TEKST NR 252 1993

MODELLERING AF TILFÆLDIGE FÆNOMENER

Projektrapport af

Birthe Friis
Lisbeth Helmgaard
Kristina Charlotte Jakobsen
Marina Mosbæk Johannessen
Lotte Ludvigsen
Mette Hass Nielsen

TEKSTER fra

IMFUFA ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, Postboks 260, 4000 Roskilde.

Modellering af tilfældige fænomener

Projektrapport 2. modul af:
Birthe Friis, Lisbeth Helmgaard, Kristina Charlotte Jakobsen, Marina Mosbæk Johannessen, Lotte Ludvigsen og Mette Hass Nielsen
Vejleder: Mogens Niss

IMFUFA tekst nr. 252/93 100 sider ISSN 0106-6242

Abstract

Projektrapporten består af tre dele, der alle indeholder en beskrivelse af nogle stokastiske modeller. De tre dele er følgende:

- Casinospil
- Poissonprocesser
- Stokastiske epidemimodeller

I hver af de tre dele ser vi på et eller flere virkelighedsområder. Det undersøges hvori det stokastiske i fænomenet består og hvorledes det stokastiske element gøres til genstand for matematisk modellering. Vi beskriver endvidere, hvordan det er muligt at finde et mønster i tilfældighederne og udtrykke dette med en sandsynlighedsfordeling. Vi undersøger hvad modellerne kan bruges til, dels ved at give eksempler på spørgsmål, der kan stilles til disse og hvilke svar de giver og dels ved at se på i hvilke situationer, de er interessante. Med udgangspunkt i de valgte modeller har vi kort skitseret, hvilke valideringsmuligheder der er for disse.

Forord

Dette 2. modul projekt er udarbejdet ved matematikoverbygningen på IMFUFA, RUC. Projektrapporten er et oversigtsprojekt omhandlende stokastiske modeller.

Modulkravet til 2. modul lyder som følger:
I dette modul behandles **matematiske modeller** opstillet til at repræsentere og bearbejde genstandsområder uden for matematikken selv. Der kan både være tale om en undersøgelse og vurdering af eksisterende modeller/modeltyper og om selvstændig opstilling og analyse af modeller eller modeldele.

Projektgruppen består af medlemmer der i øjeblikket læser på 3. eller 4. år. Vi har haft forskellige kurser, men har alle fulgt de to emnekredse lineær algebra og ikke-lineære strukturer fra analysen på matematikoverbygningen. Endvidere har dele af gruppen haft geometri og matematikkens grundbegreber. Ingen af gruppemedlemmerne har fulgt statistik og sandsynlighedsregning på overbygningen. Hvad angår tidligere projekter på matematikoverbygningen, så har størstedelen af gruppen et 1. modul projekt bag sig. Gruppens medlemmer kombinerer matematik med et af fire følgende overbygningsfag: datalogi, fysik, miljøbiologi og molekylærbiologi.

Projektrapporten er udarbejdet af:

Birthe Friis
Lisbeth Helmgaard
Kristina Charlotte Jakobsen
Marina Mosbæk Johannessen
Lotte Ludvigsen
Mette Hass Nielsen

Tusind tak til vores vejleder **Mogens Niss** for hans uundværlige støtte og engagement undervejs i projektforløbet.

Derudover vil vi gerne rette en tak til Viggo Andreasen for hans hjælpsomhed i forbindelse med perspektiverne i stokastiske epidemimodeller.

Indhold

1 Indledning **3**

Indledning 3

2 Casinospil **9**

2.1 Roulettespil 11

Rød-sort 13

2.2 Strategier for rød-sort 14

Udstregningssystemet 15

Martingale strategien 15

Bold strategien 16

2.3 The gambler's ruin 26

2.4 Delkonklusion 29

3 Poissonprocesser **33**

3.1 Sandsynlighedsfordelinger 34

Poissonfordelingen 34

Eksponentialfordelingen 39

3.2 Inhomogene Poissonprocesser 44

Tidsafhængige Poissonprocesser 44

To-tilstandsprocesser 46

3.3 Kort om punktprocesser 48

3.4 To modelkategorier 49

Fødsels- og dødsprocesser 50

Køteori 51

3.5 Eksempler 52

Maskinreparationer 53
Populationsudvikling 53
Køsituation 54
Radioaktivt henfald 55
Punktprocesser 55
3.6 To cases 56
Telefonopkald 56
Stormflodsrisiko 60
3.7 Delkonklusion 62

4 Stokastiske epidemimodeller **65**
4.1 Generelt om stokastiske epidemimodeller 65
4.2 Den kontinuerte epidemimodel 67
4.3 Diskrete epidemimodeller 73
Reed-Frost modellen 73
Greenwood 76
4.4 Modellernes anvendelsesområde 76
4.5 Delkonklusion 77

5 Diskussion **81**
Anvendelsesmuligheder 83
Verificering af stokastiske modeller 84
Modelleringen 87

6 Konklusion **89**
Litteraturliste 91
Appendix 94

Kapitel 1

Indledning

Denne projektrapport indeholder en modelanalytisk gennemgang af stokastiske modeller. Der bliver forsøgt at give en bred indføring i sandsynlighedsteoretiske og modelanalytiske betragtninger.

Der eksisterer en dybtliggende filosofisk og videnskabsteoretisk diskussion om, hvorvidt der findes fænomener, der i egentlig forstand kan betegnes som værende tilfældige eller om det man opfatter som tilfældigt blot er udtryk for utilstrækkelig indsigt i de bagvedliggende mekanismer. Uanset om et fænomen er stokastisk af natur eller om man anlægger en stokastisk synsvinkel, er den modelleringsmæssige konsekvens i stokastiske modeller den samme og vi har derfor valgt ikke at inddrage denne diskussion i projektrapporten.

Stokastiske modeller anvendes til at beskrive sandsynlighederne for at tilfældige hændelser indtræffer. Sandsynligheden for at en hændelse indtræffer kan være stor eller lille, men kan ikke oversættes til et udsagn om, hvorvidt hændelsen vil indtræffe eller ej. Selvom man kender de foregående tilstande, så er det ikke muligt med sikkerhed at forudsige de kommende hændelser. Der kan derfor ikke anvendes stokastiske modeller til at bestemme om en hændelse vil indtræffe; hertil kan kun bruges deterministiske modeller. Det er heri den grundlæggende forskel mellem de to former for modeller består. Ved at benytte sig af stokastiske modeller er det således muligt at stille andre slags spørgsmål til virkelighedsområdet end det er tilfældet med deterministiske modeller.

I forbindelse med anvendelse af stokastiske modeller eller i det hele taget sandsynlighedsregning, søger man at fastlægge en sandsynlighed

for en hændelse. Bag dette ligger en antagelse om, hvordan man overhovedet kan tillægge en hændelse en sandsynlighed. Man forestiller sig, at man kan foretage en uendelig mængde eksperimenter af helt samme karakter. Hvor hyppigt en hændelse forekommer i forsøgsrækken kan opfattes som den relative hyppighed for en hændelse i andre lignende forsøg af endelig varighed. Den relative hyppighed kan så oversættes til sandsynligheden for samme hændelse i ét forsøg.

Stokastiske modeller anvendes inden for mange virkelighedsområder, men har groft set kun to forskellige former for formål: forståelse eller handling. Når det drejer sig om forståelsesmodeller er formålet fra modelbyggerens side at opnå en indsigt i hvilke stokastiske mekanismer, der influerer på systemet og hvilke konsekvenser de har. Ved at opstille en stokastisk model over systemet kan man gøre sig forhåbninger om at forstå de forskellige faktorers indflydelse. Handlingsmodeller bygges med det formål, at man som modelbruger på baggrund af modellen ønsker at vurdere, hvorledes man skal handle. Der vil ud over disse to adskilte formål naturligvis også eksistere modeller, hvis formål er en blanding af forståelse og handling. Uanset modellens formål opererer den inden for en indskrænket ramme. I arbejdet med modeller må man derfor gøre sig disse rammer klart.

Selvom fænomener umiddelbart virker tilfældige, viser det sig ofte, at det er muligt at finde et mønster i tilfældigheden. En stokastisk varierende størrelse siges at følge en vis sandsynlighedsfordeling. Hvilken sandsynlighedsfordeling, der er tale om i det enkelte tilfælde afhænger af, hvilke antagelser eller erfaringer der kan gøres om hændelsessituationen. Man kan således ved at analysere en hændelsessituation håbe at udtale sig om, hvilken fordeling den stokastiske variabel forventes at følge.

Formål

Ved semestrets start havde vi ingen anden viden om sandsynlighedsregning end det man lærer i gymnasiet. Vi ønskede derfor at udarbejde et projekt, der hverken var specifikt eller dybdegående, men snarere et oversigtsprojekt, sådan at vi kunne opnå en bred forståelse. Som projektgruppe har vi været interesseret i at klarlægge forskellige aspekter af det at modellere tilfældige hændelser. Nedenstående er en beskrivelse af det vi i den forbindelse har fundet mest interessant at beskæftige os

med.

Det er en del af vores formål gennem projektarbejdet at opnå en forståelse af grundlaget for sandsynlighedsmodellering med hensyntagen til virkelighedsforestillinger om stokasticitet. Yderligere ønsker vi en forståelse af stokastisk modellering af fænomener med stokastisk indhold. Via en modelanalyse af forskellige stokastiske hændelser ønsker vi således at blive i stand til at identificere stokastiske elementer og tilhørende fordelinger. Endelig giver behandlingen af modellerne os forhåbentlig et analyseværktøj, der kan benyttes i andre modelsammenhænge.

Vi har valgt at opnå dette formål ved at undersøge følgende spørgsmål:

Problemformulering

- Hvorledes kan tilfældige fænomener gøres til genstand for matematisk modellering?
- På hvilken måde optræder forskellige træk af stokastiske elementer i modeller inden for forskellige virkelighedsområder?
- Hvordan kan man bedømme stokastiske modeller og hvori består deres anvendelighed?

Metode

Vi vil i dette afsnit forklare, hvordan vi har valgt at arbejde mod besvarelsen af ovenstående problemformulering og dermed begrunde projektrapportens indhold og opbygning.

Som nævnt var det vores intention at lave et oversigtsprojekt. Det var derfor vores idé at finde nogle stokastiske modeller, som var forskellige og også dækkede forskellige fordelinger inden for sandsynlighedsregningen. På denne baggrund var det vores ønske at udvælge nogle genstands- og fagområder inden for de stokastiske modeller, som ville give os det ønskede overblik.

Vi stillede flere krav til disse områder: For det første ønskede vi at få forskellige områder inden for forskellige naturvidenskabelige discipliner

repræsenteret. Dette krav opstod både på grund af det oversigtsmæssige aspekt, som vi ønskede at projektet skulle få og dels var det fra projektarbejdets start vort ønske at få tilgodeset gruppemedlemmernes kombinationsfag, som er datalogi, fysik og biologi. Dette viste sig ikke at blive tilfældet, men herom senere. Derudover var det et krav, at området skulle være forholdsvis let tilgængeligt fagligt set, hvor fagligt ikke refererer til matematikken, men til det fagområde modellen behandler.

Som nævnt kom projektet ikke til at indeholde stokastiske modeller fra hvert af de tre naturvidenskabelige områder datalogi, fysik og biologi. Det endte med, at kun et af de oprindelige områder var tilbage, nemlig biologi (epidemier). Det var ikke muligt for os at finde et emne inden for datalogien, der havde en problemstilling, som i alle henseender var passende til vores formål. Hvad angår fysikken, så blev det undervejs sådan at det fysiske emne skulle være et, der blev beskrevet ved hjælp af en sandsynlighedsfordeling, som endnu ikke indgik i projektet. Vi valgte at denne sandsynlighedsfordeling skulle være Poissonfordelingen - og dermed også eksponentialfordelingen, som det vil vise sig i kapitel 2 - idet den er yderst anvendt. Det viste sig, at vi var ude af stand til at finde et område, der havde en for os passende sværheds- og detaljeringsgrad matematisk set. I stedet valgte vi derfor at beskæftige os med dette emne på en anden måde, nemlig ved at lave en mere dybtgående teoretisk gennemgang og herefter blot give eksempler på, hvad og hvorledes man kan modellere og rent faktisk gør det. Det sidste emne som vi valgte var casinospil. Dette valg skyldtes hovedsageligt, at det var gennem spillelidenskab sandsynlighedsteorien opstod.

Efter således at have ændret vores planer holdt vi dog fast i at ville behandle tre områder, som så blev følgende

- Casinospil
- Poissonprocesser
- Epidemimodeller

Kort om kapitlernes indhold

- **Casinospil**
  Dette kapitel starter med en kort historisk skitsering af sandsynlighedsregningens oprindelse. Derefter følger et generelt afsnit

om roulettespil og en introduktion til den spilleform, der betegnes rød-sort. Herefter behandler vi forskellige strategier for at spille rød-sort alt afhængig af målet med at spille. Strategierne er det såkaldte udstregningssystem, *martingale* og *bold* (betyder modig på engelsk). Endelig beskæftiger vi os med *the gambler's ruin*, som er et udtryk for sandsynligheden for at gå fallit.

- **Poissonprocesser**
  Som allerede nævnt indeholder dette kapitel en forholdsvis omfattende gennemgang af teorien bag Poissonprocesser. Heriblandt er f.eks udledningen af sandsynlighedsfordelingen for antal ankomster og for ventetiden mellem to på hinanden følgende ankomster, der viser sig at være henholdsvis Poissonfordelingen og eksponentialfordelingen. Udover den homogene Poissonproces vil det generelle teoriafsnit også omhandle forskellige former for inhomogene Poissonprocesser. Yderligere vil det generelle afsnit kort skitsere to former for Poissonprocesser; fødsels- og dødsprocesser samt køteori. Herefter har vi dels for at vise mangfoldigheden af mulige anvendelsesområder og dels for at vise hvorledes man i en enkelt situation alt afhængig af interesse kan anskue situationen på forskellige måder valgt at medtage tre eksempler. Kapitlet vil slutte af med omtalen af to konkrete cases, hvor man rent faktisk har forsøgt at modellere virkelige situationer ved hjælp af Poissonprocesser.

- **Epidemimodeller**
  Formålet med de stokastiske epidemimodeller er at få et billede af epidemiers udvikling; en sandsynlighedsfordeling over antal modtagelige til næste tidspunkt. Epidemierne, som modelleres, følger et $S \rightarrow I \rightarrow R$ - forløb (S: *susceptible/* modtagelig, I: *infected/* smittet, R: *removed/* fjernet i betydningen immun, isoleret eller død). Først indeholder kapitlet lidt generelt om disse modeller. Herefter følger gennemgangen af en model over generelle epidemier, som er en kontinuert model. Enkelte sygdomme har karakteristika, der gør det mere naturligt at beskrive dem ved en diskret model; den såkaldte Reed-Frost model. Endelig er der en kort beskrivelse af Greenwood modellen, som er en simplere udgave af Reed-Frost.

Efter hvert kapitel vil vi i en opsamling forsøge at resumere pointerne i teksten samt foretage en vurdering af modellerne i overensstemmelse med projektets problemformulering. Der vil så i diskussionen til sidst

i projektrapporten blive ført en mere generel diskussion baseret hovedsageligt på disse opsamlinger.

Kapitel 2

Casinospil

Sandsynlighedsregning udspringer oprindeligt fra lysten til at forstå og vinde spil baseret på tilfældigheder. Hasardspil er per definition stokastisk, idet man som spiller ikke har nogen indflydelse på de kommende udfald. For at opnå en forståelse af stokastiske modeller har vi derfor fundet det oplagt at kigge på konkrete former for hasardspil.

I midten af 1600-tallet levede en velanset spiller Chevalier de Méré. Han tjente gennem en årrække mange penge på terningkast ved at påstå, at ud af fire kast ville mindst en være en sekser. Han mente, at hvis han påstod, han ud af 24 kast med to terninger mindst en gang ville slå dobbelt seks, ville sandsynligheden for at vinde være den samme. Men han tabte penge på væddemål af denne type og bad derfor den berømte matematiker Blaise Pascal om at forklare hvorfor. Løsningen på de Méré's problem blev fundet af Pascal i 1654 og nedskrevet i et brev til Pierre de Fermat, med hvem han korresponderede. Under arbejdet med problemet udvikledes binomialfordelingen og ideen om sandsynligheder.

Forklaringen på de Méré's problem er følgende:

At *ikke* slå en sekser ud af fire slag svarer til at kaste 1,2,3,4 eller 5 alle fire gange. For hvert slag sker dette med sandsynligheden $\frac{5}{6}$ og således er sandsynligheden for, at det sker ved alle fire terningkast $(\frac{5}{6})^4$. Altså er sandsynligheden for at slå en sekser ud af fire slag $1 - (\frac{5}{6})^4$, hvilket stemmer overens med det følgende.

Sandsynligheden for at antallet af succes'er i n slag, S_n, er lig i afhænger af følgende elementer:

1. Sandsynligheden for at i bestemte terningkast bliver en sekser er $(\frac{1}{6})^i$
2. Sandsynligheden for at resten $(n-i)$ ikke bliver en sekser, $(\frac{5}{6})^{n-i}$
3. Antal måder hvorpå de i kan udpeges blandt n kast, dvs antal kombinationer af i elementer udtaget af n, $\binom{n}{i}$

Punkt 3 er en kombinatorisk specifikation, mens punkt 1 og 2 involverer stokastiske hændelser.

Der er to mulige udfald for hver terning; sekser eller ikke sekser. Om en terning viser en sekser er uafhængigt af de øvrige terningers udfald. Processen kan derfor opfattes som en serie gentagelser af samme 'forsøg', der sker under ensartede ydre rammer. Under disse omstændigheder følger S_n binomialfordelingen.

Samlet kan sandsynligheden for $S_n = i$ derfor udtrykkes som:

$$P\{S_n = i\} = \binom{n}{i} (\frac{1}{6})^i (\frac{5}{6})^{n-i}, \quad i = 1, \cdots, n \tag{2.1}$$

En anden måde at opnå $1 - (\frac{5}{6})^4$ er ved at benytte ovenstående formel. Sandsynligheden for at få mindst en sekser kan også udtrykkes som summen af sandsynligheden for at få netop 1, netop 2, netop 3 og netop 4.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{4} P\{S_4 = i\} &= \sum_{i=1}^{4} \binom{4}{i} (\frac{1}{6})^i (\frac{5}{6})^{4-i} \\ &= 1 - \binom{4}{0} (\frac{1}{6})^0 (\frac{5}{6})^4 \\ &= 1 - (\frac{5}{6})^4 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Sandsynligheden for at få en sekser ud af fire slag bliver således det samme som ved den første beregningsmetode, nemlig $1 - (\frac{5}{6})^4 = 0,51775\cdots$. Chevalier de Méré havde derfor ret i, at det kunne betale sig at indgå væddemål af denne slags.

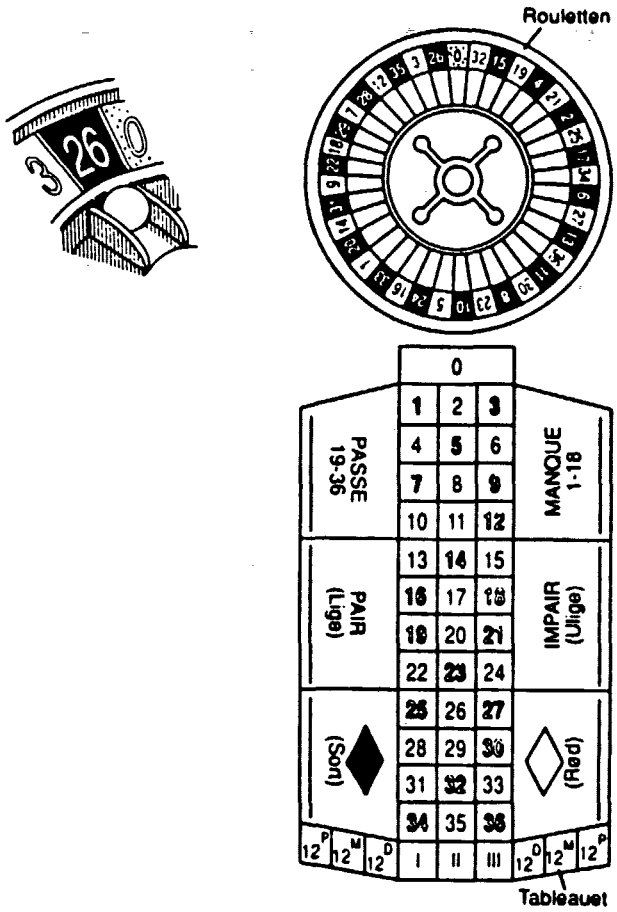
At *ikke* slå dobbelt seks med to terninger er en hændelse, der forekommer med sandsynligheden $\frac{35}{36}$ for hvert dobbeltkast. Derfor er sandsynligheden for at det sker i 24 dobbeltkast lig $(\frac{35}{36})^{24}$. Benyttes (2.1) på samme måde som før, er sandsynligheden for at opnå dobbelt seks ud af 24 slag således lig $1-(\frac{35}{36})^{24} = 0,4914\cdots$. Sandsynligheden for at vinde de to forskellige væddemål er derfor ikke den samme og da sandsynligheden for dobbelt seks i 24 forsøg er mindre end $\frac{1}{2}$ er dette forklaringen på, at de Méré i det lange løb tabte penge på dette væddemål.

De to ovenstående udtryk beskriver altså hyppigheden for gevinst. At kende denne hyppighed for succes var interessant for de Méré, fordi han spillede så mange spil. En sådan model er også relevant for en casinoejer, som ønsker at få et indtryk af den forventede indkomst over et langt tidsrum.

Som spiller kan man derimod ikke benytte denne model så direkte som casinoejeren. Selvom der er $\frac{1}{6}$ chance for, at terningen bliver en sekser, kan det ikke med bestemthed hævdes, at ved seks kast vil netop én terning vise en sekser. Spillereglerne for hasardspil, der findes på casinoer, er selvfølgelig konstrueret således, at hyppigheden for succes er ufavorabel for spilleren. Det, man som spiller derfor ønsker at vide, er sandsynligheden for at man på trods af disse ufavorable odds alligevel vinder; det vil altså sige sandsynligheden for at en marginalsituation opstår.

2.1 Roulettespil

Vi kunne tage udgangspunkt i om man overhovedet skal spille roulette eller ej, men det vil vi ikke beskæftige os med. Vi tager i stedet udgangspunkt i den situation, hvor spilleren allerede har besluttet sig for at spille. Vælger man at spille, ønsker man naturligvis at optimere sin mulighed for at vinde. Dette gøres ved at lede efter et bestemt mønster; en strategi at spille efter. Vi har valgt at beskrive nogle forskellige strategier, der er mulige at følge, når man spiller roulettespil. For at lette forståelsen af disse strategier vil vi først beskrive, hvordan man spiller roulette.



Figur 2.1: Illustation af et roulettebord [Ombré, 1991]

En roulette består af et hjul med 37 eller 38 fordybninger (afhængig af om rouletten er europæisk eller amerikansk). De 36 fordybninger er nummereret fra 1-36, hvoraf halvdelen er røde og den anden halvdel er sorte. Derudover eksisterer et grønt felt 0 (og desuden 00, hvis det er amerikansk). Vi vil her kun beskæftige os med den europæiske roulette, hvor der altså eksisterer 37 felter. En kugle roterer i rouletten og falder til ro i en af fordybningerne. Inden kuglen sættes i gang skal hver spiller have tilkendegivet sin melding. Spilleren kan vælge at satse på flere forskellige måder - enten en gruppe af tal, eksempelvis alle de røde eller tallene fra 1-18, eller man kan satse på et enkelt tal. Det er tilladt at lave flere meldinger i et spil, eksempelvis på 1, 4, og alle de sorte felter. Tilbagebetalingen i tilfælde af succes fastlægges af casinoet og afhænger af sandsynligheden for succes.

Modelleringer af hasardspil er forholdsvis simple, idet spillet er en konstrueret virkelighed. De kan beskrives ved en stokastisk proces næsten uden informationstab.

I et spil indgår to grundparametre - en, der beskriver sandsynligheden for succes og en, der fastlægger tilbagebetalingen i tilfælde af succes. Der er forskel på hvordan de to parametre er fastlagt. Tilbagebetalingsparameteren er fastlagt på forhånd ved konvention og er altså en direkte del af virkeligheden. Sandsynligheden for succes i ét forsøg betegnes p og fastlæggelsen af denne parameter er sket ved en forudgående principmodel og derefter overført til det enkelte spil. Når man modellerer roulettespil er det underforstået, at sandsynligheden for hver af de 37 udfald er lige stor. Desuden er det en grundantagelse, at kuglen lander i et felt uafhængigt af, hvor den landede i det foregående spil. De følgende modeller bygger alle på denne bagvedliggende principmodel og der er således ikke tale om en fysisk model af roulettehjulet. Som en del af principmodellen antages det således, at der ikke snydes. Dette kan undersøges på mekanisk eller statistisk vis, men i modelantagelserne er der set bort fra ydre påvirkninger, såsom om roulettehjulet er skævt. Den ideelle spillesituation udgøres således af principmodellen samt af spillereglerne, der blandt andet bestemmer gevinsten ved succes og en øvre/ nedre grænse for indsats.

Rød-sort

At spille rød-sort er principielt det samme som at spille lige-ulige eller 1-18 / 19-36 (se figur 2.1), da der er lige stor sandsynlighed for et rødt som for et ulige tal. I det kommende afsnit vil vi blot benytte 'rød-sort' som betegnelse for spil af denne type. I rød-sort spilles ikke på bestemte numre, men på enten rød eller sort; hvis kuglen falder i en henholdsvis rød eller sort fordybning, har man altså vundet. Det antages, at der er tale om en ideel spillesituation, hvilket betyder, at sandsynligheden for at få rød er den samme som for at få sort. Denne sandsynlighed er mindre end $\frac{1}{2}$, idet 0-feltet er grønt. Der eksisterer specielle regler for hvad der sker med den samlede indsats i tilfælde af, at kuglen lander i 0. Disse regler kan variere for de enkelte casinoer; eksempelvis er det nogle steder sådan at hele den samlede indsats tilfalder casinoet og andre steder sådan at spillere, der har satset på rød-sort skal lade deres melding og indsats være uforandret til et ekstra spil. Et spil, hvor sandsynligheden for gevinst er mindre end $\frac{1}{2}$, betegnes 'subfair'. Som

nævnt lander kuglen i et felt uafhængigt af det foregående felt. Dette er dog ikke nødvendigvis det samme som at hvert spil er uafhængigt af det foregående. Netop i tilfældet med 0 er det næstkommende spil ikke nødvendigvis uafhængigt af det foregående. De modeller som vi vil behandle bygger alle på den antagelse, at man i tilfælde af 0 taber sin indsats. Dermed er det ene spil uafhængigt af det andet. I den situation vi ønsker at modellere gælder det, at man ved succes får udbetalt 2 gange indsatsen og at man ved fiasko taber hele indsatsen. Endelig er det et krav, at man ikke må satse flere penge end man besidder.

Som spiller kan man eksempelvis sætte sig følgende forskellige mål:

1. Man ønsker at spille, indtil man har opnået et tilpas stort overskud.

2. Man ønsker at opnå en på forhånd fastlagt formue.

3. Man ønsker at spille, til man blot har opnået et overskud.

Det i 1 skitserede mål er af meget subjektiv karakter, idet spilleren kan ændre opfattelse af 'tilpas'. Målet er ikke veldefineret og mangler således yderligere præcisering for at kunne modelleres. Vi ønsker at beskrive nogle strategier for, hvordan man skal spille, hvis man har 2 eller 3 som mål. Det skal pointeres, at det for de kommende strategier er en forudsætning, at i fald man som spiller besidder den indsats, som strategien byder en at satse, så er det muligt at satse dem. Der tages altså ikke højde for den situation, at der på virkelige casinoer findes både en øvre grænse for indsats, et såkaldt loft og en nedre grænse, som i det mindste sættes af den laveste møntenhed. Ofte vil bundgrænsen dog være fastsat af den billigste jeton.

2.2 Strategier for rød-sort

I dette afsnit vil vi gennemgå nogle af de mest anvendte strategier. Vi har taget udgangspunkt i rød-sort, men det skal nævnes at strategierne også er anvendelige i en mere generel ramme, der dog kan variere fra strategi til strategi. Vi forudsætter at der ikke sættes nogle ydre begrænsninger for strategiernes udførelsesmuligheder.

Udstregningssystemet

Udstregningssystemet kunne intuitivt set ligne en sikker strategi, når man ønsker at opnå en på forhånd fastlagt formue; der er således tale om et mål af typen 2. Inden spillet begynder, fastsætter spilleren det beløb, hun ønsker at vinde, men stiller ingen betingelser på antallet af spil dette måtte kræve. Derefter opstilles en række af vilkårligt mange positive tal, hvis samlede sum giver det ønskede beløb. Det første og sidste tal i rækken summeres og denne sum er indsatsen. Vindes spillet, udstreges disse to tal i rækken. Tabes spillet, tilføjes summen af de to tal bagest i rækken. Den næste indsats vil så igen være summen af det første og sidste tal. Hvis rækken på et tidspunkt kun består af et enkelt tal, er dette tal den næste indsats. Summen af rækken viser altså til ethvert tidspunkt, hvor meget man mangler at vinde for at opnå sit mål.

Ønsker man eksempelvis at vinde 21 enheder, kan rækken se ud på følgende måde: 4 7 1 3 4 2. Den første indsats vil så være $4 + 2 = 6$. Hvis spillet vindes, vil næste række se således ud: 7 1 3 4. Tabes spillet derimod, vil rækken se sådan ud: 4 7 1 3 4 2 6. Spillet fortsættes, til der ikke er flere tal i rækken, hvorved spilleren har opnået sit mål.

Det skal lige nævnes, at vi i litteraturen ikke har fundet en matematisk teori bag denne strategi. Intuitivt virker strategien dog sikker, givet at man har uendelig mange penge og spil til sin rådighed.

Martingale strategien

En velkendt sikker strategi er *martingale* strategien. Målet er at spille indtil man har opnået et overskud, altså et mål af formen 3. Grundideen i denne strategi er at fordoble sin indsats, når man taber og stoppe første gang man vinder.

Lad $n = 1, 2, \cdots$ være antallet af spil og x_i spillerens formue efter i spil. Det antages yderligere, at man efter et vundet spil får udbetalt det dobbelte af sin indsats, det vil sige at tilbagebetalingsparameteren er 2.

Antag for eksempel, at man spiller roulette og vælger at spille på rød hver gang. Begyndelsesindsatsen er x_0. Vindes det første spil stopper

man spillet og har nu formuen $2x_0$. Man har nu nået det ønskede mål, nemlig et overskud; dette overskud er lig begyndelsesindsatsen. Taber man derimod det første spil, satser man $x_1 = 2x_0$ næste gang. Vindes dette spil, får man udbetalt $2x_1 = 4x_0$. Da man samlet har satset $3x_0$ har man nu et overskud på x_0 og stopper spillet. Hvis man taber både første og andet spil har man mistet $x_0 + x_1 = 3x_0$ og skal derfor satse $x_2 = 2x_1 = 4x_0$ i tredie spil. Således fortsættes spillet med en fordobling af den forrige indsats hver gang der tabes. Så snart et spil vindes, stoppes spillet og spilleren har opnået et overskud, der altid vil være lig begyndelsesindsatsen. Da sandsynligheden for at få fiasko n gange i træk ($(1-p)^n$) går mod 0 for n gående mod ∞, er *martingale* en sikker strategi, når man har som mål at opnå et overskud.

Bold strategien

Det skal nævnes, at dette afsnit kraftigt bygger på fremstillingen i [Jacobs, 1992] og at enkelte passager vil være direkte oversat herfra. Derudover bygger afsnittet på gennemgang ved vores vejleder.

Situationen er følgende: Man har et givet startbeløb, som man ønsker at omdanne til en større fastlagt formue. Dette er således et mål af typen 2. Spørgsmålet er, hvorledes man skal spille, sådan at sandsynligheden for at opnå denne målformue er størst mulig. I rød-sort, hvor odds'ene som nævnt er fikserede og subfair og hvor alle spil er indbyrdes uafhængige af hinanden, vil vi vise, at det er optimalt at spille modigt, den såkaldte '*bold*' strategi.

Bold strategien er at satse den akkumulerede formue, indtil man har opnået mindst halvdelen af sin målformue, hvorefter indsatsen er således, at vinder man, så har man opnået sit mål. (I tilfældet rød-sort, hvor gevinsten er det dobbelte af indsatsen, betyder det, at man efter at have opnået mindst halvdelen af sin målformue skal satse det man mangler i at have opnået sit mål.) Taber man et spil efter at have nået halvdelen, fortsætter man med at satse sin formue, indtil man igen har opnået halvdelen af målet. Dette er en teoretisk betragtning, som ikke altid er mulig i en reel spillesituation, men den teoretiske analyse af *bold* strategien forudsætter, at indsatsen kan være et hvilket som helst reelt tal. Derudover forudsættes det, at spilleren spiller n spil.

At denne strategi er optimal er ikke umiddelbart indlysende. Vi vil nu vise at under visse forudsætninger vil den være det.

Vi vil starte med at oversætte strategien til matematik. I modellen indgår to parametre r og p. Parameteren r er en invers vindings-rate; hvis spilleren i et forsøg satser s og vinder får hun udbetalt $\frac{s}{r}$. Sandsynligheden for succes i ét spil betegnes p. Betingelserne for, at *bold* er en optimal strategi er, at $p \leq \frac{1}{2}$ og $r \geq \frac{1}{2}$. (Dette er tilfældet i rød-sort, hvor $r = \frac{1}{2}$ og $p = \frac{18}{37}$). Det er i denne strategi tilladt for spilleren at satse en hvilken som helst del e af sin samlede formue a. Såfremt spilleren satser e er der to mulige nye formuer efter spillet:
$a - e$ i tilfælde af fiasko.
$a - e + \frac{e}{r} = a + \frac{1-r}{r}e$ i tilfælde af succes.

Vi indfører følgende notation $\bar{p} = 1 - p$ og $\bar{r} = 1 - r$ og kan derfor omskrive de to mulige formuer til
$a - e$ i tilfælde af fiasko: sandsynlighed $\bar{p}$
$a + \frac{\bar{r}}{r}e$ i tilfælde af succes: sandsynlighed p.

Vi vil normere målformuen til at være lig 1.

En strategi for sådan en model med et bestemt antal forsøg n er en funktion $\varphi(a, k)$, der er defineret for reelle tal $a \geq 0$ og hele tal $k \geq 0$ og som tilfredsstiller $\varphi(a, k) \leq a$ overalt. Denne funktion fortæller spilleren, at hvis formuen er a og der er k spil forude, sats da $e = \varphi(a, k)$.

Vi kan nu for $r = \frac{1}{2}$ formalisere *bold* strategien til dette udtryk.

$$\varphi^{BOLD}(a, k) = \begin{cases} a & \text{hvis } a < \frac{1}{2} \\ 1 - a & \text{hvis } \frac{1}{2} \leq a < 1 \\ 0 & \text{hvis } a \geq 1 \end{cases}$$

Denne funktion/ strategi afhænger ikke af k, men denne notation benyttes da andre strategier kan afhænge af k. Specifikationen $\varphi(a, k) = 0$ for $a \geq 1$ betyder, at man har nået sit mål og skal stoppe spillet.

Sandsynligheden for at overleve, altså nå sit mål, efter n spil, når man spiller *bold* og har en given begyndelsesformue a, betegnes $P_n^{BOLD}(a)$; hvad vil $P_{n+1}^{BOLD}(a)$ være?

For $0 \leq a < \frac{1}{2}$ overlever man, netop hvis man vinder det første spil (sandsynlighed p, resulterende formue $2a$) og derefter overlever yderligere n spil: overlevelse sker med sandsynlighed $pP_n^{BOLD}(2a)$

For $\frac{1}{2} \leq a < 1$ overlever man, hvis en af følgende to situationer forekommer: 1) Man vinder det første spil. Dette sker med sandsynligheden p og den resulterende formue er 1. 2) Man taber det første spil (sandsynlighed $\bar{p}$, resulterende formue $a - (1 - a) = 2a - 1 \in [0, \frac{1}{2}[)$ og overlever så de næste n spil. Sandsynligheden for denne hændelse er $\bar{p}P_n^{BOLD}(2a - 1)$. Da de to hændelser er disjunkte, skal sandsynlighederne adderes for at få den samlede sandsynlighed.

Følgende rekursionsformel udtrykker dette.

$$P_{n+1}^{BOLD}(a) = \begin{cases} pP_n^{BOLD}(2a) & \text{for } 0 \leq a < \frac{1}{2} \\ p + \bar{p}P_n^{BOLD}(2a - 1) & \text{for } \frac{1}{2} \leq a < 1 \\ 1 & \text{for } a \geq 1 \end{cases}$$

Efter at have beskrevet situationen for $r = \frac{1}{2}$ ønsker vi nu at generalisere dette til en vilkårlig strategi φ og en generel situation, hvor parametrene p og r ligger mellem 0 og 1. Sandsynligheden for at overleve n spil forudsat man følger strategien φ betegnes P_n^{φ}. Hvis man starter med en indsats $\varphi(a, n + 1)$ og vinder første spil, så opnås en ny formue på $a + \frac{\bar{r}}{r}\varphi(a, n + 1)$ og man overlever kun hvis strategien φ gør at man overlever i n forsøg startende derfra. Sandsynligheden for dette er

$$pP_n^{\varphi}(a + \frac{\bar{r}}{r}\varphi(a, n + 1))$$

Hvis man derimod taber det første spil, har man en ny formue på $a - \varphi(a, n + 1) \geq 0$ og overlever med sandsynligheden

$$\bar{p}P_n^{\varphi}(a - \varphi(a, n + 1))$$

Dette medfører følgende rekursionsformel

$$\begin{aligned} P_{n+1}^{\varphi}(a) &= pP_n^{\varphi}(a + \frac{\bar{r}}{r}\varphi(a, n + 1)) \\ &\quad + \bar{p}P_n^{\varphi}(a - \varphi(a, n + 1)) \qquad n = 0, 1, \cdots \end{aligned} \tag{2.3}$$

Denne rekursionsformel er generel for alle strategier.

Definition Lad $0 < p,\ r < 1$. En strategi φ siges at være optimal for et casino beskrevet ved parametrene p, r og for n spil, hvis

$$P_n^{\varphi}(a) \geq P_n^{\psi}(a) \qquad , \qquad a \geq 0 \tag{2.4}$$

for alle strategier ψ.

Vi ønsker i resten af dette afsnit at vise, at *bold* strategien altid er optimal, hvis $n \leq 2$. Derudover vil vi vise, at *bold* er optimal for $n \geq 3$, hvis $p \leq \frac{1}{2}$ og $r \geq \frac{1}{2}$. Sidstnævnte inkluderer rød-sort.

Vi vil nu indføre notationen $\varphi^{BOLD}(a)$ i stedet for $\varphi^{BOLD}(a,k)$, da *bold* strategien ikke afhænger af k. Vi definerer

$$\varphi^{BOLD}(a) = \begin{cases} a & \text{for } 0 \leq a < r \\ \frac{r}{\bar{r}}(1-a) & \text{for } r \leq a < 1 \\ 0 & \text{for } a \geq 1 \end{cases}$$

$\frac{r}{\bar{r}}(1-a)$ fremkommer ved følgende overvejelser: hvis man har en formue a mangler man $1-a$ for at have nået sit mål. Vælger man at satse e mangler man yderligere e og gevinsten ved succes skal derfor være $(1-a)+e$. Dette opnås ved at satse $e = \frac{(1-a)+e}{\frac{1}{r}}$ som er lig med $\frac{r}{\bar{r}}(1-a)$. Vi vil nu generalisere rekursionsformlen for specialtilfældet $r = \frac{1}{2}$ (rød-sort). Bemærk, at vi nu i stedet for P_n^{BOLD} indfører notationen P_n.

$$P_{n+1}(a) = \begin{cases} pP_n(\frac{a}{r}) & \text{for } 0 \leq a < r \\ p + \bar{p}P_n(\frac{a-r}{\bar{r}}) & \text{for } r \leq a < 1 \\ 1 & \text{for } a \geq 1 \end{cases} \tag{2.5}$$

Det kan konstateres, at $P_n(a)$ er en svagt voksende funktion for $a \geq 0$. Dette er en iagttagelse som vi senere vil få brug for og derfor har valgt at vise.

Bevis :

$$n = 0: \quad P_0(a) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 \leq a < 1 \\ 1 & \text{for } a \geq 1 \end{cases}$$

$$n = 1: \quad P_1(a) = \begin{cases} pP_0(\frac{a}{r}) & \text{for } 0 \leq a < r \\ p + \bar{p}P_0(\frac{a-r}{\bar{r}}) & \text{for } r \leq a < 1 \\ 1 & \text{for } a \geq 1 \end{cases}$$

Benytter vi nu formlen for $P_0(a)$ kan det ovenstående udtryk reduceres til

$$n = 1: \quad P_1(a) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 \leq a < r \\ p & \text{for } r \leq a < 1 \\ 1 & \text{for } a \geq 1 \end{cases}$$

Vi vil nu lave et induktionsbevis, hvor antagelsen er at $P_n(a) \leq P_n(b)$ for alle $a < b$ og hvor vi på denne baggrund ønsker at vise, at så er det også sandt for $n + 1$.

Vi kan opsplitte i følgende tre situationer:

1. For $a < b < r$ gælder
   $P_{n+1}(a) = pP_n(\frac{a}{r})$, idet $a < r$
   Da P_n er en svagt voksende funktion fås følgende ulighed
   $pP_n(\frac{a}{r}) \leq pP_n(\frac{b}{r}) = P_{n+1}(b)$
   Samlet har vi nu i dette tilfælde vist at $P_{n+1}(a) \leq P_{n+1}(b)$.

2. For $a < r \leq b$ gælder
   $P_{n+1}(b) = p + \bar{p}P_n(\frac{b-r}{\bar{r}})$, da $b \geq r$
   Benyttes at sidste led på højresiden er ikke-negativt, opnås
   $p + \bar{p}P_n(\frac{b-r}{\bar{r}}) \geq p$
   Idet værdien af en sandsynlighed er et ikke-negativt tal ≤ 1 gælder følgende ulighed
   $p \geq pP_n(\frac{a}{r}) = P_{n+1}(a)$
   Vi har således vist, at $P_{n+1}(b) \geq P_{n+1}(a)$.

3. For $r \leq a < b$ kan man ved at benytte de samme overvejelser som i 1. og 2. få følgende ulighed
   $P_{n+1}(b) = p + \bar{p}P_n(\frac{b-r}{\bar{r}}) \geq p + \bar{p}P_n(\frac{a-r}{\bar{r}}) = P_{n+1}(a)$
   Det gælder altså at $P_{n+1}(b) \geq P_{n+1}(a)$.

Vi har nu undersøgt for alle tre mulige situationer og kan derfor konkludere, at hvis P_n er svagt voksende, så er P_{n+1} også svagt voksende. □

Vores første mål er at vise, at *bold* er en optimal strategi for $n = 0, 1, 2$. For at kunne dette er vi nødt til at indføre to lemmaer. Uligheden som opskrives i lemmaerne betyder, at sandsynligheden for at overleve når man satser et vilkårligt e er mindre end hvis man satser $e = \varphi^{BOLD}(a)$, altså følger *bold* strategien. Kan vi vise at disse lemmaer gælder for $n = 0, 1, 2$, så har vi vist det ønskede.

Lemma 2.1
Hvis $0 \leq e \leq a$, $a + \frac{\bar{r}}{r}e \geq 1$, *så gælder*

$$pP_n(a + \frac{\bar{r}}{r}e) + \bar{p}P_n(a - e) \leq P_{n+1}(a) \qquad (n = 0, 1, \cdots) \qquad (*)$$

Pointen er at indsatsen e ikke er knyttet til en strategi.

Bevis : De tre udsagn $r \leq 1, a \geq e$ og $a + \frac{\bar{r}}{r}e \geq 1$ medfører

1. $a = ra + \bar{r}a \geq ra + \bar{r}e = r(a + \frac{\bar{r}}{r}e) \geq r$ og således er
   $P_n(a + \frac{\bar{r}}{r}e) = 1$, og $P_{n+1}(a) = p + \bar{p}P_n(\frac{a-r}{\bar{r}})$
2. $a - e = \frac{a}{\bar{r}} - \frac{r}{\bar{r}}(a + \frac{\bar{r}}{r}e) \leq \frac{a-r}{\bar{r}}$

Da P_n er en svagt voksende funktion, medfører det at

$$pP_n(a + \frac{\bar{r}}{r}e) + \bar{p}P_n(a - e) \leq p + \bar{p}P_n(\frac{a - r}{\bar{r}}) = P_{n+1}(a)$$

□

Lemma 2.2
Hvis $0 \leq e \leq a$, $n = 0$ *eller* $n = 1$, *så*

$$pP_n(a + \frac{\bar{r}}{r}e) + \bar{p}P_n(a - e) \leq P_{n+1}(a) \qquad (*)$$

Bevis : Tilfældet $a + \frac{\bar{r}}{r}e \geq 1$ blev behandlet i lemma 2.1.
Hvis $a + \frac{\bar{r}}{r}e < 1$, så er $a < 1$ og derfor $P_0(a + \frac{\bar{r}}{r}e) = 0 = P_0(a - e)$.
Således gælder det for $n = 0$ at

$$pP_0(a + \frac{\bar{r}}{r}e) + \bar{p}P_0(a - e) \leq P_1(a)$$

For $n = 1$ opdeler vi i to tilfælde:

$a < r$ Så er $P_1(a - e) = 0$ og $a + \frac{\bar{r}}{r}e = \frac{ra+\bar{r}e}{r} \leq \frac{ra+\bar{r}a}{r} = \frac{a}{r}$
og således er
$pP_1(a + \frac{\bar{r}}{r}e) + \bar{p}P_1(a - e) = pP_1(a + \frac{\bar{r}}{r}e) \leq pP_1(\frac{a}{r}) = P_2(a)$

$a \geq r$ Så er $P_2(a) \geq p$. Fra $a + \frac{\bar{r}}{r}e < 1$ udledes at $P_1(a + \frac{\bar{r}}{r}e) \leq p$ og $a - e \leq a + \frac{\bar{r}}{r}e < 1$ og dermed $P_1(a - e) \leq p$. Dette medfører $pP_1(a + \frac{\bar{r}}{r}e) + \bar{p}P_1(a - e) \leq pp + \bar{p}p = p \leq P_2(a)$

□

Vi har nu opskrevet og bevist de to lemmaer og kan derfor nu ved hjælp af lemma 2.1 og lemma 2.2 bevise følgende sætning.

Sætning 2.3

Bold *strategien er optimal for* $n = 0, 1, 2$.

Bevis : For $n = 0$ er alle P_0^φ ens uanset strategi, så derfor er *bold* optimal i dette tilfælde. Med udganspunkt i at *bold* er optimal for $n = 0, 1$ vil vi nu ved et induktionsbevis godtgøre at *bold* er optimal for n, så er den også optimal for $n + 1$. Vi benytter os først af den generelle rekursionsformel (2.3)

$$\begin{aligned} P_{n+1}^\varphi(a) &= pP_n^\varphi(a + \frac{\bar{r}}{r}\varphi(a, n+1)) \\ &\quad + \bar{p}P_n^\varphi(a - \varphi(a, n+1)) \\ &\leq pP_n(a + \frac{\bar{r}}{r}\varphi(a, n+1)) \\ &\quad + \bar{p}P_n(a - \varphi(a, n+1)) \end{aligned}$$

Denne ulighed gælder, idet *bold* antages at være optimal for n. Vi sætter nu $e = \varphi(a, n+1) \leq a$ og anvender lemma 2.2, hvorved det fås at det ovenstående udtryk er

$$\leq P_{n+1}(a)$$

Da denne ulighed er sand for $n = 0, 1$ er den også sand for $n = 2$ og dermed er sætningen bevist.
□

Til både lemma 2.1 og 2.2 hører visse betingelser, der skal opfyldes, før at den ulighed $(*)$, der viser at *bold* er en optimal strategi, er sand. I beviset til sætning 2.3 anvender vi et induktionsbevis, der viser at er denne ulighed sand for n medfører det at den også er sand for $n + 1$. Undervejs i dette induktionsbevis benyttedes lemma 2.2 og vi kan derfor kun bevise at det gælder for n op til 2. Det vi derfor ønsker nu er at vise at uligheden ikke kun gælder for $a + \frac{\bar{r}}{r}e \geq 1$ (betingelsen i

lemma 2.1), men også for $a + \frac{\bar{r}}{r}e < 1$. Kan vi vise dette, er betingelsen så at sige ikke længere en betingelse og vi kan derfor benytte os af induktionsbeviset, som så ikke kun kan anvendes for $n = 2$ men for alle n. I så fald har vi vist at uligheden gælder for $0 \leq e \leq a$ og for alle $n = 0, 1, \cdots$ og dermed at *bold* er en optimal strategi for alle n, når $p \leq \frac{1}{2} \leq r$. Før vi er i stand til at vise dette, må vi endnu engang benytte os af et lemma.

Lemma 2.4

Lad $n \in \{0, 1, \cdots\}, p \leq \frac{1}{2} \leq r$ og antag, at

$$pP_n(a + \frac{\bar{r}}{r}e) + \bar{p}P_n(a - e) \leq P_{n+1}(a) \quad (0 \leq e \leq a) \qquad (*)$$

Så gælder at for alle α, β, γ, sådan at $0 \leq \beta \leq \alpha \leq \gamma$ skal følgende udsagn gælde

$$p(P_n(\alpha) + P_n(\beta)) \leq P_{n+1}((r - \bar{r})\gamma + \bar{r}(\alpha + \beta)) \tag{2.6}$$

og

$$\bar{p}(P_n(\alpha) + P_n(\beta)) \leq (\bar{p} - p) + P_{n+1}((r - \bar{r})\gamma + \bar{r}(\alpha + \beta)) \tag{2.7}$$

Bevis : Vi starter som nævnt med at antage, at $0 \leq \beta \leq \alpha \leq \gamma$. Sæt

$$a = r\alpha + \bar{r}\beta \quad \text{og} \quad e = r(\alpha - \beta)$$

Dette medfører

$$a + \frac{\bar{r}}{r}e = \alpha \text{ og } a - e = \beta$$

Nu medfører $(*)$, at

$$pP_n(\alpha) + \bar{p}P_n(\beta) \leq P_{n+1}(r\alpha + \bar{r}\beta) \tag{2.8}$$

Da $r \geq \frac{1}{2}$ medfører $r \geq \bar{r}$, gælder at

$$r\alpha + \bar{r}\beta = (r - \bar{r})\alpha + \bar{r}(\alpha + \beta) \leq (r - \bar{r})\gamma + \bar{r}(\alpha + \beta) \tag{2.9}$$

Idet P_{n+1} er en svagt voksende funktion opnås

$$pP_n(\alpha) + \bar{p}P_n(\beta) \leq P_{n+1}((r - \bar{r})\gamma + \bar{r}(\alpha + \beta)) \tag{2.10}$$

Da $p \leq \frac{1}{2}$ og $\bar{p}$ jo er defineret som $\bar{p} = 1 - p$ er $p \leq \bar{p}$. Dette medfører at venstresiden i (2.10) er $\geq p(P_n(\alpha) + P_n(\beta))$, hvilket beviser (2.6). For at opnå udsagn (2.7) observerer vi

$$\begin{aligned}
\bar{p}(P_n(\alpha) + P_n(\beta)) &= (\bar{p} - p)P_n(\alpha) + (pP_n(\alpha) + \bar{p}P_n(\beta)) \\
&\leq (\bar{p} - p) + P_{n+1}(r\alpha + \bar{r}\beta) \qquad \text{(ved (2.8))} \\
&\leq (\bar{p} - p) + P_{n+1}((r - \bar{r})\gamma + \bar{r}(\alpha + \beta))
\end{aligned}$$

Sidstnævnte fås ved (2.9) og ved at P_{n+1} er en svagt voksende funktion. □

Bevis : Vi vil nu bevise

$$pP_n(a + \frac{\bar{r}}{r}e) + \bar{p}P_n(a - e) \leq P_{n+1}(a) \qquad (n = 0, 1, \cdots)$$

Tilfældet $n = 0$ er vist gennem lemma 2.2. Beviset vil være et induktionsbevis, hvor vi antager at udsagnet er sandt for n og ønsker at vise at det i så tilfælde også er sandt for $n + 1$.

Lad $0 \leq e \leq a$. Lemma 2.1 gjaldt for tilfældet $a + \frac{\bar{r}}{r}e \geq 1$. Derfor antages nu, at $a + \frac{\bar{r}}{r}e < 1$. Vi opdeler dette i følgende fire undertilfælde.

1. $a + \frac{\bar{r}}{r}e \leq r$
2. $a \leq r \leq a + \frac{\bar{r}}{r}e$
3. $a - e \leq r \leq a$
4. $r \leq a - e$

Vi har fundet det for omfattende at medtage beviset for alle ovennævnte tilfælde og har derfor valgt kun at medtage beviset for et enkelt tilfælde, nemlig for 3, da det er her alle lemmaerne anvendes. (Er man interesseret i beviset for de tre andre tilfælde henvises til p. 228ff i [Jacobs, 1992])

Vi starter med at bruge rekursionsformlen (2.5), som medfører

$$\begin{aligned}
& pP_{n+1}(a+\frac{\bar{r}}{r}e)+\bar{p}P_{n+1}(a-e) \\
= \; & p(p+\bar{p}P_n(\frac{(a+\frac{\bar{r}}{r}e)-r}{\bar{r}}))+\bar{p}pP_n(\frac{a-e}{r}) \\
= \; & p^2+\bar{p}p(P_n(\frac{(a+\frac{\bar{r}}{r}e)-r}{\bar{r}})+P_n(\frac{a-e}{r}))
\end{aligned}$$

Vi anvender nu lemma 2.4 med

$$\begin{aligned}
\gamma &= 1 \\
\alpha &= \frac{(a+\frac{\bar{r}}{r}e)-r}{\bar{r}} \\
\beta &= \frac{a-e}{r}
\end{aligned}$$

og opnår således

$$\begin{aligned}
& (r-\bar{r})\gamma+\bar{r}(\alpha+\beta) \\
= \; & r-\bar{r}+\bar{r}(\frac{(a+\frac{\bar{r}}{r}e)-r}{\bar{r}}+\frac{a-e}{r}) \\
= \; & r-\bar{r}+a+\frac{\bar{r}}{r}e-r+\frac{\bar{r}}{r}a-\frac{\bar{r}}{r}e \\
= \; & a+\frac{\bar{r}}{r}a-\bar{r}=\frac{ra+\bar{r}a}{r}-\bar{r}=\frac{a}{r}-\bar{r} \\
= \; & \frac{a}{r}-1+r=\frac{a-r}{r}+r
\end{aligned}$$

Formel (2.7) i lemma 2.4 og rekursionsformlen medfører

$$\begin{aligned}
& pP_{n+1}(a+\frac{\bar{r}}{r}e)+\bar{p}P_{n+1}(a-e) \\
= \; & p^2+\bar{p}p(P_n(\frac{(a+\frac{\bar{r}}{r}e)-r}{\bar{r}})+P_n(\frac{a-e}{r})) \\
\leq \; & p^2+p((\bar{p}-p)+P_{n+1}(\frac{a-r}{r}+r)) \\
= \; & p\bar{p}+pP_{n+1}(\frac{a-r}{r}+r) \\
= \; & p\bar{p}+p(p+\bar{p}P_n(\frac{a-r}{r\bar{r}})) \\
= \; & p+p\bar{p}P_n(\frac{a-r}{r\bar{r}})
\end{aligned}$$

Men

$$\begin{aligned}\frac{a-r}{\bar{r}} &= \frac{1}{\bar{r}}(ra+\bar{r}a)-\frac{r}{\bar{r}} = a-e+e+\frac{r}{\bar{r}}a-\frac{r}{\bar{r}} \\ &= (a-e)+\frac{r}{\bar{r}}(a+\frac{\bar{r}}{r}e)-\frac{r}{\bar{r}} \\ &< r+\frac{r}{\bar{r}}-\frac{r}{\bar{r}} = r\end{aligned}$$

tillader os at fortsætte

$$p+p\bar{p}P_n(\frac{a-r}{r\bar{r}}) = p+\bar{p}P_{n+1}(\frac{a-r}{\bar{r}}) = P_{n+2}(a)$$

Vi har nu bevist at *bold* er en optimal strategi for alle n i tilfælde 3. De andre tilfælde foregår på nogenlunde tilsvarende måde. Vi tillader os nu at konkludere at *bold* er en optimal strategi for $n = 0, 1, \cdots$ under de opstillede forudsætninger. □

2.3 The gambler's ruin

'*The gambler's ruin*' er en klassisk problemstilling, der omhandler sandsynligheden for at en spiller bliver ruineret. Man ønsker på baggrund af spillerens begyndelsesformue og ønskede målformue at vurdere sandsynligheden for, at hun på et eller andet tidspunkt går fallit, givet at hun følger en vis på forhånd fastlagt strategi.

Situationen er følgende: en spiller møder op med en formue, som er mindre end hendes målformue. Hun satser hele tiden én enhed. Strategien, der bestemmer indsatsen, er altså en konstant funktion. Vinder hun et spil, får hun to enheder i gevinst. Taber hun derimod spillet, mistes hele indsatsen. Spilleren fortsætter med at spille, indtil hun enten har opnået sit mål eller ikke har flere penge at satse. Vi ønsker nu et udtryk for sandsynligheden for, at spilleren går fallit.

I det foregående afsnit om *bold* strategien var det formålet at vise, at *bold* var en optimal strategi når man havde det mål at opnå en på forhånd fastlagt formue i et givet antal spil. Her er situationen en lidt anden, idet strategien allerede er fastlagt og antallet af spil ikke er begrænset. Det vi derimod ønsker at vide er sandsynligheden for at spilleren går fallit, forudsat at hun følger strategien. Givet man ønsker at spille et spil, der opfylder betingelserne kan man således benytte *the*

gambler's ruin til at vurdere i hvilket spil, sandsynligheden for at gå fallit er mindst.

I dette afsnit vil vi således beskrive en model, der udtrykker sandsynligheden for at blive ruineret, når sandsynligheden p for at vinde ét spil er forskellig fra $\frac{1}{2}$. Udledningen af denne model og modellen, hvor $p = \frac{1}{2}$ findes i appendix.

Vi forestiller os en spiller, der ønsker at erhverve sig en formue på N enheder, hvoraf spilleren i forvejen har formuen $k \leq N$. Spilleren går på casino og spiller gentagne gange et hasardspil med en indsats på én enhed per spil. Sandsynligheden for gevinst er p, hvor $p \in]0, 1[$.

Der kan indtræffe følgende to hændelser i hvert spil: enten vinder spilleren og modtager yderligere én enhed fra banken eller spilleren taber og mister den satsede enhed. Det antages, at spilleren fortsætter indtil én af to begivenheder indtræffer: enten har spilleren opnået en formue på N enheder eller spilleren er ruineret.

Til at bestemme sandsynligheden for at spilleren bliver ruineret, opstilles følgende model, der er rekursiv i k.

Lad $A(k)$ betegne den hændelse, at spilleren på et tidspunkt bliver ruineret, hvor k er begyndelsesformuen. Det antages således, at N er et fast tal, der er bestemt ud fra problemstillingen og at k kan variere i $\{0, 1, ..., N\}$. Lad desuden B være udtryk for den hændelse, at spilleren får gevinst i det første spil. Den komplementære hændelse til B, $\bar{B}$, er således udtryk for den hændelse, at spilleren ikke får gevinst i første spil.

For nemheds skyld indfører vi følgende notation: $P(A(k)) = P_k$, der er sandsynligheden for ruin med begyndelsesformuen k. $P_0 = 1$, da spilleren er ruineret fra starten og derfor ikke har noget at spille for. $P_N = 0$, da spilleren fra starten har opnået sit mål og derfor ikke behøver at spille. For alle andre $k \in \{1, 2, .., N-1\}$ har vi:

$$P_k = P(A(k)) = P([B \cap A(k)] \cup [\bar{B} \cap A(k)])$$

der er sandsynligheden for, at spilleren vinder første spil og bliver ruineret på lang sigt eller spilleren taber første spil og bliver ruineret på lang sigt. Da disse to hændelser er disjunkte i og med man ikke både

kan tabe og vinde det første spil på samme tid, kan P_k skrives som summen af sandsynlighederne for hver af hændelserne:

$$P_k = P(A(k) \cap B) + P(A(k) \cap \bar{B})$$

Vi kan således [1] omskrive ovenstående udtryk for P_k til:

$$P_k = P(A(k) \mid B)\ P(B) + P(A(k) \mid \bar{B})\ P(\bar{B}) \tag{2.11}$$

Vi vil lade $P(B) = p$ (sandsynligheden for gevinst i ét spil) og $P(\bar{B}) = (1-p)$.

$P(A(k) \mid B)$ er sandsynligheden for, at spilleren bliver ruineret, når begyndelsesformuen er k enheder og det er givet, at spilleren vinder det første spil. Situationen er altså den, at spilleren efter det første spil har $k+1$ enheder, hvorefter der spørges om sandsynligheden for, at spilleren bliver ruineret. Sandsynligheden for at en spiller bliver ruineret, når formuen er $k+1$ enheder er jo $P(A(k+1)) = P_{k+1}$. Vi har altså $P(A(k) \mid B) = P_{k+1}$.

I den anden situation har spilleren tabt det første spil; dvs formuen er på $k-1$ enheder. Derefter spørges der om sandsynligheden for, at spilleren bliver ruineret. Dette fører til følgende sammenhæng: $P(A(k) \mid \bar{B}) = P(A(k-1)) = P_{k-1}$. Ved indsættelse i (2.11) får vi følgende udtryk :

$$P_k = P_{k+1}\ p + P_{k-1}(1-p)$$

Dette er en rekursionsformel, hvor $k \in \{1, 2, ...N-1\}$, $P_0 = 1$ og $P_N = 0$.

Opgaven er at bestemme sandsynligheden for at blive ruineret for alle k ud fra dette ligningssystem, der er en differensligning. Denne differensligning er udledt i appendix, og løsningen bliver:

$$P_k = \frac{(\frac{1-p}{p})^k - (\frac{1-p}{p})^N}{1 - (\frac{1-p}{p})^N} \qquad \text{for } p \neq \frac{1}{2} \tag{2.12}$$

[1] Ifølge definitionen på betinget sandsynlighed gælder det, at $P(A(k) \cap B) = P(A(k) \mid B)\ P(B)$

Hvis $p = \frac{1}{2} = 1 - p$, må sagen af tekniske årsager gribes an på en lidt anden måde. I så fald bliver løsningen

$$P_k = 1 - \frac{k}{N} \qquad \text{for } p = \frac{1}{2} \tag{2.13}$$

Spiller man kun et fastsat antal spil, kan man ikke direkte anvende denne model, idet den beskriver sandsynligheden for at gå fallit over et længerevarende forløb. Modellen kan dog anvendes, hvis man antager at det enkelte spil overtager sandsynligheden og denne værdi benyttes så som en form for odds. Nedenstående er et eksempel på hvordan *the gambler's ruin* kan benyttes.

Anvendelse af The Gambler's Ruin på roulette

Modellen for *the gambler's ruin* er meget følsom for værdien af p, hvilket ses af de følgende to eksempler. I første eksempel har vil valgt europæisk roulette hvor sandsynligheden for at vinde, når man spiller rød-sort er $\frac{18}{37}$. I andet eksempel har vi valgt $p = \frac{1}{2}$. Vi vælger et fast $N = 1000$ og lader k variere.

$P_{100} = 1$	$P_{100} = 0,9$
$P_{500} = 1$	$P_{500} = 0,5$
$P_{900} = 0,996$	$P_{900} = 0,1$
$P_{990} = 0,418$	$P_{990} = 0,01$
$P_{995} = 0,237$	$P_{995} = 0,005$
$P_{999} = 0,053$	$P_{999} = 0,001$

Ud fra disse beregningseksempler ses det, at selv om en spillers begyndelsesformue er tæt på det forudbestemte mål, er sandsynligheden for at blive ruineret bemærkelsesværdig stor, når $p < \frac{1}{2}$.

Tilsvarende beregninger kan udføres for andre spil, der opfylder de førnævnte spilleregler. Det er på denne måde muligt at vurdere sandsynligheden for at gå fallit i forskellige spil og dermed foretage en sammenligning.

2.4 Delkonklusion

Den virkelighedssituation vi har behandlet i dette kapitel består af flere faktorer - et roulettehjul og en kugle, der lander i et af felterne samt

spilleregler for minimum og maximum indsats, tilbagebetaling, spillernes indsats mm.

Spilleregler og tilbagebetaling er omstændigheder, der forholdsvis nemt og uden informationstab kan oversættes til den matematiske verden. Man kan sige at de på forhånd er fastlagt ved konvention. De egentlige vanskeligheder består i at få modelleret den del af virkeligheden, der ikke på forhånd er fastlagt. I tilfældet roulettespil drejer det sig f.eks om hvor kuglen vil lande. Dette er et stokastisk element, da det ikke er muligt at forudsige, hvad hændelsen vil blive. Man har istedet mulighed for at angive en sandsynlighed for hver enkelt af de mulige hændelser. Disse sandsynligheder afhænger af de fysiske rammer eksperimentet udspiller sig inden for. De afgørende faktorer er f.eks roulettehjulets snurren, kuglens bevægelse osv. Via en principmodel er det bestemt, at sandsynligheden for at kuglen lander i et felt er lige stor for alle felter. Denne principmodel udgør en del af idealiseringen fra virkelighed til det matematiske univers. Derudover antages det, at hvert spil er uafhængigt af de foregående spil. Givet disse idealiseringer er man således i stand til at modellere det virkelighedsområde, der udgøres af roulettespillet. Det skal nævnes, at man i stedet for en principmodel kunne have valgt at udarbejde en fysisk model til at fastlægge sandsynlighederne. En sådan fysisk model ville kræve adgang til egentlige data.

Tænker man på roulettespil på et casino er der flere stokastiske elementer involveret. Vi har i kapitlet koncentreret os om at se situationen fra en spillers synspunkt og gør man det består systemet udelukkende af det nævnte stokastisk element, nemlig hvor kuglen vil lande.

Ser man i stedet situationen ikke fra en spillers men fra casinoets side er situationen ikke den samme. Hvor kuglen vil lande er stadig et stokastisk element, men ikke længere det eneste. Fra casinoets synspunkt er også spillernes opførsel stokastisk; hvilke felter de vil spille på og med hvilken indsats, altså deres strategi. Hver enkelt spiller ved hvorledes hun vil opføre sig, men da hendes spil er uafhængigt af de andre spilleres spil er dette element uden betydning for hver enkelt spiller. (Uafhængigheden skyldes at tilbagebetalingsparameteren er fast og ikke afhænger af hvor mange spillere, der spiller på det samme.) Dette element er derimod ikke uinteressant for casinoet, der vil være interesseret i at kunne vurdere deres gæsters spillestrategi og på denne måde også vurdere sandsynligheden for ikke at have nok penge til at udbetale

alle gevinster.

Da vi i selve kapitlet kun har beskæftiget os med spillerens synsvinkel vil resten af delkonklusionen kun omhandle denne form for model.

Når man ved hjælp af de ovenstående idealiseringer har fået repræsenteret virkelighedsområdet har man mulighed for at spørge, om sandsynligheden for at man efter k ens forsøg har haft succes i n tilfælde. Hertil benyttes binomialmodellen. For at kunne benytte binomialmodellen skal situationen opfylde to vigtige forudsætninger; dels skal der være uafhængighed mellem hændelserne og dels er der kun to mulige hændelser (succes og fiasko). Binomialmodellen giver imidlertid ikke svar på sandsynligheden for at man har nået det fastsatte mål. Dertil har man behov for at kende spillestrategien. Med kendskab til strategien har man nu mulighed for at spørge om sandsynligheden for at man efter k forsøg har nået målet.

Modeller udgør således grundlaget for en beslutning om, hvorledes der skal ageres; der er altså tale om en handlingsrettet model.

Bag hver af de behandlede strategier ligger nogle antagelser om spillereglerne, om spillerens økonomiske startsituation og hendes intentioner med spillet. Generelt gælder det for alle spillestrategierne at der forventes, at det er tilladt at satse det beløb, som strategien påbyder en. Dette vil ikke altid kunne lade sig gøre i realiteten, idet der fra casinoets side er lagt en begrænsning for anvendelsen af disse strategier. Denne begrænsning består i at der er fastlagt et øvre loft for indsatsen. Derudover er der en tilsvarende begrænsning i form af en mindsteindsats, hvilket betyder at det ikke altid vil være muligt at satse det beløb, strategien byder på grund af casinoets mindste 'møntfod', jeton. Er jetonen med den mindste værdi eksempelvis 20 kr værd, kan man kun opnå målformuer, som er et multiplum af 20 kr. Udover casinoets begrænsninger eksisterer der yderligere en begrænsende faktor, idet man som spiller af naturlige årsager ikke kan spille uendeligt mange spil.

Strategien vælges udfra det mål spilleren har og til hver strategi hører visse forudsætninger.

- **Udstregningssystemet**
  Her er målet at opnå en på forhånd fastlagt målformue, men der er ingen fast startformue. Som spiller har man en uendelig

række spil til sin rådighed. Opskriv en række tal, hvis sum er lig målformuen. Sats derefter summen af de to yderste tal og spil indtil der ikke står flere tal i rækken eller indtil fallit.

- **Martingale**
  Har man som mål blot at opnå et overskud virker *martingale* som en sikker strategi forudsat at man har en uendelig formue og en uendelig mængde spil til sin rådighed. Hver gang et spil tabes, satses det dobbelte af før; stop efter første vundne spil.

- **Bold**
  Er målet at opnå en på forhånd fastlagt formue udfra en given startformue og n antal spil til rådighed er *bold* en optimal strategi. Sats den akkumulerede formue, indtil $\frac{1}{r}$ af målformuen er opnået. Sats herefter et sådant beløb, at målformuen vil være opnået i tilfælde af et vundet spil.

- **The gambler's ruin**
  For at *the gambler's ruin* kan udtale sig om sandsynligheden for at gå fallit kræves en fast start- og målformue og vilkårligt mange spil til rådighed. *The gambler's ruin* bygger på den strategi at der i hvert spil satses netop én enhed og at et vundet spil medfører en gevinst på én enhed.

Selvom der som netop nævnt til visse af strategierne hører forudsætninger, der ikke er opnåelige i virkeligheden (eksempelvis uendelig startformue og uendelig mange spil til rådighed), kan man som spiller alligevel bruge vurderingen af disse strategier. En beskrivelse, som den vi har foretaget i projektrapporten, vil nemlig give et vink om, hvorvidt en strategi kan betragtes som værende forholdsvis sikker.

Kapitel 3

Poissonprocesser

Vi har i foregående kapitel benyttet os af binomialfordelingen, der er en stokastisk model for tælling af hændelser, der foregår til diskret tid. Poissonprocesser er ligeledes stokastiske modeller af denne type, dog med visse forskelle, deriblandt at Poissonprocesser foregår til kontinuert tid.

En stokastisk proces og dermed også en Poissonproces er en matematisk model for stokastiske fænomener, der optræder i tiden (ved tiden skal ikke kun forstås egentlig tid, men også former for idealiseret tid, såsom længde). Når man vil beskrive, hvorledes denne proces er indrettet, må man se på de tidsafhængige stokastiske variable, der indgår i modellen og deres fordelinger. Fordelingerne er en beskrivelse af med hvilken sandsynlighed forskellige udfald forekommer. Når vi i dette kapitel ønsker at beskrive Poissonprocesser hører det derfor også med, hvorledes de stokastiske variable fordeles.

Poissonprocesser anvendes i forbindelse med tælling af hændelser, der indtræffer på tilfældige tidspunkter i et kontinuert tidsspektrum, nærmere bestemt $[0, \infty[$. Hændelserne tilhørende disjunkte tidsintervaller antages at være uafhængige af hinanden og kan opfattes som ankomster. Man kan i forbindelse med ankomstsituationer ønske at kende sandsynligheden for forskellige hændelser. Spørgsmålene, som man ved hjælp af modellen ønsker at få svar på, falder i to kategorier: en, hvor det er antallet af hændelser, der er interessant og en, hvor det er tiden, der er interessant. Tiden kan i denne forbindelse være enten et ankomsttidspunkt eller en ventetid mellem to ankomster.

Vi vil i dette kapitel starte med at se på sandsynlighedsfordelingen for den stokastiske variabel, der beskriver antallet af hændelser i tidsintervallet $[0, t]$. Dette gøres ved at udlede denne sandsynlighedsfordeling, som viser sig at være Poissonfordelingen. Derefter vil vi beskæftige os med sandsynlighedsfordelingen for den anden stokastiske variabel, altså den der beskriver ankomst- og ventetider. Denne sandsynlighedsfordeling viser sig at være eksponentialfordelingen. Disse to sandsynlighedsfordelinger er karakteristiske for den homogene Poissonproces.

Efter afsnittet om sandsynlighedsfordelinger vil vi udvide modellen til også at omfatte inhomogene Poissonprocesser og ligeledes kort skitsere ideen i punktprocesser. For at introducere nogle af de synsvinkler man kan anlægge til virkelighedsområdet har vi medtaget to modelkategorier inden for Poissonprocesser; fødsels- og dødsprocesser samt køteori. Vi har ligeledes medtaget en række af små eksempler, som en slags demonstration af hvor vidtspændende Poissonprocesser er. Gennem disse eksempler vil vi samtidig synliggøre, hvordan en situation kan indeholde forskellige problemstillinger.

Til sidst i kapitlet har vi omtalt to cases, der viser situationer, hvor Poissonprocesser er blevet benyttet til at modellere virkelige fænomener og ikke blot er blevet brugt som skrivebordsmodeller.

3.1 Sandsynlighedsfordelinger

Poissonfordelingen

Vi har i dette afsnit fortrinsvis støttet os til vores vejleders introduktion til teorien. Dette specielt med henblik på at opstille sandsynlighedsfunktionen for Poissonprocessen.

Man ønsker en model, der beskriver sandsynligheden for, at x antal hændelser er indtruffet til et fast tidspunkt t.

Lad A betegne en hændelse og lad den stokastiske variabel $X(t)$ angive antallet af gange hændelsen A er indtruffet til og med tiden t. For at opstille modellen, der skal beskrive disse situationer, er det nødvendigt at gøre nogle forudsætninger. Vi har i overensstemmelse med sædvanlig praksis valgt at gøre følgende fire.

1. $X(0) = 0$.

2. Antallet af forekomster af A i disjunkte tidsintervaller er indbyrdes uafhængige.

3. Sandsynligheden for at A indtræffer netop en gang i tidsintervallet $]t, t+h]$ (hvor h er et lille tidsskridt) er tilnærmelsesvis proportional med intervallængden og desuden uafhængig af t. Denne sandsynlighed antages således at have formen $\lambda h + o(h)$, hvor λ kaldes intensiteten.

4. Sandsynligheden for at A forekommer mere end én gang i et lille interval med længden h er $o(h)$.

Vi ønsker nu at kende fordelingen af antallet af forekomster af A til og med tidspunktet t, altså

$$P_t(x) = P\{X(t) = x\}$$

til ethvert tidspunkt t og for $x = 0, 1, 2, \cdots$.

Vi betragter nu hændelsen $\{X(t+h) = x\}$. Denne hændelse kan opdeles i tre hændelser:

1. Alle x hændelser er sket i intervallet $[0, t]$ og der sker således ikke flere hændelser i næste interval $]t, t+h]$.

2. Der er sket $x-1$ hændelser i $[0, t]$ og én hændelse i $]t, t+h]$.

3. Der er forekommet færre end $x-1$ hændelser i $[0, t]$ og resten (mindst to) af hændelserne forekommer således i $]t, t+h]$.

Samlet kan sandsynligheden for hændelsen $\{X(t+h) = x\}$ derfor udtrykkes som:

$$\begin{aligned} P\{X(t+h) = x\} = P\,(&\{X(t) = x, \text{ ingen hændelser i }]t, t+h]\} \\ &\cup\{X(t) = x-1, \text{ én hændelse i }]t, t+h]\} \\ &\cup\{X(t) < x-1, \text{ resten i }]t, t+h]\}) \end{aligned}$$

Da de tre hændelser er disjunkte gælder følgende:

$$\begin{aligned}
P_{t+h}(x) &= P\{X(t+h)=x\} \\
&= P\{X(t)=x, \text{ ingen hændelser i }]t,t+h]\} \\
&\quad +P\{X(t)=x-1, \text{ én hændelse i }]t,t+h]\} \\
&\quad +P\{X(t)<x-1, \text{ resten i }]t,t+h]\} \\
&= PB_1+PB_2+PB_3
\end{aligned}$$

Sandsynlighederne for de enkelte hændelser PB_1, PB_2 og PB_3 er bestemt således (undervejs har vi benyttet, at der for uafhængige hændelser gælder, at sandsynlighederne multipliceres):

$$\begin{aligned}
PB_1 &= P\{X(t)=x, \text{ ingen hændelser i }]t,t+h]\} \\
&= P\{X(t)=x\}\ P\{\text{ingen hændelser i }]t,t+h]\} \\
&= P_t(x)(1-P\{\text{én hændelse indtræffer i }]t,t+h]\}) \\
&= P_t(x)(1-\lambda h+o(h))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
PB_2 &= P\{X(t)=x-1, \text{ netop én i }]t,t+h]\} \\
&= P\{X(t)=x-1\}\ P\{\text{netop én i }]t,t+h]\} \\
&= P_t(x-1)\ (P\{\text{én hændelse indtræffer i }]t,t+h]\} \\
&\quad -P\{\text{hændelse sker to eller flere gange i }]t,t+h]\}) \\
&= P_t(x-1)\ (\lambda h+o(h)-o(h)) \\
&= P_t(x-1)\ (\lambda h+o(h))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
PB_3 &= P\{X(t)<x-1, \text{ resten i }]t,t+h]\}) \\
&= \sum_{j=0}^{x-2} P\{X(t)=j\}\ P\{\text{resten i }]t,t+h]\}) \\
&= \sum_{j=0}^{x-2} P_t(j)\ o(h) \\
&= o(h)
\end{aligned}$$

Samlet har vi nu:

$$\begin{aligned}
P_{t+h}(x) &= PB_1+PB_2+PB_3 \\
&= P_t(x)\ (1-\lambda h+o(h))+P_t(x-1)\ (\lambda h+o(h))+o(h) \\
&= P_t(x)\ (1-\lambda h)+P_t(x-1)\ \lambda h+o(h)
\end{aligned}$$

Vi ønsker nu at udtrykke dette som en differenskvotient.

$$\frac{P_{t+h}(x) - P_t(x)}{h} = \lambda P_t(x-1) - \lambda P_t(x) + o(1) \tag{3.1}$$

hvor $x = 1, 2, \cdots$.

Vi antager, at den funktion, der fører t over i $P_t(x)$ er differentiabel for ethvert $x = 0, 1, \cdots$. Hvis vi lader $h \to 0$, vil (3.1) gå mod differentialkvotienten

$$P_t'(x) = \frac{dP_t(x)}{dt} = \lambda P_t(x-1) - \lambda P_t(x), \qquad x = 1, 2, \cdots \tag{3.2}$$

Bevis : Vi ønsker nu ved induktion at finde et udtryk, der beskriver sandsynligheden for, at hændelsen A til og med tiden t er forekommet netop x gange. Dette udtryk er lig formel (3.6), som vi altså nu vil vise.

Først undersøges startbetingelsen $x = 0$. I denne situation er både PB_2 og PB_3 lig 0, så

$$P_{t+h}(0) = P_t(0)\ (1 - \lambda h + o(h))$$

hvilket medfører

$$P_t'(0) = \frac{dP_t(0)}{dt} = -\lambda P_t(0) \tag{3.3}$$

Den generelle løsning til (3.3) er

$$P_t(0) = ce^{-\lambda t}$$

Da $P_0(0) = P\{X(0) = 0\} = 1$ er $c = 1$, hvilket betyder, at

$$P_t(0) = e^{-\lambda t}$$

Dette er altså startbetingelsen og da vi har nu gjort rede for, hvad der sker i tilfældet $x = 0$ og kan således vende tilbage til differentiallignin-gen for $x = 1, 2, \cdots$.
Vi vil nu antage at følgende udsagn er sandt.

$$P_t(x-1) = e^{-\lambda t}\ \frac{(\lambda t)^{x-1}}{(x-1)!} \tag{3.4}$$

Ovenstående udtryk indsættes nu i (3.2)

$$P_t'(x) = -\lambda P_t(x) + \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{x-1}}{(x-1)!} \tag{3.5}$$

Dette udtryk er en 1. ordens lineær inhomogen differentialligning, hvis løsning vi ønsker at bestemme.

En 1.ordens lineær inhomogen differentialligning af formen

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$$

har den generelle løsning

$$y(t) = e^{A(t)} \left(c + \int b(u)e^{-A(u)}du\right), \qquad \text{hvor } A(t) = \int a(u)du$$

For overskuelighedens skyld vil vi skrive, hvad $y(t)$, $a(t)$ og $b(t)$ er i vores tilfælde; nemlig

$$\begin{aligned} y(t) &= P_t(x) \\ a(t) &= -\lambda \\ b(t) &= \lambda\, e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{x-1}}{(x-1)!} \end{aligned}$$

Indsættes dette i den generelle løsningsformel fås

$$\begin{aligned} P_t(x) &= e^{-\lambda t} \left(c + \int \lambda\, e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{x-1}}{(x-1)!}\, e^{\lambda t} dt\right) \\ &= e^{-\lambda t} \left(c + \int \lambda\, \frac{(\lambda t)^{x-1}}{(x-1)!} dt\right) \\ &= e^{-\lambda t} \left(c + \frac{(\lambda t)^{x}}{x!}\right) \end{aligned}$$

Ved indsættelse af $t = 0$ fås, at $c = 0$, og udtrykket bliver således

$$P_t(x) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^x}{x!} \tag{3.6}$$

Ovenstående ligning udtrykker sandsynligheden for at hændelsen A til og med tiden t er forekommet netop x gange. Denne sandsynlighed siges at være Poissonfordelt med en parameter, som er intensiteten λ gange den forløbne tid t. □

Den generelle Poissonfordeling, der er uafhængig af tiden og hvor parameteren derfor betegnes med $\mu > 0$, er

$$P(x) = e^{-\mu}\frac{\mu^x}{x!}, \qquad x = 0, 1, 2, \cdots \tag{3.7}$$

For at godtgøre, at der er tale om en sandsynlighedsfunktion, vil vi vise at sandsynligheden summerer til 1.

$$\sum_{x=0}^{\infty} P(x) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{-\mu}\frac{\mu^x}{x!} = e^{-\mu}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\mu^x}{x!} = e^{-\mu}\, e^{\mu} \;=\; 1$$

Poissonfordelingens middelværdi

Poissonfordelingens middelværdi kan udregnes på følgende måde.

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^{\infty} x e^{-\mu}\frac{\mu^x}{x!} \\ &= \mu\sum_{x=1}^{\infty} e^{-\mu}\frac{\mu^{x-1}}{(x-1)!} \\ &= \mu e^{-\mu}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\mu^x}{x!} \\ &= \mu e^{-\mu} e^{\mu} \\ &= \mu \end{aligned}$$

Poissonfordelingen bruges til at angive sandsynligheden for, at der til en fastlagt tid er indtruffet et vist antal hændelser. Man kan også ændre synsvinkel og i stedet ønske at kende sandsynligheden for diverse vente- og ankomsttider for hændelser. Disse vente-/ ankomsttider mellem Poissonfordelte hændelser er eksponentialfordelt.

Eksponentialfordelingen

Vi vil i dette afsnit vise den ovenstående påstand, nemlig at vente- og ankomsttiderne mellem Poissonfordelte hændelser er eksponentialfordelte. For at vise dette er vi først nødt til at indføre begreberne tætheds- og fordelingsfunktioner.

Vi ønsker at kende sandsynligheden for, at en hændelse sker i kontinuert tid indenfor et bestemt tidsinterval, altså $P\{X \in]s, t]\}$. Først

bestemmes sandsynligheden for, at hændelsen er indtruffet til og med tiden t, $P\{X \in]-\infty, t]\}$. Denne funktion kaldes **fordelingsfunktionen** $F(t)$, det vil sige $F(t) = P\{X \in]-\infty, t]\}$. Problemet er nu reduceret til kun at afhænge af t og ikke også af s. Fordelingsfunktionen har følgende karakteristika:

- $F(t)$ er svagt voksende, dvs at $t_1 < t_2 \Rightarrow F(t_1) \leq F(t_2)$.
- F er kontinuert fra højre.
- $F(t) \to 1$ for $t \to \infty$.
- $F(t) \to 0$ for $t \to -\infty$.

De fordelingsfunktioner vi arbejder med er differentiable på nær i endelig mange punkter; er dette tilfældet eksisterer $F'(t) = f(t)$ i alle andre end disse punkter, hvor $f(t)$ betegnes **tæthedsfunktionen** for F. Tæthedsfunktionen er karakteriseret ved nedenstående:

- $f(t)$ er ikke negativ.
- Integralet af f er lig 1.
- f er integrabel på ethvert interval.

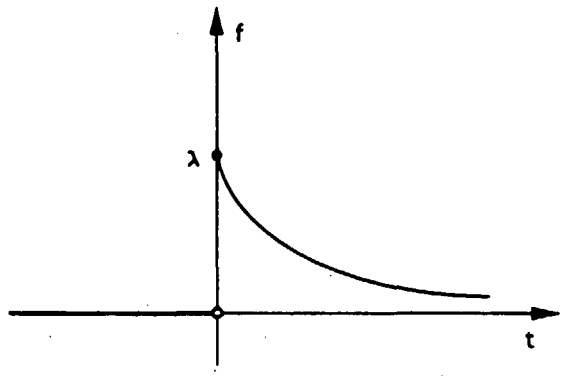
Der er altså etableret følgende sammenhæng mellem tætheds- og fordelingsfunktionen:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(u)du$$

Vi kan nu bestemme det ønskede, nemlig $P\{X \in]s, t]\}$.

$$\begin{aligned} P\{X \in]s,t]\} &= P\{X \in]-\infty, t]\} - P\{X \in]-\infty, s]\} \\ &= F(t) - F(s) \\ &= \int_{s}^{t} f(u)du \end{aligned}$$

Sandsynligheden for, at X ligger i intervallet $[s, t]$, er således lig integralet af tæthedsfunktionen over intervallet.



Figur 3.1: Illustration af eksponentialfordelingens tæthedsfunktion

Hvis en funktion har de egenskaber, der er karakteristiske for en fordelingsfunktion ved man, at der er tale om en fordelingsfunktion for en stokastisk variabel. Tilsvarende gælder, at eksisterer der en funktion med de egenskaber en tæthedsfunktion har, er det en tæthedsfunktion for en tilhørende fordelingsfunktion.

Specifikt gælder, at eksponentialfordelingen med parameter λ har en tæthedsfunktion, der er defineret på følgende vis:

$$f(t) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Om tæthedsfunktionen gælder, at $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt = 1$.

Efter at have klarlagt disse begreber kan vi således vise, at ventetiderne mellem Poissonfordelte ankomster er eksponentialfordelt.

Bevis : Vi forestiller os nu, at vi har en ankomstsituation, der er Poissonfordelt med parameter λ.

$$P\{X(t) = x\} = P_t(x) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^x}{x!}$$

Vi indfører en ny stokastisk variabel Y, der er ventetiden inden første ankomst. Denne stokastiske variabel lader vi løbe fra det tidspunkt, hvor ankomsten straks sker til det tidspunkt, hvor den aldrig vil forekomme, det vil sige, at $Y \in [0, \infty[$. Hvis $Y \leq t$, betyder det, at den første ankomst sker før tiden t. Omvendt betyder $Y > t$, at den første ankomst først indtræffer efter tiden t, hvilket også kan udtrykkes som $X(t) = 0$, da $X(t)$ er Poissonfordelt. Fordelingsfunktion for Y er således

$$\begin{aligned} F(t) = P\{Y \leq t\} &= 1 - P\{Y > t\} \\ &= 1 - P\{X(t) = 0\} \\ &= 1 - e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Ovenstående udtryk gælder for $t \geq 0$ og fordelingsfunktionen kan derfor skrives som

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Fordelingsfunktionen er differentiabel overalt på nær i 0.

Dette giver den tilhørende tæthedsfunktion, der ser således ud

$$F'(t) = f(t) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Dette er netop definitionen på eksponentialfordelingens tæthedsfunktion og ventetiden til den første Poissonfordelte ankomst er derfor eksponentialfordelt. □

Vi har nu vist, at har vi en Poissonfordelt ankomstsituation, da er ventetiderne mellem ankomsterne eksponentialfordelt. Tilsvarende gælder, at antallet af ankomster, hvis ventetider er eksponentialfordelt, er Poissonfordelt, hvilket vi dog ikke vil vise.

Da de to fordelinger optræder på denne måde, siger man, at Poisson- og eksponentialfordelingen er hinandens duale. Således består en Poissonproces af to typer stokastiske variable; antallet af ankomster, der er Poissonfordelt og ankomst-/ ventetider, der er eksponentialfordelt.

Eksponentialfordelingen er af natur 'hukommelsesløs'. I praksis betyder dette, at sandsynligheden for at vente en bestemt tid er uafhængig

af, om man allerede har ventet og i så fald hvor længe. Dette betyder, at fordelingen indtil første ankomst er den samme som fra første til anden ankomst og så fremdeles.

Matematisk kan dette udtrykkes som:

En stokastisk variabel Y siges at være hukommelsesløs, hvis følgende er opfyldt

$$P\{Y > s+t \mid Y > t\} = P\{Y > s\} \qquad \text{for alle s,t} \geq 0 \tag{3.8}$$

Bevis : Lader vi Y betegne levetiden for et 'individ', hvor individ kan dække over forskellige fænomener eksempelvis partikler, så udtrykker ovenstående ligning sandsynligheden for, at individet lever i mere end $s+t$ timer givet, at det har overlevet i mere end t timer. Dette er lig med sandsynligheden for, at individet lever i mere end s timer. Med andre ord; hvis individet har overlevet til tid t, så er fordelingen af den tid individet endnu har at leve i det samme som den oprindelige levetidsfordeling. Dette betyder, at individet ikke kan huske, at det allerede har overlevet tiden t.

Betingelsen i (3.8) kan omskrives til

$$\frac{P\{Y > s+t \cap Y > t\}}{P\{Y > t\}} = P\{Y > s\}$$

eller [1]

$$P\{Y > s+t\} = P\{Y > s\}\ P\{Y > t\}$$

For eksponentialfordelingen betyder dette, at $e^{-\lambda(s+t)} = e^{-\lambda s}e^{-\lambda t}$, hvilket er et korrekt udsagn. På baggrund af dette følger det, at eksponentialfordelte stokastiske variable er hukommelsesløse. □

[1] da $\{Y > s+t \cap Y > t\} = \{Y > s+t\}$

Eksponentialfordelingens middelværdi

Indtil nu har vi behandlet to forskellige problemstillinger - et omhandlende antal hændelser og et omhandlende ventetider. Vi kunne desuden ønske at kende fordelingens middelværdi. For en stokastisk variabel med tæthed $f(x)$ er middelværdien $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\ f(x)\ dx$. For eksponentialfordelingen er middelværdien

$$E(X) = \int_0^{\infty} x\ \lambda e^{-\lambda x}\ dx$$

Ved partiel integration fås let

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Dette var hvad man kunne forvente; når λ er det gennemsnitlige antal ankomster per tidsenhed, så er afstanden mellem to på hinanden følgende ankomster lig $\frac{1}{\lambda}$.

3.2 Inhomogene Poissonprocesser

De ovenstående udledninger og overvejelser gælder for homogene Poissonprocesser, når intensiteten blot var konstant. Vi vil i dette afsnit behandle situationer, hvor intensiteten ikke er konstant, men derimod afhænger af tiden eller tilstanden. I disse tilfælde kaldes Poissonprocessen inhomogen.

Tidsafhængige Poissonprocesser

I de tilfælde hvor intensiteten afhænger af tiden og derfor betegnes $\lambda(t)$ bliver ankomstprocessen en Poissonproces med parameter $\int_0^t \lambda(u)\ du$. Dette kan udledes på følgende vis:

Hvis vi i ligning (3.2) erstatter λ med $\lambda(t)$ fås

$$P_t'(x) = \frac{P_t(x)}{dt} = \lambda(t)P_t(x-1) - \lambda(t)P_t(x) \tag{3.9}$$

Under antagelse af, at λ er integrabel, hvilket i praksis er opfyldt, hvis λ er (stykkevis) kontinuert, definerer vi nu

$$\phi(t) = \int_0^t \lambda(u)du, \text{ hvilket medfører } \phi'(t) = \lambda(t)$$

Benyttes denne nye funktion kan (3.9) skrives som

$$P_t'(x) = -\phi'(t)P_t(x) + \phi'(t)P_t(x-1) \tag{3.10}$$

Ovenstående ligning er en 1. ordens lineær inhomogen differentialligning. Denne ligning kan løses efter samme metode som ligning (3.2) i den tidsuafhængige Poissonproces. Da intensiteten her er tidsafhængig spiller $\int_0^t \lambda(u)du = \phi(t)$ rollen af λt.

Ved induktion fås således følgende udtryk

$$P_t(x) = e^{-\phi(t)}\frac{\phi(t)^x}{x!}$$

Tidligere definerede vi $\phi(t)$ til at være $\int_0^t \lambda(u)du$ og således kan vi opskrive det endelige udtryk for sandsynlighedsfunktionen for den såkaldte tidsafhængige Poissonproces.

$$P_t(x) = e^{-\int_0^t \lambda(u)du}\frac{(\int_0^t \lambda(u)du)^x}{x!} \tag{3.11}$$

I den inhomogene Poissonproces er parameteren således $\int_0^t \lambda(u)du$. Bemærk, at den inhomogene Poissonproces kan opfattes som en generalisering af den homogene, idet følgende gælder: Er λ konstant, vil det medføre, at $\int_0^t \lambda(u)du = \lambda t$.

Man kan også forestille sig den situation, at intensiteten ikke er konstant i hele tidsperioden, men at perioden kan opdeles i intervaller, hvor intensiteten tilnærmelsesvis er tidsuafhængig og dermed konstant. Perioden er da opdelt i intervaller, hvori antallet af hændelser er Poissonfordelte. Således er det nogle gange muligt at opsplitte en inhomogen Poissonproces til en række homogene Poissonprocesser.

Udover den tidsafhængige intensitet, som medfører en inhomogen Poissonproces er der også andre komplikationer, som kan resultere i en inhomogen Poissonproces. Et eksempel på en sådan situation er totilstandsprocessen.

To-tilstandsprocesser

En proces, der kun kan befinde sig i to forskellige tilstande, kaldes en to-tilstandsproces. Denne type processer vil vi beskrive ved hjælp af et forholdsvis generelt eksempel, der bygger på en note fra vores vejleder.

Situationen er følgende: Vi antager, at telefonopkald ankommer til en central og at antallet af opkald er Poissonfordelt med parameter λ. Telefonlinien kan befinde sig i en af to tilstande: optaget eller fri. Er linien optaget, bortfalder opkaldet. Er linien derimod fri, begynder samtalen, hvis længde antages at være eksponentialfordelt med parameter μ. Vi ønsker at omformulere sidstnævnte antagelse, sådan at også den har en sammenhæng med Poissonfordelingen. Dette gøres ved at opfatte ophøret af telefonsamtalen som en Poissonfordelt ankomstsituation med intensitet μ. Således er denne inhomogene Poissonproces sammensat af to homogene Poissonprocesser.

Den tilstand at linien er fri betegnes A og den tilstand at linien er optaget betegnes B. Vi ønsker nu at bestemme følgende sandsynligheder:

$P_{AA}(t)$ = sandsynligheden for at linien er fri til tid t, givet at den var fri til tid 0.

$P_{AB}(t)$ = sandsynligheden for at linien er optaget til tid t, givet at den var fri til tid 0.
$= 1 - P_{AA}(t)$

De to sandsynligheder $P_{BA}(t)$ og $P_{BB}(t)$ er defineret på tilsvarende vis. Vi har dog valgt kun at finde udtryk for $P_{AA}(t)$ og $P_{AB}(t)$.

Vi betragter sandsynligheden $P_{AA}(t+h)$, hvor h er udtryk for en lille tilvækst i tid. Den hændelse, at linien er fri til tid $t+h$, givet at den var fri til tid 0 (altså hændelse AA), kan indtræffe på en af følgende to disjunkte måder:
- Linien var både fri til tiden t og i intervallet $]t, t+h]$.
- Linien var optaget til tiden t, men blev fri i intervallet $]t, t+h]$.

I begge tilfælde er forudsat, at linien var fri til tid 0. Den anden mulige hændelse, at linien udover at være fri til tid t og tid $t+h$ har været

optaget i et delinterval af $]t, t+h]$, antages at indtræffe med sandsynligheden $o(h)$. Der kan derfor ses bort fra dette tilfælde.
De to disjunkte hændelser kan skrives således[2]

$$\begin{aligned}
&P\{\text{fri til tid } t \text{ og fri i }]t, t+h] \mid \text{fri til tid } t = 0\} \\
&= P\{\text{fri til tid } t \mid \text{fri til tid } 0\} \\
&\quad P\{\text{ingen opkald i }]t, t+h] \mid \text{fri til tid } 0 \text{ og til tid } t\} \\
&= P_{AA}(t)(1 - \lambda h + o(h))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&P\{\text{optaget til tid } t \text{ og fri i }]t, t+h] \mid \text{fri til tid } t = 0\} \\
&= P\{\text{optaget til tid } t \mid \text{fri til tid } 0\} \\
&\quad P\{\text{ophør at samtale i }]t, t+h] \mid \text{fri til tid } 0, \text{ optaget til } t\} \\
&= P_{AB}(t)(\mu h + o(h))
\end{aligned}$$

Samlet betyder dette at

$$\begin{aligned}
P_{AA}(t+h) &= (1 - \lambda h + o(h))\, P_{AA}(t) \\
&\quad +(\mu h + o(h))\, P_{AB}(t) \\
&\quad +o(h)
\end{aligned}$$

Vi danner nu som sædvanlig differenskvotienten

$$\begin{aligned}
\frac{P_{AA}(t+h) - P_{AA}(t)}{h} &= -\lambda P_{AA}(t) + \mu P_{AB}(t) + o(1) \\
&= -(\lambda + \mu) P_{AA}(t) + \mu + o(1)
\end{aligned}$$

Lader vi nu $h \to 0$, fås følgende 1. ordens lineære inhomogene differentialligning

$$P'_{AA}(t) = -(\lambda + \mu) P_{AA}(t) + \mu,$$

som har løsningen

$$P_{AA}(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\, e^{-(\lambda+\mu)t}$$

[2]Vi har her benyttet den generelle egenskab, at

$$\begin{aligned}
P(A \cap B \mid C) &= \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} \\
&= \frac{P(A \mid B \cap C)\, P(B \cap C)}{P(C)} \\
&= P(A \mid B \cap C)\, P(B \mid C)
\end{aligned}$$

(Vi har her benyttet, at $P_{AA}(0) = 1$)

Ved at anvende, at $P_{AB}(t) = 1 - P_{AA}(t)$, fås at

$$P_{AB}(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$$

Vi ønsker nu et udtryk for grænseværdierne og lader derfor $t \to \infty$, hvorved følgende udtryk opnås

$$P_{AA}(t) \to \frac{\mu}{\lambda + \mu} \text{ for } t \to \infty$$

$$P_{AB}(t) \to \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \text{ for } t \to \infty$$

For lige at opsummere: Vi har nu fundet udtryk for følgende to sandsynligheder - sandsynligheden for at linien er fri til tid t, givet at den var fri til tid 0 samt sandsynligheden for at linien er optaget til tid t, givet at den var fri til tid 0. Vi har gennem forklaringen benyttet os af eksemplet om telefonlinier, men udledt formlerne sådan at de gælder generelt for analoge situationer.

Vi har i de ovenstående afsnit beskæftiget os med både den tidsuafhængige ('almindelige') samt de mere avancerede Poissonprocesser, nemlig den tidsafhængige og to-tilstandsprocessen. De to sidstnævnte er eksempler på, hvorledes der kan opstå situationer som gør at man har brug for mere komplicerede Poissonprocesser. På denne måde kan det blive nødvendigt at udvide modellen, sådan at den omfatter flere forskellige situationer.

3.3 Kort om punktprocesser

Poissonprocesser er en del af en større gruppe processer, der betegnes punktprocesser. Vi vil derfor her meget kort gøre rede for hvad en punktproces er.

Punktprocesser bruges sædvanligvis til at beskrive hændelser, der foregår rumligt. Man tænker altså på enheder, der er spredt tilfældigt i rummet. Ved rummet forstås sædvanligvis det 2- eller 3-dimensionale rum, men betegnelsen dækker også både det 1- og det n-dimensionale

rum. Fremgangsmåden er at inddele rummet i mindre lige store områder, hvor der til hvert lille område forsøges fastlagt en stokastisk variabel, der betegner antallet af hændelser/ forekomster. Hver af disse stokastiske variable forudsættes at være uafhængige af hinanden og ydermere at have den samme fordeling (ligelig fordeling).

De stokastiske variable siges at udgøre en (Poisson) punktproces med intensitet λ over det samlede rum, hvis de opfylder de følgende egenskaber

1. Har to delområder det samme areal (i tilfælde af at rummet er 2-dimensionalt), så er de to tilhørende stokastiske variable ligeligt fordelt.

2. Er to områder disjunkte, så er de to tilhørende stokastiske variable uafhængige.

3. Der eksisterer en konstant λ således, at den stokastiske variabel over et delområde er Poissonfordelt med parameteren λ gange arealet af delområdet.

Således er intensiteten λ lig det gennemsnitlige antal af hændelser/ forekomster per arealenhed. Bemærk at dette er til forskel fra den almindelige Poissonfordeling (der ikke inddrager flere dimensioner), hvor intensiteten er et mål per tidsenhed.

3.4 To modelkategorier

I dette afsnit vil vi behandle to typiske modelkategorier inden for Poissonprocesser; fødsels- og dødsprocesser samt køteori.

Vi vil ikke behandle disse to grene af Poissonprocesserne matematisk, men kun kort introducere begreberne. Fødsels- og dødsprocesser samt køteori anvendes i et utal af virkelighedssituationer, hvor der benyttes Poissonmodeller, hvilket kan ses i afsnittet med eksempler.

Fødsels- og dødsprocesser

En fødsels- og dødsproces er et system, hvis tilstand til ethvert tidspunkt er repræsenteret ved antallet af individer eller objekter i systemet. Når systemet ændrer tilstand, må det kun ske i ét trin ad gangen og det sker ved at individer fødes eller dør. Processen er diskret, men forløber i kontinuert tid.

Betegnelsen fødsel dækker over fænomener, hvor der tilføres nye individer/ objekter til et system. Dette kan eksempelvis være, når mennesker og dyr fødes, produktion af forbrugsgenstande eller ankomster af ting der skal repareres på et værksted. Ved en død forstås hændelser, der gør at individer/ objekter forsvinder ud af systemet. Som eksempel på denne type hændelse kan nævnes dødsfald, afsluttet betjening i en forretning, en elektrisk pære der springer eller en maskine der pludselig går i stå.

Grundideen bag fødsels- og dødsprocesser er, at størrelsen af en population varierer på en tilfældig måde. Det betyder, at man i princippet ikke har andet kendskab til systemet end antallet af individer. De stokastiske variable i systemet er antallet af individer, antallet af fødsler og antallet af dødsfald. De stokastiske variable er uafhængige, hvilket betyder at individerne i systemet ikke er påvirket af tidligere hændelser. Således er ventetiden mellem to fødsler eller to dødsfald eksponentialfordelt med parametren λ for fødsler og μ for dødsfald. Da ventetiden mellem hændelserne er eksponentialfordelt, har vi tidligere vist, at så er antallet af hændelser Poissonfordelt.

Den ovenfor beskrevede proces kaldes en generel fødsels- og dødsproces. Den proces kan simplificeres eller udbygges alt afhængig af hvilken virkelighedssituation man ønsker at beskrive.

En simpel udgave af fødsels- og dødsprocesser er den rene fødselsproces, hvor det antages, at en fødsel er den eneste tænkelige hændelse. Konsekvensen af dette vil være, at lader man tiden gå mod uendelig, vil det forventede antal fødsler også gå mod uendelig.

Analogt hermed findes også en ren dødsproces, der beskriver et system, hvori der kun indgår dødsfald. Når processen starter vil der være et givet antal individer. Dette antal vil så aftage mod 0, når tiden går mod uendelig.

Køteori

Ved en kø forstås en ordnet følge af elementer, der hver befinder sig i en venteposition. Vi vil beskæftige os med den klasse af modeller inden for køteorien, hvor det antages, at kunder ankommer til et sted, hvor de kan betjenes af ekspedienter.

Vi vil her understrege, at terminologien kunder og ekspedienter ikke må tages for bogstaveligt. Køteorien kan anvendes på systemer, hvor kunderne er mennesker, biler, maskiner, telefonopkald og andet. Kunder er altså en metaforisk beskrivelse af de objekter, der stiller sig i kø for at blive ekspederet. Ekspedienterne kan være værksteder, parkeringspladser, læger og lignende. Køsystemet er en fællesbetegnelse for alle serviceorganer, uanset om kødannelsen i sædvanlig forstand kan finde sted.

Når kunderne ankommer til betjeningsstedet, stiller de sig i kø og venter indtil det bliver deres tur. Systemet forudsætter, at kunder har uendelig tålmodighed og derfor ikke forlader køen, før de er blevet ekspederet. Når betjeningen er afsluttet antages det, at kunderne udgår af systemet.

Køsystemer

I det simpleste system er der én kø og et individ til at betjene kunderne. Vi antager, at de kunder, der ankommer, alle stiller sig i kø, uanset længden af denne og at de betjenes i den rækkefølge de er ankommet. Man kunne også have valgt et system med en anden kødisciplin. Eksempelvis kunne den rækkefølge kunderne bliver betjent i være tilfældig. Man kunne også have valgt at betjene den sidst ankomne først. Denne betjeningsorden gør sig f.eks gældende indenfor industrien, hvor opmagasinering af objekter af samme type i en lagerhal har karakter af, at det sidst ankomne står først for og det derfor vil lette arbejdsbyrden at tage dette objekt først.

Det antages endvidere, at ankomsterne er uafhængige af hinanden og at tidsrummene mellem ankomsterne er eksponentialfordelte. Ankomstintensiteten vil blive betegnet med λ. Betjeningsintensiteten μ antages at have samme egenskaber. Vi har således et system, der opfylder kravene til at være en to-tilstandsproces.

Systemet betegnes som et $M/M/1$-køsystem, hvor M'erne refererer til det faktum, at både ankomsterne og afslutningen af betjening sker uafhængigt af hinanden. Systemet har derfor ingen hukommelse, hvilket betegnes som en Markovegenskab, derfor M'erne. Ettallet henviser til, at der er én til at betjene. For et system af denne type bør der stilles det krav at $\lambda < \mu$, da køen ellers vil blive uendelig lang, hvis tiden går mod uendelig.

Dette simple system kan udvides ved at forøge antallet af ekspedienter til at betjene de indkommende kunder. Vi har således det klassiske $M/M/s$-system; et system, der er organiseret med s parallelle betjeningskanaler.

De to Poissonprocesser vi kort har behandlet i dette afsnit ses ofte i samme virkelighedssituation. Et eksempel herpå er objekter, der står i kø i et system og venter på at blive ekspederet. Deres ankomst kan opfattes som en fødselsproces og deres færdigbetjening som en dødsproces. På det niveau vi har behandlet fødsels- og dødsprocesser samt køteori på kan de betragtes som værende ækvivalente. Følgende afsnit vil give et bedre billede af sådanne situationer.

3.5 Eksempler

Tidligere i kapitlet har vi postuleret, at Poissonprocesser optræder i modelleringen af alle mulige afskygninger af virkelighedssituationer. Vi vil derfor i dette afsnit give nogle eksempler på forskellige problemområder, der giver anledning til Poissonprocesser. Eksemplerne skal endvidere tydeliggøre, hvor forskelligt man kan vælge at anskue den samme situation, idet man kan ønske at få svar på forskellige spørgsmål vedrørende systemet. Afhængig af den valgte indgang giver systemet udslag i forskellige former for Poissonprocesser.

Afsnittet er opdelt således, at hver del repræsenterer en ny situation. Hver situation bliver behandlet med forskellige indgangsvinkler. Alt efter den problemstilling, der ønskes behandlet, vil vi gøre rede for hvilken type Poissonproces, dette giver anledning til. Der vil i de kommende eksempler være tale om forenklinger af situationerne.

Maskinreparationer

Situationen udspiller sig i en fabrikshal med M maskiner, der hver antageligvis på et tidspunkt vil bryde sammen. Antag, at den tid en maskine arbejder, før den bryder sammen er ekspontialfordelt med middelværdien $\frac{1}{\lambda}$ og tiden, det tager at reparere maskinen, er eksponentialfordelt med middelværdien $\frac{1}{\mu}$.

Hvis man eksempelvis ønsker at kende sandsynligheden for at der er x antal maskiner, der er funktionsdygtige til tiden t, giver dette anledning til en fødsels- og dødsproces, hvor maskinen 'fødes', når den indkøbes og 'dør', når den går i stykker og genfødes, når den repareres.

Hvis man derimod ønsker at kende middellevetiden for en maskine, kunne problemstillingen beskrives ved en ventetidsproces. Maskinen venter så at sige på at gå i stykker.

Er man interesseret i at vide, hvor tit det kan forventes at maskinerne vil gå i stykker og om det derfor er nødvendigt ligefrem at ansætte en reparatør, eller om man kan nøjes med at tilkalde en udefra er det ankomsten af maskinnedbrud man er interesseret i. Der er i denne situation tale om en ankomstproces, hvor det er maskinnedbrudene, der ankommer.

Antag, at der på fabrikken er ansat en reparatør til at reparere alle de maskiner, der går i stykker og at han reparerer dem efter tur. Det kunne da som arbejder ved en bestemt maskine være interessant at vide til hvilken tid, man kunne forvente, at ens maskine ville være funktionsdygtig igen. Denne formulering af situationen giver anledning til en $M/M/1$ køproces, hvor maskinerne står i kø til reparation ved mekanikeren.

Populationsudvikling

Modellering af populationsudvikling er et vigtigt grundlag for en lang række beslutningsprocesser; eksempelvis i kommuners og amters planlægning af byggeprojekter; oprettelse af institutionspladser og lignende.

Befolkningsudviklingen i et land kan vælges at anskues som en Poissonproces. Situationen er at der bliver født nogle individer og der er nogle

individer, der dør. Det antages, at ethvert individ i populationen fødes med en eksponentialfordelt intensitet λ og dør med en eksponentialfordelt intensitet μ. Man kan dog hævde, at denne modelleringsform ikke umiddelbart er hensigtsmæssig, da individerne ikke kan siges at være hukommelsesløse med hensyn til deres fortid (alder).

Problematikken kunne f.eks være i forbindelse med familieplanlægning i u-landene, hvor man ønsker at kende befolkningstallet på et tidspunkt t_0. Dette vil give anledning til en fødsels- og dødsproces.

Set fra et forsikringsselskabs synspunkt, er det menneskernes levetid, man er interesseret i, idet der ønskes at fastlægge præmien ved en livsforsikring. Dermed bliver mennesket et objekt, der gennemgår en livsproces. Systemet giver anledning til en ventetidsproces, hvilket kan opfattes som at mennesket venter på at dø.

Denne situation kan også vælges at anskues som en ankomstproces, altså en ren fødselsproces. Hvis man eksempelvis ønsker at fastlægge behovet for at uddanne jordmødre, skal man kende fordelingen af antallet af fødsler over tiden. Derved bliver ankomsten af en fødsel af afgørende betydning.

Den samme type af spørgsmål kunne man selvfølgelig vælge at stille om mange forskellige former for populationer f.eks mikroorganismer.

Køsituation

Situationen på eksempelvis et postkontor er at kunderne ankommer, vælger en ekspeditionskasse og derefter bliver betjent enten med det samme eller efter at have stået i kø i en tid.

Systemet er en klassisk køsituation, hvor det antages at kundernes ankomsttider er Poissonfordelte med intensiteten λ og ekspeditionstiden er eksponentialfordelt med intensiteten μ.

Er man interesseret i at vide hvor lang tid kunderne kommer til at stå i kø, er der tale om et ventetidsproblem. Tiden, der går fra en kundes ankomst til ekspedition, antages ofte at være eksponentialfordelt. Denne problemstillingen giver anledning til en ventetidsproces.

Vil man derimod undersøge antallet af ekspeditioner eller længden af køen, det pågældende posthus har i løbet af en dag, er det ankomsten af kunder til posthuset, der er afgørende. Denne problemstilling giver udslag i en ankomstproces. Der kan være tale om to slags systemer; enten et system med én lang kø, hvor kunderne trækker et nummer eller et system, hvor kunderne stiller sig i kø ved hver kasse.

En anden problemstilling er posthusets kapacitet rent størrelsesmæssigt; om der er plads til deres kundekreds. Hvis ankomstintensiteten som antaget har værdien λ, er det middelantallet af kunder man er interesseret i. Dette giver anledning til en fødsels- og dødsproces, hvor man ser på kunder der kommer og går. I virkeligheden er ankomsttiderne på posthusene nok ikke tidsuafhængige. Der er tydeligvis forskel på behovet for plads på posthuset i de forskellige perioder på dagen og på måneden. Omkring den 1. i hver måned vil der være størst pres på posthuset. Man bliver derfor nok nødt til at antage at intensiteten er tidsafhængig, hvorfor der er tale om en inhomogen Poissonproces. Hvis man også ønsker at dække situationen omkring den 1. må måneden inddeles i intervaller og de forskellige nu konstante intensiteter defineres.

Radioaktivt henfald

Et radioaktivt præparats henfald kan beskrives ved en Poissonproces. De enkelte henfald sker uafhængigt af hinanden og registreres af en geigertæller. Ankomsttiderne er Poissonfordelte med intensiteten λ og tiden mellem registrerede henfald er eksponentialfordelt med middelværdien $\frac{1}{\mu}$.

Alt afhængig af spørgsmålene kan denne situation betragtes som en ankomstproces, hvor antallet af α og β partikler til geigertælleren tælles og en ventetidsproces, hvor tiden mellem ankomsterne registreres.

Punktprocesser

Under anden verdenskrig blev det sydlige London gentagende gange bombet. For at finde ud af om nogle dele af det sydlige London blev ramt flere gange end andre, deltes området i mindre områder. Nedslagene af bomber blev så talt i de enkelte områder. Dette eksempel er en

to-dimensional punktproces.

Andre eksempler på punktprocesser er fordelingen af stjerner og galakser i rummet, fordelingen af planter og dyr og af bakterier i en petriskål.

3.6 To cases

I dette afsnit vil vi se lidt nærmere på to cases, hvor Poissonprocesser er blevet forsøgt anvendt som model til beskrivelse af faktiske fænomener i virkelige situationer. De adskiller sig således fra de foregående eksempler ved ikke at beskæftige sig med lige så idealiserede situationer. De to cases er:

- Fordelingen af telefonopkald.
- Fordelingen af oversvømmelse ved stormflod.

Dette afsnit indledes med en beskrivelse af de rammer, situationerne udspilles i. Vi vil herefter komme ind på hvilke antagelser, der gøres for at situationerne er mulige at modellere og specielt med hensyn til de spørgsmål, der ønskes besvaret i forhold til de to cases. Tilsidst vil vi ridse op, hvilke overvejelser der har været omkring overensstemmelse mellem virkelighed og modelverden.

Telefonopkald

Inden for behandlingen af problemer vedrørende telefonopkald bliver Poissonprocesser ofte anvendt til at illustrere og beskrive forskellige relevante situationer. I Danmark er Poissonfordelingen således blevet anvendt siden 1909 til dette formål [Brockmeyer, 1948]. Ifølge [Feller, 1968] undersøgte man problemer vedrørende antallet af linier og venteinstallationer, længe før teorien om stokastiske processer var til rådighed. Disse problemer var desuden en af hovedårsagerne til, at teorien blev udviklet.

Skitsering af situationen

En telefonlinie repræsenterer et fysisk system med to mulige tilstande; optaget (E_0) eller fri (E_1). Der er altså tale om en to-tilstandsproces. Dette telefonsystem kan kun benyttes af én person ad gangen. Består systemet af flere linier, antages disse at være ens og længden af de enkelte telefonsamtaler vil ikke afhænge af det totale antal. Et telefonsystem, der består af endelig mange linier og altså har begrænset kapacitet, bliver sommetider udnyttet maksimalt. En kunde, der ringer op i en sådan situation, vil således blive afvist. Hvadenten kunden forsøger igen eller lader være, så er der ikke nogen kø i fysisk forstand. Der findes også typer af situationer, hvor vi kan tale om eksistens af køer. Dette vil være tilfældet, hvis folk ringer over noteringen. Systemet kan således befinde sig i yderligere en tilstand, hvorfor vi har et tre-tilstandssystem.

Et system med én telefonlinie

I det følgende afsnit har vi primært benyttet [Feller, 1968].

Lad os betragte én telefonsamtale set fra de involverede parters synspunkt og lad os antage, at længden af denne nødvendigvis er et heltal udtrykt i sekunder. Vi behandler længden af telefonsamtalen som en stokastisk variabel X. Når linien er optaget, vil sandsynligheden for en ændring i tilstanden afhænge af, hvor længe samtalen har stået på. Fortiden har således en indflydelse på fremtiden, og processen er derfor ikke en Markovproces.

De to personer, der fører samtalen, kan godt have et kendskab til længden af denne, fordi de kender hensigten med den, i hvertfald efter de indledende bemærkninger. Så for dem er længden af telefonsamtalen ikke uafhængig af den allerede forløbne samtale. Når vi således antager, at længden af telefonsamtalen er uafhængig af den allerede forløbne tid, er det i forhold til en udenforstående, der ikke har kendskab til samtalens indhold. En udenforstående, der evt har interesse i samtalens ophør, vil således ikke have mulighed for at vurdere hvornår den ender. Situationen kan fra denne synsvinkel opfattes som, at der hvert sekund vil blive besluttet om samtalen skal fortsætte på baggrund af et kast med en mønt. Det bliver således en diskret tidsmodel.

Vi har nu en følge af Bernoulli forsøg [3] med sandsynligheden p for succes, der bliver dannet med intensiteten en per sekund og fortsætter indtil første succes. Dette betyder at samtalen afsluttes, når den første succes optræder. Succesen afhænger af om møntkastet bliver plat eller krone. I denne situation vil den totale længde af telefonsamtalen have en geometrisk fordeling [4] $P_n = p(1-p)^{n-1}$, hvor P_n er sandsynligheden for at samtalen slutter i n'te sekund. Når linien er optaget, er sandsynligheden for, at den forbliver optaget i mere end et sekund $1-p$, og sandsynligheden for tilstandsændringen $E_0 \to E_1$ i næste trin er p. Disse sandsynligheder er nu uafhængige af, hvor længe telefonsamtalen har forløbet.

Hvis vi ikke længere ønsker at benytte en diskret tidsparameter, er det nødvendigt at arbejde med kontinuerte stokastiske variable. Den rolle den geometriske fordeling spillede for ventetiderne, overtages nu af eksponentialfordelingen. Denne fordeling er den eneste, der er hukommelsesløs. Med andre ord har vi, at sandsynligheden for at en samtale, der forløber til tiden x og fortsætter udover $x+h$, er uafhængig af den allerede forløbne telefonsamtale. Man kan vise, at det gælder hvis og kun hvis sandsynligheden for at samtalen forløber mere end t tidsenheder er givet ved eksponentialfunktionen $e^{-\lambda t}$. Denne eksponentielle varighedsfordeling (levetiden) er netop o-leddet i Poissonfordelingen, dvs ventetiden indtil den første forandring optræder, hvor λ er intensiteten for afslutning af samtaler.

I og med at der er tale om en ventetid indtil første hændelse indtræffer, vil der således ikke indtræffe nogle hændelser i denne periode. Dette betyder, at sandsynligheden for at vi skal vente t tidsenheder er den

[3]Bernoulli forsøg: Et Bernoulli forsøg er et forsøg, hvor der er to mulige udfald, A (succes) og ikke-A (fiasko). En følge af Bernoulli forsøg, der er uafhængige, og hvor successandsynligheden p er den samme i alle forsøg, kaldes kort *en følge af Bernoulli forsøg*.

[4]Geometrisk fordeling: Den geometriske fordeling kaldes ofte for en diskret ventetidsfordeling (svarer til den kontinuerte eksponentialfordeling) og grunden hertil er følgende: Der udføres en række forsøg under identiske betingelser, uafhængigt af hinanden; en hændelse A har sandsynligheden p for at indtræffe i det enkelte forsøg. Hvis vi definerer en stokastisk variabel X ved $X = k$ hvis hændelsen indtræffer første gang i forsøg nr. k, så har X fordelingen

$$P_k = P(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k \in N$$

samme som sandsynligheden for at der ikke indtræffer nogle hændelser i de t tidsenheder.

Fordelingen er analog, hvis der er tale om tilstandsændringen $E_1 \rightarrow E_0$, blot er intensitet for afslutning af samtaler erstattet med intensiteten af påbegyndte samtaler, μ.

Et system med n telefonlinier

For personer ansat ved telefonvæsenet er det desuden interessant at vide i hvilken grad systemet bliver udnyttet, og om der bør laves flere telefonlinier. Man er således interesseret i at kende sandsynligheden for, at x hændelser indtræffer til tiden t, $P(X = x)$. Vi har således et telefonsystem med n linier, hvor $n \geq x$. Hvis $x > n$ betyder det, at der er flere opkald end linier og at nogle bliver afvist. Ønsker man en kapacitetsbetragtning må man kende sandsynligheden for denne marginalsituation. Den stokastiske variabel er nu ikke længere et udtryk for tiden, men for et antal.

Da vi ved, at ventetiden er eksponentialfordelt, og at hændelserne er uafhængige af hinanden, er denne sandsynlighed givet ved Poissonfordelingen med tidsuafhængig intensitet, altså $P_t(x) = e^{\lambda t}\frac{\lambda t^x}{x!}$

Sammenhæng mellem modeller og virkelighed

Ifølge [Feller, 1968] er der mange målinger, der har vist, at varigheden af telefonsamtaler i byer følger eksponentialfordelingen med, som han betegner det, overraskende nøjagtighed. For udenrigssamtaler er varigheden ofte 3 min. Denne regelmæssighed gør, at systemet ikke længere følger en Poissonproces. Der er desuden andre afvigelser fra forudsætningerne. Eksempelvis vil intensiteten af telefonopkald tiltage i situationer, hvor der sker noget uventet. Dette kunne f.eks være i forbindelse med jordskælv med telefonopkald til forskellig formidlende medier eller i forbindelse med uventede regnbyger, hvor intensiteten af antallet af opkald til taxicentraler vil stige. Derudover vil varigheden af opkald fra telefonbokse kunne grupperes efter bestemte længder. Dette skyldes, at man bliver afbrudt efter at have talt for 1 kr, 2 kr osv. Opkald fra grupper af telefonbokse kan desuden ikke siges at være uafhængige af hinanden, da en fri telefon hurtigt vil blive optaget igen, da det er sjældent, man står og venter på at en bestemt telefon bliver fri,

hvis der er en anden ledig.

Et andet fænomen inden for dette virkelighedsområde, der i praksis har vist sig at passe godt på en Poissonproces, er opkald til forkerte telefonnumre. Men det kan ikke undre så meget for disse forkerte opkald foretages jo netop uden overlæg og er dermed indbyrdes uafhængige.

Stormflodsrisiko

Dette afsnit bygger på [Jensen, 1959] og [Hansen, 1974].

I 1959 afsluttede daværende lektor Arne Jensen en undersøgelse af stormflodsforholdene ved Søndre Limfjord. Undersøgelsen udarbejdede han for det offentlige nedsatte Thyborønudvalg, der stod overfor en beslutning om at bygge et digeanlæg til 8 mio. kr.

Arne Jensens formål med undersøgelsen var at fastlægge en digehøjde, således at sandsynligheden for oversvømmelse blev passende lille.

Den førhen anvendte strategi ved digebygning var at bygge digerne så høje, at de netop kunne modstå en stormflod svarende til den værste forekommende stormflod i den foregående periode, eventuelt med en lille sikkerhedsmargin. Arne Jensen skriver, at hvis sikkerhedsmarginen er lille medfører denne strategi, at risikoen for oversvømmelse af diget i en kommende periode af samme længde er cirka 50%.

Den acceptable størrelse af sandsynligheden for oversvømmelse besluttes politisk. Den foretages på baggrund af omkostningerne ved et digebyggeri, dels de menneskelige omkostninger og dels de økonomiske; hvad koster digeanlægget at bygge og vedligeholde i forhold til udgifterne ved de oversvømmelser, der eventuelt sker. Denne problematik vil vi dog ikke komme yderligere ind på.

Der er to problemer i at fastlægge en digehøjde. For det første skal man vide, hvor tit der kommer storme ved vestkysten. Dette skyldes at det kun er i tilfælde af storme, der kan forekomme stormfloder. For det andet er det nødvendigt at vide, hvor ofte der under en storm er risikofyldte højvande. Derved bliver processen sammensat af hvor ofte der er stormflod og det maksimale højvande under en stormflod.

I et forsøg på at bestemme fordelingen af de to stokastiske variable (antallet af stormfloder og stormflodernes maksimale højvande), blev der i undersøgelsen inddraget observationsmateriale af de maksimale højvande fra forskellige steder langs den jyske vestkyst fra de foregående 20-70 år alt afhængig af lokalitet.

Man må for at kunne benytte disse data forudsætte, at den jyske vestkyst kan opfattes som en helhed, både med hensyn til forholdene ved højvande og vindstyrkens fordeling.

Før antallet af stormfloder kan tælles må det først vedtages, hvad man forstår ved en stormflod. Den definition, der benyttes i undersøgelsen er, at hvis vandstanden i en periode ligger i en bestemt højde over den normale vandstand ved højvande er der tale om en stormflod. Vandstanden må godt falde under denne højde, hvis det blot er for en kort periode.

For at der kan være tale om en ankomst af stormfloder må man antage, at varigheden af en stormflod er så lille i forhold til tidsafstanden mellem to stormfloder, at en stormflod kan betragtes som en punktbegivenhed. Denne antagelse begrundes med, at tidsafstanden mellem stormfloder erfaringsmæssigt er så stor, at de meteorologiske forhold, der skaber dem, fysisk set er uafhængige. Således er også stormfloderne uafhængige af hinanden.

Hvis processen skal kunne beskrives ved en Poissonproces må der yderligere antages, at ankomsten af stormfloder er Poissonfordelt med en fælles intensitet λ for hele vestkysten. Da antallet af stormfloder varierer med årstiderne, kan man ikke tale om, at ankomsterne er uafhængige at tiden, hvilket jo er et krav, når der er tale om en homogen Poissonproces. I praksis har man har omgået dette problem ved at se bort fra sommerperioden (april- september) i datamaterialet.

For hver stormflod kan man tale om et eksperiment, som går ud på at fastlægge den maksimale højvande. Da man skal kunne tale om en gentagelse af et ensartet 'eksperiment', må der gælde to ting, dels at vandstandsfordelingen ikke ændrer sig fra år til år og dels må det antages, at stormflodernes maksimale vandhøjde er uafhængige stokastiske variable. For at den sidste antagelse er rimelig, bør de meteorologiske forhold, der forårsager stormfloder, være ens hver gang. Man har derfor klassificeret stormfloderne udfra et sæson- og vindretningssyns-

punkt. Inden for hver klasse kan eksperimentet opfattes som udført under samme ydre omstændigheder. Hver klasse af stokastiske variable har en tilhørende fordelingsfunktion F.

Med udgangpunkt i disse antagelser er det muligt at finde en fordelingsfunktion for stormflodernes maksimale højvande, hvilket gør det muligt at bestemme sandsynligheden for oversvømmelse af det planlagte dige.

3.7 Delkonklusion

Vi vil i dette afsnit foretage en opsamling af kapitlet om Poissonprocesser. Da det ikke har samme karakter som det forrige kapitel, vil opsamlingen naturligvis afspejle dette forhold. Vi kan ikke på samme måde tage udgangpunkt i en case, men vi vil forsøge at gøre tilsvarende betragtninger ud fra den generelle teori.

Man kan stille spørgsmålet: 'Hvad skaber en Poissonproces?' Vi vil starte med at kigge på, hvilke forudsætninger, der ligger bag en Poissonproces og dermed skal kunne genfindes i et virkelighedsområde for at det er modellerbart inden for denne modelramme. Som beskrevet i kapitlet (afsnittet omhandlende Poissonfordelingen) eksisterer der nogle antagelser, som skal være opfyldt i tilfælde af en Poissonproces. En vigtig antagelse er at hændelser i disjunkte tidsintervaller skal være uafhængige af hinanden. Ligeledes er forudsætningen om proportionalitet mellem sandsynligheden for at en hændelse indtræffer i et interval og intervallets længde en vigtig antagelse (gælder for både den homogene og inhomogene proces med henholdsvis proportionalitetsfaktor λ og $\lambda(t)$). Man kan således hævde, at det er disse to forudsætninger, der er de 'svære', hvor de to resterende antagelser er af mere teknisk karakter. Endnu en antagelse, der dog ikke er opskrevet som en sådan, er at sandsynlighedsfunktionen der fører t over i $p_t(x)$ skal være differentiabel - også denne antagelse betegnes som værende teknisk.

Endnu en vigtig antagelse, der dog optræder mere implicit, er at hændelserne skal kunne opfattes som punktbegivenheder. Det betyder, at hændelsen skal være af kort varighed set i forhold til den betragtede tidsperiode.

Det er sådan, at når man har opstillet disse fire forudsætninger, så

opstår Poissonfordelingen automatisk forstået på den måde, at det ikke er nødvendigt med supplerende antagelser undervejs. Det betyder, at man udelukkende på baggrund af de fire forudsætninger er i stand til at finde en sandsynlighedsfordeling. Poissonfordelingen er sandsynlighedsfordelingen for antallet af hændelser. Ønsker man også en sandsynlighedsfordeling for ventetiden mellem to på hinanden følgende hændelser, opnår man direkte uden yderligere antagelser eksponentialfordelingen. Opfylder en idealiseret virkelighedssituation de fire forudsætninger, kan fænomenet beskrives ved en Poissonproces. Det modsatte kan dog ikke umiddelbart sluttes. Man kan udtrykke det sådan, at på baggrund af de fire forudsætninger følger de to sandsynlighedsfordelinger, Poisson- og eksponentialfordelingen automatisk. I virkelighedsområder, der kan beskrives ved Poissonprocesser, er det således muligt at finde et bagvedliggende mønster i tilfældigheden.

Udover den homogene Poissonproces har vi i dette kapitel også beskæftiget os med forskellige former for inhomogene Poissonprocesser - processen med tidsafhængig intensitet og to-tilstandsprocessen. Disse generaliseringer er eksempler på komplikationer i et virkelighedsområde, der kræver en udvidelse af modellen, hvis man ønsker at inddrage kompleksiteten i systemet.

Når man ønsker at modellere en virkelighedssituation, må man vurdere om den opfylder de forudsætninger, der er karakteristisk for processen. Det vil i tilfældet Poissonprocesser hovedsageligt være de to nævnte 'svære' forudsætninger. Derudover eksisterer der for den homogene Poissonproces det krav, at intensiteten λ skal være uafhængig af tiden.

Hvorvidt situationen umiddelbart opfylder forudsætningerne og er hvad man kunne kalde direkte modellerbart eller om der skal foretages en yderligere idealisering varierer fra virkelighedsområde til virkelighedsområde. Er der tale om en idealisering må man i hvert tilfælde afhængig af hensigten med modellen vurdere om en sådan idealisering er rimelig at foretage. Hvad angår inhomogene Poissonprocesser med tidsafhængig intensitet, vil der nogle gange foretages en approksimation til flere homogene Poissonprocesser med tidsuafhængig intensitet. Også i dette tilfælde må det vurderes om en sådan approksimation er rimelig.

Vi har i dette kapitel ved hjælp af en række eksempler forsøgt at demonstrere rækkevidden af Poissonprocesser. Det viste sig, at selvom eksemplerne udspillede sig i vidt forskellige miljøer og omhandlede vidt

forskellige problemstillinger, havde de tydeligvis en række fællestræk. Systemerne tegner et billede af hændelser, hvis antal er Poissonfordelte og hvor ventetiden mellem to på hinanden følgende hændelser er eksponentialfordelt. Om hændelserne så er en fødsel eller en enhed, der ankommer; en død eller en ekspedition, der afsluttes er principielt ligegyldigt. Overordnet er den matematiske ramme for systemet den samme.

Opfattes Poissonprocessen som en overordnet modelklasse, så kan eksempelvis både homogene og inhomogene varianter af fødsels- og dødsprocesser, køteori og to-tilstandsproceser opfattes som modelkategorier, der fordi hændelserne opfylder forudsætningerne falder inden for samme modelklasse. Disse modelkategorier kan nærmest opfattes som forskellige anskuelsesformer med hver sin synsvinkel og hovedinteresse. Således eksisterer der forskellige hændelser og dermed modelkategorier, der på grund af deres opførsel falder inden for samme overordnede modelklasse og derfor beskrives ved hjælp af den samme matematik.

Kapitel 4

Stokastiske epidemimodeller

I dette kapitel behandler vi det tredie emneområde; stokastiske epidemimodeller. Vi har valgt at beskæftige os med tre forskellige modeller, hvoraf en er kontinuert og to er diskrete; henholdsvis modellen over generelle epidemier, Reed-Frost og Greenwood modellerne. De to førstnævnte modeller er oprindeligt blevet udviklet hovedsageligt med det formål at kunne modellere epidemier af dråbeoverførte infektioner mellem mennesker. Greenwood modellen adskiller sig dog herfra, men beskriver også kun infektioner mellem mennesker.

4.1 Generelt om stokastiske epidemimodeller

I deterministiske epidemimodeller kan man med udgangspunkt i en given begyndelsestilstand i princippet bestemme de fremtidige tilstande. Dette gøres ved at opstille ligninger, der beskriver systemets indre dynamik; integrere med hensyn til tiden og på denne måde fastlægge en værdi for hver af de kommende tilstande. I stokastiske epidemimodeller forsøger man derimod at inddrage tilfældighedsmekanismer, således at man kun kan udtale sig om sandsynligheden for at en tilstand har en vis værdi. Formålet med de stokastiske epidemimodeller er overordnet at beskrive sandsynligheden for at en epidemi har et bestemt udviklingsforløb. Dette kan f.eks være geografisk eller i forhold til varighed og antal syge. De modeller, som vi har valgt at behandle, kan kun udtale sig om sandsynligheden for epidemiens størrelse (det totale antal af syge i populationen) i forhold til tiden. De vil blandt andet kunne

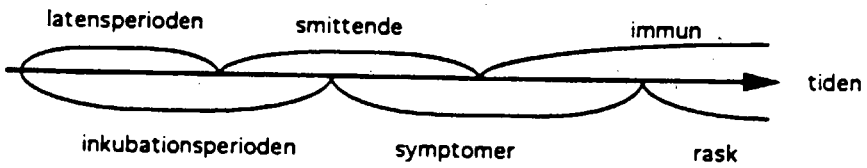
bruges til besvarelse af spørgsmålet 'Med udgangspunkt i en given situation, hvor stor er så sandsynligheden for, at der i næste situation vil være x antal modtagelige?'
De stokastiske epidemimodeller, vi har valgt at beskrive, er dels modellen over generelle epidemier, som er en kontinuert model og dels Reed-Frost og Greenwood, der begge er diskrete modeller. Hvilken af modellerne, der vælges til at beskrive en epidemis udvikling, afhænger af forskellige faktorer. Sygdommens forløb og dens smittemekanisme kan være sådan, at de med rette kan antages at være enten diskrete eller kontinuerte. Det kan også være tilfældet, at data om epidemiens udvikling indberettes enten til diskret eller kontinuert tid. Det spiller ligeledes en afgørende rolle for valg af modeltype, hvilke spørgsmål man ønsker besvaret via modellerne. Endelig har rent matematiske/tekniske overvejelser en indflydelse på dette valg, idet det nogle gange vil være lettere at drage konklusioner fra den ene model end fra den anden.

De ovennævnte modeller tager udgangspunkt i epidemier, der er karakteriseret ved, at individer, der betragtes som havende overstået smitteperioden, ikke længere har indflydelse på epidemiens videre udvikling. Dette sker, hvis individet dør, bliver isoleret eller bliver immunt. Der er altså ikke tale om, at man kan få den samme sygdom mere end en gang i forhold til den tidshorisont, som epidemien dækker. Epidemier af denne type siges at følge et

$$S \rightarrow I \rightarrow R$$

forløb, hvor S, I og R står for henholdsvis *susceptible* (modtagelig), *infected* (smittet) og *removed* (fjernet).

Som det ses på figur 4.1 er latensperioden den periode, der forløber fra individet bliver smittet til det er i stand til at overføre smitte til andre. Inkubationsperioden er perioden fra smittetidspunktet til de første sygdomssymptomer. Det skal bemærkes, at et individ i I-gruppen i disse modeller regnes for at være ikke kun smittet, men også smittende. Denne antagelse gør sig gældende for de tre modeller, som dette kapitel omhandler. Desuden antages det, at den samlede populationsstørrelse $N = S + I + R$ er konstant, hvilket vil sige, at modellen ikke medtager eventuelle fødsler, tilflytninger osv.



Figur 4.1: Illustration af et sygdomsforløb

Derudover er det en vigtig antagelse, at populationen blander sig homogent og består af homogene individer. Dette er et led i modeldannelsen, idet man antager, at en vis brøkdel af den samlede population bliver smittet. Denne brøkdel bliver overført til også at være hvert enkelt individs brøkdel, forstået på den måde at brøkdelen bliver 'oversat' til sandsynlighed for inficering per individ. Da brøkdelen deles ligeligt ud på hele populationen, betyder det, at alle individer har samme sandsynlighed for at blive ramt af sygdommen. Således fører dette til antagelsen om, at populationen er homogen og ligeledes blander sig homogent.

4.2 Den kontinuerte epidemimodel

Udledningen af den kontinuerte model bygger på noter skrevet af vor vejleder.

Dette afsnit omhandler den stokastiske kontinuerte model, der første gang blev præsenteret i 1927 af W.O. Kermack og A.G. McKendrick i en deterministisk udgave og i 1949 på stokastisk vis af M.S. Bartlett. Den stokastiske model over generelle epidemier er bl.a. karakteriseret ved, at de tidspunkter, hvor der indtræffer epidemisk relevante begivenheder, opfattes som kontinuert forløbende. Denne egenskab gør, at det ikke er nødvendigt at tage hensyn til varigheden af de forskellige stadier i sygdomsforløbet. Man kan så at sige 'stikke en sonde' ind i

populationen på et givet tidspunkt, og hvert individ vil så befinde sig i en af de for et $S \rightarrow I \rightarrow R$ epidemiforløbs karakteristiske kategorier.

Modellen er bygget over et sæt af stokastiske variable, som til et givet starttidspunkt kan fastlægges vilkårligt.

De stokastiske variable i modellen er:

- $S(t)$, som er antallet af modtagelige til tid t.
- $I(t)$, som er antallet af smittende til tid t.
- $R(t)$, som er antallet af immune til tid t.

Modellen antager, at et individ forlader gruppen S i det øjeblik individet bliver inficeret. Således er personer, der befinder sig i latensperioden og derfor ikke er smittende, indeholdt i I og betegnes derfor som værende smittende. Dette til trods for at det forholder sig anderledes i realiteten. Det skal fastslås, at gruppen R bestående af fjernede individer ikke er interessant fra et modelsynspunkt.

Vi skal fastlægge $P\{(S(t+h) = s, I(t+h) = i)\}$, der er sandsynligheden for, at antallet af modtagelige er s og antallet af smittede er i til tidspunktet $t+h$, hvor s og i er hele positive tal og h er en lille tilvækst i tiden.

Det antages, at h kan vælges således, at der i hvert tidsskridt kun indtræffer én af nedenstående tre hændelser, og at netop én af disse indtræffer. Hændelserne er konstrueret således, at maksimalt ét individ skifter kategori ($S \rightarrow I, I \rightarrow R$) i det korte tidsinterval $]t, t+h]$. Hvilke værdier h kan antage afhænger af den aktuelle epidemis natur; h antages dog at være opadtil begrænset.

Hvis der til tiden $t+h$ skal gælde, at $S(t+h) = s, I(t+h) = i$ må der i intervallet $]t, t+h]$ være sket en af tre følgende hændelser.

1. Der smittes netop ét individ og ingen smittede bliver immune. Dette betyder at til tiden t er $S(t) = s+1$ og $I(t) = i-1$ og i intervallet $]t, t+h]$ 'mistes' en modtagelig og 'vindes' en smittet. Denne hændelse har sandsynligheden:
   $P\{S(t) = s+1, I(t) = i-1$ og netop én ny smittet i $]t, t+h]\}$

Hændelser	Til tiden t	I intervallet]t,t+h]
1	S(t) = s+1 I(t) = i-1	Netop én ny smittet
2	S(t) = s I(t) = i+1	Netop én ny immun
3	S(t) = s I(t) = i	Ingen forandring

Figur 4.2: Ovenstående skema illustrerer, hvilke værdier S og I har til tiden t og hvad der sker i intervallet $]t, t+h]$ i forhold til de hændelser, der kan indtræffe for at $S(t+h) = s$ og $I(t+h) = i$.

2. Ingen individer smittes og netop ét individ bliver immunt. Til tiden t er antallet af modtagelige og smittede således $S(t) = s$ og $I(t) = i + 1$. I intervallet $]t, t+h]$ er antallet af modtagelige konstant og der 'mistes' en smittet.
   Denne hændelse har sandsynligheden:
   $P\{S(t) = s, I(t) = i + 1$ og netop én ny immun i $]t, t+h]\}$

3. Ingen individer smittes og ingen smittede bliver immune, altså ingen forandring. Det vil sige at til tiden t er $S(t) = s$ og $I(t) = i$.
   Denne hændelse har sandsynligheden:
   $P\{S(t) = s, I(t) = i$ og ingen forandring i $]t, t+h]\}$.

Da hændelserne er disjunkte, vil den samlede sandsynlighed være lig summen af sandsynlighederne for hver af hændelserne. Vi har altså følgende udtryk:

$$
\begin{aligned}
& P\{S(t+h) = s, I(t+h) = i\} \\
= \; & P\{S(t) = s+1, I(t) = i-1, \text{ netop én ny smittet i }]t, t+h]\} \\
& + P\{S(t) = s, I(t) = i+1, \text{ netop én ny immun i }]t, t+h]\} \\
& + P\{S(t) = s, I(t) = i, \text{ ingen forandring i }]t, t+h]\}
\end{aligned}
$$

For yderligere at fastlægge $P\{S(t+h) = s, I(t+h) = i\}$ er det nødvendigt at gøre følgende antagelser:

ad 1.
Produktet af antallet af modtagelige $(s+1)$, antallet af smittede $(i-1)$ til tid t og intervallængden h udtrykker antallet af mulige møder mellem modtagelige og smittende i $]t, t+h]$. Proportionalitetsfaktoren, der ikke afhænger af antal modtagelige og antal smittende, betegnes med β og er et udtryk for smitteraten. I smitteraten er implicit indbygget brøkdelen af realiserede møder, hvor let smitten overføres, samt anden form for indflydelse. Da individer, der befinder sig i latensperioden, medregnes i I gruppen, er det med til at gøre smitteraten mindre end den virkelige smitterate. Hver af disse nævnte faktorer er repræsenteret med en brøkdel, der tilsammen giver β . Det vil dermed sige, at sandsynligheden, for at en modtagelig bliver smittet, er udtrykt ved en brøk. Dette fører til følgende udtryk:

$$\begin{aligned}
& P\{S(t) = s+1, I(t) = i-1, \text{ netop én ny smittet i }]t, t+h]\} \\
= \; & P\{S(t) = s+1, I(t) = i-1\} \\
& \quad P\{\text{netop én ny smittet i }]t, t+h] \mid S(t) = s+1, I(t) = i-1\} \\
= \; & P\{S(t) = s+1, I(t) = i-1\} \; (\beta(s+1)(i-1)h + o(h))
\end{aligned}$$

ad 2.
Sandsynligheden for at netop ét individ bliver immunt i $]t, t+h]$ er tilnærmelsesvis proportional med antallet af smittende $(i+1)$ til tid t og intervallængden h. Proportionalitetsfaktoren betegnes med γ og er et udtryk for immunitetsraten. Immunitetsraten afhænger blandt andet af, hvor meget smitte de inficerede individer har i sig, men ikke af antallet af smittende. De forskellige størrelser, der kan siges at indgå i immunitetsraten er hver især repræsenteret ved en brøkdel, der tilsammen giver γ. Det vil med andre ord sige, at sandsynligheden for at netop ét individ bliver immunt, er udtrykt ved en brøk. Dette fører til følgende udtryk:

$$\begin{aligned}
& P\{S(t) = s, I(t) = i+1, \text{ netop én ny immun i }]t, t+h]\} \\
= \; & P\{S(t) = s, I(t) = i+1\} \\
& \quad P\{\text{netop én ny immun i }]t, t+h] \mid S(t) = s, I(t) = i+1\} \\
= \; & P\{S(t) = s, I(t) = i+1\} \, (\gamma(i+1)h + o(h))
\end{aligned}$$

ad 3.
Sandsynligheden for at der ikke sker nogen forandring er lig med én minus sandsynligheden for forandring (den komplementære hændelse). Sandsynligheden for forandring svarer til summen af sandsynlighederne for forandring ud fra det givne udgangspunkt, det vil sige sandsynligheden for én ny smittet plus sandsynligheden for én ny immun. Disse sandsynligheder er udtrykt under hændelse 1 og 2, blot er antallet af modtagelige s og antallet af smittede i. Dette fører til følgende udtryk:

$$\begin{aligned}
& P\{S(t) = s, I(t) = i, \text{ ingen forandring i }]t, t+h]\} \\
= \; & P\{S(t) = s, I(t) = i\} \\
& \quad P\{\text{ingen forandring i }]t, t+h] \mid S(t) = s, I(t) = i\} \\
= \; & P\{S(t) = s, I(t) = i\}(1 - P\{\text{forandring}\}) \\
= \; & P\{S(t) = s, I(t) = i\}(1 - (P\{\text{én ny smittet}\} + P\{\text{én ny immun}\})) \\
= \; & P\{S(t) = s, I(t) = i\}(1 - (\beta\, si + \gamma\, i)h + o(h))
\end{aligned}$$

Den samlede sandsynlighed til tid $t + h$ bliver således:

$$\begin{aligned}
& P\{S(t+h) = s, I(t+h) = i\} \\
= \; & P\{S(t) = s+1, I(t) = i-1\}(\beta(s+1)(i-1)h + o(h)) \\
& \quad + P\{S(t) = s, I(t) = i+1\}(\gamma(i+1)h + o(h)) \\
& \quad + P\{S(t) = s, I(t) = i\}(1 - (\beta si + \gamma i)h + o(h))
\end{aligned}$$

Selvom modellen er bygget på den antagelse, at kun én af de i forhold til modellen interessante hændelser indtræffer i $]t, t+h]$ er der dog stadig en lille sandsynlighed for, at to eller flere hændelser optræder i samme tidsinterval. Netop dette tilfælde tager fejlleddene $o(h)$ højde for i ovenstående udtryk for hændelserne.

Vi indfører nu følgende notation:

$$P\{S(t) = s, I(t) = i\} = p_t(s, i)$$

Den samlede sandsynlighed bliver da:

$$\begin{aligned}
p_{t+h}(s,i) \; = \; & p_t(s+1, i-1)(\beta(s+1)(i-1)h + o(h)) \\
& + p_t(s, i+1)(\gamma(i+1)h + o(h)) \\
& + p_t(s,i)(1 - (\beta si + \gamma i)h + o(h))
\end{aligned}$$

Dette kan omskrives til:

$$\begin{aligned}\frac{p_{t+h}(s,i)-p_t(s,i)}{h} &= \beta(s+1)(i-1)p_t(s+1,i-1)\\ &\quad +\gamma(i+1)p_t(s,i+1)\\ &\quad -\beta i(s+\frac{\gamma}{\beta})p_t(s,i)\\ &\quad +o(1)\end{aligned}$$

Under antagelse af differentiabilitet af funktionen, der fører $t \to p_t(s,i)$ for alle s, i, får vi for $h \to 0$

$$\begin{aligned}\frac{dp_t(s,i)}{dt} &= \beta(s+1)(i-1)p_t(s+1,i-1)\\ &\quad +\gamma(i+1)p_t(s,i+1)\\ &\quad -\beta i(s+\frac{\gamma}{\beta})p_t(s,i)\end{aligned} \tag{4.1}$$

I begyndelsestilstanden, altså for $t = 0$ og under antagelse af at $S(0) = s$ og $I(0) = i$, vil nogle af de størrelser, der udtrykker antallet af modtagelige og smittede i hændelse 1 og 2 til tid t ikke være mulige. Eksempelvis kan antallet af modtagelige ikke være $s + 1$, når vi har antaget, at de er s. Resultatet af dette bliver, at udtrykkene for hændelse 1 og 2 elimineres.

Vi har således følgende differentialligning for begyndelsestilstanden:

$$\frac{dp_t(s,i)}{dt} = -\beta s(i+\frac{\gamma}{\beta})p_t(s,i)$$

Desuden må sandsynligheden for at tilstanden er som antaget være 1. Det betyder, at $p_0(s,i) = 1$.

Denne ligning udtrykker en differentialligningsmodel for den generelle epidemi.

Den kontinuerte model kan ikke løses analytisk, og man må derfor gøre det på en anden måde, eksempelvis numerisk. Forudsat at α, β og γ er kendte løses den for alle værdier af (s,i). Man opnår således ikke et funktionsudtryk for sammenhæng mellem parametre og resultat.

4.3 Diskrete epidemimodeller

Dette afsnit omhandler to af de mest anvendte stokastiske diskrete epidemimodeller; Reed-Frost og Greenwood. Vi vil først behandle Reed-Frost modellen for derefter kort at beskrive, hvorledes Greenwood modellen afviger fra Reed-Frost.

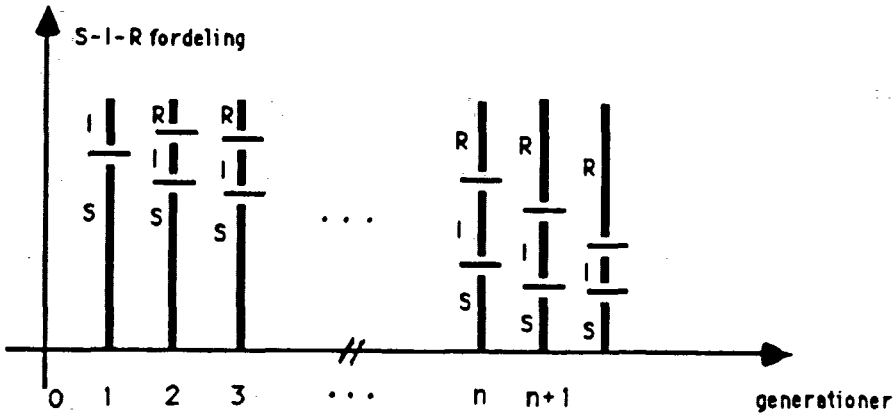
Reed-Frost modellen

Reed-Frost modellen blev udarbejdet af Lowell J. Reed og Wade Hampton Frost omkring 1928, hvor de brugte den til undervisning i stokastiske hændelser. Den er dog først blevet nedskrevet i 1942, men ikke af Reed og Frost selv.

I forbindelse med de diskrete modeller antages det, at alle interessante hændelser sker på allerede identificerede tidspunkter i sygdomsforløbet. Dette er i modsætning til den kontinuerte model, hvor de interessante hændelser kan ske på et vilkårligt tidspunkt.

I Reed-Frost modellen er smitteperioden reduceret til et enkelt punkt. Det er altså ikke vigtigt for modellen, hvornår i smitteperioden man har udviklet evnen til at smitte, blot at man har. Tidsskridtet mellem hver smitteperiode er sygdommens latensperiode, der er perioden fra man bliver smittet til man er i stand til at smitte andre (se figur 4.1). Således vil et individ, der er blevet smittet, gå direkte fra at være i tilstand S i den ene smitteperiode til tilstand I i næste. Tilsvarende vil et individ, der har overstået smitteperioden gå fra gruppen I til R. Man kan derfor undersøge fordelingen af S, I og R efter hver overstået latensperiode. Der tales her om den næste generation i epidemien.

Med startpunkt i et enkelt tilfælde i en lukket population vil de nye tilfælde opstå som en kæde af stadier/ generationer. I den diskrete model indgår den faktiske varighed af de forskellige perioder ikke. Der stilles derimod andre krav til modellerne. Da latensperioden benyttes som afstanden mellem to generationer i Reed-Frost modellen, skal den være tilnærmelsesvis konstant. Samtidig er det også nødvendigt med en kortvarig smitteperiode, da den skal kunne opfattes som et punkt. Modellen kan med udgangspunkt i generation n's opdeling af individer i de tre grupper S, I og R beskrive sandsynligheden for, at den følgende generation $n+1$ har en bestemt opdeling.



Figur 4.3: Figuren viser en fiktiv udvikling for en epidemi, der har et **S** → **I** → **R** forløb (både Reed-Frost og Greenwood).

Det, man typisk ønsker at kende, er nærmere bestemt sandsynligheden for, at der er k modtagelige i næste generation. Tallet k er en værdi for antallet af modtagelige til tiden $n+1$. Det betyder, at k enten kan være S_n eller mindre, idet antallet af modtagelige falder som epidemien forløber. Således tilhører k heltallene fra 0 til S_n.

S_n, I_n og R_n betegner individerne i de forskellige kategorier i den n'te generation. Lad p betegne sandsynligheden for at et bestemt modtageligt individ i en generation har effektiv kontakt med en bestemt smittende. Således er sandsynligheden for at det pågældende individ undgår smitte fra en given smittende lig $1-p$. Sandsynligheden for at en modtagelig undgår kontakt med alle smittende er

$$q_n = (1-p)^{I_n}$$

Hvorved $1-q_n$ angiver sandsynligheden for at en given modtagelig bliver smittet.
Sandsynligheden for at S_{n+1} er lig k afhænger af følgende elementer:

1. sandsynligheden for at k givne individer undgår at blive smittet, $(q_n)^k$
2. sandsynligheden for at resten af individerne $(S_n - k)$ bliver smittet, $(1 - q_n)^{S_n - k}$
3. antal måder hvorpå de k kan udpeges blandt S_n, dvs antal kombinationer af k elementer udtaget af S_n, $\binom{S_n}{k}$

Punkt 3 er en kombinatorisk specifikation, mens hændelse 1 og 2 repræsenterer stokastiske fænomener.

Der er to mulige udfald for hvert modtageligt individ; smittet eller ikke smittet. Sandsynligheden for om et individ bliver smittet eller undgår smitte er uafhængig af, hvad der sker med de øvrige individer. Processen kan derfor opfattes som en serie gentagelser af samme 'forsøg', der sker under ensartede ydre rammer. Under disse omstændigheder følger S_n binomialfordelingen, der er benyttet tidligere i kapitel 2.

Samlet kan sandsynligheden for $S_{n+1} = k$, hvor $k = 0, \cdots, S_n$ således udtrykkes som:

$$P\{S_{n+1} = k\} = \binom{S_n}{k} (q_n)^k (1 - q_n)^{S_n - k} \tag{4.2}$$

Det er denne ligning, der definerer Reed-Frost modellen. Parametrene S_n og q_n er afgørende for formen af binomialfordelingen. I Reed-Frost modellen er parametrene S_n og q_n afhængige af tiden, de er derfor i princippet forskellige for ethvert n. Derudover afhænger sandsynligheden for $S_{n+1} = k$ af den foregående tilstand, idet S_n og q_n indgår i ligning (4.2). Således bliver Reed-Frost modellen en kæde af binomialfordelinger, én til hvert diskret tidspunkt, hvorfor den også tit går under betegnelsen kædebinomialmodellen. Det er ikke kun sandsynlighedsfordelingen, der ændrer sig; også dens tilstandsrum ændrer sig, idet S_n ikke vokser men typisk falder, som epidemien skrider frem.

Tilstanden til tiden $n + 1$ afhænger udelukkende af tilstanden til tiden n og ikke af de øvrige foregående tilstande. En proces med denne egenskab betegnes en Markovproces. Markovprocesser, som foregår i diskret tid, betegnes Markovkæder og Reed-Frost modellen er således en Markovkæde. Modellen kan naturligvis kun anvendes, hvis der har

kendskab en begyndelsesopdeling. Denne opdeling vil have indirekte indflydelse på de efterfølgende opdelinger.

Greenwood

Greenwood modellen er formuleret i 1931, hvilket er sket uafhængigt af Reed-Frost modellen og er en alternativ kædebinomialmodel. I Reed-Frost modellen afhænger en modtageligs risiko for at blive udsat for effektiv kontakt blandt andet af antallet af smittende, dvs at q_n varierer for hvert n. Dette er ikke tilfældet for Greenwood modellen; her afhænger sandsynligheden for at et givent individ bliver inficeret *ikke* af antallet af smittede. Dette betyder, at q_n er konstant, hvorfor den betegnes q. Således er sandsynligheden for, at en given modtagelig bliver smittet, $1-q$, hvor det i Reed-Frost var $1-q_n$. Greenwood modellen ser således ud

$$P\{S_{n+1}=k\} = \binom{S_n}{k} q^k (1-q)^{S_n-k} \tag{4.3}$$

Brugen af Greenwood modellen i stedet for Reed-Frost kan i nogle tilfælde betragtes som en praktisk approximation. Den kan også benyttes som bedre egnet til en sygdom, hvor overførslen af infektion hovedsageligt afhænger af individets modtagelighed og ikke af antallet af smittede, idet den smittedes evne til at smitte ikke er relevant. Dette vil være tilfældet med sygdomme, hvor smitbarheden ikke knytter sig til antallet af smittede, men til det omgivende miljø, f.eks via luften eller linned.

4.4 Modellernes anvendelsesområde

Modellerne vi har behandlet i dette kapitel anvendes som tidligere nævnt til at beskrive et epidemiforløb. Den generelle model har som navnet antyder et bredt anvendelsesområde. Den kan så at sige benyttes til enhver epidemi også i de tilfælde, hvor de diskrete modeller ikke kan. Dette skyldes, at de diskrete modeller har visse krav til sygdomsforløbet, der gør at de ikke altid kan bruges. På grund af disse krav kan de diskrete modeller kun benyttes til beskrivelse af sygdomme med konstant latens- og inkubationsperiode og kort smitteperiode. De kan

således ikke benyttes til at beskrive sygdomme, der har varierende smitteperioder eller sygdomme, hvor symptomerne ikke er synlige. Eksempler på sygdomme, der *kan* beskrives ved hjælp af Reed-Frost modellen er mæslinger, røde hunde og skoldkopper. Sygdomme med længerevarende smitteperiode, der således ikke kan opfattes som et punkt, kan i stedet repræsenteres ved hjælp af modellen over generelle epidemier. Et eksempel på dette er kønssygdomme, hvor et smittet individ er i stand til at smitte andre indtil en medicinsk behandling er afsluttet.

Endelig kan modellen over generelle epidemier også anvendes som en approximation af den diskrete model i tilfælde, hvor dette vil være mere hensigtsmæssigt. Grunden til dette kan være af enten datamæssig eller matematisk/ teknisk karakter.

4.5 Delkonklusion

I dette kapitel behandler vi tre stokastiske epidemimodeller, der beskriver epidemier med et $S \rightarrow I \rightarrow R$ forløb. De forsøger alle at beskrive en virkelighedssituation, hvor en smitteoverførsel finder sted og de smittende bliver fjernet. Det stokastiske element der forsøges modelleret består i, om/ hvornår et modtageligt individ har effektiv kontakt med en smittet og hvor lang tid der går inden individet bliver fjernet. Om der er effektiv kontakt er bestemt af flere stokastiske hændelser: den raske skal møde den smittende, den syge skal være tilstrækkelig inficeret til at kunne overføre smitte, viruset skal overføres og den modtagelige skal udvikle et sygdomsforløb. Det stokastiske element er således sammensat af både adfærdsmæssige og fysiologiske faktorer, der hver for sig rummer yderligere elementer af stokasticitet.

I forbindelse med fastlæggelse af sandsynligheden for effektiv kontakt bliver der i de beskrevne modeller foretaget en idealisering af virkeligheden. En del af denne idealisering består i at der gøres nogle antagelser om populationen. Den skal blande sig homogent og alle individer skal have lige stor sandsynlighed for at blive smittet. Desuden antages det, at systemet er lukket.

Vi behandler to forskellige modeltyper; en kontinuert og en diskret. I den kontinuerte model er det muligt til ethvert tidspunkt at fastlægge antallet af individer i hver af de tre grupper, S, I og R. Denne model kan benyttes til at beskrive alle former for epidemier. Den diskrete

model kan kun anvendes, hvis sygdommene opfylder visse krav. Disse krav er som nævnt i kapitlet: konstant latens- og inkubationsperiode og relativ kort smitteperiode. I de diskrete epidemimodeller kan man fastlægge sandsynligheden for at der til en bestemt generation er et bestemt antal modtagelige individer.

På Statens Seruminstitut har man arbejdet med stokastiske epidemimodeller, men kun i forbindelse med forståelse af sygdomsmekanismer. Når de ikke har brugt modellerne i forbindelse med udvikling af handlingsplaner, skyldes det blandt andet, at virkefeltet er begrænset til små lukkede samfund. De antagelser der kræves opfyldt før de stokastiske modeller er anvendelige er for grove til at de kan benyttes til beskrivelse af en epidemis udvikling i en meget stor population.

I de epidemimodeller, vi behandler, er sandsynligheden for at en modtagelig bliver smittet ens for alle individerne og uafhængig af tidspunktet i epidemiforløbet. I virkeligheden er denne sandsynlighed sammensat af et utal af andre stokastiske variable. Dels er det forskelligt hvor godt et immunforsvar de forskellige individer har og dels varierer det enkelte individs immunforsvar med tiden alt afhængig af individets fysiske tilstand; om det har sovet nok, spist sundt mm. Desuden er sandsynlighed-en for at møde en smittende afhængig af de enkelte individers sociale adfærd. I modellerne opererer man med en middelværdi af alle disse variable. Denne idealisering gøres selvom man ved at de ovennævnte faktorer har stor betydning for om et individ bliver smittet.

Der eksisterer således stokastiske elementer i virkelighedsområdet, som de i projektrapporten behandlede stokastiske epidemimodeller ikke inddrager. Disse stokastiske elementer omgås ved at forudsætte at populationen er homogen. Dermed er et vigtigt stokastisk aspekt udeladt i modelleringen.

Stokastiske epidemimodeller er på grund af de nævnte forhold ikke brugbare til at undersøge, hvordan en epidemi udvikler sig i store populationer. Her benytter man primært deterministiske epidemimodeller. Når man undersøger meget store populationer vil spredningen nemlig blive forholdsvis lille, hvorfor man lige så godt kan benytte gennemsnittet.

De stokastiske epidemimodeller bliver derfor hovedsageligt anvendt til at fastlægge parametre for hver modellerbar sygdom. Disse parametre kan så anvendes i deterministiske epidemimodeller. Måden dette gøres på er ved at bruge den stokastiske epidemimodel på mange små husstande af 3-5 personer. Man undersøger hvordan smitten spredes i den lille population, når et individ har fået tilført smitte udefra. I husstande er virkelighedssituationen tættere på de antagelser, der går forud for modelbygningen. Det kan med rimelighed antages at en familie bevæger sig homogent. Endvidere kan man med stor sikkerhed sige, at de er underlagt det samme miljø og har nogenlunde ens immunforsvar, da de får samme kost og har en del af samme arvemasse. Når parametrene fra mange små husstande er fastlagt oversættes disse til parametre for en større population, hvorefter de indsættes i en deterministisk model.

De situationer hvor en stokastisk epidemimodel bliver interessant er, hvis man vil undersøge sandsynligheden for at en sygdom vil 'overleve' selvom den er aftagende og dermed kunne forårsage en ny epidemi. For at besvare dette spørgsmål kunne man nu vende situationen en omgang og se det fra virusets synsvinkel (da modellerne kun omhandler dråbeoverførte infektioner mellem mennesker). Dette gøres inden for teoretisk biologi, hvor man interesserer sig for sandsynligheden for at et virus overlever mellem to på hinanden følgende epidemier. Man må i den forbindelse interessere sig for hvilke faktorer i omgivelserne, der bevirker at et virus overlever og har mulighed for at formere sig. Således kan man ved at undersøge dette aspekt opnå en indsigt i, hvorfor en sygdom ikke uddør efter en epidemi, men derimod til stadighed kan komme igen. I forsøg på at opnå en bedre forståelse af epidemierne, har der rundt om i verden været forsøgt at anlægge forskellige synsvinkler på epidemiforløb.

Ønsker man en større anvendelighed af stokastiske epidemimodeller og dermed en bedre overensstemmelse med virkeligheden kræver det således en kraftig udbygning af modellerne. Der er derfor gjort forsøg på at gøre modellerne mere virkelighedsnære, ved dels at indlægge variation i individernes modtagelighed, gøre modtageligheden afhængig af årstider og dels ved at gøre individernes risiko for at møde en smittet afhængig af den sociale omgangkreds. Man forsøger således at inddrage flere stokastiske elementer i de modeller, vi har behandlet.

Kapitel 5

Diskussion

Umiddelbart kunne det måske nok synes paradoksalt, at virkelighedssituationer hvori der optræder tilfældige fænomener forsøges modelleret i den strengt logiske matematiske verden. Vi har igennem denne projektrapport forsøgt at beskrive hvordan denne oversættelse kan foregå og hvordan tilfældighedselementet optræder i den matematiske model. Samtidig har vi set på hvordan modeller af denne karakter kan bedømmes og anvendes enten til forståelse af virkelighedssituationen eller til problemløsning.

Som første led i oversættelsen må man danne sig et billede af hvori tilfældigheden består. Stokasticiteten i tilfældige fænomener er bestemt af mange forskellige omstændigheder. Når disse ydre faktorer ændres har det indflydelse på fænomenets adfærd. Hvordan fænomenet opfører sig under denne indflydelse er ikke til at forudsige, hvorfor fænomenet synes tilfældigt. Selvom virkelighedssituationen er kompleks og hændelserne ikke på forhånd kan bestemmes, betyder det ikke nødvendigvis at der er lige stor sandsynlighed for alle hændelserne. Nogle hændelser kan forekomme hyppigere end andre og derfor være mere sandsynlige.

En af de grundlæggende antagelser i modelleringen af stokastiske fænomener er, at fænomenet er af repetetiv karakter. På denne måde kan man opfatte hændelserne som resultat af ensartede forsøg, udført under samme forudsætninger. Med dette udgangspunkt kan man søge efter et mønster i tilfældigheden.

Med udgangspunkt i de spørgsmål man ønsker at få besvaret, identificerer man de stokastiske variable, som har betydning for den situa-

tion man ønsker at modellere. Nogle af de stokastiske variable varierer måske så lidt, at man vælger at fastlægge dem deterministisk. Man har således valgt at se situationen fra en bestemt synsvinkel, hvilket afspejler sig i de forudsætninger man kan antage om systemet. I kapitel 2 om casinospil er de stokastiske variable blevet udvalgt ud fra hvad der er interessant for spilleren, nemlig hvorvidt kuglen vil lande i det felt man har satset på. Med denne indgangsvinkel tages der ikke højde for hvordan de øvrige spillere gør deres indsatser og hvor mange der kommer på casinoet. Valget ville være anderledes, hvis virkelighedssituationen blev anskuet fra casinoets side. I kapitlet om Poissonprocesser ser vi ligeledes hvordan samme virkelighedssituation kan anskues på forskellig vis. Derved ændres valget af de stokastiske variable alt afhængig af om man ønsker at kende antallet af ankomster, om man til et bestemt tidspunkt ønsker at kende antallet af individer eller om det er ventetiden mellem ankomsterne man er interesseret i. Modellerne bliver udformet på en sådan måde at de begrænses til kun at beskrive det aspekt af virkelighedssituationen, der har relevans for brugeren.

De stokastiske variable er den grundlæggende bestandel af stokastiske modeller. Den stokastiske variabel er en funktion, der er beskrevet ved sin fordeling. Fordelingen for en stokastisk variabel er en matematisk kontruktion, hvorigennem man søger at beskrive en regularitet i hændelserne. Fordelingsfunktionen bestemmes udfra en betragtning af de forudsætninger, der kan stilles til systemet. Vi har igennem vores projektrapport stødt på tre fordelingstyper; binomialfordelingen, Poissonfordelingen og eksponentialfordelingen, der repræsenterer et varierende sæt af forudsætninger. Man kan med kendskab til fordelingen udtale sig om sandsynligheden for at den stokastiske variabel til et bestemt tidspunkt har en bestemt værdi.

En del af en modelanalyse består i at vurdere, hvilke idealiseringer der er sket idet man går fra virkeligheden til det matematiske univers. Man vurderer så at sige 'afstanden' fra virkeligheden til matematikken. Det hører også med at vurdere om disse simplificeringer er rimelige og hvilke konsekvenser de medfører. Casinospil, der kan opfattes som en konstrueret virkelighed, er det område hvor denne afstand er mindst. For et roulettehjul vil simplificeringen blot bestå i at hævde, at sandsynligheden for at kuglen i et roulettehjul lander på et tal er lige stor for alle tal og at spillene er uafhængige.

Når man anvender Poissonprocessen til at beskrive sandsynligheden

for en hændelse, skal hændelsen opfylde en række krav. Sædvanligvis vil man kun benytte Poissonprocessen til at beskrive fænomenet, hvis det tilnærmelsesvis opfylder disse krav. I så fald er afstanden fra virkeligheden til den model, der skal beskrive virkeligheden ikke lang.

For epidemimodeller er sagen derimod lidt anderledes. Der er her tale om en model, der forsøger at modellere en kompleks situation og resultatet bliver, at der foretages nogle simplificeringer, som måske er for grove. For den kontinuerte epidemimodel har vi imidlertid ikke fundet en generel forskrift for fordelingsfunktionen, hvorfor man ikke kan sige noget konkret om fordelingen af sandsynlighederne.

Denne afstand mellem den virkelige og den matematiske verden betyder noget for hvor godt fordelingen beskriver mønstret i tilfældigheden og er derfor et udtryk for, hvor stor anvendelse modellen har.

Anvendelsesmuligheder

Som vi har set i projektrapporten, bliver stokastiske modeller anvendt i mange forskellige sammenhænge; inden for forskellige områder og med forskelligt formål. Vi vil i dette afsnit se på, om der kan siges noget generelt om den type af spørgmål stokastiske modeller kan besvare.

De stokastiske modeller angiver sandsynligheder for at et eksperiment leder til bestemte hændelser. Et af de afgørende aspekter er, at man ikke nødvendigvis altid er interesseret i at kende den 'gennemsnitlige' hændelse. Denne kan med en vis afvigelse bestemmes ved en deterministisk indgangsvinkel. Man ønsker derimod at kende sandsynligheden for at det netop vil blive denne hændelse eller måske snarere risikoen/chancen for at forsøget vil resultere i et af de sjældnere tilfælde. Generelt kan det siges om stokastiske modeller, at de kan benyttes til at beskrive marginalsituationerne. Dette er eksempelvis tydeligt at se i tilfældet med casinospil. Typisk vil spilleren ikke opnå sit mål, men hun ønsker at vide, hvad sandsynligheden er for at hun gør det alligevel. Samme problematik er at se i casen om stormfloderne. Den typiske stormflod vil ligge under digehøjden, men det interessante er sandsynligheden for at den på et eller andet tidspunkt vil ligge over.

Stokastiske modeller kan fungere både som forståelses- og som handlingsmodeller alt efter virkelighedsområde og synsvinkel. Eksempelvis

kan modelleringen af roulettespil karakteriseres som en typisk handlingsmodel, hvorimod epidemimodeller er en modeltype, der som primært formål har forståelse.

Der har i de beskrevne modeller været en tydelig forskel på afstand mellem virkelighedsområde og det modellerbare system. Som skrevet i det foregående afsnit afspejler dette forhold sig i projektrapportens opbygning. Der er ingen tvivl om at jo større denne afstand bliver des mere har man idealiseret virkeligheden for at opnå et modellerbart system og dermed risikerer man at systemet ikke beskriver situationen godt nok. Det må naturligvis i hvert tilfælde vurderes, om idealiseringerne er for grove eller om de kan antages at være rimelige. En sådan vurdering afhænger af formålet med modellen og dermed hvor nøjagtigt et resultat, man som modelbygger og -bruger ønsker.

Verificering

Dette afsnit vil omhandle en diskussion af de problemer, der opstår i forsøget på verificering af stokastiske modeller. Vi vil ikke verificere de enkelte modeller der er behandlet i projektrapporten, men istedet diskutere *hvordan* man kan verificere dem. Som det første i dette afsnit vil vi kort ridse de generelle verifikationsmulighederne for stokastiske modeller op. Derefter vil vi se på mulighederne for at bedømme de modeller vi har beskæftiget os med.

Der er to hovedkategorier af verifikationsmuligheder, den kvalitative og den kvantitative, der bedømmer henholdsvis modelklassen og parametrene. En model skal gennem begge tests for at man kan sige, at den tilnærmelsesvis er verificeret. Først vil vi beskæftige os med den kvalitative modelverificering, da dette logisk vil være det første skridt i modelbyggerens arbejde.

Modeller hviler i forskellig grad på videnskabelig teori inden for det område, de beskriver. Har modelbyggeren ikke tilstrækkelig teori til rådighed må modellen bygges udfra fornuftsmæssige betragtninger. Dette har en konsekvens for de forudsætninger modellen er bygget over og forudsætningerne vil derfor være af forskellig teoretisk og fornuftsmæssig karakter.

I den kvalitative bedømmelse konfronterer man om muligt modellen

med allerede etableret teori, hvor man eksempelvis undersøger om modellen kommer i modstrid med gældende love. Derudover må de antagelser og idealiseringer man har foretaget vurderes. Disse overvejelser sker på et rent tankemæssigt plan, hvor man trækker på sin viden om det virkelighedsområde som modellen skal beskrive eller benytter almindelig sund fornuft. Dette foregår ud fra en betragtning om modellens hensigt og hvilke faktorer, der har afgørende indvirkning på hændelsesforløbet. Hvis man har vurderet at modellen hviler på nogle rimelige antagelser og idealiseringer, må man foretage en overordnet matematisk analyse af modellen.

Hvis denne model skal have en anvendelsesværdi må der indsættes faktiske tal. Disse parametre kan fremkomme på forskellig vis. Enten forekommer de i virkeligheden, kan bestemmes ved en principmodel eller forekommer som en naturlig følge i selve opbygningen af modellen.

Hvis modellen ikke er blevet falsificeret på det kvalitative grundlag, udsættes den for endnu en test. I den kvantitative modelverificering er det ikke kun modellens skelet, der bedømmes, men også de fastlagte parametre. Modellen er nu istand til at frembringe faktiske værdier, der er sammenlignelige med virkeligheden i fald der eksisterer observerede data. Dette udgør en statistisk testsituation. Der anvendes en hypotetisk deduktiv metode, hvor man vurderer modellens konsekvenser i forhold til virkeligheden. Er der ikke overensstemmelse mellem konsekvenser og virkelighed, vil man enten forkaste modellen eller forsøge at tilpasse parametrene. Desuden kan man forsøge sig med at eftervise modellen empirisk. En egentlig verifikation kan der derimod ikke blive tale om, men snarere en godtgørelse af at modellen endnu ikke er falsificeret. Sålænge man ikke kan falsificere modellen, accepteres den.

I kapitel 2 har vi beskæftiget os med matematikken bag *bold* og *the gambler's ruin*. Den kvalitative vurdering af disse er at vurdere om de regelsæt der ligger til grund for modellen kan overholdes i virkelighedssituationer, herunder antagelsen om at der er uafhængighed mellem spillene. De indgående parametre i *bold* og *the gambler's ruin* er repræsenteret ved en sandsynlighed der er fastlagt udfra en principmodel. Ved en kvantitativ vurdering af disse kan der foretages en række ensartede eksperimenter. Resultatet sammenlignes med de parametre der er fastlagt udfra principmodellen og man kan derefter verificere eller falsificere de teoretiske parametre.

For roulettespil kan antagelsen, om at sandsynligheden for at kuglen lander i hvert af felterne er den samme, godt være sand, selvom kuglen i 10 ud af 10 forsøg lander i samme felt. Sandsynligheden for denne hændelse er dog så lille, at en falsificering på dette grundlag vil være rimelig. Er modellen bygget på forkerte antagelser, kan resultaterne af et eksperiment godt se fornuftige ud. Selvom hjulet er skævt og et af felterne er klistret kan kuglen godt lande i forskellige felter 20 gange i træk.

Som ovenstående giver et indtryk af, er det nødvendigt at have uendelig mange forsøg til rådighed for at man med sikkerhed kan afgøre om principmodellen stemmer overens med virkeligheden. Dette er af fysiske årsager kun tilnærmelsesvis muligt, idet der kun kan udføres et endeligt antal forsøg. Da et roulettehjul har en simpel konstruktion kan parametrene også bestemmes ved at opstille en mekanisk model, der på baggrund af de fysiske love og sammenhænge udtrykker kuglens bevægelse i forhold til hjulet og på den måde få flere af de fysiske faktorer med.

I dette kapitel har vi desuden beskæftiget os med de to sikre strategier; udstregningssystemet og *martingale*. I *martingale* sker denne vurdering udfra en betragtning af at sandsynligheden for at gå fallit går mod nul når antallet af spil går mod uendelig. Selvom vi ikke behandler udstregningssystemet matematisk er det muligt at vurdere den som sikker ved brug af sund fornuft.

I kapitel 3 der omhandler Poissonprocesser, er de grundlæggende antagelser, at der er uafhængighed mellem hændelserne og at der er et proportionalt forhold mellem sandsynligheden for at en hændelse indtræffer i et interval og intervallets længde. Ved en kvalitativ vurdering af Poissonprocesser er det nødvendigt at undersøge, om fænomerne opfylder disse krav. Hvis antagelserne ikke overholdes i et rimeligt omfang vil modellen ikke kunne anvendes, men dog er små afvigelser acceptable. I den kvantitative vurdering er fastlæggelsen af intensiteterne af afgørende betydning. Disse er fastlagt på baggrund af faktiske målinger, der afhænger af situationen. Er disse fastlagt forkert vil der ikke længere være en sammenhæng mellem virkelighed og model. Konsekvensen af dette vil være at man enten forkaster modellen eller prøver at få et bedre billede af intensiteterne ved at foretage flere målinger, da dataindsamlingen måske er foretaget på et tidspunkt, der ikke er repræsentativt for den generelle situation. I de to cases, der omhandler telefonopkald og

stormfloder, er der foretaget en indsamling af data til brug i modellen.

Kapitel 4 indeholder modeller der beskriver epidemi-forløb. De situationer disse modeller beskriver er meget komplekse, både i forhold til modellernes skelet og de indgående parametre. Det vil derfor ikke være muligt at eftervise modellerne empirisk. For at vurdere kvaliteten af disse modeller må man have indsigt i mekanismerne i de enkelte sygdomme, desuden om det er en rimelig antagelse, at individernes færden og fysiske tilstand er homogen. Parametrene der indgår i modellerne kan fastlægges udfra tidligere epidemier; disse er smitteraten og immunitetsraten. For at verificere modellernes resultat kræver det, at man har meget datamateriale til rådighed, og at dette datamateriale er opsamlet for epidemier af samme type og under samme betingelser. Da kravene til datamaterialet således er meget stramme og sjældent vil foreligge i denne form, kan man istedet prøve at fitte de relevante parametre.

For stokastiske modeller er svaret angivet som en sandsynlighed, dvs at der er en vis chance for at hændelsen indtræffer. Deri ligger, at der også kan være sket alt muligt andet inden for modellens rammer. Som ovenstående giver udtryk for er det ikke ligetil at eftervise en stokastisk model empirisk. Selvom man har foretaget fornuftige antagelser om systemet, kan hændelserne i en række af eksperimenter i en lang periode synes at tegne et forkert billede. Man kan derfor ikke på samme måde som for deterministiske modeller udføre et eksperiment og på baggrund af afvigelsen mellem de beregnede og observerede resultater konkludere om den matematiske model er en fornuftig beskrivelse af virkelighedssituationen.

Modelleringen

I dette afsnit vil vi komme med nogle matematiske betragtninger om de stokastiske modeller vi har behandlet i projektrapporten; se på hvilken type modeller vi er kommet i berøring med og hvordan vi har behandlet dem matematisk.

De modeller vi har berørt i projektrapporten har alle udspillet sig i forhold til tiden, omend idealiseret tid. I casino kapitlet var det tidslige aspekt antal spil. I kapitlet om Poissonprocesser så vi mange eksempler på fænomener, der ændredes i forhold til reel tid. I de diskrete

modeller udviklede epidemierne sig derimod i forhold til generationer i epidemiforløbet. At det lige netop blev dynamiske modeller vi kom til at arbejde med var ikke et bevidst valg og er heller ikke reglen for stokastiske fænomener. Der er mange tilfældige hændelser, der ikke udspiller sig i forhold til tiden; eksempelvis ville en undersøgelse af den aktuelle højdefordeling i en befolkning ikke kræve en dynamisk model. Når tilfældet ville at vi skulle arbejde med dynamiske modeller skyldes det måske nok, at de umiddelbart virker mere spændende og mere uforudsigelige.

Et andet generelt træk ved det matematiske modelapparat, vi har benyttet i de tre kapitler, er rekursionfunktioner. I kapitel 2 så vi rekursionsfunktionen anvendt til at godtgøre at *bold* strategien var optimal. Ved hjælp af rekursion kunne man til ethvert antal spil n angive sandsynligheden for overlevelse afhængig af formuen ved start og af forløbet af det første spil sammenholdt med resterende $n-1$. I forbindelse med Poissonprocessen var det selve modelopstillingen, der var baseret på rekursion idet der var tale om en overgang fra t til $t+h$. I epidemimodellerne kan man hævde at det rekursive element er mere oplagt, da man til hvert tidspunkt har en fordeling af individer i S-, I- og R-kategorierne og at overgangen til næste tidspunkt nødvendigvis må ske ved rekursion.

Vi kan ikke ud fra dynamikken og rekursionen konkludere noget generelt om stokastiske modeller, men blot gøre den observation at det for de i projektrapporten behandlede modeller har forholdt sig på ovennævnte måde.

Kapitel 6

Konklusion

Vi vil her forsøge at konkludere på selve projektrapporten og vil for lige endnu en gang at ridse hovedspørgsmålene op starte med at gentage problemformuleringen.

- Hvorledes kan tilfældige fænomener gøres til genstand for matematisk modellering?
- På hvilken måde optræder forskellige træk af stokastiske elementer i modeller inden for forskellige virkelighedsområder?
- Hvordan kan man bedømme stokastiske modeller og hvori består anvendeligheden?

Når et virkelighedsområde, hvori der optræder tilfældige fænomener, skal beskrives ved matematiske modeller, må man som udgangspunkt forsøge at identificere det stokastiske element der er årsag til tilfældigheden. Stokastiske variable er et sæt af funktioner, med hvilke man må forsøge at beskrive det stokastiske element. For hver af de stokastiske variable søges en regularitet, der kan beskrives ved en stringent matematisk notationsform. Mønsteret af den stokastiske variabel fastlægges ved en matematisk konstrueret fordelingsfunktion. Alt afhængig af de antagelser der kan forudsættes om systemet, siges den stokastiske variabel at følge en bestemt fordeling. Det betyder, at man i tilknytning til de forhold man finder for den stokastiske variabel vælger den fordelingsfunktion, der er bedst egnet til at karakterisere netop disse forhold. I denne oversættelse vil der naturligvis være tale om en vis idealisering og det må naturligvis vurderes om det informationstab, der forekommer

er rimeligt. Fordelingsfunktionen antages at indeholde alt sandsynlighedsteoretisk information om den stokastiske variable, hvorfor det er muligt at beregne sandsynligheden for at den stokastiske variabel antager en bestemt værdi.

Ved modellering af stokastiske fænomener tilsigtes en idealiseret situationsbeskrivelse, således at kun de væsentlige stokastiske variable medtages i systemet. Man kan opfatte et virkelighedsområde som bestående af flere forskellige stokastiske variable, der alt afhængig af synsvinkel kan indgå i det modellerbare system. Hvilke stokastiske variable, der indgår i modellen, afhænger altså af hensigten med modellen; hvad man som modelbruger er interesseret i at vide om virkelighedsområdet. På baggrund af den anlagte synsvinkel, vurderer man som modelbygger, hvilke aspekter af virkelighedsområdet der er relevante at medtage i sin modellering og hvilke der ikke er.

For at en model kan siges at være om ikke verificeret så ihvertfald accepteret skal dem gennemgå to forskellige former for bedømmelse; den kvalitative og den kvantitative. Som nævnt er det umuligt at verificere en stokastisk model, men det kan ihvertfald stilles som rimelige krav til en god model, at den dels hviler på et stabilt teoretisk fundament og tilnærmelsesvis tegner samme mønster som observationer i virkeligheden.

Man kan alt afhængig af interesse have forskellige formål med modellering af stokastiske fænomener; forståelse og handling. Vi har i projektet set eksempler på begge typer. Når man i oversættelsen fra virkelighed til matematisk model foretager en idealisering, vil der opstå en afstand mellem virkelighedsområdet og det system, der repræsenterer det. Jo kortere denne afstand er des mere præcist beskriver modellen det stokastiske fænomen og bliver dermed også mere anvendelig. Er afstanden for lang vil der ikke være overensstemmelse mellem den stokastiske variabels fordeling og det mønster, man kan finde i virkelighedsområdet. Med kendskab til fordelingsfunktionen kan man bestemme sandsynligheden for at den stokastiske variabel til et bestemt tidspunkt antager en given værdi. Typisk vil de stokastiske modeller derfor anvendes til at beskrive sandsynligheden for at en marginalsituation opstår.

Litteraturliste

Litteratur

Abbey, H. 1952, An Examination of the Reed-Frost Theory of Epidemics, *Human Biology*, **24**, 201-233.

Andreasen, V. 1993, *Introduktion til matematisk infektionsepidemiologi*, IMFUFA, RUC, fortryk.

Bailey, N.T.J. 1975, *The Mathematical Theory of Infections Deseases and its Applications*, 2.edition, London, Charles Griffin & Co Ltd, 82-114, 143-149, 156-167, 190-197, 239-263.

Beaumont, G.P. 1983, *Introductory Applied Probability*, Chichester, Ellis Horwood, 11-51.

Blom, G. 1970, *Sannolikhetsteori med tillämpningar*, Lund, Studentlitteratur, 9/1-9/19.

Brockmeyer, E, Halstrøm, H.L. og Jensen, A. 1948, *The Life and Works of A.K. Erlang*, København, GAD, 161-163, 172, 191, 458-459.

Cox, D.R. og Smith, W.L. 1961, *Queues*, London, Chapman & Hall, 1-30.

Cox, D.R. og Miller, H.D. 1965, *The Theory of Stochastic Processes*, London, Chapman & Hall, 146-156, 338-340.

Dubins, L.E. og Savage, L.J. 1965, *Inequalities for Stochastic Processes, how to gamble if you must*, New York, Dover Publications, INC, 83-94, 97-101.

Feller, W. 1968, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, 3.edition, **1**, New York, John Wiley & Sons, 161-163, 191, 292-293, 458-460.

Hansen, N.H. 1974, *noter til kurset i stokastiske processer*, København, IMSOR, 55-59, 97-98A, 115-119.

Jacobs, K. 1992, *Discrete Stochastics*, Basel, Birkhäuser Verlag, 1-23, 219-233, 235-255.

Jensen, A. 1959, Stormflod og digebygning med særligt henblik på Søndre Limfjordstange, *Ingeniøren*, **21**, 613-620.

Jørsboe, O.G. 1987, *Sandsynlighedsregning*, København, Matematisk institut DTH.

Kingman, J.F.C. 1993, *Poisson Processes*, Oxford, Clarendon Press, 1-10, 44-52.

Maia, J.d.O.C. 1952, Some Mathematical Developments on the Epidemic Theory Formulated by Reed and Frost, *Human Biology*, **24**, 167-200.

Niss, M. 1993, Noter udleveret til gruppen omhandlende *Totilstandsprocessen*, *The gambler's ruin*, *Den generelle epidemimodel* og *Poissonfordelingens opståen*.

Ombré, B. 1991, *Roulette, Black Jack, Baccarat i Casino*, København, Nyt nordisk forlag, 7-27.

Packel, E. 1981, *The mathematics of games and gambling*, Washington, The Mathematical Association of America, 12-26, 47-85, 116-134.

Ross, S.M. 1980, *Introduction to Probability Models*, 2.edition, London, Academic Press, 161-196, 200-203, 259-310.

Snell, J.L. 1982, Gambling, Probability and Martingale, *The Mathematical Intelligencer*, **4**, nr.3, Hanover, USA, 118-124.

Topsøe, F. 1983, *Spontane fænomener en matematisk analyse af radioaktivitet m.m.*, København, Nyt Nordisk forlag.

Supplerende litteratur

Coolidge, J.L. 1909, The Gambler's Ruin, *Annals of Mathematics*, **10**, 181-192.

Ferguson, T.S. 1965, Betting systems which minimize the probability of ruin, *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, **13**, nr.3, 795-818.

Goel, N.S. , Richter-dyn N. 1974, *Stochastic Models in Biology*, London, Academic Press Ltd, 1-12, 32-54, 100-118.

Harsaae, E. 1979, *Usikkerhed og sandsynlighed*, København, Berlingske Forlag.

Heyworth, M.R. og Sealy, J.R. 1980, *Introduction to Statistics*, New Zealand, Paul Longman, 76-77.

Hoppensteadt, F.C. og Peskins, C.S. 1992, *Mathematics in Medicine and the Life Sciences*, Springer-Verlag, 67-78.

Kristensen, E. og Rindung, O. 1960, *Sandsynlighedsregning*, 2. udgave, København, GAD.

Stewart, I. 1989, *Does God Play Dice?*, Oxford, Basil Blackwell.

Vere-Jones, D. 1969, Stochastic Models for Earthquake Occurence, *Journal of the Royal Statistical Society*, series B, **32**, 1-43.

Appendix

The gambler's ruin

I dette afsnit udleder vi løsningen til modellen, der udtrykker sandsynligheden for at blive ruineret, når en spillers begyndelsesformue og mål på forhånd er fastlagt. Desuden antages det at spillerens strategi er at satse én enhed hver gang, at gevinsten er to enheder, og at hun spiller til hun har nået sit mål eller er blevet ruineret. Afsnittet bygger kraftigt på materiale udarbejdet af vores vejleder.

Med udgangspunkt i rekursionsformlen, der er udledt i afsnit 2.3, vil vi først undersøge, om der findes nogen løsninger, som er lokalt konstante, dvs således at $P_m = P_{m+1}$ for $m \in \{1, 2, ...N-1\}$, da det kan få konsekvenser senere i udledningen af P_k.

Hvis det er tilfældet at $P_m = P_{m+1}$ så

$$\begin{aligned} P_m &= P_{m+1}p + P_{m-1}(1-p) \Leftrightarrow \\ P_m &= P_m p + P_{m-1}(1-p) \Leftrightarrow \\ P_m - P_m p &= P_{m-1}(1-p) \Leftrightarrow \\ P_m(1-p) &= P_{m-1}(1-p) \end{aligned}$$

Da $1-p$ er forskellig fra 0 er

$$P_m = P_{m-1}$$

Ved gentagelse af dette argument fremkommer:

$$P_m = P_{m-1} = \cdots = P_0 = 1$$

Endvidere må der gælde, at

$$\begin{aligned} P_{m+1} &= P_{m+2}p + P_m(1-p) \Leftrightarrow \\ P_{m+1} &= P_{m+2}p + P_{m+1}(1-p) \Leftrightarrow \\ P_{m+1} - P_{m+1}(1-p) &= P_{m+2}p \end{aligned}$$

Da $p \neq 0$ er

$$P_{m+1} = P_{m+2}$$

Ved atter at gentage dette argument fremkommer:

$$P_m = P_{m+1} = P_{m+2} = \cdots = P_N = 0$$

hvilket er i modstrid med det foregående, da $P_m = 1$. Der eksisterer altså ingen lokalt konstante løsninger til differensligningen.

Man kunne så forestille sig, at $P_{m+1} = P_{m-1}$. I det tilfælde vil vi have

$$\begin{aligned} P_m &= P_{m+1}p + P_{m-1}(1-p) \Leftrightarrow \\ P_m &= P_{m-1}p + P_{m-1}(1-p) \Leftrightarrow \\ P_m &= P_{m-1} \end{aligned}$$

Det giver en lokal konstant løsning til differensligningen, og dette har vi netop vist i det foregående ikke er tilfældet. Så det gælder, at $P_{m+1} \neq P_{m-1}$ for $m \in \{1, 2, \cdots N-1\}$.

Der kan nu spørges, om der så er forskellige slags løsninger til differensligningen. Vi antager, at $P_0, \cdots, P_k, \cdots, P_N$ og $P'_0, \cdots, P'_k, \cdots, P'_N$ er to forskellige løsninger.

Det gælder for $k \in \{1, 2, \cdots, N-1\}$ at

$$\begin{aligned} P_k &= P_{k+1}p + P_{k-1}(1-p) \Leftrightarrow \\ P_k &= P_{k-1} + p(P_{k+1} - P_{k-1}) \Leftrightarrow \\ P_k - P_{k-1} &= p(P_{k+1} - P_{k-1}) \Leftrightarrow \\ p &= \frac{P_k - P_{k-1}}{P_{k+1} - P_{k-1}} \end{aligned} \tag{6.1}$$

og på tilsvarende måde

$$\begin{aligned} P'_k &= P'_{k+1}p + P'_{k-1}(1-p) \Leftrightarrow \\ p &= \frac{P'_k - P'_{k-1}}{P'_{k+1} - P'_{k-1}} \end{aligned} \tag{6.2}$$

Her ses det, at P_{k+1} nødvendigvis må være forskellig fra P_{k-1} og P'_{k+1} forskellig fra P'_{k-1}, da vi ellers får 0 i nævneren.

For $k = N-1$ har vi ved brug af (6.1) og (6.2)

$$p = \frac{P_{N-1} - P_{N-2}}{P_N - P_{N-2}}$$

og

$$p = \frac{P'_{N-1} - P'_{N-2}}{P'_N - P'_{N-2}}$$

Da $P_N = 0$

$$p = \frac{P_{N-1} - P_{N-2}}{-P_{N-2}} \Leftrightarrow p = 1 - \frac{P_{N-1}}{P_{N-2}}$$

og

$$p = \frac{P'_{N-1} - P'_{N-2}}{-P'_{N-2}} \Leftrightarrow p = 1 - \frac{P'_{N-1}}{P'_{N-2}}$$

Dvs

$$\begin{aligned} 1 - \frac{P_{N-1}}{P_{N-2}} &= 1 - \frac{P'_{N-1}}{P'_{N-2}} \Leftrightarrow \\ \frac{P_{N-1}}{P_{N-2}} &= \frac{P'_{N-1}}{P'_{N-2}} \end{aligned}$$

Ved omordning fås

$$\frac{P_{N-1}}{P'_{N-1}} = \frac{P_{N-2}}{P'_{N-2}}$$

Sættes $a = \frac{P_{N-1}}{P'_{N-1}}$ er altså også $\frac{P_{N-2}}{P'_{N-2}} = a$

For $k = N - 2$ har vi ved brug af (6.1) og (6.2)

$$\frac{P_{N-2} - P_{N-3}}{P_{N-1} - P_{N-3}} = \frac{P'_{N-2} - P'_{N-3}}{P'_{N-1} - P'_{N-3}}$$

Ved indsættelse af $P_{N-2} = aP'_{N-2}$ fremkommer

$$\frac{aP'_{N-2} - P_{N-3}}{aP'_{N-1} - P_{N-3}} = \frac{P'_{N-2} - P'_{N-3}}{P'_{N-1} - P'_{N-3}}$$

der ved udregning og omordning giver $P_{N-3} = aP'_{N-3}$.

På tilsvarende måde fortsættes og vi opnår at

$$P_k = aP'_k, \quad \text{for} \quad k \in \{1, 2, ..., N-1\}$$

Da vi imidlertid også har

$$P_1 = P_2 p + P_0(1-p)$$

betyder det at

$$1 = P_0 = \frac{P_1 - P_2 p}{1-p} = \frac{aP'_1 - aP'_2 p}{1-p} = \frac{a(P'_1 - P'_2 p)}{1-p} = aP'_0 = a$$

Da $a = 1$ har vi $P_0 = P'_0, P_1 = P'_1, \cdots, P_N = P'_N$, der findes altså kun én løsning til differensligningen.

Vi vil nu undersøge, om der findes løsninger af formen

$$P_k = \alpha + \beta c^k, k \in \{0, 1, \cdots, N\}$$

for passende konstanter α, β, $c > 0$. Denne løsningsform har vi fået opgivet til at være et rimeligt gæt i forhold til teorien om differensligninger. Vi vil derfor ikke gå ind i argumentation for brugen af den.

For at P_k tilfredsstiller differensligningen skal den opfylde:

$$\begin{aligned}
\alpha + \beta c^k &= (\alpha + \beta c^{k+1})p + (\alpha + \beta c^{k-1})(1-p) \Leftrightarrow \\
\alpha + \beta c^k &= \alpha p + \alpha(1-p) + \beta c^{k+1}p + \beta c^{k-1}(1-p) \Leftrightarrow \\
\alpha - \alpha + \beta c^k &= \alpha p - \alpha p + \beta c^{k+1}p + \beta c^{k-1}(1-p) \Leftrightarrow \\
\beta c^k &= \beta c^{k+1}p + \beta c^{k-1}(1-p)
\end{aligned}$$

Ved division med βc^{k-1} fremkommer

$$c = c^2 p + (1-p)$$

Ved løsning af denne andengradsligning får vi

$$\begin{aligned}
c &= \frac{1 \pm (1 - 4p(1-p))^{1/2}}{2p} = \frac{1 \pm ((2p-1)^2)^{1/2}}{2p} \Leftrightarrow \\
c &= \frac{1 \pm (2p-1)}{2p} = \begin{cases} 1 \\ \frac{(1-p)}{p} \end{cases}
\end{aligned}$$

Der er to løsninger, hvis p forskellig fra $\frac{1}{2}$.

For $c = 1$ er $P_k = \alpha + \beta$ (der er konstant), men det har vi jo vist, at P_k ikke er. Derfor er den løsning ikke interessant. Den eneste tilbageværende mulighed er således:

$$P_k = \alpha + \beta(\frac{1-p}{p})^k, \quad k \in \{0, 1, \cdots, N\}$$

Hvis begyndelsesbetingelserne $P_0 = 1$ og $P_N = 0$ skal være opfyldt, må

$$\begin{aligned}
P_0 &= 1 = \alpha + \beta \Leftrightarrow \\
\alpha &= 1 - \beta \\
\text{og} & \\
P_N &= 0 = \alpha + \beta(\frac{1-p}{p})^N \Leftrightarrow \\
0 &= 1 - \beta + \beta(\frac{1-p}{p})^N \Leftrightarrow \\
\beta &= 1 + \beta(\frac{1-p}{p})^N \Leftrightarrow \\
\beta - \beta(\frac{1-p}{p})^N &= 1 \Leftrightarrow \\
\beta(1 - (\frac{1-p}{p})^N) &= 1 \Leftrightarrow \\
\beta &= \frac{1}{1 - (\frac{1-p}{p})^N}
\end{aligned}$$

Alt i alt har vi vist, at

$$\begin{aligned}
P_k &= 1 - \frac{1}{1 - (\frac{1-p}{p})^N} + \frac{1}{1 - (\frac{1-p}{p})^N}(\frac{1-p}{p})^k \Leftrightarrow \\
P_k &= -\frac{(\frac{1-p}{p})^N + (\frac{1-p}{p})^k}{1 - (\frac{1-p}{p})^N} \Leftrightarrow \\
P_k &= \frac{(\frac{1-p}{p})^k - (\frac{1-p}{p})^N}{1 - (\frac{1-p}{p})^N}
\end{aligned}$$

der er løsningen for $p \neq \frac{1}{2}$

Hvis $p = \frac{1}{2} = 1 - p$, må sagen gribes an på en anden måde. Differensligningen vil få følgende udseende

$$\begin{aligned}
P_k &= \frac{1}{2}(P_{k+1} + P_{k-1}), \quad k \in \{1, 2, \cdots, N\} \\
2P_k &= P_{k+1} + P_{k-1} \\
P_{k+1} - P_k &= P_k - P_{k-1}
\end{aligned}$$

hvilket viser, at differensen mellem to på hinanden følgende led er ens og dermed konstant. Vi har således

$P_{k+1} - P_k = P_k - P_{k-1} = \cdots = P_1 - P_0 \Leftrightarrow$
$P_{k+1} = P_k + (P_k - P_{k-1}) = \cdots = P_k + (P_1 - P_0) = P_k + (P_1 - 1)$

Specielt er så

$$\begin{aligned} P_2 &= P_1 + (P_1 - 1) = 2(P_1 - 1) + 1 \\ P_3 &= P_2 + (P_1 - 1) \Leftrightarrow \\ P_3 &= 2(P_1 - 1) + (P_1 - 1) + 1 = 3(P_1 - 1) + 1. \end{aligned}$$

og ved induktion

$$P_k = k(P_1 - 1) + 1, \quad k \in \{0, 1, \cdots, N\}$$

Idet $0 = P_N = N(P_1 - 1) + 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{N} = P_1 - 1$, er

$$P_1 = 1 - \frac{1}{N}$$

så for $p = \frac{1}{2}$ er løsningen

$$\begin{aligned} P_k &= k(P_1 - 1) + 1 \Leftrightarrow \\ P_k &= k(-\frac{1}{N}) + 1 \Leftrightarrow \\ P_k &= 1 - \frac{k}{N} \end{aligned}$$

Da $P_k = 1 - \frac{k}{N}$ for $p = \frac{1}{2}$, må vi undersøge, om P_k i den generelle situation, dvs for $p \neq \frac{1}{2}$, går imod $1 - \frac{k}{N}$ for $p \to \frac{1}{2}$, da P_k skal være kontinuert.

For $p \to \frac{1}{2}$ i den generelle situation, går $P_k \to 1 - \frac{k}{N}$, idet

$$\frac{x^k - x^N}{1 - x^N} \to 1 - \frac{k}{N} \quad \text{for} \quad x \to 1$$

hvor

$$x = (\frac{1-p}{p}) \to 1 \quad \text{for} \quad p \to \frac{1}{2}$$

Til at finde ovenstående grænseværdi for $x \to 1$, har vi benyttet L'Hôpitals regel, da for $x = 1$

$$(x^k - x^N) = 0 \ \text{ og } \ (1 - x^N) = 0$$

Vi har altså

$$\frac{kx^{k-1} - Nx^{N-1}}{-Nx^{N-1}} = 1 - \frac{k}{Nx^{N-k}} \to 1 - \frac{k}{N} \text{ for } x \to 1$$

Det vil sige P_k er kontinuert.

Vi har nu vist, at der eksisterer en løsning for enhver værdi af p.

Liste over tidligere udkomne tekster tilsendes gerne. Henvendelse herom kan ske til IMFUFA's sekretariat tlf. 46 75 77 11 lokal 2263

217/92 "Two papers on APPLICATIONS AND MODELLING IN THE MATHEMATICS CURRICULUM"
by: Mogens Niss

218/92 "A Three-Square Theorem"
by: Lars Kadison

219/92 "RUPNOK - stationær strømning i elastiske rør"
af: Anja Boisen, Karen Birkelund, Mette Olufsen
Vejleder: Jesper Larsen

220/92 "Automatisk diagnosticering i digitale kredsløb"
af: Bjørn Christensen, Ole Møller Nielsen
Vejleder: Stig Andur Pedersen

221/92 "A BUNDLE VALUED RADON TRANSFORM, WITH APPLICATIONS TO INVARIANT WAVE EQUATIONS"
by: Thomas P. Branson, Gestur Olafsson and Henrik Schlichtkrull

222/92 On the Representations of some Infinite Dimensional Groups and Algebras Related to Quantum Physics
by: Johnny T. Ottesen

223/92 THE FUNCTIONAL DETERMINANT
by: Thomas P. Branson

224/92 UNIVERSAL AC CONDUCTIVITY OF NON-METALLIC SOLIDS AT LOW TEMPERATURES
by: Jeppe C. Dyre

225/92 "HATMODELLEN" Impedansspektroskopi i ultrarent en-krystallinsk silicium
af: Anja Boisen, Anders Gorm Larsen, Jesper Varmer, Johannes K. Nielsen, Kit R. Hansen, Peter Bøggild og Thomas Hougaard
Vejleder: Petr Viscor

226/92 "METHODS AND MODELS FOR ESTIMATING THE GLOBAL CIRCULATION OF SELECTED EMISSIONS FROM ENERGY CONVERSION"
by: Bent Sørensen

227/92 "Computersimulering og fysik"
af: Per M.Hansen, Steffen Holm, Peter Maibom, Mads K. Dall Petersen, Pernille Postgaard, Thomas B.Schrøder, Ivar P. Zeck
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen

228/92 "Teknologi og historie"
Fire artikler af:
Mogens Niss, Jens Høyrup, Ib Thiersen, Hans Hedal

229/92 "Masser af information uden betydning"
En diskussion af informationsteorien i Tor Nørretranders' "Mærk Verden" og en skitse til et alternativ basseret på andenordens kybernetik og semiotik.
af: Søren Brier

230/92 "Vinklens tredeling - et klassisk problem"
et matematisk projekt af
Karen Birkelund, Bjørn Christensen
Vejleder: Johnny Ottesen

231A/92 "Elektrondiffusion i silicium - en matematisk model"
af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund, Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen
Vejledere: Johnny Ottesen, H.B.Hansen

231B/92 "Elektrondiffusion i silicium - en matematisk model" Kildetekster
af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund, Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen
Vejledere: Johnny Ottesen, H.B.Hansen

232/92 "Undersøgelse om den simultane opdagelse af energiens bevarelse og især deles om de af Mayer, Colding, Joule og Helmholtz udførte arbejder"
af: L.Arleth, G.I.Dybkjær, M.T.Østergård
Vejleder: Dorthe Posselt

233/92 "The effect of age-dependent host mortality on the dynamics of an endemic disease and Instability in an SIR-model with age-dependent susceptibility
by: Viggo Andreasen

234/92 "THE FUNCTIONAL DETERMINANT OF A FOUR-DIMENSIONAL BOUNDARY VALUE PROBLEM"
by: Thomas P. Branson and Peter B. Gilkey

235/92 OVERFLADESTRUKTUR OG POREUDVIKLING AF KOKS
- Modul 3 fysik projekt -
af: Thomas Jessen

236a/93 INTRODUKTION TIL KVANTE HALL EFFEKTEN

af: Anja Boisen, Peter Bøggild

Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
Erland Brun Hansen

236b/93 STRØMSSAMMENBRUD AF KVANTE HALL EFFEKTEN

af: Anja Boisen, Peter Bøggild

Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
Erland Brun Hansen

237/93 The Wedderburn principal theorem and Shukla cohomology

af: Lars Kadison

238/93 SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (2)

Vektorbånd og tensorer

af: Peder Voetmann Christiansen

239/93 Valgsystemer - Modelbygning og analyse

Matematik 2. modul

af: Charlotte Gjerrild, Jane Hansen, Maria Hermannsson, Allan Jørgensen, Ragna Clauson-Kaas, Poul Lützen

Vejleder: Mogens Niss

240/93 Patologiske eksempler.
Om sære matematiske fisks betydning for den matematiske udvikling

af: Claus Dræby, Jørn Skov Hansen, Runa Ulsøe Johansen, Peter Meibom, Johannes Kristoffer Nielsen

Vejleder: Mogens Niss

241/93 FOTOVOLTAISK STATUSNOTAT 1

af: Bent Sørensen

242/93 Brovedligeholdelse - bevar mig vel

Analyse af Vejdirektoratets model for optimering af broreparationer

af: Linda Kyndlev, Kare Fundal, Kamma Tulinius, Ivar Zeck

Vejleder: Jesper Larsen

243/93 TANKEEKSPERIMENTER I FYSIKKEN

Et 1.modul fysikprojekt

af: Karen Birkelund, Stine Sofia Korremann

Vejleder: Dorthe Posselt

244/93 RADONTRANSFORMATIONEN og dens anvendelse i CT-scanning

Projektrapport

af: Trine Andreasen, Tine Guldager Christiansen, Nina Skov Hansen og Christine Iversen

Vejledere: Gestur Olafsson og Jesper Larsen

245a+b /93 Time-Of-Flight målinger på krystallinske halvledere
Specialerapport

af: Linda Szkotak Jensen og Lise Odgaard Gade

Vejledere: Petr Viscor og Niels Boye Olsen

246/93 HVERDAGSVIDEN OG MATEMATIK
- LÆREPROCESSER I SKOLEN

af: Lena Lindenskov, Statens Humanistiske Forskningsråd, RUC, IMFUFA

247/93 UNIVERSAL LOW TEMPERATURE AC CONDUCTIVITY OF MACROSCOPICALLY DISORDERED NON-METALS

by: Jeppe C. Dyre

248/93 DIRAC OPERATORS AND MANIFOLDS WITH BOUNDARY

by: B. Booss-Bavnbek, K.P.Wojciechowski

249/93 Perspectives on Teichmüller and the Jahresbericht Addendum to Schappacher, Scholz, et al.

by: B. Booss-Bavnbek

With comments by W.Abikoff, L.Ahlfors, J.Cerf, P.J.Davis, W.Fuchs, F.P.Gardiner, J.Jost, J.-P.Kahane, R.Lohan, L.Lorch, J.Radkau and T.Söderqvist

250/93 EULER OG BOLZANO - MATEMATISK ANALYSE SET I ET VIDENSKABSTEORETISK PERSPEKTIV

Projektrapport af: Anja Juul, Lone Michelsen, Tomas Højgård Jensen

Vejleder: Stig Andur Pedersen

251/93 Genotypic Proportions in Hybrid Zones

by: Freddy Bugge Christiansen, Viggo Andreasen and Ebbe Thue Poulsen

252/93 MODELLERING AF TILFÆLDIGE FENOMENER

Projektrapport af: Birthe Friis, Lisbeth Helmgaa Kristina Charlotte Jakobsen, Marina Mosbæk Johannessen, Lotte Ludvigsen, Mette Hass Nielsen