\frac{S}{z}} = \frac{1}{2Sz} \quad (3.12)$$

fra ligning (3.2) fås:

$$z = \Gamma(x) \Leftrightarrow S = \frac{\Gamma(x)}{x^2}$$

Af (3.12) og $z = Sx^2$ fås:

$$M'(z) = \frac{x}{2Sx^2} = \frac{x}{2\Gamma(x)} \quad (3.13)$$

For determinanten gælder:

$$\text{Det}A = -\Gamma'(x)M'(z) + 1 = \frac{-\Gamma'(x)x}{2\Gamma(x)} + 1 \quad (3.14)$$

Determinaten vil ændre fortegn, når:

$$\begin{aligned} \text{Det}A &= 0 \Leftrightarrow \\ \frac{\Gamma'(x)x}{2\Gamma(x)} &= 1 \Leftrightarrow \\ -2\gamma_0 + \gamma_3 x^3 &= 0 \Leftrightarrow \\ x &= \sqrt[3]{\frac{2\gamma_0}{\gamma_3}} < 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

da $\gamma_0 > 0$ og $\gamma_3 < 0$.

Da vi før har argumenteret for, at ligevægtspunkter kun eksisterer for $x > 0$, vil $\text{det}A$ være positiv for alle ligevægtspunkter.

For sporet gælder:

$$\text{Tr}A = B\Gamma'(x) - \frac{M'(z)}{B} = \Gamma'(x)B - \frac{x}{2\Gamma(x)B} \quad (3.16)$$

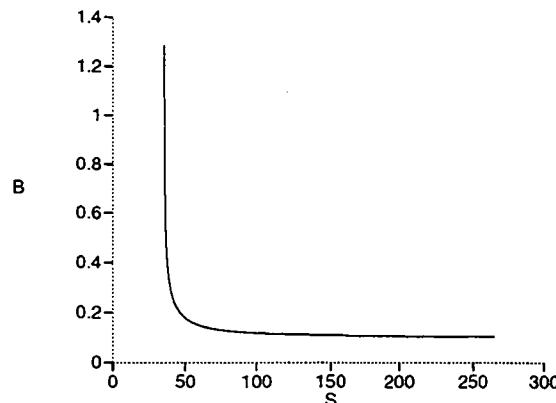
Heraf ses det let, at:

$$\Gamma'(x) < 0 \Rightarrow \text{Tr}A < 0 \quad (3.17)$$

For $\Gamma'(x) > 0$ vil $\text{Tr}A$ ændre fortegn i punktet, for hvilket der gælder:

$$\begin{aligned} \text{Tr}A &= 0 \Leftrightarrow \\ \Gamma'(x) - \frac{x}{2\Gamma(x)B^2} &= 0 \Leftrightarrow \\ B^2 &= \frac{x}{2\Gamma(x)\Gamma'(x)} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Da x ikke kan isoleres i sporet (3.18), har vi indtegnet denne betingelse i et S - B -diagram (se figur 3.4). For talsæt (S, B) under grafen er sporet positivt, og derfor er det todimensionale system stabilt netop for disse parameterværdier. På trods af at karakteristikken er afhængig af B , giver dette mening, da karakteristikken altid vil have sammen form.



Figur 3.4: S - B -diagram, $\text{Tr}A > 0$ under kurven.

3.2.2 Stabilitet af ligevægtspunkterne i tre dimensioner

Jacobimatrixen i det tredimensionale system har følgende udseende:

$$J = \begin{pmatrix} B(\Gamma'(x) + \frac{1}{4}\Gamma'''(x)y^2) & B(\frac{1}{2}\Gamma''(x)y - \frac{2}{\pi}D) & -B \\ By\Gamma''(x) & B(\Gamma'(x) + \frac{1}{8}\Gamma'''(x)y^2 + D) & 0 \\ \frac{1}{B} & 0 & \frac{-M'}{B} \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Som det ses i appendiks A, er der for et tredimensionalt system tre betingelser for jacobimatrixen, der skal være opfyldt, for at sikre at der ikke er nogen positive egenværdier (systemet er stabilt):

- Et punkt i et tredimensionalt system er stabilt, hvis det for jacobimatrixen i punktet gælder, at

- 1 $\text{Tr}J < 0$
- 2 $\text{Det}J < 0$
- 3 $\text{Tr}J \cdot \square J - \text{Det}J > 0$

hvor \square er summen af de diagonale 2×2 underdeterminanter (se appendiks A ligning (A.10)).

De tre betingelser undersøges i 2 tilfælde; i ligevægtspunkterne P_0 svarende til $y = 0$ og i ligevægtspunkterne P_1 og P_2 svarende til $y > 0$.

For ligevægtspunkter P_0 gælder:

$$\text{Det } J = -B(\Gamma'(x) + D)(\Gamma'(x)M'(z) + 1) \quad (3.20)$$

$$\text{Tr } J = B(2\Gamma'(x) + D) - \frac{M'(z)}{B} \quad (3.21)$$

$$\square J = (\Gamma'(x) + D)(B\Gamma'(x) - M'(z)) - M'(z)\Gamma'(x) + 1 \quad (3.22)$$

For P_1 og P_2 gælder:

$$\begin{aligned} \text{Det } J &= \frac{1}{4}By^2 \left(-M'(z)\Gamma'''(x)(\Gamma'(x) + \frac{1}{4}\Gamma''(x)y^2) \right. \\ &\quad \left. - \Gamma'''(x) + M'(z)\Gamma''(x)(\Gamma''(x) - \frac{4}{\pi y}D) \right) \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\text{Tr } J = B \left(\Gamma'(x) + \frac{1}{2}\Gamma'''(x)y^2 - \frac{M'(z)}{B} \right) \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \square J &= \frac{B^2y^2}{4} \left(\Gamma'''(x)(\Gamma'(x) + \frac{y^2}{4}\Gamma'''(x)) - \Gamma''(x) \right. \\ &\quad \left. (2\Gamma''(x) - \frac{8D}{\pi y}) \right) - M'(z) \left(\frac{y^2}{2} + \Gamma'(x) + \frac{1}{M'(z)} \right) \end{aligned} \quad (3.25)$$

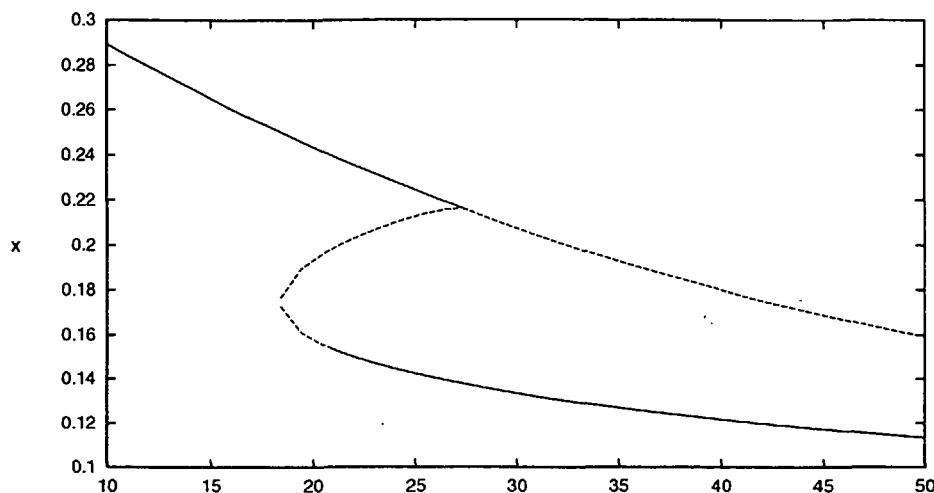
Vi har lavet et program, der ved bisektion finder ligevægtspunkterne som funktion af S og D , og samtidig undersøger hvilke af stabilitetsbetingelserne, der er opfyldt. I figur 3.5 har vi indtegnet ligevægtspunkternes stabilitet i et S - x -diagram for $D = 2$.

3.3 Bifurkationspunkter

Bifurkationer kan ske lokalt i et ligevægtspunkt eller globalt. I analysen af hhv. det todimensionale og det tredimensionale system har det vist sig, at der både forekommer lokale og globale bifurkationer. For nærmere beskrivelse henvises til appendiks B.

Definition på en bifurkation:

- Betragt vektorfeltet $f_\mu(x)$, hvor $x \in \mathbb{R}^k$ og $\mu \in \mathbb{R}^n$ betegner en parameterværdi. Parameterværdien $\mu = \mu_0$ kaldes en bifurkationsværdi, hvis f_{μ_0} ikke er strukturelt stabilt. Den kvalitative ændring, der finder sted i trajektoriernes struktur for $\mu = \mu_0$, kaldes en bifurkation.



Figur 3.5: S - x -diagram for $D = 2$. Stabilt ligevægtspunkt: —, ustabilt ligevægtspunkt: - - -

Strukturel stabilitet er defineret i appendiks B.

Vi vil starte med at referere Brøns' resultater for det todimensionale system og derefter komme med vores egne observationer i det tredimensionale system.

3.3.1 Bifurkationer i Brøns' todimensionale system

Denne model har vi ikke selv analyseret, men Brøns når frem til følgende resultater. I det todimensionale system forekommer der kun een slags bifurcation, en hopf-bifurcation. Da hopf-bifurcationen er en lokal bifurcation, sker den omkring et ligevægtspunkt (se appendiks B). En hopf-bifurcation finder sted i et punkt, hvor realdelen af de komplekse egenværdier skifter fortegn. Dette betyder, at man kan finde punktet ud fra stabilitetsanalysen i afsnit 3.2.1, som det sted hvor $\text{Tr}A = 0$, det vil sige:

$$B^2 = \frac{x}{2\Gamma(x)\Gamma'(x)}$$

Brøns opstiller normalformen for ligevægtspunktet og viser derved, at hopf-bifurcationen er superkritisk. Hvis S øges yderligere udvikler den stabile grænsecyklen sig til en *canard* [Brø.88]. Dette har vi ikke haft tid til at beskæftige os yderligere med, og den interesserede læser henvises til [Die.84].

3.3.2 Bifurkationer i modellen

Differentialligningssystemets struktur er forskellig, alt efter hvilke værdier bifurkationsparametrene D og S antager. Da S , som før beskrevet, er den parameter, som det er muligt at variere på i kompressoren, har vi benyttet denne som den primære bifurkationsparameter. Hermed menes, at S varieres kontinuert for fastholdte værdier af D .

I bifurkationsparameteren D 's definitionsområde kan der opstå tre globalt forskellige scenarier³. For at illustrere dette, har vi valgt tre forskellige D -værdier: $D = 2$, $D = 1.2$ og $D = 0.5$.

For at kunne skelne imellem de forskellige strukturer har vi navngivet de forskellige bifurkationer i forhold til S . S_s er den parameterværdi af S , hvor der finder en saddelpunkts-bifurcation sted, S_h en hopf-bifurcation, S_t en transkritisk bifurcation og i S_k sker der en hopf-bifurcation for ligevægtspunktet P_0 . Vi har navngivet endnu en S -værdi, $S_?$, som er den største værdi, vi har undersøgt det givne scenarie for.

Et stykke efter S_k opstår der en canard, som svarer til den, der forekommer i Brøns' todimensionale system (se afsnit 3.3.1). Desuden forekommer der endnu en transkritisk bifurcation. Begge disse har vi undladt at beskæftige os med. Canarden, fordi vi ikke har haft tid til at undersøge den, og den transkritiske bifurcation, fordi vi mener at den er irrelevant for modellen⁴.

Valget af D -værdier er foretaget ud fra et ønske om at beskrive de forskellige typer af bifurkations diagrammer, der kan forekomme. Vi har valgt ikke at medtage diagrammer, der kan betragtes som specialtilfælde. Årsagen til at $D = 0$ er fravalgt, er således, at denne D -værdi fører til, at saddelpunkts-bifurcationen og den transkritiske bifurcation finder sted i samme punkt. Vi har således ikke undersøgt nogle af de D -værdier, der fører til, at to af bifurkationerne forekommer i samme S -værdi.

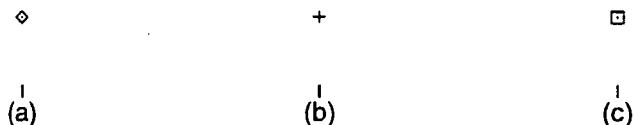
På figurer af trajektorier har vi indtegnet ligevægtspunkterne med forskellige symboler alt efter deres stabilitetstype. På figur 3.6 ses de forskellige symboler.

Bifurkationer for $D = 2$

På figur 3.7 ses S - x -bifurkationsdiagrammet for $D = 2$, som giver et overblik over, ved hvilke S -parameterværdier de forskellige bifurkationer finder sted.

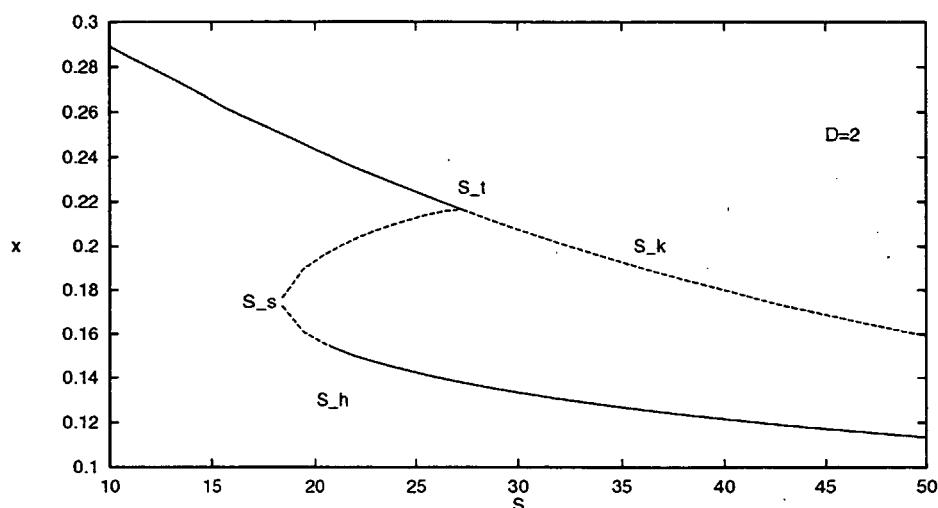
³Reelt findes der mere end tre scenarier, da der også er flere grænsetilfælde.

⁴da den forekommer for S -værdier, der er så store, at systemet længe inden er brutt sammen.



Figur 3.6: (a) Stabilt ligevægtspunkt, (b) Ustabilt ligevægtspunkt, (c) Ustabilt ligevægtspunkt med et sæt af komplekse egenværdier.

I intervallet $[0; S_s]$ findes der kun eet ligevægtspunkt, P_0 . Det er et stabilt



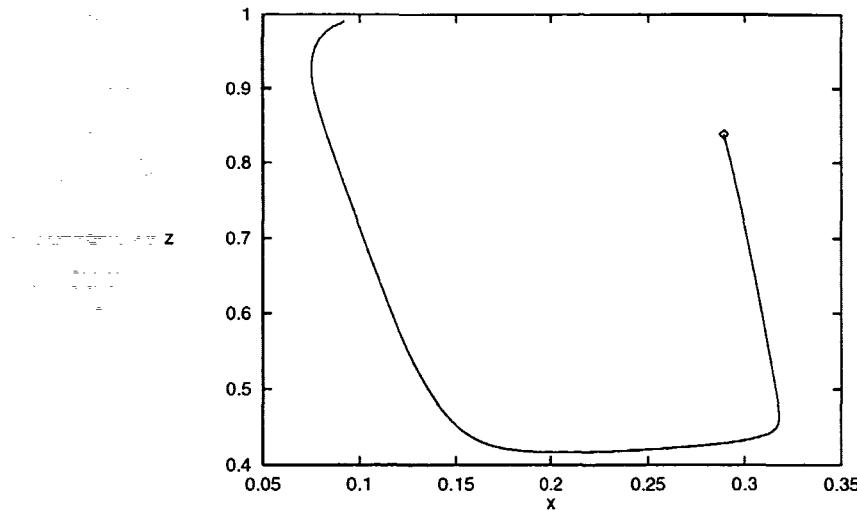
Figur 3.7: S - x -bifurkationsdiagram for $D = 2$. Stabilt:—, ustabilt:---.

ligevægtspunkt, da der er tre reelle negative egenværdier. Alle trajektorier for en S -værdi i dette interval vil tiltrækkes af dette ene ligevægtspunkt (se figur 3.8).

I en kompressor vil dette svare til, at ligevægten hurtigt vil blive genoprettet, hvis systemet et kort øjeblik skubbes ud af denne (her tales om den fysiske ligevægt, hvor der hverken er surge eller rotating stall).

For en værdi S_s , sker der en **saddelpunkts-bifurkation** (se appen-

diks B afsnit B.1.1). Der opstår et ustabilt ligevægtspunkt, som straks deler sig i to grene (ligevægtspunkterne P_1 og P_2), der begge er ustabile. For en saddelpunkts-bifurkation gælder det, at mindst een af egenværdierne er nul i bifurkationspunktet. Det er derfor ikke muligt at udtale sig om punktets stabilitet uden at lave en analyse af punktet. Dette vil vi ikke gøre, da der er tale om et grænsetilfælde. Punktet må være ustabilt, da begge grenene er

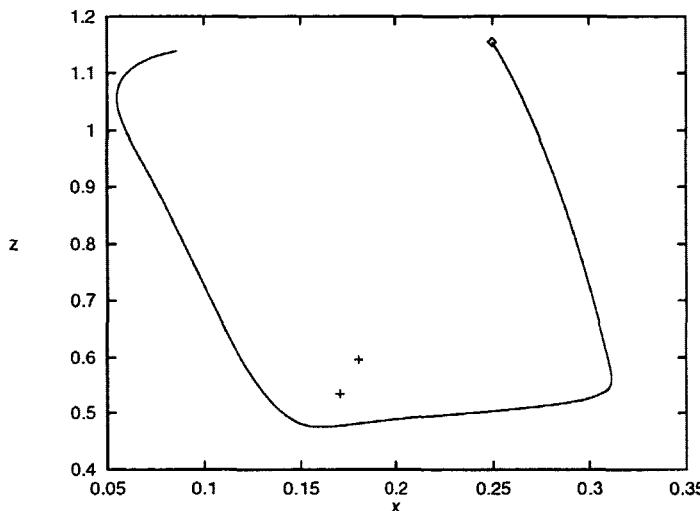


Figur 3.8: x - z -projektion af en trajektorie for $D = 2$ i intervallet $]0; S_s[$

ustabile, og trajektorierne opfører sig på samme måde som i intervallet $]0; S_s[$.

I intervallet $]S_s; S_h[$ er der tre ligevægtspunkter; éet stabilt i P_0 og to ustabile opstået ved saddelpunkts-bifurkationen (se figur 3.7).

Det ligevægtspunkt, P_1 , som bevæger sig imod P_0 , er kun ustabilt i een retning (x -retningen), hvilket kan ses ud fra egenværdierne og de tilhørende egenvektorer (der er to negative og een positiv egenværdi som alle er reelle). Det andet ligevægtspunkt, P_2 , er ustabilt i to retninger (z - og y -retningerne)



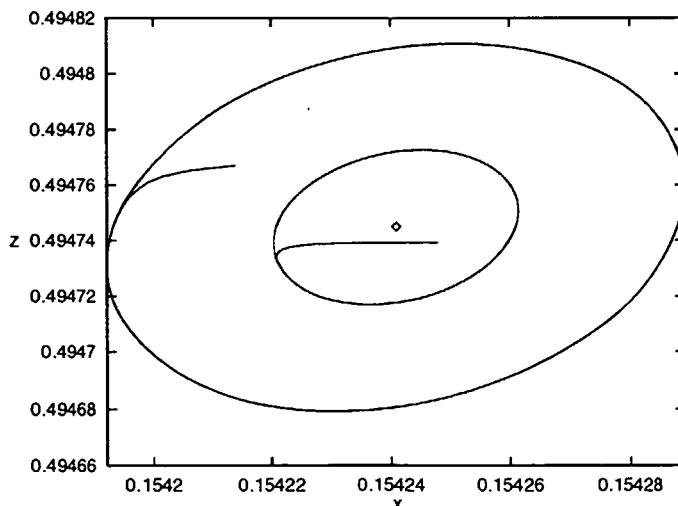
Figur 3.9: x - z -projektion af en trajektorie for $D = 2$ i intervallet $]S_s; S_h[$

og stabilt i den sidste, da der er to reelle positive egenværdier og en negativ. I intervallet $[S_s; S_h]$ er der kun eet stabilt ligevægtspunkt, P_0 . Da både P_1 og P_2 er ustabile, vil alle trajektorierne bevæge sig mod ligevægtspunktet P_0 (se figur 3.9). Alt efter startpunktet er det muligt, at trajektorierne først bevæger sig imod et af de ustabile punkter i en af dets stabile retninger. En trajektorie vil dog aldrig komme helt hen i det ustabile ligevægtspunkt, da det frastødes i en ustabil retning, og til sidst tiltrækkes af det stabile punkt P_0 .

I en kompressor vil dette betyde, at systemet af sig selv søger hen mod den fysiske ligevægt, og der er således ingen instabiliteter.

For en værdi, S_h , optræder en **hopf-bifurcation** (se appendiks B afsnit B.1.3) på den nederste gren i ligevægtspunktet, P_2 . Dette ses da den tredje stabilitetsbetingelse (se appendiks A), der ikke er opfyldt mellem S_s og S_h , opfyldes her. I punktet S_h er der to rent imaginære egenværdier og en negativ reel egenværdi.

For $S = S_h$ vil trajektorierne tæt på ligevægtspunktet, P_2 , bevæge sig rundt i ellipser omkring dette (se figur 3.10). Trajektorier, som starter længere væk, tiltrækkes af det stabile ligevægtspunkt P_0 .

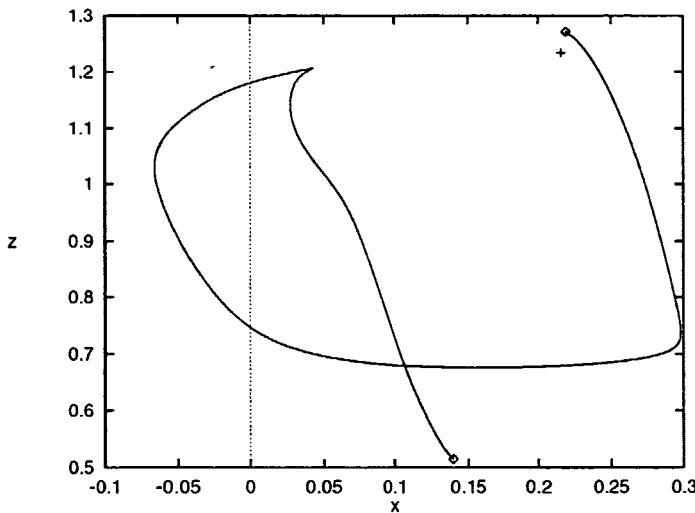


Figur 3.10: x - z -projektion af en trajektorie for $D = 2$ og $S = S_h$, dvs. for den parameterværdi, hvor hopf-bifurcationen finder sted.

I intervallet $[S_h; S_t]$ er der tre ligevægtspunkter, hvor det ene efter hopf-bifurcationen har skiftet stabilitet. Således er der nu to stabile lige-

vægtspunkter (for P_0 og den nederste gren P_2) og eet ustabil (den øverste gren P_1). Se figur 3.7. Den ustabile gren er kun ustabil i x -retningen.

Vores computersimuleringer har vist, at der lige efter S_h er en reel og to komplekse egenværdier (alle med negativ realdel). Vi har identificeret en grænsecyklen udenom ligevægtspunktet, hvor trajektorier indenfor grænsecyklen bliver trukket af punktet, mens trajektorier startet udenfor grænsecyklen bliver frastødt. Derfor formoder vi, at bifurkationen i S_h er en subkritisk hopf-bifurkation.



Figur 3.11: x - z -projektion af to trajektorier for $D = 2$ og S i intervallet $[S_h; S_t[$, der viser at trajektorierne ser forskellige ud for forskellige y -værdier.

Da grænsecyklen er ustabil i to retninger, men stabil i den tredie er det ikke ved computersimulering muligt at blive trukket ind i en grænsecyklen ved at lade tiden gå baglæns.

Tæt på S_t har vi observeret, at der er tre reelle egenværdier i lineariseringen af P_1 , hvilket vi formoder, skyldes en global bifurkation i et område i dette interval. Vi har på grund af tidsmangel ikke undersøgt fænomenet nærmere.

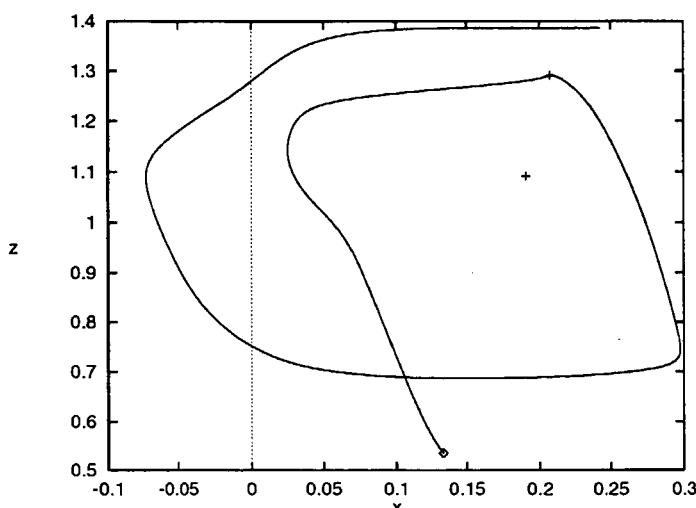
Trajektorier, som ikke er i nærheden af det stabile ligevægtspunkt, P_2 , i y -retningen, vil, som i de forrige tilfælde, tiltrækkes af det stabile ligevægtspunkt P_0 (se figur 3.11).

Den fysiske fortolkning af dette er, at et kompressor system, der på grund af rystelser eller andre påvirkninger skubbes ud af ligevægts tilstanden (ingen rotating stall), kan komme ud i et område, hvorfra det ikke kan komme tilbage, uden at der reguleres på spjældet (S -værdien). I et tilfælde, hvor

rotating stall er permanent, er det kun muligt at slippe af med dette, ved at øge luftstrømmen gennem spjældet så meget, at S kommer under S_h .

For en værdi S_t optræder en **transkritisk bifurkation** (se appendiks B afsnit B.1.2) i det punkt hvor $P_0 = P_1$. Ligesom for saddelpunktsbifurkationen gælder det for en transkritisk bifurkation, at mindst een af egenværdierne er nul. Stabiliteten af punktet kan derfor ikke findes ud fra egenværdierne. Da S_t er en grænsesituation, har vi ikke undersøgt trajektorierne nærmere for denne S -værdi.

I intervallet $[S_t; S_k]$ er der tre ligevægtspunkter, hvoraf det ene ligger i et område, hvor $y < 0$. Dette punkt er derfor uinteressant for modellen. Således er der i modellen kun to ligevægtspunkter for S i dette interval. Det ene (den nedeste gren) P_2 er stabilt og det andet P_0 er ustabilt dog kun i y -retningen (se figur 3.7).



Figur 3.12: x - z -projektion af en trajektorie for $D = 2$ i intervallet $[S_t; S_k]$

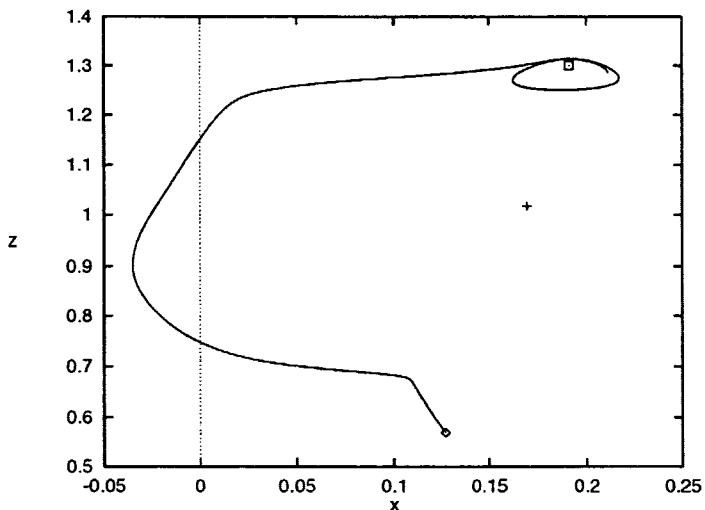
Alle trajektorierne for S i dette interval vil tiltrækkes af det ene stabile ligevægtspunkt, P_2 . Hvis startværdien ligger meget tæt på P_0 , vil trajektorien dog først bevæge sig næsten helt hen i det ustabile punkt P_0 , men herefter frastødes i y -retningen (se figur 3.12).

Dette betyder, at et kompressorsystem, der befinner sig i dette område, vil udvise rotating stall. Startes et forsøg i en tilstand, hvor der næsten ingen rotating stall er, vil systemet hurtigt søge ind i en tilstand tæt på den stabile, men efter at systemet har været her en tid, vil der opstå rotating stall.

For en værdi S_k optræder en **hopf-bifurkation** i x - z -planen⁵ i ligevægtspunktet P_0 (se afsnit B.1.3). Her gælder det, at ligevægtspunktet som før var stabilt i x - og i z -retningerne nu bliver ustabil i alle retninger, og der ”kastes” en grænsecykel af.

Da bifurkationspunktet er ustabil i y -retningen, vil alle trajektorierne tiltrækkes af det stabile ligevægtspunkt i $y > 0$.

I intervallet $]S_k, S_?]$ er der to ligevægtspunkter, hvor det ene er stabilt, P_2 , og det andet er ustabil, P_0 (se figur 3.7). Det ustabile punkt er efter hopfbifurkationen i S_k ustabil i alle retninger, og uden om det findes den stabile grænsecykel i x - z -planen.



Figur 3.13: x - z -projektion af en trajektorie for $D = 2$ i intervallet $]S_k; S_?]$

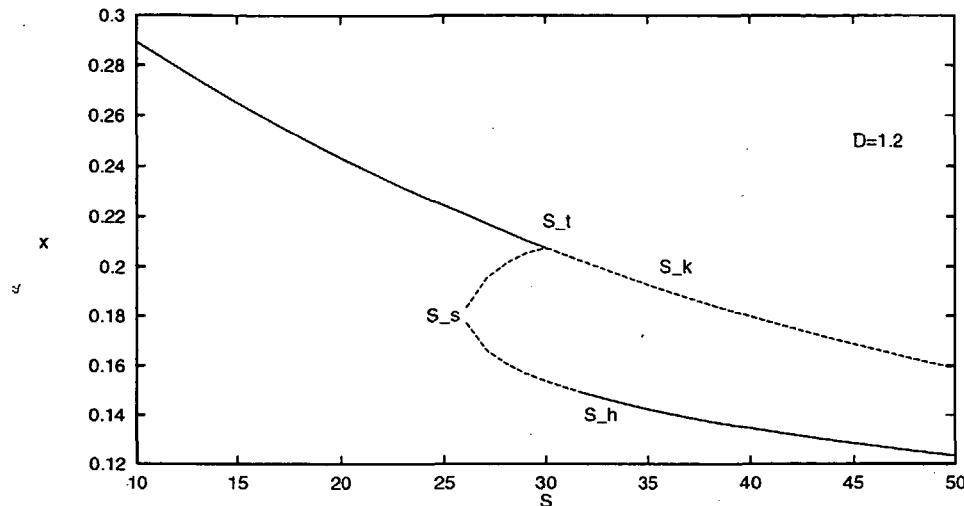
Trajektorierne tiltrækkes som før af det stabile ligevægtspunkt, men for startværdier meget tæt på P_0 vil de først spiralere rundt om den stabile grænsecykel (se figur 3.13).

Den fysiske fortolkning svarer stort set til den, der gælder for intervallet $]S_i; S_k[$. Blot vil det umiddelbart se ud som om kompressorsystemet er havnet i en tilstand med surge, hvis det startes i en tilstand næsten uden rotating stall.

⁵Denne bifurkation er i øvrigt den samme som den, der finder sted i den todimensionale model.

Bifurkation for $D = 1.2$

På figur 3.14 ses S - x -bifurkationsdiagrammet for $D = 1.2$.



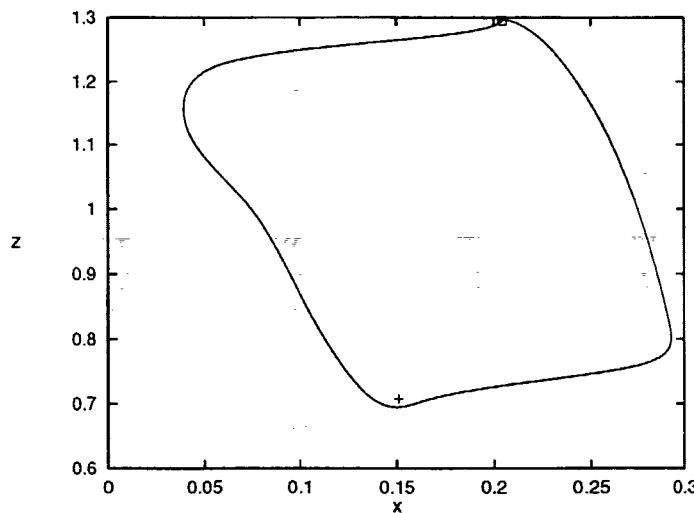
Figur 3.14: S - x -bifurkationsdiagram for $D = 1.2$. Stabilt:—, ustabilt:---.

Da det for flere af intervallerne er de samme strukturer, vil flere af de følgende forklaringer ikke være beskrevet så detaljeret som for $D = 2$.

I intervallet $]0; S_s[$ er der kun eet stabilt ligevægtspunkt, P_0 (se figur 3.14), og trajektorierne har derfor samme struktur som i det tilsvarende interval for $D = 2$.

I intervallet efter saddelpunkts-bifurkationen, $]S_s, S_t[$ er der tre ligevægtspunkter, to ustabile og eet stabilt (se figur 3.14). Trajektorierne har samme struktur som i det tilsvarende interval $]S_s; S_h[$ for $D = 2$.

I intervallet efter den transkritiske bifurkation, $]S_t, S_h[$, er der to ustabile ligevægtspunkter. Ligevægtspunktet P_0 er ustabilt i y -retningen, men stabilt i x - z -planen. Ligevægtspunktet P_2 er ustabilt i to retninger. Da der i intervallet ikke er nogen stabile ligevægtspunkter, vil trajektorien aldrig slutte i et punkt. I dette interval opstår der en global bifurkation der minder om en **saddelforbindelses-bifurkation** (se afsnit B.2.1). Ved en saddelforbindelses-bifurkation kaster en homoklin bane en grænsecykkel af sig. Den homokline bane går igennem ligevægtspunktet for $P_0 = 0$, som i hele intervallet er et saddelpunkt, der er ustabilt i y -retningen. I x - z -planen lige ved P_0 spiralerer trajektorien ind imod ligevægtspunktet, samtidig med at den skubbes væk i y -retningen. En typisk trajektorie for S -værdier i dette interval kan ses på figur 3.15.



Figur 3.15: x - z -projektion af en trajektorie for $D = 1.2$ i intervallet $]S_t; S_h[$

I et kompressorsystem svarer spiralen til, at der først opstår en mild grad af surge, samtidig med at graden af rotating stall bliver værre og værre. Den homokline bane svarer til, at der pludselig er store udsving i luftindstrømmingen til plenum (surge).

I intervallet efter hopf-bifurkationen, $]S_h; S_k[$, er der et stabilt ligevægtspunkt og et ustabilt (se figur 3.14). Trajektorierne i dette interval har samme struktur som i intervallet $]S_t; S_k[$ for $D = 2$.

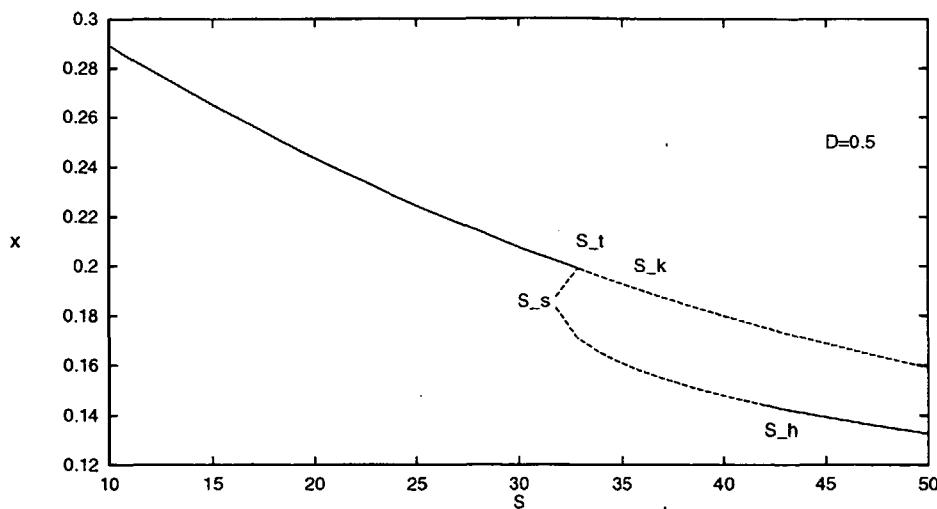
For S i intervallet $]S_k; S_?]$ vil der være et stabilt og et ustabilt ligevægtspunkt (se figur 3.14). Trajektorierne i dette interval har samme struktur som trajektorierne i det samme interval for $D = 2$.

Bifurkationer for $D = 0.5$

På figur 3.16 ses S - x -bifurkationsdiagram for $D = 0.5$. Igen i dette afsnit gælder det, at mange af de forskellige strukturer er beskrevet i det ovenstående.

I intervallet $]0; S_s[$ har differentialligningssystemet et stabilt ligevægtspunkt (se figur 3.16), og systemet har derfor samme struktur som for $D = 2$.

I intervallet efter saddelpunkts-bifurkationen, $]S_s, S_t[$ har systemet tre ligevægtspunkter (se figur 3.16), der har samme struktur som i intervallet $]S_s; S_h[$ for $D = 2$.



Figur 3.16: S - x -Bifurkationsdiagram for $D = 0.5$. Stabilt:—, ustabilt: - - -.

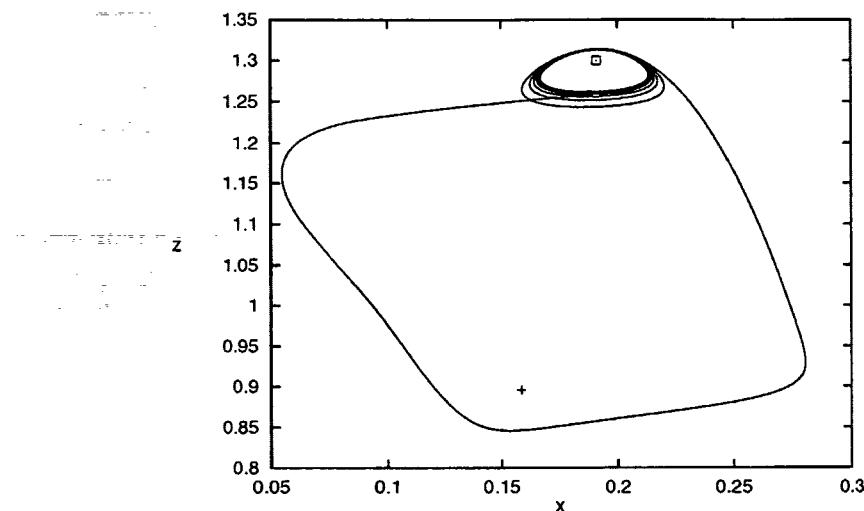
I intervallet efter den transkritiske bifurcation, $[S_t, S_k]$, har systemet to ligevægtspunkter (se figur 3.16), og trajektorierne har samme struktur som i intervallet $[S_t, S_h]$ for $D = 1.2$.

I intervallet $[S_k; S_h]$ efter hopf-bifurkationen i x - z -planen for S_k , vil der være to ustabile ligevægtspunkter. Ligesom i intervallet $[S_t; S_h]$ for $D = 1.2$ vil der her opstå noget der minder om en saddelforbindelses-bifurcation. I dette tilfælde vil trajektorien dog ikke spiralere ind imod ligevægtspunktet for små værdier af y , men det vil spiralere ind imod den stabile grænsecykel (se figur 3.17).

Den fysiske fortolkning af denne spiralering ind mod en grænsecykel er, at graden af surge er lidt større end ved situationen i intervallet før.

I intervallet efter hopf-bifurkation, $[S_h, S_?]$, har systemet to ligevægtspunkter (se figur 3.16), og trajektorierne har samme struktur som i intervallet $[S_k, S_?]$ for $D = 1.2$.

Uden at vi har undersøgt det nærmere, tror vi, at grænsecyklen er opstået ved, at den globale “saddelforbindelses-bifurcation” ramler sammen med den ustabile grænsecykel ved hopf-bifurkationen for ligevægtspunktet P_0 , og at de begge herefter forsvinder. Vores begrundelse for denne påstand er, at det for større værdier af S ser ud som om, der ingen grænsecykler er.



Figur 3.17: x - z -projektion af en trajektorie for $D = 0.5$ i intervallet $]S_k; S_h[$

3.4 Opsamling

I modellen har vi fundet fire forskellige bifurcationstyper; saddelpunkts-, transkritisk-, hopf- og noget der minder om en saddelforbindelses-bifurcation. De tre første bifurcationer er lokale bifurcationer, og den sidste er global. Bifurcationerne finder sted til en bestemt værdi af bifurkationsparametren S . Ud fra disse forskellige bifurcationer er det muligt at forklare de to forskellige instabiliteter.

Surge opstår, når en hopf-bifurcation finder sted i x - z -planen (for $S = S_h$ og $S = S_k$). Herefter vil trajektorierne spiralerer ind imod den grænsecykel, der opstår ved hopf-bifurcationen, således at systemet svinger. At hopf-bifurcationen finder sted i x - z -planen passer godt med, at x er den dimensionsløse størrelse af massestrømmen igennem kompressoren og z er den dimensionsløse størrelse af trykforskellen imellem plenum og omgivelserne. Det betyder, at massestrømmen og trykket svinger frem og tilbage, hvilket netop er tilfældet, når der optræder surge i en kompressor.

Rotating stall opstår ikke før den transkritiske bifurcation har fundet sted ($S = S_t$). Det er dog først efter hopf-bifurcationen i S_h , at rotating stall overhovedet kan blive stabil. Dette skyldes, at der før hopf-bifurcationen ikke eksisterer nogen stabile ligevægtspunkter for hverken P_1 eller P_2 .

Vi har fundet ud af, at der kun findes tre forskellige scenarier af x - S -bifurkationsdiagrammer, svarende til tre forskellige værdier af D . For små værdier af D ($D = 1.2$ og $D = 0.5$) er der et interval af S , hvor der slet ikke

er nogen stabile ligevægtspunkter. Systemet svinger og kan kun blive stabilt, hvis der skrues ned for S . Hvis der istedet skrues op for S , er man sikker på, at systemet bliver ustabilt, da P_0 er ustabil. For $D = 1.2$ er der for hver værdi af S mindst et stabilt ligevægtspunkt. Her gælder det, at systemet for $S > S_t$ er et ustabilt system. Bifurkationsdiagrammerne er underbygget med trajektorier, der viser, hvordan systemet ændrer sig i de forskellige situationer.

Analysen har vist en meget væsentlig detalje ved Brøns' tredimensionale model, som er en forbedring i forhold til andre modeller; heriblandt Greitzers model og Brøns' todimensionale model. Instabiliteterne optræder på den rigtige side af toppen på kompressorkarakteristikken (højre side). I de forrige modeller ville instabiliteterne opstå for højere værdier af S , end de gør i virkeligheden, hvilket betyder, at de forrige modeller giver for optimistiske resultater.

Slutteligt kan det siges om modellen, at den indfanger de instabiliteter, som vi fra starten ønskede at indfange.

Diskussion

I denne diskussion vil vi dels opsummere de deldiskussioner, der har været undervejs i projektet, og dels uddybe de resultater, som analysen af modellen har ført frem til. Desuden vil vi komme med flere eksempler på udvidelsesmuligheder, som vi synes kunne være interessante at indarbejde i modellen, og en diskussion af, hvad vi har lært ved at skrive dette projekt.

Model-diskussion

Modellen er, som beskrevet i kapitel 2, en simpel kompressormodel. Fordelen ved dette er, at det er muligt at udtale sig om årsagerne til de forskellige instabiliteter. En ulempe ved at lave så simpel en model er, at den for en given kompressor er meget upræcis. Det er dog heller ikke formålet med den simple model at undersøge præcis, hvornår de forskellige instabiliteter opstår. Dette kan beskrives ud fra en detaljeret model.

Som det ses er der fordele og ulemper ved både simple og detaljerede modeller. Til gengæld er der ikke nogen umiddelbare fordele ved en mellemtning imellem disse, da en sådan hverken vil være præcis eller overskuelig.

Der findes flere muligheder for udvidelser af modellen. En del af disse vil dog føre til en model, som hverken er simpel eller detaljeret, men midt imellem. F.eks. ville flere led i fourierrækken ved approksimation af kompressorkarakteristikkens vinkelafhængighed være en mindre udvidelse af modellen, gør denne mere kompliceret. Det vil således være sværere at konkludere noget kvalitativt ud fra modellen, uden at den dog er blevet så detaljeret, at der kan konkluderes kvantitativt.

Et andet sted modellen kunne udvides er i de fysiske antagelser om systemet. I virkeligheden er processen f.eks. ikke adiabatisk, luften er ikke inkompresibel mm. Der kunne i opstillingen af modellen opskrives mere generelle udtryk for fysikken i systemet, hvorved differentialligningssystemet ville blive stort og uoverskueligt. Dette ville, tror vi, ikke føre til bedre resultater end dem,

der findes i den simple model. Argumentet for dette er, at alle disse energetab, varmetab osv. som ville blive medregnet i denne nye model, i den simple model er indeholdt i kompressorkarakteristikken som en ad-hoc del. Desuden ville modellen ikke længere være simpel, hvis alle disse relativt grove antagelser ikke var lavet, og idéen med modellen ville dermed gå tabt!

Der findes også eksempler på udvidelser (og ændringer), der ville være interessante at lave, selvom modellen hermed bliver mindre simpel. Disse er diskuteret senere i afsnittet om udvidelsesmuligheder af modellen.

Man kunne spørge sig selv, om denne model er realistisk. Det mener vi, den er, i det lys at den udviser flere af de instabiliteter, som rent faktisk forekommer i en kompressor. Ud fra modellen er det muligt at forklare rotating stall og surge. F.eks kan surgesvingningerne ses som grænsecykler opstået efter hopf-bifurkationen i $x-z$ -planen. Det kan ses, hvorfor det er nødvendigt at åbne spjældet for at slippe af med rotating stall, når dette er opstået. Det ses endvidere, at der for små værdier af parametren S (dvs. når spjældet er meget åbent) ikke opstår instabiliteter.

Man kan undersøge om modellen er realistisk ved at undersøge om den har samme træk som eksperimentelle data. Dette har vi desværre ikke haft tid til, men efter Brøns' udtalelser passer modellen udmærket med virkeligheden.

Som beskrevet i kapitel 2 er Brøns' model en udvidelse af en kompressormodel, som Greitzer opstillede i 1976. Brøns' model er dog udvidet til også at indfange rotating stall, hvilket må siges at være en forbedring, da det er en af de to væsentligste instabiliteter i en aksialkompressor.

Udvidelsen medfører endvidere, at instabiliteterne i modellen opstår på højre side af toppen af kompressorkarakteristikken. Det fysisk stabile område af karakteristikken ligner således de karakteristikker, der er målt for virkelige kompressorer. I andre modeller opstår instabiliteterne på venstre side af toppen, hvilket ikke passer med virkeligheden.

Fra nu at have diskuteret modellen som helhed vil vi gå over til at se på modelanalysens resultater og de forskellige bifurkationsparametre, der er benyttet i modellen.

Modelanalysens resultater

Modelanalysen har vist, at der er tre forskellige typer lokale bifurkationer: Saddelpunkts-bifurkation i punktet S_s , transkritisk bifurkation i punktet S_t og hopf-bifurkation i punktet S_h og en hopf-bifurkation i $x-z$ -planen i punktet S_k .

For forskellige værdier af D vil rækkefølgen af bifurkationerne være forskellige. Dette fører til, at der for små værdier af D ($D = 1.2$ og $D = 0.5$) vil være S -værdier, for hvilke der ikke eksisterer stabile punkter.

Endvidere er der (mindst) en global bifurcation, denne minder meget om en saddelforbindelses-bifurcation. Den forekommer for D -værdier, der er så små, at der forekommer et S -interval uden stabile punkter.

Diskussion af bifurkationsparametrene

Der er i modellen tre bifurkationsparametre: S , D og B . Variationer i parametren S svarer til variationer i lukningsgraden af spjældet. Parametren D er et udtryk for, hvor stor indflydelse rotating stall har på kompressor-karakteristikken. Parametren B er proportional med rotorbladenes omdrehningshastighed. Disse parametre har ikke den samme status i modellen. I et virkeligt kompressorsystem vil man kunne regulere på rotorbladenes omdrehningshastighed og spjældet. I vores analyse har S været den mest naturlige parameter at regulere på, idet vi kun har haft en kompresorkarakteristik svarende til $B = 0,98$. I Greitzers artikel fra 1976 kan der ses eksempler på resultater ved brug af forskellige B -værdier [Gre.76].

Da S er den primære bifurkationsparameter, har vi undersøgt denne kontinuert i det interval, der er aktuelt, når der er tale om en kompressor i en jetmotor. Vi har altså ikke undersøgt modellen for meget store værdier af S , da en jetmotor ikke skal bruges, hvis der er stor sandsynlighed for instabiliteter.

Parametren D har vi derimod kun undersøgt for enkelte værdier, hvorved vi har fundet frem til de forskellige scenarier, der kan opstå. Det ville naturligvis have været interessant at se på andre værdier af D , men det er endnu en af de ting, vi ikke har fået. Da vi mener at have undersøgt de mulige scenarier, vil denne undersøgelse dog ikke give væsentlig mere information om systemet, end vi allerede har. Det har ikke været muligt for os at finde en passende værdi for D , fordi vi ikke har sammenlignet med eksperimentelle data. Vi mener alligevel, at vi ud fra analysen har en idé om, hvilke værdier af D (hvilke scenarier) der er mest sandsynlige. Ifølge Greitzers artikel fra 1976 forekommer der ofte en lille smule rotating stall i en kompressor. Dette vil aldrig ske i scenarierne hvor $D = 0.5$ og $D = 1.2$, da systemet inden P_2 bliver stabilt, findes et interval $]S_l; S_h[$, hvor der ingen stabile ligevægtspunkter er. Systemet vil her svinge mellem tilstande, hvor der både er rotating stall og surge, og kompressoren bryder sammen, inden P_2 bliver konstant. På baggrund af dette tror hverken på, at scenariet for $D = 0.5$

eller scenariet for $D = 1.2$ er sandsynlige. Derfor mener vi, at scenariet for $D = 2$ er det mest sandsynlige, og at rotating stall derfor har indflydelse på kompressorkarakteristikken. Vi tror dog ikke, at D er en fast værdi, men at det ville være smartest, ud fra de eksperimentelle data der findes om kompressorer i ustabil drift, at fitte D til en funktion af massestrømmen. Dette vil vi diskutere i afsnittet for udvidelsesmuligheder for modellen.

Vi mener, at det er en logisk differentiering, vi har gjort imellem bifurkationsparametrene. Ud fra S har vi fundet ud af, hvordan allerede opståede instabiliteter kan fjernes, og ud fra D har vi fundet frem til, at rotating stall har indflydelse på kompressorkarakteristikken. B har vi ikke kunnet undersøge nærmere, da vi kun har haft een kompressorkarakteristik.

I modellen er der ikke andre naturlige bifurkationsparametre.

Kompressormodellens relevans i forhold til jetmotorer

Overføres vores resultater på kompressorer i jetmotorer i fly, vil man se, at det kan have katastrofale følger, hvis rotating stall har en meget stor indflydelse på karakteristikken (D stor). Det viser sig desuden, at det også kan være et problem, hvis rotating stall kun har lidt indflydelse på karakteristikken (D lille).

Går man ud fra, at et fly har brug for størst effekt lige omkring det tidspunkt hvor det skal lette eller lande, vil det være på disse tidspunkter, hvor der er størst problemer med både rotating stall og surge.

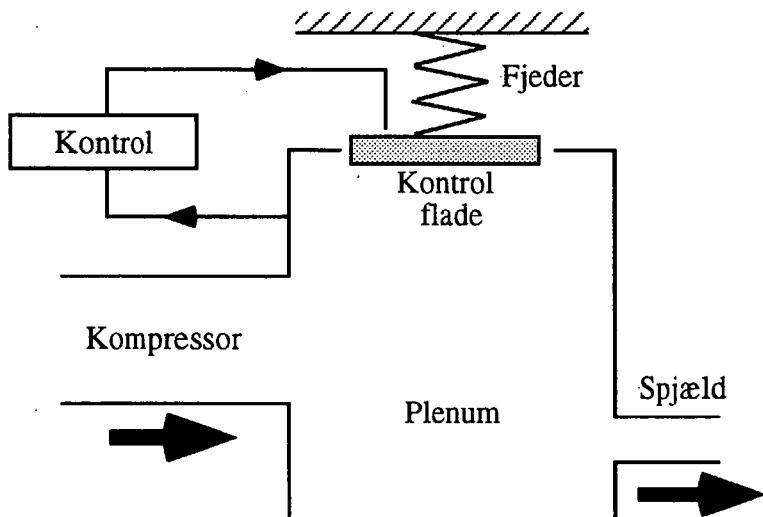
Vi går ud fra, at piloten lukker spjældet mere og mere, indtil flyet letter. Dette svarer til, at der skrues mere og mere op for S . Man må altså regne med, at kompressoren i motoren befinner sig i tilstande, der følger den stabile tilstand i P_0 . Dette betyder, at der kan opstå problemer ved S_t for D -værdier, der er så store, at der vil være to stabile ligevægtspunkter samtidigt. En sådan situation vil betyde, at kompressoren vil hoppe ned i en tilstand med rotating stall, når $S > S_t$. For at komme op i P_0 igen vil det være nødvendigt at skru ned for S , indtil denne bliver mindre end S_h . Det kan være så uheldigt, at S -værdien er så lav, at flyet styrter ned.

Hvis rotating stall kun har en meget lille indflydelse på karakteristikken, er der risiko for at kompressoren i motoren kommer ud i et område, hvor der slet ikke er nogen stabile tilstande (f.eks. hvis $S > S_t, D = 1$). Dette betyder ifølge vores numeriske analyse, at der vil opstå periodevis surge og rotating stall, som kan blive voldsom, dette kan føre til, at flyet styrter ned.

Udvidelsesmuligheder og ændringer af modellen

Der findes flere udvidelsesmuligheder, som ville være interessante at foretage. En af disse er, at parameteren D i stedet for at være en fast værdi kunne være en funktion af x . Begrundelsen for denne ændring er, at D i denne model er en parameter, som hverken bygger på teori eller eksperimenter. D er en værdi, der angiver, hvor stor indflydelse man tror, rotating stall har på kompressorkarakteristikken. Morten Brøns foreslog os, at approksimere denne til en funktion ud fra eksperimentelle data, hvilket ville være en forbedring, som ikke ville gøre modellen særlig meget mere kompliceret (der ville ikke komme flere ligninger i systemet, men to af de tre der er, ville blive lidt længere).

En anden udvidelse, som har stor interesse indenfor kompressorteorier, er at isætte en kontrolflade på plenum (se figur 3.18). Denne sørger for at regulere trykket i plenum, så dette ikke bliver for stort i forhold til trykket i omgivelserne. Hermed er det muligt at undgå instabiliteten surge, som netop



Figur 3.18: Et kompressorsystem hvor der er sat en kontrolflade på. Herved reguleres volumenet i plenum automatisk, så trykforskellen aldrig bliver for stor og der således opstår instabiliteter

skyldes, at trykket i plenum er for højt i forhold til i omgivelserne. Kontrolfladen vil ikke kunne stoppe rotating stall, da denne instabilitet skyldes indgangsvinklen af luftstrømmen ind i kompressoren. Den har ikke noget med plenum at gøre. Til gengæld ville kontrolfladen stoppe de surgesvingninger, der kommer, når der opstår rotating stall.

Morten Brøns har sammen med Peter Gross fra DTU skrevet en artikel om en model, som indeholder en kontrolflade. Da vi ikke har haft tid til at

undersøge denne udvidelse nærmere, henviser vi den interesserende læser til denne artikel ([Brø.91]).

I den model, vi har analyseret, er stallcellen indført som en vinkelafhængig tilstand i halvdelen af kompressoren. I stedet for denne modellering kunne det være interessant at undersøge, hvilke fænomener modellen ville udvise, hvis den vinkel, hvori stallcellen er lokaliseret, var tidsafhængig.

Hvad vi ikke har fået

Vi startede projektfasen med at have et ønske om at kunne opskrive differentialligningssystemets normalform. Dette ville have gjort det muligt at bestemme præcist, hvilken hopf-bifurkations type der var tale om.

I Brøns' model, som ikke indeholder rotating stall, kommer der for tilstrækkeligt store værdier af S en såkaldt canard. Denne har vi set i vores computersimuleringer, men vi har ikke haft tid til at undersøge den nærmere.

Det kunne have været interessant at sammenligne denne simple model med andre kompressormodeller; såvel simple som detaljerede.

En sidste ting, der ville have været interessant at nå, er at sammenligne de resultater som modellen og computersimuleringerne udviser med eksperimentelle data. Herudfra ville det være muligt at udtales sig om, hvor godt modellen beskriver de former for instabiliteter, der forekommer i et virkeligt kompressorsystem. Dette ville måske også have gjort det muligt at bestemme værdien af D mere nøjagtigt.

Erfaringer

I gennem udarbejdelsen af denne projektrapport har vi fået et indblik i arbejdet med matematiske modeller. Desuden har vi fået en idé om, hvordan en matematisk model opbygges, hvad den kan bruges til, og hvordan den kan analyseres. Vi har haft nogle diskussioner om, i hvilke situationer det kan være smart at benytte simple modeller frem for detaljerede.

Da vi valgte at analysere en tredimensional model frem en todimensional, valgte vi samtidigt en model med mulighed for en meget større grad af kompleksitet. Der er større sandsynlighed for, at det havde været muligt at analysere en todimensional model uden så megen brug af computere. Hvis computersimuleringer var blevet nødvendige, ville det eksempelvis være muligt at finde ustabile grænsecykler ved at køre en simulering baglæns i tid.

Den tredimensionale model har tilgengæld givet os mulighed for at få erfaringer med aktiv brug af computersimuleringer i modelanalysen. Vi har således erfaret, at det er vigtigt at vide, hvad man leder efter, før benytter et computerprogram. Som eksempel herpå kan nævnes, at ds-tool benytter en Monte Carlo metode til at finde ligevægtspunkter⁶. Det er således nødvendigt, at vide, hvor mange ligevægtspunkter der er i modellen, for at vurdere om de alle er fundet.

I analysen af modellen har vi desuden beskæftiget os med differentialligninger og bifurcationsteori. For begge disse emner gælder det, at vi kun har set "toppen af isbjørget". Bl.a. startede vi på at læse teorien om normalformer, men vi kunne godt se, at det kunne vi ikke nå at sætte os ind i på $\frac{1}{2}$ år (så havde vi ikke nået så meget andet). Alligevel synes vi, at vi har fået et stort udbytte af arbejdet med differentialligningssystemer og bifurcationsteori.

⁶Programmet starter i et tilfældigt begyndelsespunkt, når det søger efter ligevægtspunkter.

Konklusion

Vi har gennem arbejdet med dette projekt forsøgt at besvare to spørgsmål. Det ene omhandler måden, hvorpå Morten Brøns' model indfanger instabiliteter som surge og rotating stall. For at finde ud af dette har vi undersøgt, hvordan modellen er opbygget.

Vi har i kapitel 2 vist, hvorledes Brøns' model er opstillet. Vi har set, at modellen er bygget som en udvidelse af en anden model der blev opstillet af Greitzer. Greitzers model indfanger fænomenet surge ud fra relationer, som er kendt fra fysikken, surge indfanges altså af en teoretisk mododel.

Den udvidelse, som Brøns laver, bygger udelukkende på en viden om, at der optræder rotating stall i kompressorer, og at rotating stall er et fænomen der optræder i et vinkelområde i selve kompressorørret. Brøns modellerer således rotating stall ved at opstille et udtryk, der nedsætter luftgennemstrømnningen for nogle vinkler. Modellen indfanger altså rotating stall ved en ad-hoc udvidelse af Greitzers teoribaserede model. Modelanalysen har vist, at visse former for surge opstår som en konsekvens af, at der er indført rotating stall i modellen. Disse former for surge indfanges altså af en ad-hoc udvidelse af modellen.

Både Greitzers model og Brøns' udvidelse af denne er simple modeller. Dette betyder, at de fysiske instabiliteter, modellerne udviser, ikke kan bruges til at udregne, hvor meget brændstof en flyver skal have med på en flyvning. Istedet er modellerne gode til at vurdere, hvad det er, der fører til instabiliteterne, således at det bliver muligt at ændre på opbygningen af en kompressor, så instabiliteterne undgås.

Dette fører os automatisk frem til det andet spørgsmål i problemstilling, som går ud på, hvilke tilstande i Morten Brøns' model der fører til de forskellige instabiliteter.

Modelanalysen (se kapitel 3) har vist, at denne model, som ventet, kan udvise to former for fysiske instabiliteter. Vi har undersøgt, hvor disse instabiliteter indtræder, når der varieres på parametren S , altså når der lukkes mere eller

mindre for spjældet (se afsnit 3.3.2). Begge instabiliteter forekommer, når S bliver stor, dvs. når spjældet lukkes meget. Det betyder, at trykforskellen imellem trykket i plenum og trykket i omgivelserne er blevet højt i forhold til massestrømmen igennem kompressoren. Det ses, at der forekommer flere typer af bifurkationer i modellen. Vi har numerisk undersøgt, hvorledes trajektorierne vil se ud for S -værdier, der ligger i intervallerne mellem de forskellige bifurkationspunkter.

Det har endvidere vist sig, at modellen opfører sig forskelligt, hvis der gøres forskellige antagelser om, hvor stor indflydelse rotating stall har på kompressorkarakteristikken (altså for forskellige værdier af D). Vores numeriske analyse (afsnit 3.3.2) viser, at hvis det antages, at rotating stall har en stor indflydelse på kompressorkarakteristikken, vil der findes S -værdier, for hvilke der eksisterer to (matematisk) stabile ligevægtspunkter samtidigt. Antages det derimod, at rotating stall har en lille indflydelse på kompressorkarakteristikken, vil der være et område, hvori der slet ikke eksisterer nogle stabile ligevægtspunkter. Dette stemmer ikke overens med eksperimentelle data, hvor det har vist sig, at der ofte findes lidt rotating stall i en kompressor. Rotating stall kan ikke opstå for små værdier af D , da systemet, før denne tilstand nås, allerede er brudt sammen. Scenariet for $D = 2$ er det, der passer bedst til virkeligheden. Her vil, når S stiger (spjældet lukkes), først være mulighed for rotating stall og derefter surge.

Litteraturliste

- Bet.67 Betchov, R and Criminale, W.(1967). *Stability of Parallel Flows*, Academic Press, s.1.
- Boy.92 Boyce, W.E. and Diprima, R.C. (1992). *elementary differential equations* John Wiley, New York, 5.ed.
- Brø.87 Brøns, M. PHD afhandling om kompressorer
- Brø.88 Brøns, M. (1988). *Bifurcations and instabilities in the Greitzer model for compressor system surge*, Mathematical Engineering in Industry, vol. 2 s. 51–63.
- Brø.90 Brøns, M. (1990). *A Model for Compressor Flow Instability with mode shifting*, Mathematical Computer Modelling, vol. 14, s. 746–749.
- Brø.91 Brøns, M. and Gross, P. (1991). *Nonlinear Analysis of a Compressor with active stabilization*, Proceedings of the Fifth European Conference on Mathematics in Industri, s. 161–165.
- Die.84 Diener, M. (1984). *The Canard Unchained or How Fast/Slow Dynamical Systems Bifurcate*, Mathematical Intelligencer, vol. 6 s. 38–49.
- Elb.91 Elbrønd Jensen, H. (1991) *Matematisk analyse bind 4*, 9 udgave. Matematisk institut, DTU.
- Gre.76 Greitzer, E.M.(1976). *Surge and Rotating Stall in Axial Flow Compressors*, ASME Journal of Engineering for Power, vol. 88 s. 190–217.
- Gre.80 Greitzer, E.M.(1981). *The Stability of pumping systems-The 1980 Freeman Scholar Lecture*, ASME Journal of Fluids Engineering, vol.103 s. 193–242.
- Guc.83 Guckenheimer, J. and Holmes, P. (1983). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurkations of Vector Fields*. Springer-verlag, New York.

- Guc.92 Guckenheimer, J. (1992). *dstool: A Dynamical System Toolkit With an Interactive Graphical Interface*, User's manual too dstool.
- Hal.91 Hale, J. and Kocak, H. (1991) *Dynamics and bifurkations*, Springer-verlag, New York.
- Hir.74 Hirsch, M. W. and Smale, S. (1974). *Differential equations, Dynamical systems and Linear algebra*, Academic Press, INC.
- Høj.80 Højgaard, J.(1980). *Matematiske modeller - vildledning eller vejledning?*, Naturkampen, vol.18 s. 14-22.
- Jes.69 Jessen, B. (1969). *Forelæsningsnote i matematik 1y, 1969-1970* Matematisk institut, Københavns universitet.
- Mar.76 Marsden, J.E. and McCracken, M. (1976). *The Hopf Bifurcation and Its Applications*, Springer-Verlag, New York.
- Mcg.92 McGraw-Hill (1992) *Encyclopedia of science and tecnology* 7'th edition s. 234 - 238.
- Mck.84 McKenzie, A.B. (1984). *Unsteady flows in turbomachines, lecture series 1984-02*. F.A.E Breugelmans (ed.), Von Karman Institute for Fluid Dynamics, Rhode-Saint-Genese, Belgium.
- Spa.84 Spalart, P.R. (1984). *Two recent extensions of the vortex method*. AIAA-84-0343. Paper presented at AIAA 22nd Aerospace Sciences Meeting, Reno, Nevada.
- Wie.89 Wierød, A. et.el. (1989). *Kaos i fysiske systemer*, IMFUFA-tekst nr. 180, RUC, DK.

Appendiks A

Stabilitet af ligevægtspunkter

For at kunne undersøge differentialligningssystemet for bifurkationspunkter er det nødvendigt at finde ud af ligevægtspunkternes stabilitets forhold. Det kan vises, at et ligevægtspunkt er stabilt, ved at vise at alle egenværdier af lineariseringen omkring ligevægtspunktet har negativ realdel. Vi vil starte dette appendiks med at vise, hvordan mulige trajektorier kan se ud for et todimensionalt differentialligningssystem. Karakteren af et ligevægtspunkt kan bestemmes ved at benytte *Routh-Hurwitz* kriterierne, som er kriterier, der ud fra systemets karakterligning angiver de nødvendige krav for, at realdelene af egenværdierne er negative. Efter at vi har opskrevet det generelle Routh-Hurwitz kriterie, udregner vi de krav, der stilles til systemer i hhv. to og tre dimensioner, for at realdelene er negative og ligevægtspunkterne dermed stabile.

A.1 Eksempler i to dimensioner

I et differentialligningssystem af formen:

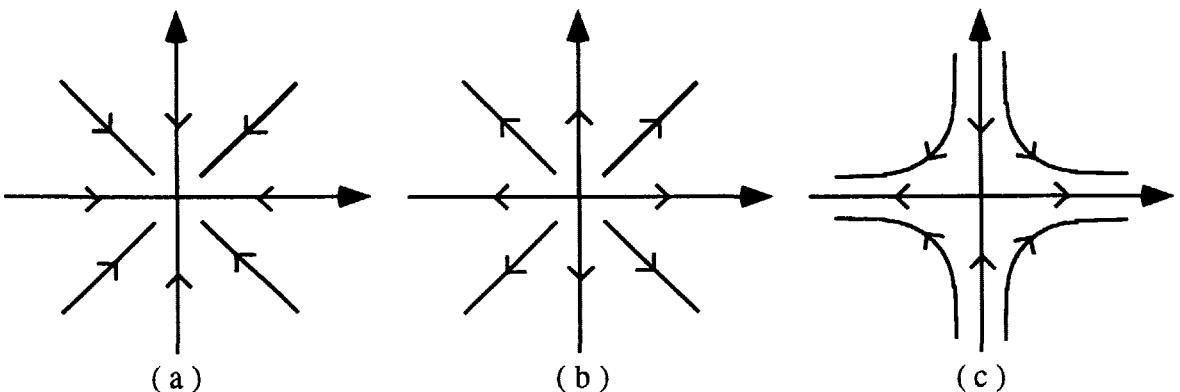
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (\text{A.1})$$

hvor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ og \mathbf{A} er en 2×2 matrix, bestemmer egenværdierne λ_1, λ_2 , hvordan forløbet af trajektorien vil være omkring ligevægtspunktet. Til hver egenværdi er knyttet en egenvektor, der er bestemmende for, hvilken retning trajektorien vil bevæge sig. To egenværdier med negativ realdel betyder, at punktet er stabilt. To egenværdier med positiv realdel betyder, at punktet er ustabil. En negativ og en positiv egenværdi betyder at punktet vil være tiltrækkende i en retning og frastødende i en anden, da en trajektorie på et tidspunkt vil blive frastødt af et sådant punkt, vil det være ustabilt [Boy.92].

Her følger en række eksempler på, hvordan faseplottet vil se ud for forskellige kombinationer af egenværdier. Først beskrives eksempler med to reelle egenværdier herefter eksempler med to komplekse egenværdier, som vil være hinandens kompleks konjugerede. Vi vil ikke beskrive, hvad der sker, hvis den algebraiske multiplicitet af egenværdierne er mindre end to, da dette er et specialtilfælde, som vi ikke støder på i nærværende projekt.

To reelle egenværdier

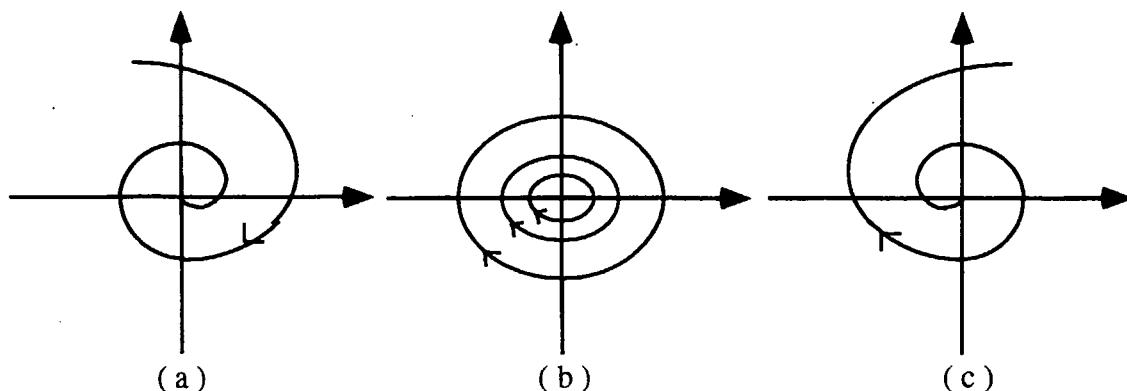
I de retninger, bestemt af den til λ knyttede egenvektor, hvor $\lambda > 0$, vil trajektorien løbe væk fra punktet. I de retninger, hvor $\lambda < 0$, vil trajektorien løbe ind mod punktet. Hvis begge egenværdier er negative vil ligevægtspunktet være tiltrækkende i alle retninger. Hvis begge egenværdier er positive vil punktet være frastødende i alle retninger. Hvis der er en negativ og en positiv egenværdi vil punktet være tiltrækkende i en retning og frastødende i en anden (se figur A.1).



Figur A.1: I (a) er ligevægtspunktet stabilt ($\lambda_1 < 0 \wedge \lambda_2 < 0$), det ses, at alle trajektorier løber ind mod det. I (b) er ligevægtspunktet ustabilt ($\lambda_1 > 0 \wedge \lambda_2 > 0$), alle trajektorier løber væk fra punktet. I (c) er der en stabil og en ustabil retning ($\lambda_1 < 0 \wedge \lambda_2 > 0$), det ses, at trajektorierne løber ind mod ligevægtspunktet i en retning og væk fra det i den anden.

To komplekse egenværdier

I ligevægtspunkter, hvor A 's egenværdier er komplekse, vil $Re\lambda_1 = Re\lambda_2$. For $Re\lambda \neq 0$ vil trajektorien spiralere enten ind mod punktet eller væk fra dette, alt efter om $Re\lambda < 0$ eller $Re\lambda > 0$. For $Re\lambda = 0$ vil trajektorien cirkulere rundt om ligevægtspunktet (se figur A.2).



Figur A.2: I (a) er ligevægtspunktet stabilt $Re\lambda < 0$, og trajektorien spiralerer ind mod det. I (b) er ligevægtspunktet neutralt $Re\lambda = 0$, trajektorien cirkulerer rundt om det. I (c) er ligevægtspunktet ustabilt $Re\lambda > 0$, og trajektorien spiralerer væk fra det.

Stabilitets skema for to dimensioner

Man kan opstille et skema, der karakteriserer stabilitetsforholdene for alle de forskellige kombinationer af egenværdier, der kan optræde i to dimensioner. Her er dog undtaget de tilfælde, hvor den algebraiske multiplicitet af egenværdierne for lineariseringen omkring ligevægtspunktet er mindre end to (tabel A.1).

λ_1, λ_2	Type	Stabilitet
<u>reelle λ</u>		
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	N	Ustabil
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	N	Asymptotisk stabil
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	SP	Ustabil
<u>komplekse λ</u>		
$Re(\lambda) > 0$	SpP	Ustabil
$Re(\lambda) < 0$	SpP	Asymptotisk stabil
$Re(\lambda) = 0$	C el. SpP	Ubestemmeligt

Tabel A.1: Stabilitets- og instabilitets- egenskaber i næsten lineære systemer, hvor N = Node, Sp = Saddelpunkt, SpP = Spiralpunkt og C = Center. [Boy.92]

I et plan i det tredimensionale rum kan de samme strukturer forekomme.

A.2 Stabilitets undersøgelse ved hjælp af Routh-Hurwitz kriteriet

Fortegnet af egenværdiernes realdel i en $n \times n$ matrix kan findes ud fra Routh-Hurwitz kriteriet. Derfor vil vi opskrive det generelle Routh-Hurwitz kriterie og herudfra udlede de krav, der skal opfylDES, for at hhv. et todimensionalt og et tredimensionalt differentialligningssystem er stabilt.

For at finde frem til stabiliteten af et ligningssystem benytter Routh-Hurwitz det karakteristiske polynomium givet ved:

$$f(\lambda) = a_0\lambda^n + b_0\lambda^{n-1} + a_1\lambda^{n-2} + b_1\lambda^{n-3} + \dots \quad a_0 \neq 0 \quad (\text{A.2})$$

Udfra dette polynomium opstilles H -matricen, som er givet ved

$$H^n = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_{n-2} \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} a_k = 0 & \text{for } k > \left(\frac{n}{2}\right) \\ b_k = 0 & \text{for } k > \left(\frac{n-1}{2}\right) \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

H -matricen reduceres ved de almindelige række og søjleoperationer til R -matricen, som er en øvre trekantsmatrix:

$$R^n = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \dots \\ 0 & c_0 & c_1 & c_2 & \dots \\ 0 & 0 & d_0 & d_1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & e_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \text{hvor } \begin{cases} c_0 = a_1 - \frac{a_0}{b_0}b_1 \\ d_0 = b_1 - \frac{b_0}{c_0}c_1 \end{cases} \text{ osv.} \quad (\text{A.4})$$

Udfra konstanterne a_0, b_0, c_0, \dots , defineres nogle nye størrelser

$$\Delta_1 = b_0, \Delta_2 = b_0c_0, \Delta_3 = b_0c_0d_0, \dots \text{ osv.} \quad (\text{A.5})$$

Herudfra kan Routh-Hurwitz generelle kriterium for stabilitet opstilles [Gan.89]:

- Alle rødder i det reelle polynomium (A.2) har negativ realdel, hvis og kun hvis

$$a_0\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, a_0\Delta_3 > 0, \dots \begin{cases} a_0\Delta_n > 0 & \text{for } n \text{ ulige} \\ \Delta_n > 0 & \text{for } n \text{ lige} \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Nu hvor det generelle tilfælde er opskrevet, vil vi opskrive kravene for hhv. to og tre dimensioner.

A.2 Stabilitets undersøgelse ved hjælp af Routh-Hurwitz kriteriet 73

A.2.1 Routh-Hurwitz i to dimensioner

Et generelt todimensionalt ligningssystem, \mathbf{A}_2 , kan have følgende udseende:

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Det tilhørende karakteristiske polynomium er:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_2 - \lambda \mathbf{E}) &= 0 \Leftrightarrow \\ \lambda^2 - (Tr\mathbf{A}_2)\lambda + (Det\mathbf{A}_2) &= 0 \end{aligned} \quad (A.7)$$

Routh-Hurwitz konstanterne, som de er defineret i ligning (A.2) er derfor:

$$a_0 = 1 \quad b_0 = -Tr\mathbf{A}_2 \quad a_1 = Det\mathbf{A}_2 \quad (A.8)$$

Nu opskrives H -matricen og R -matricen:

$$H^2 = \begin{pmatrix} b_0 & 0 \\ a_0 & a_1 \end{pmatrix} \Rightarrow R^2 = \begin{pmatrix} b_0 & 0 \\ 0 & c_0 \end{pmatrix}, \text{ hvor } c_0 = a_1 \quad (A.9)$$

Nu kan kravene fra Routh-Hurwitz-sætningen opstilles for to dimensioner:

1. $a_0 b_0 > 0 \Leftrightarrow b_0 > 0 \Leftrightarrow -Tr\mathbf{A}_2 > 0 \Leftrightarrow Tr\mathbf{A}_2 < 0$
2. $b_0 c_0 > 0 \Leftrightarrow -Tr\mathbf{A}_2 \cdot Det\mathbf{A}_2 > 0 \Rightarrow Det\mathbf{A}_2 > 0$.

A.2.2 Routh-Hurwitz i tre dimensioner

Et generelt tredimensionalt ligningssystem, \mathbf{A}_3 , kan have følgende udseende:

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Det tilhørende karakteristiske polynomium er:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_3 - \lambda \mathbf{E}) &= 0 \Leftrightarrow \\ -\lambda^3 + (Tr\mathbf{A}_3)\lambda^2 - (\square\mathbf{A}_3)\lambda + Det\mathbf{A}_3 &= 0 \end{aligned}$$

hvor $\square\mathbf{A}_3$ er defineret som summen af de tre diagonale underdeterminanter:

$$\square\mathbf{A}_3 = \left| \begin{array}{cc} a & b \\ d & e \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} a & c \\ g & i \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} e & f \\ h & i \end{array} \right| \quad (A.10)$$

Routh-Hurwitz konstanterne, som de er defineret i ligning (A.2) er derfor:

$$a_0 = -1 \quad b_0 = -Tr\mathbf{A}_3 \quad a_1 = \square\mathbf{A}_3 \quad b_1 = Det\mathbf{A}_3 \quad (A.11)$$

Nu opskrives H -matricen og R -matricen:

$$H^2 = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & 0 \\ a_0 & a_1 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 \end{pmatrix} \Rightarrow R^2 = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & 0 \\ 0 & c_0 & 0 \\ 0 & 0 & d_0 \end{pmatrix}, \text{ hvor } c_0 = a_1 - \frac{a_0}{b_0}b_1 \quad d_0 = b_1 \quad (A.12)$$

Nu kan kravene fra Routh-Hurwitz-sætningen opstilles for tre dimensioner:

1. $a_0b_0 > 0 \Leftrightarrow b_0 < 0 \Leftrightarrow Tr\mathbf{A}_3 < 0 \Leftrightarrow \square\mathbf{A}_3 < 0$
2. $b_0c_0 > 0 \Leftrightarrow b_0a_1 - a_0b_1 > 0 \Leftrightarrow -Tr\mathbf{A}_3 \cdot \square\mathbf{A}_3 + Det\mathbf{A}_3 > 0$
3. $a_0b_0c_0d_0 > 0 \Leftrightarrow b_0c_0d_0 < 0 \Leftrightarrow (b_0a_1 - a_0b_1)b_1 < 0 \Leftrightarrow (-Tr\mathbf{A}_3 \cdot \square\mathbf{A}_3 + Det\mathbf{A}_3)Det\mathbf{A}_3 < 0 \Rightarrow Det\mathbf{A}_3 < 0$

Appendiks B

Bifurkationsteori

Vi definerer differentialligningssystemet:

$$\dot{\mathbf{x}} = f_\mu(\mathbf{x}) \quad , \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k \quad \mu \in \mathbb{R}^n \quad (\text{B.1})$$

hvor μ kaldes bifurkationsparametren. Venstresiden kan opfattes som et vektorfelt, der beskriver systemet af alle mulige løsningskurver. Hvis vektorfeltet ændrer udseende ved en lille perturbation af ligningssystemet, kaldes dette en bifurkation. En perturbation kan defineres på følgende måde:

- En perturbation af størrelsen ϵ er en ændring $g(x)$ af differentialligningssystemets højre side. Hvor $g(x)$ opfylder:

$$g(\mathbf{x}) \in C^m \quad \|g(\mathbf{x})\|_\infty < \epsilon, \quad m \geq 1$$

Differentialligningssystemet:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$$

kaldes det perturberede differentialligningssystem.

For at få en præcis beskrivelse af hvad en bifurkation er, er det nødvendigt at indlede med nogle definitioner:

- To vektorfelter er **topologisk ækvivalente** hvis der eksisterer en homeomorfi¹ $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, som afbilder løsningskurver $(x(t), t_1 \leq t \leq t_2)$ for $\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$ over i løsningskurver for $\dot{\mathbf{y}} = G(\mathbf{y})$ i det samme tidsinterval.

¹En homeomorfi er en bijektiv afbildung $f : X \rightarrow Y$ hvorom det gælder, at f og f^{-1} begge er kontinuerte.

- **F er strukturelt stabilt** hvis der findes et ϵ , således at alle vektorfelter $f(x) + g(x)$ hvor $g(x)$ er en perturbation af størrelsen ϵ er topologisk ækvivalente med f .

Det er nu muligt at definere en bifurcation:

- For differentialligningssystemet (B.1) kaldes parameterværdien $\mu = \mu_0$ en bifurkationsværdi, hvis f_{μ_0} ikke er strukturelt stabilt. Den kvalitative ændring, der finder sted i trajektoriernes struktur for $\mu = \mu_0$, kaldes en bifurcation.

Der findes mange forskellige slags bifurcationer, som opstår på forskellige måder. Bifurcationstypen kan bestemmes ved at opstille det enkelte systems normalform, der er et simplificeret vektorfelt dannet ved koordinattransformationer og rækkeudviklinger. Beregningen af et systems normalform har vi desværre ikke haft tid til at sætte os ind i, og således har vi ikke kunnet benytte denne metode. I stedet vil vi her beskrive de forskellige typer af bifurcationer, som vi har fundet i denne kompressormodel bl.a. vha. computersimuleringer. Dette indebætter 4 forskellige bifurcationer: Hopf-, saddelpunkts- og transkritisk-bifurcation, som alle er lokale bifurcationer, og til sidst den globale saddelforbindelses-bifurcation.

I resten af dette appendiks vil vi kun behandle bifurcationer, der finder sted som følge af en ændring af bifurkationsparametren μ .

B.1 Lokale bifurcationer

En lokal bifurcation er en bifurcation, der finder sted i omegnen om et ligevægtspunkt på en sådan måde, at man kan undersøge den ved at undersøge lineariseringen omkring punktet.

Betrages lineariseringen omkring ligevægtspunktet fås:

$$\dot{x} = A_\mu x + \text{h.o.t.} \quad (\text{B.2})$$

Hvor A er en $n \times n$ matrix med egenværdierne $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. For $\text{Re}\lambda_i \neq 0$ vil h.o.t.² være uden betydning i nærheden af ligevægtspunktet. For $\text{Re}\lambda_i = 0$ vil h.o.t. derimod være afgørende for vektorfeltets udseende, og systemet kan bifurkere. Detaljerne i trajektoriernes forløb kræver i tilfælde, hvor $\text{Re}\lambda_i = 0$, en nøjere undersøgelse, som vi ikke har sat os ind i.

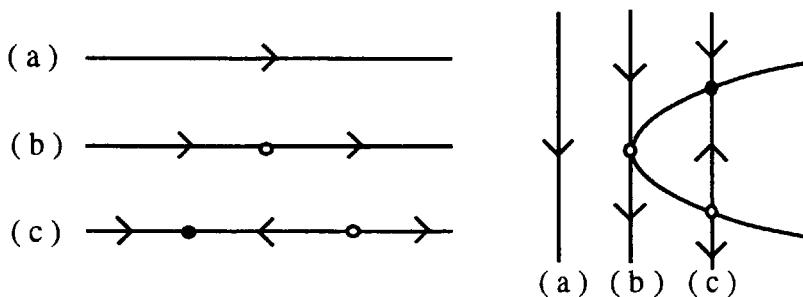
²higher order terms

B.1.1 Saddelpunkts-bifurkation

En saddelpunkts-bifurkation er en bifurkation, hvor der opstår et ligevægtspunkt, som umiddelbart efter at være opstået deler sig i to grene. I det endimensionale tilfælde gælder, at den ene er stabil og den anden er ustabil (se appendiks A). I tre dimensioner opstår systemet på samme måde som i en dimension.

Det gælder for saddelpunkts-bifurkationer, at sætningen for implicitte funktioner bryder sammen i netop det punkt, hvor bifurkationen sker. Dette ses da den første afledede forsvinder ($D_\mu f_\mu(x) = 0$) i netop det punkt, hvor bifurkationen finder sted (se afsnit C.2).

Et eksempel på en saddelpunkts-bifurkation i en dimension er tegnet i figur B.1



Figur B.1: I (a) er der ingen ligevægtspunkter. I (b) opstår der et ligevægtspunkt, der er tiltrækkende fra højre og frastødende fra venstre ($Re\lambda > 0$). I (c) er der to ligevægtspunkter, hvoraf det ene er tiltrækkende ($Re\lambda < 0$), og det andet er frastødende ($Re\lambda > 0$).

Vi har i projektet vurderet typen af en bifurkation ud fra egenværdierne. Der kan dog opstilles en sætning for, hvad der skal gælde, for at bifurkationen er en saddelpunkts-bifurkation. Denne definition har vi ikke benyttet os af i projektet, da den kræver et begrebsapperat, som vi ikke er i besiddelse af. Definition af en saddelpunkts-bifurkation:

- Lad $\dot{x} = f_\mu(x)$ være et system af differentialligninger i R^n , som afhænger af parameteren μ . Når $\mu = \mu_0$, antages det at der er en ligevægt, hvorom det gælder, at følgende hypoteser er opfyldt:
 - (SP1) $D_x f_{\mu_0}(p)$ har en simpel egenværdi 0 med højre egenvektor v og venstre egenvektor w . $D_x f_{\mu_0}(p)$ har k egenværdier med negativ realdel og $(n - k - 1)$ egenværdier med positiv realdel.

$$(SP2) \quad w\left(\left(\frac{\partial f_u}{\partial \mu}\right)(p, \mu_0)\right) \neq 0$$

$$(SP3) \quad w(D_x^2 f_{\mu_0}(p)(v, v)) \neq 0$$

Så vil der være en glat kurve af ligevægtspunkter i $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, som skærer (p, μ_0) , der er tangent til hyperplanet $\mathbb{R}^n \times \{\mu\}$. Afhængig af fortægnene på udtrykkene (SP2) og (SP3) findes der ikke ligevægtspunkter i nærheden af (p, μ_0) , når $\mu < \mu_0$ [$\mu > \mu_0$] og to ligevægtspunkter i nærheden af (p, μ_0) for hver parameterværdi $\mu > \mu_0$ [$\mu < \mu_0$]. De to ligevægtspunkter for $\dot{x} = f_\mu(x)$ nær (p, μ_0) er hyperbolske ($Re\lambda \neq 0$ for alle λ) og har stabile mangfoldigheder med dimensionerne hhv. k og $k + 1$. Desuden er mængden af ligningssystemer ($\dot{x} = f_\mu(x)$), der tilfredsstiller (SP1) - (SP3) åben og tæt i rummet af C^∞ -en-parameterfamilien af vektorfelter, f_μ , med ligevægtspunkt i (p, μ_0) med en egenværdi 0. [Guc.83]

For at finde saddelpunkts-bifurkationer skal der først og fremmest være en egenværdi, der er nul, hvilket betyder, at determinanten for jacobimatriken er nul. Om de punkter hvor dette gælder er det derefter nødvendigt at tjekke, om egenvektorerne opfylder de givne krav (SP2) og (SP3).

Saddelpunkts-bifurkationen er en meget central bifurkation, da alle bifurkationer med en egenværdi, der er nul, ved små perturbationer kan blive til saddelpunkts-bifurkationer [Guc.83].

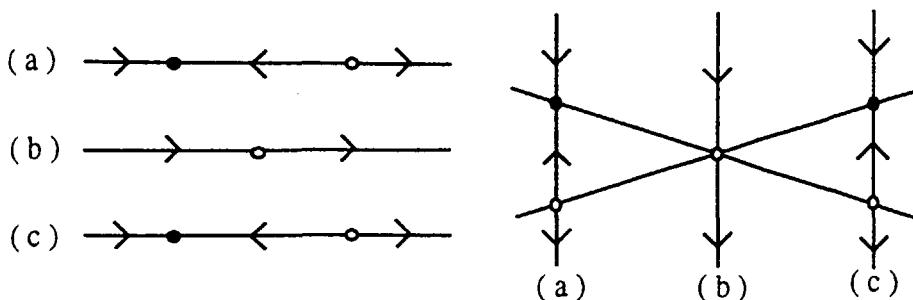
B.1.2 Transkritisk bifurkation

En transkritisk bifurkation er en bifurkation, hvor to ligevægtspunkter (det ene stabilt og det andet ustabilt) ved variation af parametren μ krydser hinanden og samtidig skifter stabilitet (se figur B.2).

Der er i de matematiske forudsætninger ikke stor forskel på en transkritisk bifurkation og en saddelpunkts-bifurkation. Den eneste forskel er, at det nu i modsætning til før kræves, at der er to ligevægtspunkter på begge sider af bifurkationen.

Igen har vi undersøgt bifurkationen ved at se på egenværdierne, for fuldstændighedens skyld kan man dog opstille følgende matematiske sætning for transkritiske bifurkationer:

- Lad $\dot{x} = f_\mu(x)$ være et system af differentialligninger i \mathbb{R}^n , som afhænger af parameteren μ . Når $\mu = \mu_0$, antag, at der er ligevægt, hvorom det gælder, at følgende hypoteser er opfyldt:



Figur B.2: Den transkritiske bifurkation finder sted, hvor to ligevægtspunkter mødes. Det ses i (a), at det ene ligevægtspunkt er stabilt ($Re\lambda < 0$) og det andet er ustabil ($Re\lambda > 0$). I (b) mødes de to ligevægtspunkter, og det fælles ligevægtspunkt vil have en stabil og en ustabil side. I (c) har de to ligevægtspunkter krydset hinanden og skiftet stabilitet, således at punkt 1 er ustabil og punkt 2 er stabilt

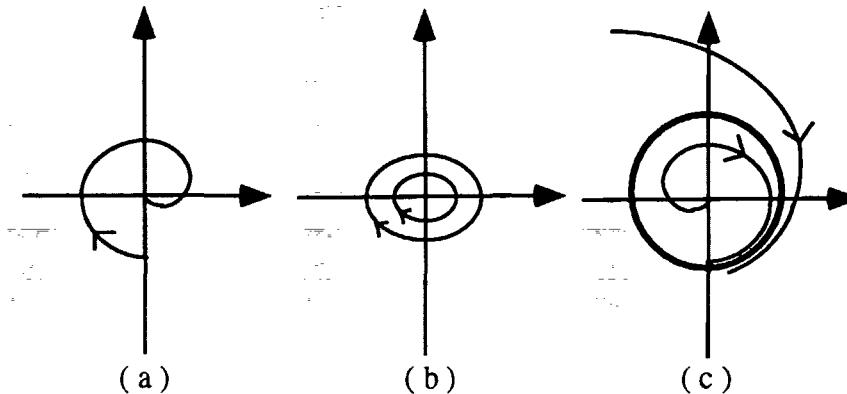
- (TK1) $D_x f_{\mu_0}(p)$ har en simpel egenværdi 0 med højre egenvektor v og venstre egenvektor w . $D_x f_{\mu_0}(p)$ har k egenværdier med negativ realdel og $(n - k - 1)$ egenværdier med positiv realdel.
- (TK2) $w((\frac{\partial^2 f_u}{\partial \mu \partial x})v) \neq 0$ i punktet (x_0, μ) for alle μ .
- (TK3) $w(D_x^2 f_{\mu_0}(p)(v, v)) \neq 0$

(Forskellen fra saddelpunkts-bifurkationen er at (SP2) er forskellig fra (TK2)). [Guc.83]

Ligesom for saddelpunkts bifurkationerne kan de transkritiske bifurkationer findes ved først at undersøge, om determinanten er nul, og herefter om der findes ligevægtspunkter på begge sider af bifurkationspunktet.

B.1.3 Hopf-bifurkation

En hopf-bifurkation finder sted for en parameterværdi μ_0 , hvor et ligevægtspunkt skifter stabilitet, og der samtidigt opstår en grænsecykel (se figur B.3). Der findes to forskellige hopf-bifurkationer; en superkritisk og en subkritisk. Når en superkritisk hopf-bifurkation finder sted, bliver et stabilt ligevægtspunkt ustabil og der opstår samtidig en stabil grænsecykel udenom. Det omvendte er tilfældet ved en subkritisk hopf-bifurkation, hvor et ustabil ligevægtspunkt bliver stabilt, og der opstår en ustabil grænsecykel udenom. [Mar.76]



Figur B.3: I (a) ses, at vektorfeltet (trajektorien) spiralerer ind mod ligevægtspunktet (to komplekse rødder med $\operatorname{Re}\lambda < 0$). I (b) ses det, at trajektorierne cirkulerer omkring ligevægtspunktet (to rent imaginære rødder, dvs. $\operatorname{Re}\lambda = 0$). I (c) ses det at det stabile punkt er blevet ustabilt, og der er dannet en stabil grænsecykel omkring punktet (to komplekse rødder $\operatorname{Re}\lambda > 0$)

For fuldstændighedens skyld vil vi også her opstille en matematisk sætning, for hvad der nødvendigvis må gælde, for at en hopf-bifurkation finder sted. Vi har dog ikke selv benyttet dette kriterie, til at bestemme, om der var tale om en hopf-bifurkation. For hopf-bifurkationer gælder:

- Lad det n -dimensionale differentialligningssystem $\dot{x} = f_\mu(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}$ have ligevægtspunkter (x_0, μ_0) om hvilke følgende hypoteser er opfyldt:
 - (H1) $D_x f_{\mu_0}(x_0)$ har et simpelt par af rent imaginære egenværdier og ingen andre egenværdier med realdelen lig med nul.

Så vil (H1) i kraft af sætningen for implicitte funktioner sikre, at der findes en glat kurve af ligevægtspunkter $(x(\mu), \mu)$ med $x(\mu_0) = x_0$. Egenværdierne $\lambda(\mu), \bar{\lambda}(\mu)$ af $D_x f_{\mu_0}(x(\mu))$, som er rent imaginære for $\mu = \mu_0$, varierer glat med μ .
Hvis der ydermere gælder, at

$$(H2) \frac{d}{d\mu}(\operatorname{Re}\lambda(\mu))|_{\mu=\mu_0} = d \neq 0$$

så eksisterer der en unik tredimensional centermangfoldighed gennem (x_0, μ_0) i $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ og et glat system af koordinater (for fastholdt μ), for hvilke taylorudviklingen af tredje grad af centermangfoldigheden vha. normalformen er givet ved

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (d\mu + a(x^2 + y^2))x - (\omega + c\mu + b(x^2 + y^2))y \\ \dot{y} &= (\omega + c\mu + b(x^2 + y^2))x + (d\mu + a(x^2 + y^2))y\end{aligned}$$

Hvis $a \neq 0$, er der en flade af periodiske løsninger i centermangfoldigheden, som er kvadratisk tangent til egenrummet af $\lambda(\mu_0)$, $\bar{\lambda}(\mu_0)$ passende til anden orden af paraboloiden $\mu = -(\frac{a}{d})(x^2 + y^2)$. Hvis $a < 0$ er disse periodiske løsninger stabile grænsecykler, og der er tale om en superkritisk hopf-bifurcation, mens $a > 0$ er periodisk ustabile grænsecykler, og der er tale om en subkritisk hopf-bifurcation. [Guc.83]

Som før beskrevet vil vi ikke beskæftige os med normalformer, og det er derfor ikke for os muligt at bruge denne definition direkte. Vi vil istedet benytte, at ved en hopf-bifurcation skifter realdelen af to af de komplekse egenværdier fortegn, samtidig med at ingen af de resterende egenværdier er lig med 0. I tre dimensioner betyder dette, at hverken determinanten eller sporet vil skifte fortegn, og det er derfor den tredie betingelse i stabilitetsundersøgelsen, som bestemmer, hvornår en hopf-bifurcation finder sted. Hvilken type, er det muligt at bestemme ud fra computersimuleringer.

B.2 Globale bifurkationer

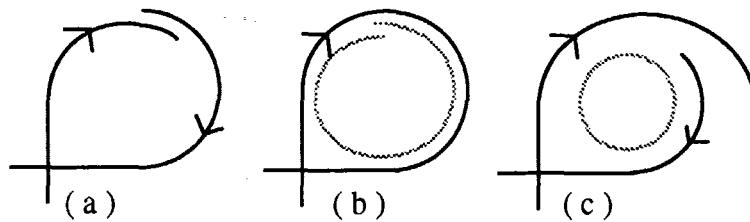
Ud over de lokale bifurkationer findes også globale bifurkationer. Om dem gælder det, at de ikke sker i omegne om ligevægtspunkter.

Vi ved fra almindelig differentialligningsteori, at omkring et punkt som ikke er et ligevægtspunkt, vil løsningsbanerne kun ændre sig lidt på kort afstand. Det er derfor ikke muligt at vide noget om bifurcationstypen ved at lave en lokal undersøgelse.

B.2.1 Saddelforbindelses-bifurkation

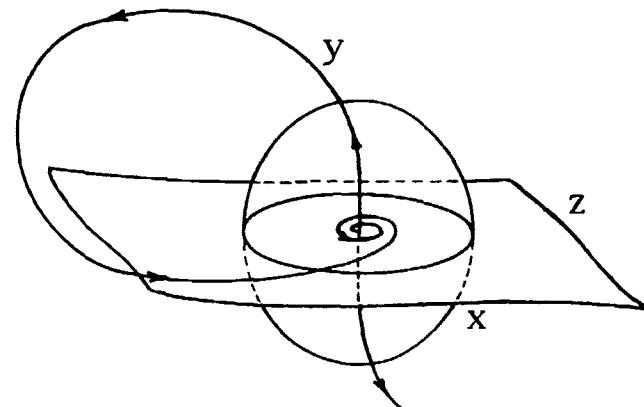
En af de simpleste globale bifurkationer der findes, er saddelforbindelses-bifurkationen. Denne opstår f.eks. ved, at en homoklin bane gennem et saddelpunkt "kaster en grænsecykel af sig" (se figur B.4). Som det ses af figur B.4, afgrænses de indtegnede trajektorier et område, hvorfra det er umuligt at undslippe, når $\mu < \mu_0$. Efter bifurkationen ($\mu > \mu_0$) opstår der en grænsecykel indeni det ovenfor beskrevne område, og trajektorier med begyndelsespunkt udenfor denne grænsecykel vil undslippe.

I ovenstående beskrivelse foregår saddelforbindelses-bifurkationen i et plan \mathbb{R}^2 . I tre dimensioner vil forløbet være mere kompliceret, hvis saddelpunktet



Figur B.4: En saddelforbindelses-bifurkation. Når $\mu = \mu_0$ kaster den homokline bane en grænsecykkel af sig. (a): $\mu < \mu_0$, (b): $\mu = \mu_0$ og (c): $\mu > \mu_0$

har en reel og to komplekse egenværdier. Herved fås trajektorier som i et plan spiralerer ind imod et punkt p_0 , og idet det når dette "sparkes ud" i den tredie retning. Punktet p_0 , som er centrum i spiralen, er også saddelpunktet



Figur B.5: En homoklin bane med en spiralsaddel, hvor bifurkationen netop sker når den homokline bane er der [Guc.83].

for saddelforbindelses-bifurkationen (Se figur B.5).

Appendiks C

Hjælpesætninger

I dette appendiks vil vi opskrive sætninger, der er af afgørende betydning for projektet.

C.1 Eksistens og entydighed

Først defineres:

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k \quad t \in \mathbb{R}$$

Når $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ er C^1 på en åben mængde $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ og er C^1 , da findes for ethvert punkt $(t_0, \mathbf{x}) \subseteq \Omega$ en og kun een maksimal løsning $\phi : J \rightarrow \mathbb{R}^k$ til differentialligningen:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$$

for hvilken $t_0 \in J$ og $\phi(t_0) = \mathbf{x}_0$. En maksimal løsning $\phi : J \rightarrow \mathbb{R}^k$ har et åbent definitionsinterval J , og enhver løsning til differentialligningen er restriktion af en maksimal løsning. [Jes.69]

C.2 Sætningen for implicitte funktioner

Lad $D \subset \mathbb{R}^{k+p}$ være en åben mængde, og lad $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_p) : D \rightarrow \mathbb{R}^P$ være en C^1 - vektorfunktion. Hvis $(x_0, y_0) \in D$ er en løsning til ligningsystemet

$$\mathbf{f}(x, y) = \mathbf{0}, \tag{C.1}$$

og jacobimatriken $\mathbf{D}_y \mathbf{f}$ er regulær i punktet (x_0, y_0) , findes der to mængder

$A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k | \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2 \leq \alpha\}$, $B = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p | \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\|_2 \leq \beta\}$ (C.2)
med $A \times B \subset D$, således at følgende er opfyldt:

- (1) Matricen $\mathbf{D}_y \mathbf{f}$ er regulær i ethvert punkt $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in A \times B$.
- (2) I mængden $A \times B$ fastlægger ligningssystemet (C.1) y_1, \dots, y_p som C^1 -funktioner $y_i = g_i(\mathbf{x}), i = 1, \dots, p, \mathbf{x} \in A$.
- (3) Funktionalmatricen for funktionerne $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_p)$, altså

$$\mathbf{D}_{\mathbf{g}} = \frac{\partial(g_1, \dots, g_p)}{\partial(x_1, \dots, x_k)}$$

er bestemt ved ligningen

$$\mathbf{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{f} + (\mathbf{D}_y \mathbf{f}) \mathbf{D}_{\mathbf{g}} = 0, \quad \mathbf{x} \in A$$

Det er her underforstået, at de partielle afledede i $\mathbf{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{f}$ og \mathbf{D}_y er taget i punktet $(x, g(x))$, og at de partielle afledede i $\mathbf{D}_{\mathbf{g}}$ er taget i punktet \mathbf{x} .

- (4) Hvis yderligere $\mathbf{f} \in C^n(D)$ for et $n \geq 2$, eller hvis $\mathbf{f} \in C^\infty(D)$, gælder der $\mathbf{g} \in C^n(A)$, henholdsvis $\mathbf{g} \in C^\infty(A)$.

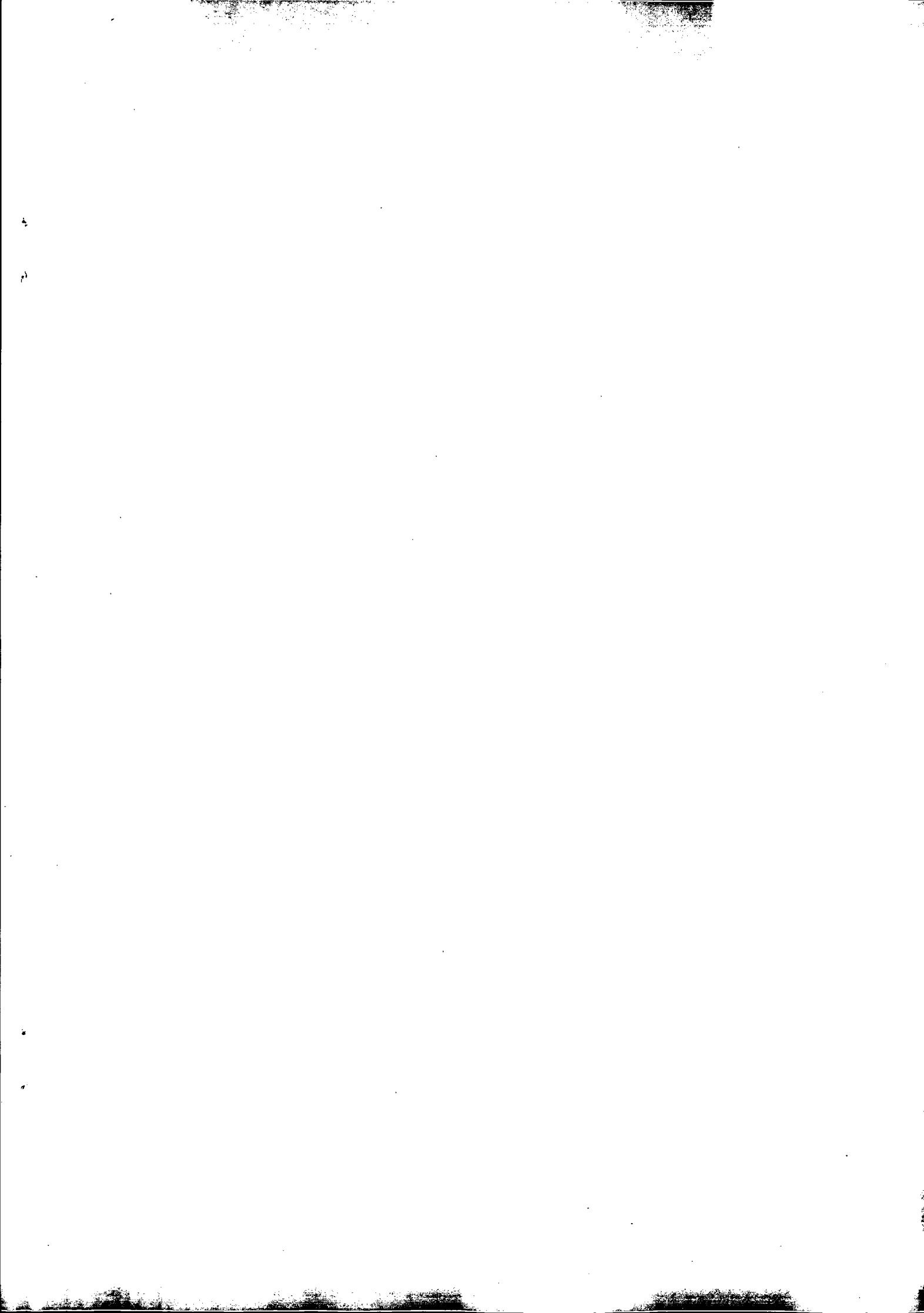
[Elb.91].

- Liste over tidligere udkomne tekster
tilsendes gerne. Henvendelse herom kan
ske til IMFUFA's sekretariat
tlf. 46 75 77 11 lokal 2263*
-
- | | |
|--|---|
| <p>217/92 "Two papers on APPLICATIONS AND MODELLING IN THE MATHEMATICS CURRICULUM"
by: Mogens Niss</p> <p>218/92 "A Three-Square Theorem"
by: Lars Kadison</p> <p>219/92 "RUPNOK - stationær strømning i elastiske rør"
af: Anja Boisen, Karen Birkelund, Mette Olufsen
Vejleder: Jesper Larsen</p> <p>220/92 "Automatisk diagnosticering i digitale kredsløb"
af: Bjørn Christensen, Ole Møller Nielsen
Vejleder: Stig Andur Pedersen</p> <p>221/92 "A BUNDLE VALUED RADON TRANSFORM, WITH APPLICATIONS TO INVARIANT WAVE EQUATIONS"
by: Thomas P. Branson, Gestur Olafsson and Henrik Schlichtkrull</p> <p>222/92 On the Representations of some Infinite Dimensional Groups and Algebras Related to Quantum Physics
by: Johnny T. Ottesen</p> <p>223/92 THE FUNCTIONAL DETERMINANT
by: Thomas P. Branson</p> <p>224/92 UNIVERSAL AC CONDUCTIVITY OF NON-METALLIC SOLIDS AT LOW TEMPERATURES
by: Jeppe C. Dyre</p> <p>225/92 "HATMODELLEN" Impedansspektroskopi i ultrarent en-krystallinsk silicium
af: Anja Boisen, Anders Gorm Larsen, Jesper Varmer, Johannes K. Nielsen, Kit R. Hansen, Peter Bøggild og Thomas Hougaard
Vejleder: Petr Viscor</p> <p>226/92 METHODS AND MODELS FOR ESTIMATING THE GLOBAL CIRCULATION OF SELECTED EMISSIONS FROM ENERGY CONVERSION"
by: Bent Sørensen</p> | <p>227/92 "Computersimulering og fysik"
af: Per M. Hansen, Steffen Holm, Peter Maibom, Mads K. Dall Petersen, Pernille Postgaard, Thomas B. Schrøder, Ivar P. Zeck
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen</p> <p>228/92 "Teknologi og historie"
Fire artikler af:
Mogens Niss, Jens Høyrup, Ib Thiersen, Hans Hedal</p> <p>229/92 "Masser af information uden betydning"
En diskussion af informationsteorien i Tor Nørrestrand's "Mørk Verden" og en skitse til et alternativ basseret på andenordens kybernetik og semiotik.
af: Søren Brier</p> <p>230/92 "Vinklens tredeling - et klassisk problem"
et matematisk projekt af
Karen Birkelund, Bjørn Christensen
Vejleder: Johnny Ottesen</p> <p>231A/92 "Elektronindiffusion i silicium - en matematisk model"
af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund, Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen
Vejledere: Johnny Ottesen, H.B. Hansen</p> <p>231B/92 "Elektronindiffusion i silicium - en matematisk model" Kildetekster
af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund, Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen
Vejledere: Johnny Ottesen, H.B. Hansen</p> <p>232/92 "Undersøgelse om den simultane opdagelse af energiens bevarelse og isærdeles om de af Mayer, Colding, Joule og Helmholtz udførte arbejder"
af: L.Arleth, G.I.Dybkjær, M.T.Østergård
Vejleder: Dorthe Posselt</p> <p>233/92 "The effect of age-dependent host mortality on the dynamics of an endemic disease and Instability in an SIR-model with age-dependent susceptibility"
by: Viggo Andreasen</p> <p>234/92 "THE FUNCTIONAL DETERMINANT OF A FOUR-DIMENSIONAL BOUNDARY VALUE PROBLEM"
by: Thomas P. Branson and Peter B. Gilkey</p> <p>235/92 OVERFLADESTRUKTUR OG POREUDVIKLING AF KOKS - Modul 3 fysik projekt -
af: Thomas Jessen</p> |
|--|---|
-

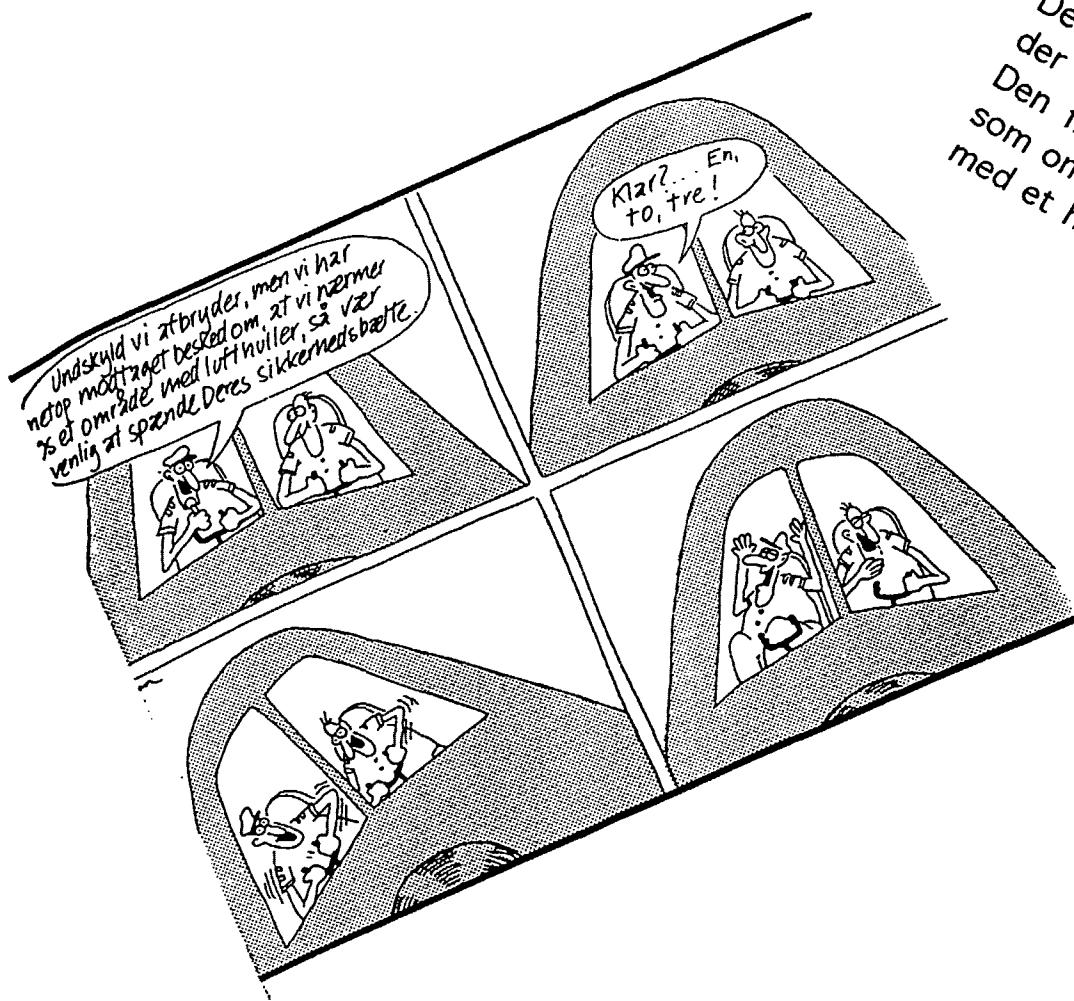
- 236a/93 INTRODUKTION TIL KVANTE
HALL EFFEKTEN
af: Anja Boisen, Peter Bøggild
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
Erland Brun Hansen
- 236b/93 STRØMSSAMMENBRUD AF KVANTE
HALL EFFEKTEN
af: Anja Boisen, Peter Bøggild
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
Erland Brun Hansen
- 237/93 The Wedderburn principal theorem and
Shukla cohomology
af: Lars Kadison
- 238/93 SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (2)
Vektorbånd og tensorer
af: Peder Voetmann Christiansen
- 239/93 Valgsystemer - Modelbygning og analyse
Matematik 2. modul
af: Charlotte Gjerrild, Jane Hansen,
Maria Hermannsson, Allan Jørgensen,
Ragna Clauson-Kaas, Poul Lützen
Vejleder: Mogens Niss
- 240/93 Patologiske eksempler.
Om særlige matematiske fæks betydning for
den matematiske udvikling
af: Claus Dræby, Jørn Skov Hansen, Runa
Ulsøe Johansen, Peter Meibom, Johannes
Kristoffer Nielsen
Vejleder: Mogens Niss
- 241/93 FOTOVOLTAISK STATUSNOTAT 1
af: Bent Sørensen
- 242/93 Brovedligeholdelse - bevar mig vel
Analyse af Vejdirektoratets model for
optimering af broreparationer
af: Linda Kyndlev, Kærle Fundal, Kamma
Tulinius, Ivar Zeck
Vejleder: Jesper Larsen
- 243/93 TANKEEKSPERIMENTER I FYSIKKEN
Et 1.modul fysikprojekt
af: Karen Birkelund, Stine Sofia Korremann
Vejleder: Dorthe Posselt
- 244/93 RADONTRANSFORMATIONEN og dens anvendelse
i CT-scanning
Projektrapport
af: Trine Andreasen, Tine Guldager Christiansen,
Nina Skov Hansen og Christine Ivorsen
Vejledere: Gestur Olafsson og Jesper Larsen
- 245a+b
/93 Time-Of-Flight målinger på krystallinske
halvledere
Specialrapport
af: Linda Szkołak Jensen og Lise Odgaard Gade
Vejledere: Petr Viscor og Niels Boye Olsen
- 246/93 HVERDAGSVIDEN OG MATEMATIK
- LÆREPROCESSER I SKOLEN
af: Lena Lindenskov, Statens Humanistiske
Forskningsråd, RUC, IMFUFA
- 247/93 UNIVERSAL LOW TEMPERATURE AC CON-
DUCTIVITY OF MACROSCOPICALLY
DISORDERED NON-METALS
by: Jeppe C. Dyre
- 248/93 DIRAC OPERATORS AND MANIFOLDS WITH
BOUNDARY
by: B. Booss-Bavnbek, K.P.Wojciechowski
- 249/93 Perspectives on Teichmüller and the
Jahresbericht Addendum to Schappacher,
Scholz, et al.
by: B. Booss-Bavnbek
With comments by W. Abikoff, L. Ahlfors,
J. Cerf, P.J. Davis, W. Fuchs, F.P. Gardiner,
J. Jost, J.-P. Kahane, R. Lohan, L. Lorch,
J. Radkau and T. Söderqvist
- 250/93 EULER OG BOLZANO - MATEMATISK ANALYSE SET I ET
VIDENSKABSTEORETISK PERSPEKTIV
Projektrapport af: Anja Juul, Lone Michelsen,
Tomas Højgaard Jensen
Vejleder: Stig Andur Pedersen
- 251/93 Genotypic Proportions in Hybrid Zones
by: Freddy Bugge Christiansen, Viggo Andreasen
and Ebbe Thue Poulsen
- 252/93 MODELLERING AF TILFELDIGE FENOMENER
Projektrapport af: Birthe Friis, Lisbeth Helmgård,
Kristina Charlotte Jakobsen, Marina Mosbæk
Johannessen, Lotte Ludvigsen, Mette Hass Nielsen
- 253/93 Kuglepakning
Teori og model
af: Lise Arleth, Kærle Fundal, Nils Kruse
Vejleder: Mogens Niss
- 254/93 Regressionsanalyse
Materiale til et statistikkursus
af: Jørgen Larsen
- 255/93 TID & BETINGET UAFHÆNGIGHED
af: Peter Harremoës
- 256/93 Determination of the Frequency Dependent
Bulk Modulus of Liquids Using a Piezo-
electric Spherical Shell (Preprint)
by: T. Christensen and N.B. Olsen
- 257/93 Modellering af dispersion i piezoelektriske
keramikker
af: Pernille Postgaard, Jannik Rasmussen,
Christina Specht, Mikko Østergård
Vejleder: Tage Christensen
- 258/93 Supplerende kursusmateriale til
"Lineære strukturer fra algebra og analyse"
af: Mogens Brun Heefelt
- 259/93 STUDIES OF AC HOPPING CONDUCTION AT LOW
TEMPERATURES
by: Jeppe C. Dyre
- 260/93 PARTITIONED MANIFOLDS AND INVARIANTS IN
DIMENSIONS 2, 3, AND 4
by: B. Booss-Bavnbek, K.P.Wojciechowski

- 261/93 OPGAVESAMLING
Bredde-kursus i Fysik
Eksamensopgaver fra 1976-93
- 262/93 Separability and the Jones Polynomial
by: Lars Kadison
- 263/93 Supplerende kursusmateriale til "Lineære strukturer fra algebra og analyse" II
af: Mogens Brun Heefelt
- 264/93 FOTOVOLTAISK STATUSNOTAT 2
af: Bent Sørensen
-
- 265/94 SPHERICAL FUNCTIONS ON ORDERED SYMMETRIC SPACES
To Sigurdur Helgason on his sixtieth birthday
by: Jacques Faraut, Joachim Hilgert and Gestur Olafsson
- 266/94 Kommensurabilitets-oscillationer i laterale supergrittere
Fysikspeciale af: Anja Boisen, Peter Bøggild, Karen Birkelund
Vejledere: Rafael Taborski, Poul Erik Lindelof, Peder Voetmann Christiansen
- 267/94 Kom til kort med matematik på Eksperimentarium - Et forslag til en opstilling
af: Charlotte Gjerrild, Jane Hansen
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek
- 268/94 Life is like a sewer ...
Et projekt om modellering af aorta via en model for strømning i kloakrør
af: Anders Marcussen, Anne C. Nilsson, Lone Michelsen, Per M. Hansen
Vejleder: Jesper Larsen
- 269/94 Dimensionsanalyse en introduktion metaprojekt, fysik
af: Tine Guldager Christiansen, Ken Andersen, Nikolaj Hermann, Jannik Rasmussen
Vejleder: Jens Højgaard Jensen
- 270/94 THE IMAGE OF THE ENVELOPING ALGEBRA AND IRREDUCIBILITY OF INDUCED REPRESENTATIONS OF EXPONENTIAL LIE GROUPS
by: Jacob Jacobsen
- 271/94 Matematikken i Fysikken.
Opdaget eller opfundet
NAT-BAS-projekt
vejleder: Jens Højgaard Jensen
- 272/94 Tradition og fornyelse
Det praktiske elevarbejde i gymnasiets fysikundervisning, 1907-1988
af: Kristian Hoppe og Jeppe Guldager
Vejledning: Karin Beyer og Nils Hybel
- 273/94 Model for kort- og mellemdistanceløb
Verifikation af model
af: Lise Fabricius Christensen, Helle Pilemann, Bettina Sørensen
Vejleder: Mette Olufsen
- 274/94 MODEL 10 - en matematisk model af intravenøse anæstetikas farmakokinetik 3. modul matematik, forår 1994
af: Trine Andreasen, Bjørn Christensen, Christine Green, Anja Skjoldborg Hansen, Lisbeth Helmgård
Vejledere: Viggo Andreasen & Jesper Larsen
- 275/94 Perspectives on Teichmüller and the Jahresbericht 2nd Edition
by: Bernhelm Booss-Bavnbek
- 276/94 Dispersionsmodellering
Projektrapport 1. modul
af: Gitte Andersen, Reannah Borup, Lisbeth Friis, Per Gregersen, Kristina Vejrø
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek
- 277/94 PROJEKTARBEJDSPÆDAGOGIK - Om tre tolkninger af problemorienteret projektarbejde
af: Claus Flensted Behrens, Frederik Voetmann Christiansen, Jørn Skov Hansen, Thomas Thingstrup
Vejleder: Jens Højgaard Jensen
- 278/94 The Models Underlying the Anaesthesia Simulator Sophus
by: Mette Olufsen(Math-Tech), Finn Nielsen (RISØ National Laboratory), Per Føge Jensen (Herlev University Hospital), Stig Andur Pedersen (Roskilde University)
- 279/94 Description of a method of measuring the shear modulus of supercooled liquids and a comparison of their thermal and mechanical response functions.
af: Tage Christensen
- 280/94 A Course in Projective Geometry
by Lars Kadison and Matthias T. Kromann
- 281/94 Modellering af Det Cardiovasculære System med Neural Pulskontrol
Projektrapport udarbejdet af:
Stefan Frerello, Runa Ulsøe Johansen, Michael Poul Curt Hansen, Klaus Dahl Jensen
Vejleder: Viggo Andreasen
- 282/94 Parallelle algoritmer
af: Erwin Dan Nielsen, Jan Danielsen, Niels Bo Johansen

- 283/94 Grænser for tilfældighed
(en kaotisk talgenerator)
af: Erwin Dan Nielsen og Niels Bo Johansen
- 284/94 Det er ikke til at se det, hvis man ikke
lige ve' det!
Gymnasiematematikkens begrundelsesproblem
En specialerapport af Peter Hauge Jensen
og Linda Kyndlev
Vejleder: Mogens Niss
- 285/94 Slow coevolution of a viral pathogen and
its diploid host
by: Viggo Andreasen and
Freddy B. Christiansen
- 286/94 The energy master equation: A low-temperature
approximation to Bässler's random walk model
by: Jeppe C. Dyre
- 287/94 A Statistical Mechanical Approximation for the
Calculation of Time Auto-Correlation Functions
by: Jeppe C. Dyre
- 288/95 PROGRESS IN WIND ENERGY UTILIZATION
by: Bent Sørensen
- 289/95 Universal Time-Dependence of the Mean-Square
Displacement in Extremely Rugged Energy
Landscapes with Equal Minima
by: Jeppe C. Dyre and Jacob Jacobsen
- 290/95 Modellering af uregelmæssige bølger
Et 3.modul matematik projekt
af: Anders Marcussen, Anne Charlotte Nilsson,
Lone Michelsen, Per Mørkegaard Hansen
Vejleder: Jesper Larsen
- 291/95 1st Annual Report from the project
LIFE-CYCLE ANALYSIS OF THE TOTAL DANISH
ENERGY SYSTEM
an example of using methods developed for the
OECD/IEA and the US/EU fuel cycle externality study
by: Bent Sørensen
- 292/95 Fotovoltaisk Statusnotat 3
af: Bent Sørensen
- 293/95 Geometridiskussionen – hvor blev den af?
af: Lotte Ludvigsen & Jens Frandsen
Vejleder: Anders Madsen
- 294/95 Universets udvidelse –
et metaprojekt
Af: Jesper Duelund og Birthe Friis
Vejleder: Ib Lundgaard Rasmussen
- 295/95 A Review of Mathematical Modeling of the
Controlled Cardiovascular System
By: Johnny T. Ottesen
- 296/95 RETIKULER den klassiske mekanik
af: Peder Voetmann Christiansen
- 297/95 A fluid-dynamical model of the aorta with
bifurcations
by: Mette Olufsen and Johnny Ottesen
- 298/95 Mordet på Schrödingers kat – et metaprojekt om
to fortolkninger af kvantemekanikken
af: Maria Hermannsson, Sebastian Horst,
Christina Specht
Vejledere: Jeppe Dyre og Peder Voetmann Christiansen
- 299/95 ADAM under figenbladet – et kig på en samfunds-
videnskabelig matematisk model
Et matematisk modelprojekt
af: Claus Dræby, Michael Hansen, Tomas Højgård Jensen
Vejleder: Jørgen Larsen
- 300/95 Scenarios for Greenhouse Warming Mitigation
by: Bent Sørensen
- 301/95 TOK Modellering af træers vækst under påvirkning
af ozon
af: Glenn Møller-Holst, Marina Johannessen, Birthe
Nielsen og Bettina Sørensen
Vejleder: Jesper Larsen



Der var en skøn bifurkant
som sagde: kan det være sandt,
at jeg skal formere
til flere og flere?
Hva nu hvis jeg aldrig min ende fandt?



Der var en træt bifurkant
der til projekter var vant.
Den følte sig helt
som om den var delt
med et hoved som en elefant.

Der var en flot bifurkant
som præmier for sex-appeal vandt.
Hvis JEG skal mig dele -
jeg fylder det hele
og min helhed skal være PIKANT!