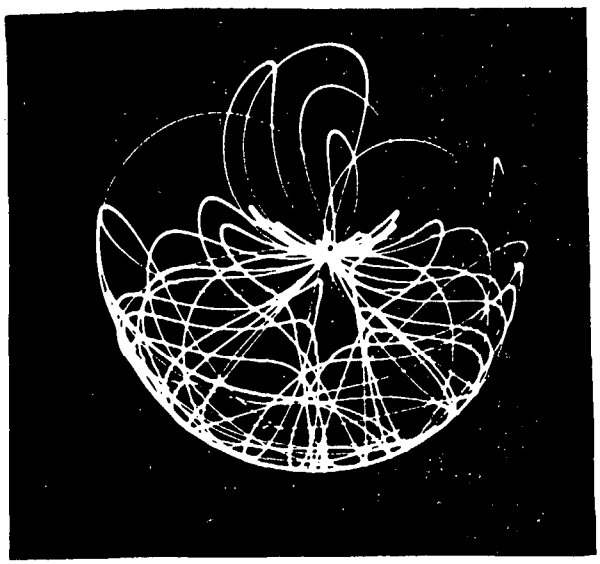
TEKST NR 180 1989

Kaos i fysiske systemer

eksemplificeret ved torsions- og dobbeltpendul



Af
Andy Wierød
Søren Brønd
Jimmy Staal

vejleder:
Peder Voetmann Christiansen

TEKSTER fra

IMFUFA ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, Postbox 260 4000 Roskilde

KAOS I FYSISKE SYSTEMER eksemplificeret ved torsions- og dobbeltpendul

af: Andy Wierød, Søren Brønd og Jimmy Staal

vejleder: Peder Voetmann Christiansen

IMFUFA tekst nr. 180/89 185 sider ISSN 0106-6242

Teksten er den ene af et fysiktrio om kaos, som strækker sig over tre IMFUFA tekster nemlig nr. 179a: "Lærervejledning til et eksperimentelt forløb om kaos", nr. 179b: elevhæfte "Noter til et eksperimentelt forløb om kaos", og nr. 180: "Kaos i fysiske systemer eksemplificeret ved et torsionspendul og et dobbeltpendul".

Tekst 179a omhandler et eksperimentelt forløb om kaos, som IMFUFA tilbyder gymnasieklasser. Teksten omfatter apparaturbeskrivelser, vejledning og ideer til tilrettelæggelse af et forløb. Desuden er der forslag til ekskursioner samt en lang række øvelsesvejledninger.

[illegible]

Forord

Nærværende tekst er den (mest) internt faglige del af et fysikspeciale af Jimmy Staal, Andy Wierød og Søren Brønd. De øvrige dele er kort beskrevet i abstractet på omslagets inderside. Specialets dele skal ses som resultatet af arbejdet med dels at etablere apparatur og undervisningsmateriale til det eksperimentelle forløb om kaos som RUC skal tilbyde gymnasieklasser, dels opstarten af kaos, som nyt teoretisk og eksperimentelt forskningsområde på RUC. Det er vort håb, at specialets dele kan bruges som en introduktion til analysen af kaos i fysiske systemer af såvel elever som lærere på forskellige niveauer af uddannelsessystemet. Hvor undervisningsmaterialet primært sigter til gymnasiet, regner vi med, at den anden del ikke mindst kan finde anvendelse blandt studerende på RUC eller andre universiteter og højere læreanstalter.

Vi skal udbringe en varm tak til vores vejledere Karin Beyer og Peder Voetmann Christiansen, til Albert Paulsen for hans konstruktive kritik af undervisningsmaterialet, til Frank Olsen for samarbejde omkring simulationer af torsionspendulet, til Bjørn Felsager for hjælp med iterativ funktionsgenerator. Og ikke mindst vil vi takke Heine Larsen for hans uvurderlige hjælp, når computerne gik ned på de underligste måder.

RUC 1989

Andy Wierød
Jimmy Staal
Søren Brønd

Indholdsfortegnelse

Kapitel 1 : Indledning..... 1

Kapitel 2 : Dynamisk systemteori..... 3

2.1 Det matematiske fundament
2.2 Grænsemængders stabilitetsforhold
2.3 Torsionspendulet og kaos

Kapitel 3 : Liapunov eksponent..... 29

3.1 Definition af Liapunov eksponent
3.2 Liapunov-spektret
3.3 Informationstab og uforudsigelighed
3.4 Den kaotiske tiltrækkers dimension
3.5 En numerisk metode til beregning af Liapunovspektret
3.6 Implementering i CTS
3.7 Liapunov-spektret for torsionspendulet
3.8 Opsummering

Kapitel 4 : Intermittens..... 56

4.1 Beskrivelse af de laminare faser
4.2 Laminare fasers gennemsnitlige varighed
4.3 Intermittens og Liapunov eksponenter
4.4 Relaminarisering
4.5 Konklusion

Kapitel 5 : Torsionspendulet, modellering og simulationer.. 80

5.1 Modellering af torsionspendul
5.2 Simuleringer af torsionspendulet
5.3 Opsummering

Kapitel 6 : Hamiltonske systemer.....110

6.1 Det hamiltonske grundlag
6.2 KAM-teoremet og dets interpretation
6.3 Ergodiciteten i Hamiltonske systemer

Kapitel 7 : Fysisk doppeltpendul.....125

7.1 Hamiltonske systemer og energibåndsdiagrammer
7.2 Hamilton og Lagrange reticulation
7.3 Modellen for dobbeltpendulet
7.4 Dobbeltpendulet, simuleringer

Kapitel 8 : Afslutning.....149

Litteratur.....152

Appendices:

I Bifurkationsteoremer.....155
II Implementering af Lorenz-modellen i "CTS".....165
III Implementering af Liapunov-eksponent proceduren i Lorenz-modellen og i torsionspendul-modellen.....166
IV Implementering af torsionspendulmodel i "CTS".....170
V De konstitutive regler for de forskellige elementer (ikoner) i energibånds-diagrammerne.....173
VI Supplement til kapitel 7.....174
VII Implementering af dobbeltpendul i"CTS".....178

KAPITEL 1

Indledning

Som nævnt i forordet er specialet, hvoraf nærværende del omhandler analysen af et torsionspendul og et dobbeltpendul, et resultat af det arbejde vi har udført i forbindelse med etableringen af kaos som et nyt teoretisk og eksperimentelt forskningsområde på IMFUFA på RUC. Der forelå således hverken forudgående arbejder, eksperimentelle opstillinger eller anden ramme for arbejdet. Der har derfor heller ikke været nogen egentlig styrende problemstilling for specialet udover netop det at etablere området. Formålet med arbejdet har således været at udarbejde en introduktion til områdets teorier, bringe disse i anvendelse i analysen af nogle eksperimentelle opstillinger og computermodeller heraf, og opstille nogle problemstillinger, andre kan tage afsæt fra. Der er derfor heller ikke nogen egentlig samlet konklusion på specialet, men derimod fremlægges undervejs delkonklusioner omkring afgrænsede emner, bla. analyserne af de nævnte pendulers bevægelsesmønstre. Specialets afslutning er således en opsummering af det opstillede begrebsapparat, de opnåede resultater og af problemstillinger, der kan arbejdes videre med.

Rapportens opbygning.

Nærværende del kan betragtes i tre afsnit, nemlig først et generelt teoretisk afsnit (kap. 2, 3 og 4), der giver baggrund for simuleringer af torsionspendulet og dobbeltpendulet og vurderingen heraf. I indledningen i kap. 2 "Dynamisk systemteori" diskuterer vi opkomsten og betydningen af kaosteorierne i lyset af den naturvidenskabelige tradition. Desuden diskuteres selve det at modellere og vi introducerer de begreber og topologiske betragtninger, vi anvender i analysen af pendulerne. Endvidere gennemføres en illustrativ matematisk analyse af en opstillet model for torsionspendulet. I kap. 3 introducerer vi begreberne Liapunov-eksponent og -spektre og demonstrerer

deres brugbarhed i vurderingen af dynamiske systemers adfærd gennem fremdragelsen af en række eksempler bl.a. Lorenz ligningerne og torsionspendulet. Endvidere anvises en generel numerisk metode til bestemmelse af Liapunov-spektre og dennes implementering i simulationsprogrammet "CTS". I kap. 4 diskuteres begrebet intermittens såvel udfra en fænomenologisk som fra en statisktisk synsvinkel, igen eksemplificeret bl.a. med intermittente forløb i modellen for torsionspendulet.

Det andet afsnit udgøres af kap. 5, hvori vi først diskuterer og sammenligner modellen med det virkelige torsionspendul og derefter giver en samlet oversigt over udvalgte simulationer og analyser som leder frem til vurderingen af kaos i modellen.

Hvor andet afsnit omhandlede det dissipative torsionspendul omhandler tredie afsnit konservative systemer, eksemplificeret ved dobbeltpendulet. I kap. 6 giver vi først en introduktion til kaos i konservative systemer. Det vil idet væsentlige sige en diskussion af et centralt teorem - det såkaldte KAM-teorem. I kap. 7 gennemgår vi modelleringen af dobbeltpendulet. Dette gøres gennem introduktion og anvendelse energibåndsteknikken. Specielt udnyttes den såkaldte Lagrange-reticulation. Endvidere gennemgår vi modellens implementering i simulationsprogrammet "CTS". Inden afslutningen sammenligner vi i kap. 8 modellen af dobbeltpendulet med det fysiske, og gennemgår desuden en række simulationer af dobbeltpendulet og giver en vurdering heraf.

Vi håber at ovenstående gennemgang af rapportens opbygning kan hjælpe læseren til at bevare overblikket og lede til de for ham eller hende relevante dele.

KAPITEL 2
DYNAMISK SYSTEMTEORI
- en introduktion

Indledning

Naturen - både dens levende og dens livløse dele - har givet utallige - og giver til stadighed eksempler - på selvorganisering og spontane strukturdannelser. F.eks. kan en encellet organisme i et næringssubstrat undertiden momentant omorganisere sine indre kemiske forhold, hvis der er positive koncentrationsgradienter i retning af et for cellen attraktivt stof. Cellen vil derved kunne bevæge sig hen mod de kemisk mere lukrative områder.[1]

Isblomster på vinterruden er skabt ved, at en ustabil tilstand - underafkølet vand - af omgivelserne udsættes for en lille men kritisk påvirkning, der får vandet til at krystallisere til de smukke mønstre, vi kender så godt.

Men det er ikke kun naturen, der danner ordnede strukturer. Det moderne menneskes måde at interpretere sine omgivelser og sig selv på, bygger bl.a. på strukturering, kategorisering og klassifikation mv. Et led i en sådan strukturering kunne være at afdække og fortolke disse i naturen så almindeligt forekommende 'instabiliteter' - især med henblik på at finde fællestræk, at finde en fælles struktur i fænomenerne.

En af og til gangbar vej mod en forståelse af den slags fænomener er at opfatte dem som systemer, der kan modelleres med matematiske termer. På denne måde kan der muligvis skaffes mere eller mindre generelle udsagn om, hvorfor systemerne undergår pludselige forandringer.

Det matematiske redskab, som primært anvendes i disse sammenhænge, er dynamisk systemteori, der bl.a. omfatter almindelig differentialligningsteori, stabilitetsteori - herunder bifurkationsteori - samt kaosteori. Med et dynamisk system mener vi dels en afgrænset del af virkeligheden, der udvikler sig i tid og som kan modelleres ved brug af matematiske metoder, og dels den skabte matematiske model selv. Mere præcist skal det faktiske fænomen - systembeskrivelsens objekt - kunne reduceres til et sæt af matematiske ligninger.

---

1) Sørensen, 1982, s. 108.

Det sted, hvor matematificeringer af naturens fænomener nok har haft størst gennemslagskraft og skabt ny og brugbar erkendelse, er i beskrivelsen af den livløse natur - i fysikken. Set fra stor "lufthøjde" kan vi for et øjeblik grovinddele fysikkens aktivitetsområde i 3 kategorier. Den første er den, der fokuserer på de mindste dele, naturens elementære partikler: atomerne og disses bestanddele, molekyler etc. Vi kunne kalde området for det mikroskopiske niveau.

Den anden handler om de ting, der er umiddelbart tilgængelige for de menneskelige sanser. Altså synlige og håndgribelige objekter og samlinger af sådanne. Noget, der kan undersøges eksperimentelt i sædvanlige 'skolelaboratorier'. Et område vi passende kunne betegne det makroskopiske niveau.

Den tredie kategori er det 'supermakroskopiske' niveau - astronomiens og kosmologiens felt. Genstandene er her universet, dets byggestene (og nogle af tilværelsens helt store spørgsmål).

Den første kategori fik et stort gennembrud i dette århundredes begyndelse i form af kvantemekanikken. Den tredie fik en renaissance gennem opdagelsen af den generelle relativitetsteori ligeledes i starten af det 20. århundrede.

Den midterste kategori ansås indtil for cirka en snes år siden for at være færdigudviklet og har derfor i en lang periode ikke haft den store grundforskningsmæssige interesse. Områdets teoriapparat er den klassiske mekanik, hvis grundlæggende ideer er mere end 300 år gamle. Siden Newton er der dog skabt generel systematiserende teori - Lagrange'sk og Hamilton'sk formalisme, som vi iøvrigt senere demonstrerer brugen af. Men også disse er aldrende og er ikke egentlige nybrud i teorien.

En uhyggelig fortolkning af den klassiske mekaniks betydning er ideen om den 'Laplace'ske dæmon' - at alting er bestemt til evig tid, hvis blot begyndelsesbetingelserne kendes til et givet tidspunkt. Denne dæmon blev delvis invalideret af kvantemekanikken med Heisenberg's ubestemthedsrelationer. Men med kaosteorien som våben må den nu anses for at være både død og begravet.[2] Dette, fordi (langt de fleste) fysiske syste-

---

2) En udmærket diskussion af Laplace's dæmon og nødvendighedens doktrin findes i Christiansen, 1986.

mer - udover at have indbyggede instabiliteter - også kan udvise kaos. Og netop kaos implicerer, at systemets uforudsigelige adfærd og dermed tabet af information om systemet, i gennemsnit stiger eksponentielt med tiden (se kap. 3).

Kaosteorien har i den grad genoplivet forskning i klassisk mekaniske systemer. Man kan derfor sige, at den har givet den nære fysik et (nyt) gennembrud. Det er imidlertid ikke sådan, at kaosteorien kun handler om klassiske (endsige mekaniske) systemer. Den finder også anvendelse i de øvrige kategorier. Kategoriseringen skal derfor ikke opfattes strengt kategorisk! Der er væsentlige overlap på alle leder af kategorierne. Men det er kaosteorien, der "mest" overlapper de øvrige kategorier, idet der både kan optræde kaotiske fænomener i kvantemekaniske systemer og i universets systemer, f.eks. i vort eget solsystem.[3] Begge disse systemtyper er almindeligvis karakteriseret ved energibevarelse - de er konservative. Netop den type systemer er emnet for kapitel 6 og fremefter.

Et forsøg på at nå en forståelse af instabiliteter i et bredt spektrum af fænomener ligger i synergetikken[4], der samtidig er en vidtfavnende tværvidenskabelig disciplin. Her opereres med instabiliteter i så forskellige områder som fysiske, kemiske, biologiske og sågar sociologiske systemer samt i lingvistik og genetik mm.[5]

Synergetikken beskæftiger sig overordnet set med at redegøre for dramatiske ændringer i makroskopiske systemer ved at studere og undersøge forhold og adfærd i subsystemer til systemet. Et for kaosteorien relevant eksempel (et Bénard eksperiment) kan hentes fra hydrodynamikken.

Ved at anbringe et tyndt lag væske i en flad skål uden låg, kan der under opvarmning fra neden pludselig indtræde ordnede, rumlige strukturer. Fra at være en uordnet samling af molekyler (det mikroskopiske niveau), når temperaturen er lav, bliver væsken med ét makroskopisk ordnet: Der dannes sekskantede

---

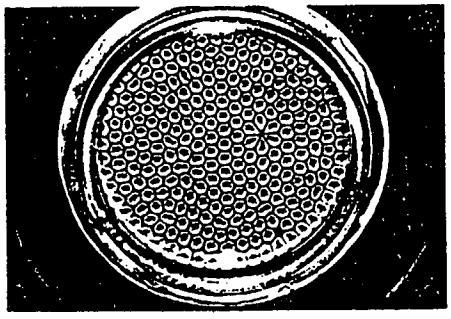
3) Omtale af kaos i kvantemekaniske systemer kan bl.a. findes i Schuster, 1988. Om stabiliteten af solsystemet, se f.eks. Moser, 1979.

4) Synergetik betyder noget i retning af samarbejde - forstået som, at mikroskopiske systemer kan arbejde sammen og udmønte dette teamwork i makroskopiske konsekvenser. Se f.eks. Haken, 1977.

5) Haken, 1977 og Sørensen, 1980a og b, samt Sørensen, 1982.

ringe i væskens overflade (se fig. 1).

Fig. 1: Resultatet af et Bénard eksperiment.
(Sørensen, 1980a)



Fænomenet kan forklares med ændringer i overfladespændingen. Disse kan kort sagt etableres ved, at temperaturgradienten opnår en kritisk værdi.

Hvis skålen har låg på, opstår et tilsvarende fænomen, men den fysiske forklaring på fænomenet er væsensforskellig fra Bénard eksperimentet. Eksperimenter af denne art er undersøgt af Lord Rayleigh.[6]

Der forekommer også temporære (tidslige) instabiliteter. Et kendt eksempel er laseren, hvor det emitterede lys ved lav energi flux er uordnet. Ved en kritisk værdi af energi fluxen bliver det udsendte lys monokromatisk - det bliver ordnet, således at bølgelængden (og dermed frekvensen) bliver konstant.

De hidtil nævnte instabiliteter har været eksempler på systemers overgang fra uorden til orden. Men naturen har adskillige bud på instabiliteter, der udtrykker overgang fra orden til uorden, dvs. kaos.

Kemiske reaktioner er almindeligvis kendt for at gå mod en stationær tilstand (makroskopisk set), dvs. en ligevægt, hvor koncentrationerne af de implicerede reaktanter er konstante efter, at ligevægten er indtrådt. Det er imidlertid ikke en sand erkendelse, hvis man studerer åbne kemiske reaktioner. Med åbent menes, at blandingen kontinuert tilføres og tappes for stof (og evt. energi). I den seneste snes år har en stadigt voksende del af den kemiske forskning helliget sig disse åbne

---

6) Se Sørensen, 1980a, s. 146-148.

kemiske systemer, som jo udgør en betragtelig del af den levende natur.

Et par kendte eksempler på undersøgte åbne reaktioner er ioduret[7] og Belousov-Zhabotinskii (BZ) reaktionen. Især BZ-reaktionen har nydt stor forskningsmæsig interesse. Der er tale om en tilsyneladende ukompliceret reaktion bestående af 4 almindelige stoffer. Men man har (endnu) ikke fastlagt alle hastighedskonstanterne for blandingens elementarreaktioner. Væsentligst i denne sammenhæng er, at koncentrationerne af de indgående stoffer enten kan gå mod en ligevægt, antage periodiske bevægelsesmønstre eller udvise kaotisk adfærd.

Både BZ-reaktionen og ioduret er eksempler på temporære instabiliteter. Der eksisterer imidlertid også fænomener, hvor et samspil mellem rumlige og temporære stabiliteter pludselig kan give markante strukturforandringer og f.eks. udmøntes i turbulens eller kemiske bølger.

For at få rede på disse fænomener synes det relevant, at opstille ligninger for systemets mikroskopiske bestanddele. Uden vi vil komme nærmere ind på det, skal blot nævnes, at der findes metoder til at komme fra de mikroskopiske ligninger til ligninger for det makroskopiske system. Det kan ske ved brug af 'adiabatisk approximation' og 'coarse graining'.[8]

Et essentielt formål med at skridte fra den mikroskopiske til den makroskopiske beskrivelse er reduktionen i dimension. F.eks. er der tale om en væsentlig reduktion, hvis man ved beskrivelsen af en gas går fra generaliserede koordinater til makroskopiske variable som tryk og energi mm. Vi forestiller os derfor, at vort tænkte system er beskrevet ved et sæt af (sædvanlige) differentialligninger i makroskopiske variable.

---

7) Øvelsesvejledning A3 fra IMFUFA tekst 179a.

8) Adiabatisk approximation går også under navnet 'slaving principle'. Se f.eks. Schuster, 1988, s. 15-16, eller Haken, 1977, s. 9ff.

Coarse graining hænger sammen med distinktionen mellem klassisk mekaniske systemer og kvantemekaniske systemer. I klassisk mekanik kan de generaliserede koordinater og impulser i princippet fastlægges "uendelig" nøjagtigt, og faserummet er i princippet en glat mangfoldighed. I kvantemekanikken bryder dette sammen, idet punkter i faserummet - ifølge usikkerheds relationerne - i rumfang af størrelse h^d ikke kan holdes ude fra hinanden. Faserummet bliver på denne måde grovkornet - coarse grained.

Nogle år før teorierne om 'det mindste' (kvantemekanikken) og 'det største' (den generelle relativitetsteori) kom til verden, sad den franske matematiker Henri Poincaré (1854-1912) og arbejdede med det klassiske 3-legeme problem. Det havde mange gjort før ham, men han gik til værks ad lidt andre veje ved at anskue problemet med geometriske (topologiske) øjne. En vigtig ting, hans arbejde affødte, er det, der i dag kaldes Poincaré afbildninger.

I modsætning til kvantemekanikken og relativitetsteorien gik Poincaré's arbejde stort set i glemmebogen i omtrent 60-70 år.[9] Det kan skyldes mange ting, men een afgørende årsag skal fremhæves. De ligningssystemer, der har interesse, er de ikke-lineære. Af dem er der mange, og de er almindeligvis ikke mulige at løse analytisk. Derfor er man hovedsagelig henvist til numeriske algoritmer og dermed computere, der jo hverken eksisterede på Poincaré's tid eller i mange år derefter. Det forholder sig på samme måde med etableringen af Poincaré afbildninger, idet de sædvaligvis også fordrer brug af computere. Anskuet således, falder den nu rivende udvikling af kaosteorien ganske i tråd med opdagelsen og især udviklingen af mikrochips.

Poincaré afbildningernes helt afgørende betydning ligger i, at det makroskopiske systems dimension yderligere kan reduceres - uden at betydelig information om systemets tidslige ududvikling går tabt.[10]

Fælles for de ovenfor omtalte systemer er, at instabiliteten indtræder, når en parameter - en såkaldt bifurkations parameter, der er styret af omgivelserne, får en bestemt (kritisk) værdi. Vi beskriver i afsnit 2.2, hvorledes parametriserede systemers grænsemængder kan ændre sine stabilitetsforhold. Det handler altså om at undersøge, hvad der sker med systemets grænseadfærd, når systemets parametre varieres inden-

---

9) Det er en lettere overdrivelse. Der er bygget videre på ideerne, men primært af matematikere som f.eks. Birkhoff, Kolmogorov og Arnold.

10) Vi har omtalt Poincaré afbildningen i Elevheftet (IMFUFA tekst 179b), men vi genindfører fører begrebet i afsnit 2.1.

for et fysisk relevant område. Den matematiske teori, som tager sig af denne slags undersøgelser hører under bifurkationsteorien, hvilket primært er temaet for afsnit 2.2.

Det er som nævnt ikke kun orden, der kan opstå i de dynamiske systemer, vi her beskæftiger os med. Et system kan undertiden undergå en hel serie af bifurkationer, og f.eks. ad den vej blive kaotisk. Vi vil i afsnit 2.3 behandle modellen for torsionspendulet analytisk.

I dette kapitel sigtes hovedsageligt på dissipative (dvs. energiforbrugende) systemer. Til denne kategori hører torsionspendulet. Dobbeltpendulet er derimod et konservativt system. En nærmere omtale af de Hamilton'ske systemer, der tilfredsstiller Liouville's teorem er henlagt til kapitlerne 6 og fremefter.

Kapitlet her har til hensigt, at danne en overordnet og teoretisk baggrund til forståelsen af specielt torsionspendulets men til dels også dobbeltpendulets opførsel.

2.1 Det matematiske fundament

Emnet for dette afsnit er at tilvejebringe en nomenclatur og en matematisk begrebsramme, som resten af rapporten gør brug af.

Gennem opstillingen af et generelt, ikke-lineært 1. ordens, autonomt differentialligningssystem, vil vi komme ind på, hvorledes et sådant kan opføre sig, når dynamikken har virket i lang tid. Kort sagt vil vi karakterisere nogle af systemets mulige grænsemængder. Dernæst indfører vi det såkaldte Poincaré snit og angiver, hvorledes grænsemængderne for det kontinuerte system tager sig ud i dette snit.

Et almindeligt sæt af sædvanlige 1. ordens differentialligninger kan på vektorform skrives:

$$\dot{\vec{x}} = F(\vec{x}), \tag{1}$$

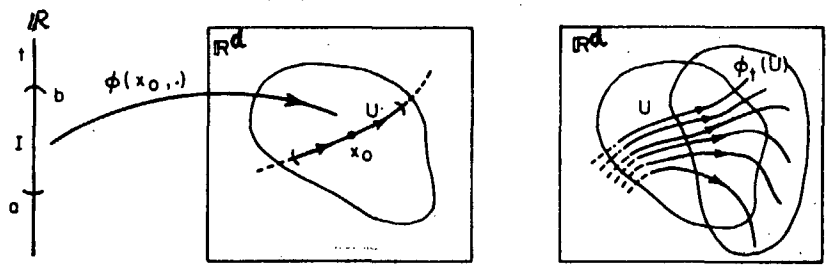
hvor $\vec{x}=(x_1,\ldots,x_d)$ er et punkt i systemets d-dimensionale faserum, mens F er et vektorfelt. Til hvert punkt $\vec{x}$ er

der knyttet en tangentvektor $F(\vec{x})$, hvorfor vektorfeltet på denne vis udgør tangentrummet til faserummet.

Vi har forlangt, at systemet er autonomt (dvs. eksplicit uafhængigt af tiden t), og at systemet består af 1. ordens ligninger. Modellen for torsionspendulet opfylder ingen af disse krav. Men da både n'te ordens og ikke-autonome systemer altid kan transformeres til et sæt af autonome 1. ordens ligninger, har vi ikke mistet i generalisation ved at betragte systemer af typen (1).

Vi vil i overensstemmelse med sædvanlig praksis betegne mængden af løsninger til (1) for systemets flow ϕ_t (fig. 2).

Fig. 2: En løsningskurve og et flow, ϕ_t.
(Guckenheimer og Holmes, 1983)



A solution curve and the flow. (a) The solution curve $\phi_t(x_0)$; (b) the flow ϕ_t.

Et system som (1) har ofte en mængde af ligevægtspunkter (eller stationære punkter), dvs. punkter, hvori systemet ligger stille for alle t. Disse punkter er løsningerne til ligningen:

(2) $$F(\vec{x}) = \vec{0}$$

At løse (2) kan undertiden være en analytisk uoverkommelig opgave, men kan så gennemføres ved brug af numeriske metoder.

Udover mængden af stationære punkter eksisterer et par andre grænsemængder. En løsning til (1) kan tænkes at være periodisk i tid. Betragtes en sådan i faserummet, vil man se en lukket kurve kaldet en grænsecykel.

En tredie type grænsemængde, vi vil omtale her, er den kaotiske tiltrækker (eng.: strange attractor). Selve mængden er kompakt - dvs. begrænset og afsluttet - i faserummet, og dens volumen er 0. Bevægelsen på attraktoren er temmelig kompliceret, hvilket følger af, at attraktoren er kompakt, løsningerne

er uendeligt lange samt, at nærtliggende løsningskurver på attraktoren i gennemsnit divergerer eksponentielt i tid. Men det vender vi tilbage til flere gange i rapporten - især i kap. 3.

Et eksempel på en dissipativ model er Lorenz modellen[1.1], der afbilder konvektionsfænomener (jvf. Bénard eksperimentet omtalt i indledningen). Lorenz ligningerne er:

$$(3) \qquad \begin{cases} \dot{x} = P(y - x) \\ \dot{y} = Rx - y - xz \quad ; \; P,R,B>0 \\ \dot{z} = -Bz + xy \; . \end{cases}$$

Eventuelle ligevægtspunkter til (3) findes altså ved at sætte $(\dot{x},\dot{y},\dot{z})=(0,0,0)$. Derigennem findes 3 stationære punkter, nemlig:

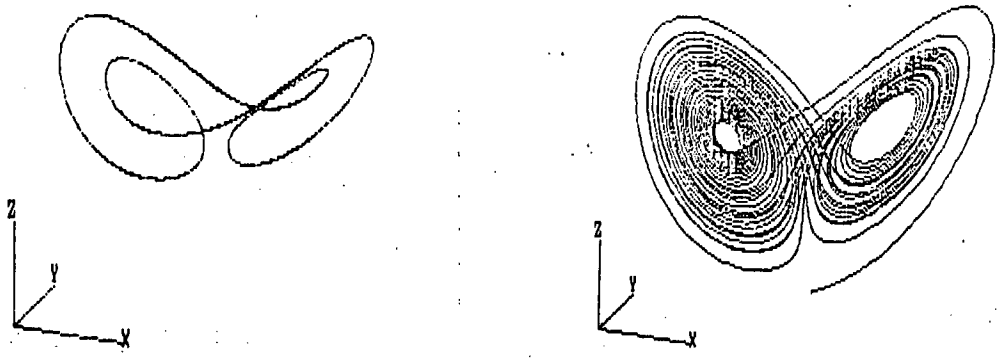
$$(0,0,0) \text{ og } (\pm\sqrt{B(R-1)}\,,\pm\sqrt{P(R-1)}\,,R-1)$$

Mens origo er et globalt ligevægtspunkt, er de 2 øvrige afhængige af parametrene R og B, og de eksisterer ikke for $R<1$, idet størrelserne under kvadratroden da bliver negative. Med globalt menes her for alle valg af parameterværdier.

Lorenz systemet kan ikke løses analytisk, men må integreres numerisk. Man kan derved for forskellige sæt af systemets parametre finde grænsecykler og karakteristiske kaotiske tiltrækkere (jvf. fig. 3).

1.1) Lorenz modellen anses almindeligvis som modellen, der først gav anledning til principielle overvejelser om (uendelig) aperiodisk adfærd i differentialligningssystemer.

Fig. 3: Eksempler på Lorenz modellens grænseadfærd.



a) En grænsecykel
P= 10
R= 166
B= 8/3

b) En kaotisk tiltrækker
P= 10
R= 28
B= 8/3

Fælles for de nævnte grænsemængder er, at de er invariante dvs., hvis systemet een gang er 'havnet' der, vil det blive der.

Karakteristisk for en grænsecykel er, at den gennemløbes med en periode T, mens en trajectorie (en løsningskurve i faserummet) på den kaotiske tiltrækker aldrig vil vende tilbage til et punkt, den tidligere har gennemløbet (dvs. $T = \infty$). Det sidste er dog også aktuelt for kvasiperiodiske trajectorier. Så der skal bruges en anden indikator til at afgøre, hvorvidt en trajectorie er kaotisk eller kvasiperiodisk.

En måde at besigtige systemets langtidsadfærd på er ved at indlejre en hyperflade i det d-dimensionale faserum. En sådan flade kaldes et Poincaré snit - og er ikke nødvendigvis en plan. Vi vil i det følgende betegne Poincaré fladen/snittet med symbolet: Σ.

Man kan i princippet anbringe sit Poincaré snit hvor som helst i faserummet, blot det skærer trajectorierne transversalt ("på tværs"), dvs. Σ ikke må tangere men reelt skal skæ-

re trajectorierne.[12]

Det vil være yderst usandsynligt, at et givet stationært punkt kan ses på et "tilfældigt" anbragt Poincaré snit i fase-rummet. Det vil svare til, at et bestemt punkt i planen ligger på en tilfældig anbragt linje. Derimod vil en grænsecykel i Poincaré snittet vise sig som et enkelt punkt, der repeterer sig selv, hver gang perioden T er gået.

For kontinuerte flows på kompakte 2-dimensionale mangfoldigheder (dvs. afsluttede og begrænsede "punktmængder") f.eks. en torus, T^2, kan det vises, at en kvasiperiodisk bevægelse vil ytre sig som en lukket kurve i Poincaré snittet.

En kaotisk tiltrækker vil i Poincaré snittet almindeligvis adskille sig fra kvasiperiodiske forløb, idet der på Σ vil vise sig en "Cantormængde" lignende punktmængde.[13]

Et Poincaré snit afføder opfattelsen af det kontinuerte flow ϕ_t som en iterativ afbildning:

$$\vec{x}_{n+1} = f(\vec{x}_n) \ , \ \vec{x}_n \in R^{d-1} \tag{4}$$

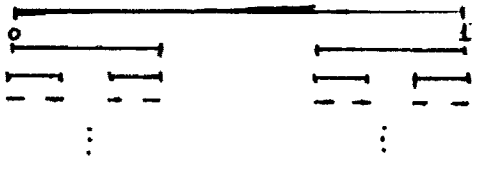
hvor d er dimensionen. $\vec{x}$'erne repræsenterer skæringspunkter mellem Σ og en løsningskurve. f er da en afbildning på Σ, og kaldes herefter for en Poincaré afbildning.

Der er (mindst) 2 grunde til, at det er smart. Dels bliver dimensionen, d, af rummet, hvori bevægelsen undersøges, reduceret, og dels er iterative afbildninger et mere behageligt objekt at håndtere matematisk. Det er imidlertid sjældent, at man kan fremskaffe et analytisk udtryk for sin Poincaré afbildning. Vi vil dog give et eksempel på en afbildning, der siges at have visse af de samme kvalitative egenskaber som Lorenz modellen.

---

12) Det tekniske krav er, at $F(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) \neq 0$, hvor $\vec{n}$ er en normalvektor til Σ i punktet $\vec{x}$.

13) En Cantormængde er f.eks. det der bliver tilbage af intervallet fra 0 til 1 ved gentagende at tage midterste 3. del ud:



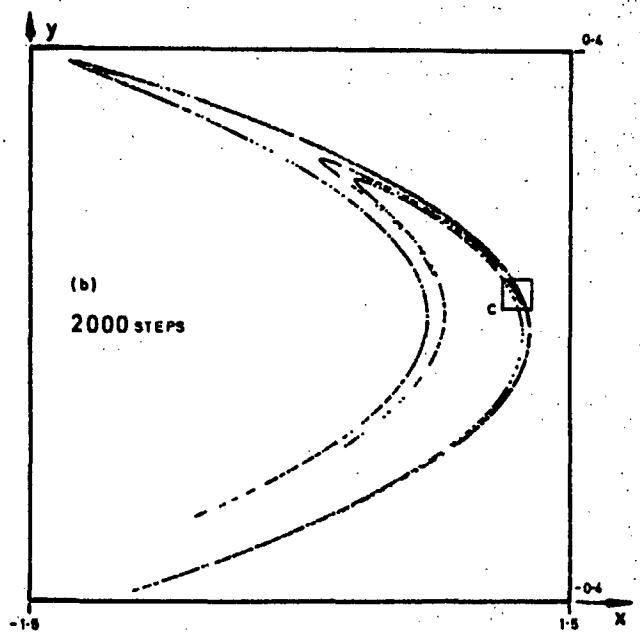
Processen kunne f.eks. også udføres i et kvadrat etc. Karakteristisk for Cantormængder er, at de har mål 0, overtællig mange elementer samt fraktal dimension.

Modellen har udtrykket:

$$(5) \qquad \begin{cases} x_{n+1} = 1 - a(x_n)^2 + y_n \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases}$$

og kaldes Hénon afbildningen efter dens skaber.[14] Modellen kan alt efter parameterværdierne bringes til at udvise periodisk eller kaotisk adfærd. Vi har på fig. 4 vist en kaotisk tiltrækker kaldet Hénon attraktoren.

<u>Fig. 4</u>: Hénon attraktoren.



a=1.4 og b=0.3.

Nogle af de nævnte grænsemængder - ligevægtspunkter og grænsecykler - kan have forskellige stabilitetsforhold, som desuden kan ændres radikalt, når en (eller flere) af systemets parametre varieres. Dette er temaet for næste afsnit.

2.2 Grænsemængders stabilitetsforhold

Først skitserer vi betingelserne for stabilitet af et stationært punkt. Dernæst ser vi på mulighederne for, at et sta-

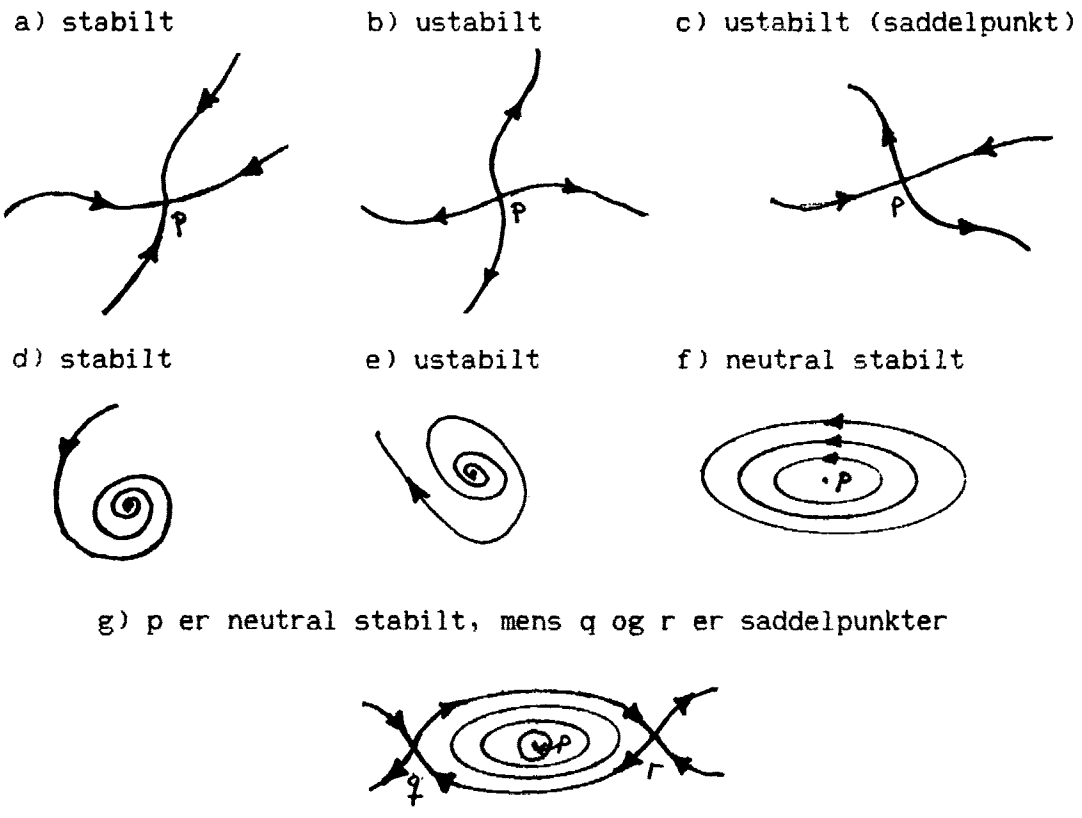
---

14) Hénon, 1975, introducerede afbildningen mhp. at frembinge en Poincaré afbildning for Lorenz flowet. Den er siden undersøgt af flere. Se f.eks. Feit, 1978 og Curry, 1979.

tionært punkt kan bifurkere (dvs. ændre stabilitetsforhold, således, at flowet ændrer topologisk karakter). Specielt inddrager vi Lorenz modellen med henblik på 2 forskellige slags bifurkationer. Afsnittet rundes af med en præsentation af grænsecyklers mulige bifurkationer.

Et stationært punkt p kan have forskellige stabilitetsforhold. Det kan være asymptotisk eller neutral stabilt, eller det kan være ustabilt. At p er asymptotisk stabilt betyder, at alle nærtliggende trajectorier efterhånden suges ind til p (fig. 5a og d).[15] Er p neutral stabilt, vil nærtliggende trajectorier blot vedblive at være nærtliggende - de vil kredse om p (fig. 5f og til dels 5g). Denne slags ligevægte kaldes også centre. Hvis p hverken er asymptotisk eller neutral stabilt, siges det at være ustabilt (fig. 5b, c, e og punkterne q og r i fig. 5g).

Fig. 5: Forskellige faseportrætter i planen.



15) For en mere præcis definition se f.eks. Guckenheimer og Holmes, 1983.

Man kan undertiden fastslå et stationært punkts lineære stabilitetsforhold ved at linearisere systemet om punktet p. Den lineariserede afbildning kaldes Jacobi (eller funktional) matricen, $J=(\partial x_i / \partial x_j)$ og afhænger af systemets parametre. Fortegnene af egenværdierne til J afgør, hvorvidt p er stabilt eller ej. Hvis blot en egenværdi eller en realdel er positiv, da er p ustabilt. p er kun stabilt, såfremt samtlige egenværdier og/eller alle realdele er negative.

Vi får med mellemrum brug for et par matematiske begreber, der karakteriserer visse af faserummets punkter og som kan give en kvalitativ forståelse af et flows udseende. Det drejer sig om et stationært punkts <u>lokalt stabile</u> og <u>lokalt ustabile mangfoldighed</u>, W_{lok} og W_{lok} hhv. De er defineret ved

(6) $W_{lok}(p) = \{\vec{x} \in U \mid \phi_t(\vec{x}) \rightarrow p \text{ for } t \rightarrow \infty \text{ og } \phi_t(\vec{x}) \in U \text{ for } t>0\}$

(6') $W_{lok}(p) = \{\vec{x} \in U \mid \phi_t(x \rightarrow p \text{ for } t \rightarrow -\infty \text{ og } \phi_t(\vec{x}) \in U \text{ for } t<0\}$

Den lokale stabile mangfoldighed er altså mængden af punkter i en omegn U af p som fra et vist trin (t=0) dels vil være indeholdt i U og dels - gennem dynamikken (flowet ϕ_t) vil konvergere mod p (for tiden t gående mod uendelig). På tilsvarende måde kan (6') "oversættes".

En generalisering af disse begreber til hhv. (global) <u>stabil mangfoldighed</u>, W^s, og <u>ustabil mangfoldighed</u>, W^u, er

(7) $W^s(p) = \bigcup_{t<0} W_{lok}(p)$ og

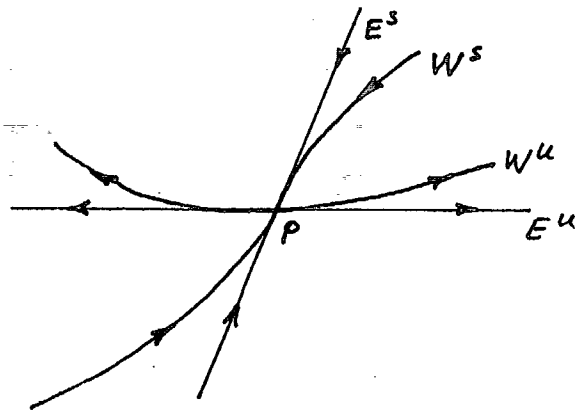
(7') $W^u(p) = \bigcup_{t>0} W_{lok}(p)$.

(7) udtrykker blot, at man lader flowet virke baglæns i tid på de punkter, der er indeholdt i den lokale stabile mangfoldighed. Derved får man samling på samtlige punkter, der konvergerer mod p; også dem der er i 'begyndelsen' er (meget) langt fra p. Derfor betegnelsen global.

En sætning udsiger, at lokalt (i nærheden af p) vil den stabile mangfoldighed, W^s, ligne det egenrum, E^s, der ud-

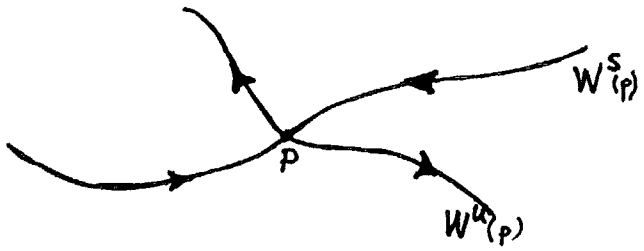
spændes af vektorerne hørende til de negative egenværdier for Jacobimatricen, mens den ustabile mangfoldighed, W^u, lokalt ligner egenrummet, E^u, udspændt af vektorerne hørende til de positive egenværdier (fig. 6).

Fig. 6: Lokalt ligner (tangerer) W^s og W^u hhv. E^s og E^u.



Det betyder, at et ustabilt punkt både kan have en stabil og en ustabil mangfoldighed (se fig. 7), f.eks. et saddelpunkt.

Fig. 7: Et saddelpunkt, p, og dets mangfoldigheder.



For Lorenz ligningerne kan egenværdierne af Jacobimatricen om $p_1=(0,0,0)$ bestemmes til:

$$\lambda_1 = -B, \quad \lambda_{2,3} = 1/2(-(P+1)+\sqrt{(P+1)^2+4P(R-1)})$$

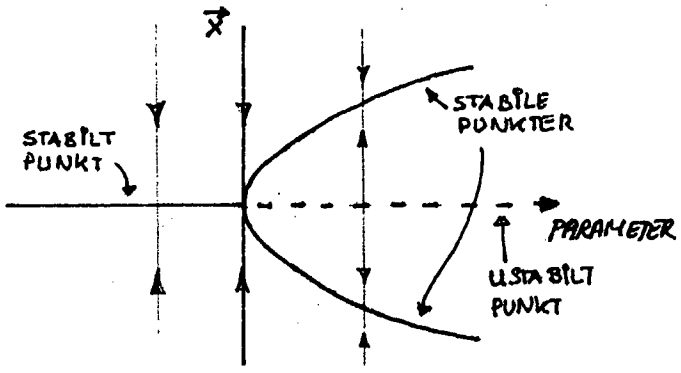
Som man ser, afhænger egenværdierne af systemets parametre. Opgaven handler nu om at efterse, om systemet for visse valg af parametre giver ændringer i det stationære punkts stabilitetsforhold. Findes der et sådant sæt, siges systemet at bifurkere (=gaffeldele, et navn der har sin naturlige forkla-

ring, når man ser på visse af de følgende bifurkationsdiagrammer). I tilfældet ovenfor nøjes vi med at undersøge, hvorvidt der sker bifurkationer for variation af parameteren R.

For R<1 eksisterer kun ligevægtspunktet p_1 (se side 11), og dette vil være stabilt, idet alle egenværdierne da er negative. For R>1 er der 2 negative værdier og en positiv. Dvs. p_1 er ustabilt - et saddelpunkt med en 1-dimensional ustabil mangfoldighed, $W^u(p_1)$.

For R=1 bifurkerer systemet - en såkaldt pitchfork bifurkation (fig. 8), hvor det stabile stationære punkt bliver ustabilt, og der opstår to nye ligevægtspunkter - een på hver side af det ustabile. Dette kan angives i et bifukationsdiagram (pilene i de følgende diagrammer angiver stabilitetsforholdene):

Fig. 8: Superkritisk pitchfork bifurkation.
Systemet har på den ene side af en bestemt parameterværdi et stabilt ligevægtspunkt, der på den anden side af den kritiske parameterværdi bliver ustabilt, samtidig med at to andre, ikke tidligere eksisterende, stabile punkter opstår.



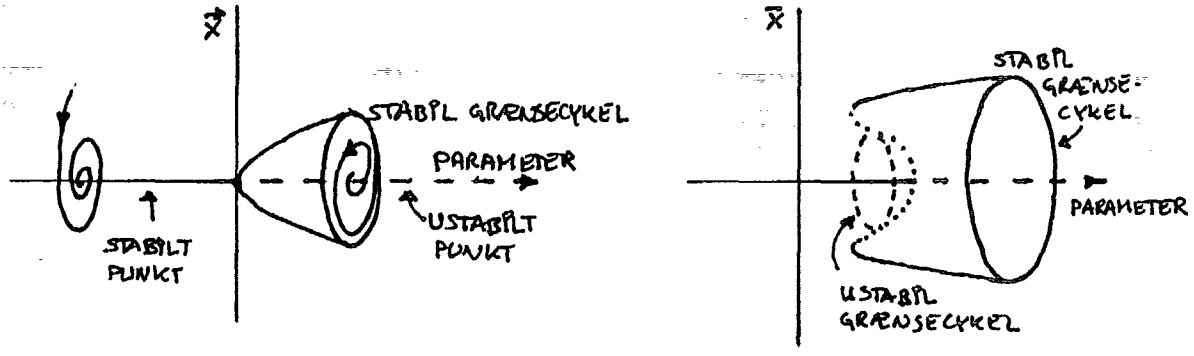
De to dannede ligevægtspunkter er naturligvis de parameterafhængige, vi bestemte i forrige afsnit:

$$(x_{\infty,\infty}, y_{\infty,\infty}, z_{\infty,\infty}) = (\pm\sqrt{B(R-1)}, \pm\sqrt{B(R-1)}, R-1)$$

En stabilitetsundersøgelse af disse viser, at de er stabile for $R \in (1, P(P+B+3)/(P-B-1))$. Når R har dette intervals højre endepunkt som værdi, bliver realdelene af komplekst konjugerede egenværdier lig med 0, og der vil i dette tilfælde ske en sub-

kritisk Hopf bifurkation[16] (se fig 9.).

Fig. 9: Hopf bifurkationer.
a) Før bifurkationen spiralerer løsningskurverne ind mod et ligevægtspunkt. Dette bliver ustabilt, og der opstår en grænsecykel omkring punktet. b) Her er der et mellemstadium, hvor det stabile punkt sameksisterer med dels en ustabil og dels en stabil grænsecykel. I begge tilfælde vil løsningerne spiralere væk fra det ustabile og ind mod det stabile.



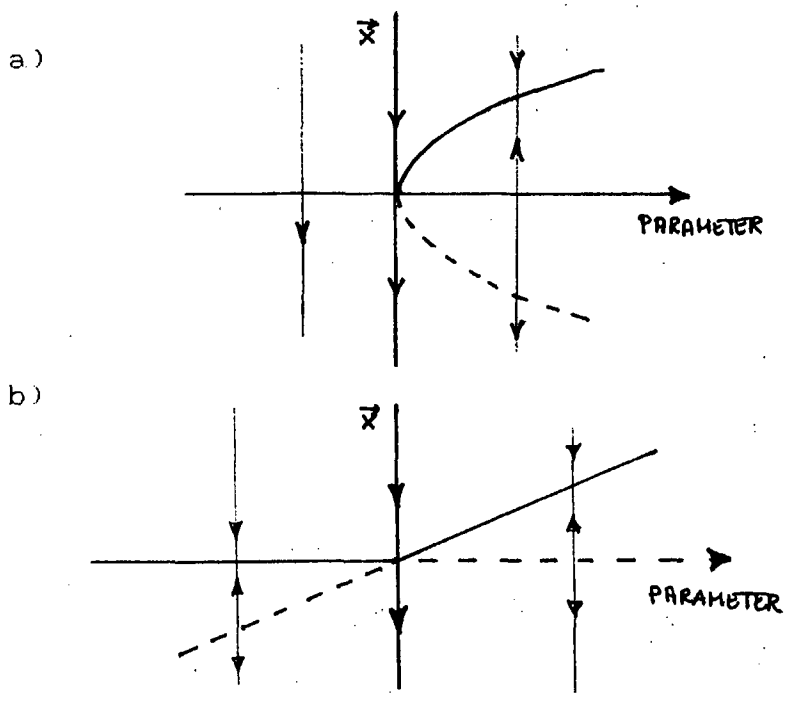
a) superkritisk b) subkritisk

Vi angiver nedenfor strukturen af endnu et par bifurkationer, der iøvrigt ikke vil blive yderligere diskuteret.

---

16) Om en bifurkation er super- eller subkritisk hænger på nogle tekniske betingelser. Se iøvrigt App. I.

Fig. 10: Bifurkationstyper.
a) Saddelpunktsbifurkation og b) transkritisk bifurkation.



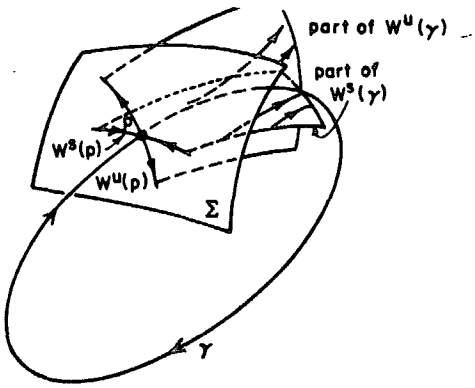
Hos det drevne, 2-dimensionale torsionspendul findes ingen stationære punkter. Der er derimod grænsecykler. I et Poincaré snit optræder disse som enkeltstående punkter. Da grænsecyklerne enten er stabile eller ustabile, vil skæringspunkterne have de tilsvarende stabilitetsforhold. Lad os for overskuelighedens skyld antage, at der er et enkelt skæringspunkt, p, mellem Poincaré snittet Σ og cyklen γ. Poincaré afbildningen betegnes f. Vi forestiller os, at det er lykkedes at etablere et formelt udtryk for afbildningen, f. Afbildningen tænkes så lineariseret (rækkeudviklet til første orden) om punktet p. Den derved dannede lineære afbildning kan skrives som en matrix, **M**, hvis egenværdier bestemmes. Hvis blot een af egenværdierne har modulus større end 1 er p og dermed γ ustabil. Stabilitet fordrer nemlig, at alle egenværdier har norm mindre end 1.[17] Både punktet og cyklen selv har stabile og u-

---

17) Bemærk, at der nu er tale om modulus og ikke - som før - fortegnet af egenværdierne. Det skyldes, at objektet her er iterative afbildninger og ikke kontinuerte flows.

stabile mangfoldigheder (se fig. 11) svarende til egenværdier med modulus hhv. mindre end eller større end 1.

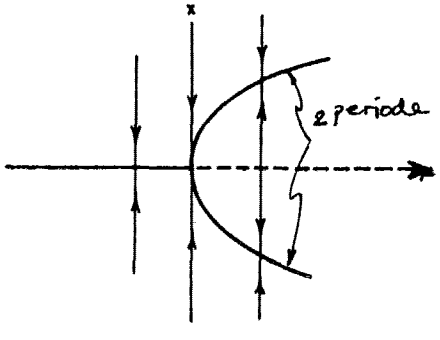
Fig. 11: Et Poincaré snit gennem en grænsecykel.
I selve snittet Σ ligger punktets (p) stabile og ustabile mangfoldigheder. Udenfor snittet er der optegnet en del af både den stabile og den ustabile mangfoldighed hørende til cyklen. (Guckenheimer og Holmes, 1983).



Et stationært punkt i Poincaré snittet kan bifurkere på flere måder end et tilsvarende i faserummet. Bifurkationer kan optræde, når en egenværdi bliver +1 eller -1, eller når to komplekst konjugerede egenværdiers moduli bliver 1.

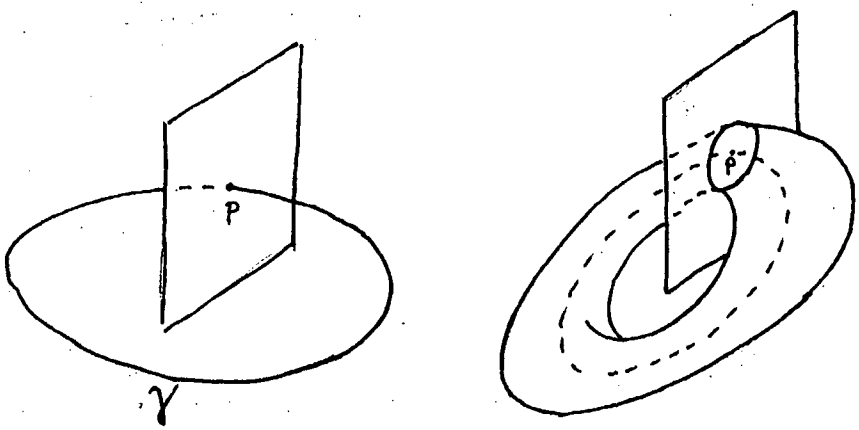
Bifurkationer hidrørende fra, at en egenværdi bliver +1, er helt analoge til dem af de ovenfor nævnte, hvor egenværdien er 0. Dvs. saddelpunktsbifurkationen, den transkritiske og pitchfork bifurkationen. Hvis egenværdien bliver -1 fås en bifurkation, der splitter punktet op i to, en på hver side af punktet. Dette svarer til, at den oprindelige cykel bliver fordoblet (se fig. 12). Derfor kaldes bifurkationen for periode fordoblings bifurkationen - eller en flip bifurkation, fordi værdien -1 giver anledning til at punkterne i snittet alternerer - 'flipper' - mellem to positioner.

Fig. 12: Flip (periodefordoblings) bifurkation.
Før bifurkationen ses en stabil grænsecykel - et stabilt punkt i Poincaré snittet. Denne splitter til en periode 2 grænsecykel omkring en nu ustabil cykel. Dette er det superkritiske tilfælde.



I analogi med at et ligevægtspunkt for systemet kunne Hopf bifurkere (super- eller subkritisk), kan også en grænsecykel bifurkere gennem en såkaldt sekundær Hopf bifurkation. Og ligesom før har det med komplekse egenværdier at gøre. Hvor det før handlede om, at realdelene blev 0, drejer det sig her om, at to komplekst konjugerede egenværdiers moduli simultant bliver 1. Også i denne situation er der mulighed for to forskellige slags: Super- eller subkritisk afhængig af nogle tekniske betingelser på egenværdiernes afhængighed af parameteren, der varieres. (Se f.eks. Marsden og McCracken, 1976.)

Fig. 13: Superkritisk (sekundær) Hopf bifurkation.
Før bifurkationen ses en stabil grænsecykel, der efter bifurkationen splitter op til en stabil torus, hvori der er en ustabil grænsecykel.



Vi afslutter kapitlet med i næste afsnit at analysere modellen for torsionspendulet.

2.3 Torsionspendulet og kaos

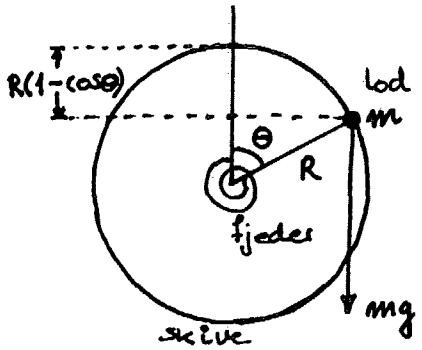
Vi indleder med nogle analytiske betragtninger over modellen for torsionspendulet. Det vil sige, at vi anvender en del af det hidtil omtalte matematiske apparat specifikt på denne model.

Af fig. 14 kan vi uddrage, at pendulets potentiale er:

$$V(\theta) = 1/2\ K\cdot\theta^2 - mgR(1-\cos\theta)$$

hvor K er fjederens kraftkonstant.

Fig. 14: En model af torsionspendulet.



Vi erstatter mgR med τ, og finder af Newton's anden lov, at

(8) $$I\cdot\ddot{\theta} = -\text{grad } V(\theta) = -(K\cdot\theta - \tau\sin\theta) = \tau\sin\theta - K\cdot\theta$$

eller med $\alpha = K/I$ og $\beta = \tau/I$:

(9) $$\ddot{\theta} + \alpha\cdot\theta - \beta\sin\theta = 0$$

Denne 2. ordens, ikke-lineære ligning kan transformeres med $x=\theta$, $y=\dot{\theta}$ til 1. ordens systemet:

(10) $$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\alpha\cdot x + \beta\sin(x) \end{cases}$$

Ligevægtspunkter findes af $(\dot{x},\dot{y})=(0,0)$, dvs.

(11) $$y=0 \text{ og } \sin(x) = \frac{\alpha}{\beta}x$$

hvor den sidste er en transcendent ligning og derfor ikke kan løses analytisk. Men det ses umiddelbart, at (0,0) er et stationært punkt. Jacobi matricen for systemet er:

(12) $$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \beta\cos(x)-\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

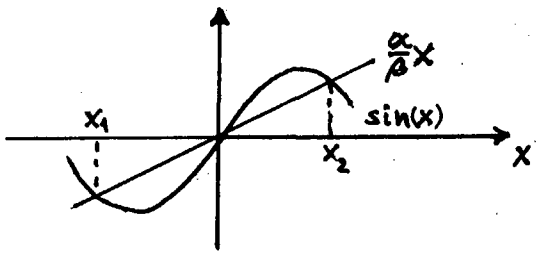
hvoraf egenværdierne for x=0 findes til:

$$\lambda = \pm\sqrt{\beta-\alpha} = \pm i\sqrt{\alpha-\beta} \quad , \text{ for } \quad \frac{\alpha}{\beta} > 1$$

Da $Re(\lambda)=0$ kan vi ikke på denne baggrund udtale os om stabiliteten af (0,0). Men det er muligt med andre metoder at vise, at punktet er neutral stabilt.[18] Fig. 16a viser et fase-faseportrættet af situationen.

For $\frac{\alpha}{\beta}<1$ opstår to nye stationære punkter bestemt af $\sin(x)= x$ (se fig. 15).

Fig. 15: Bestemmelse af ligevægtspunkter.



Egenværdierne hørende til disse punkter er:

$$\lambda = \pm\sqrt{\beta\cos(x) - \alpha} \,,$$

hvor x er et af ligevægtspunkterne. Med de eksperimentelt bestemte fysiske konstanter, vi har brugt i modelkørslerne er α =10.45 og β=15.40, hvoraf $x^*=\pm 1.462$ så:

$$\lambda = \pm\, i\cdot 2.96$$

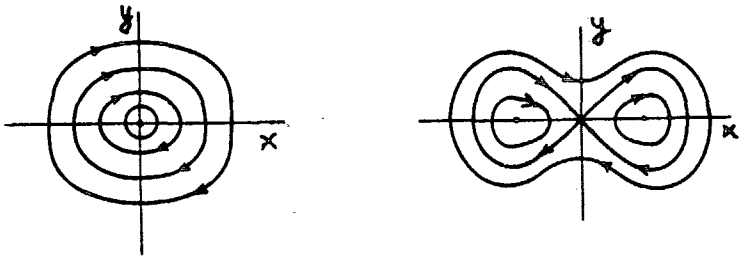
Dvs. den naturlige frekvens er $2.96 s^{-1}$.

Systemet bifurkerer for $\alpha=\beta$, hvor det stabile origo bliver ustabilt, mens 2 nye neutralt stabile ligevægtspunkter opstår - et eksempel på en pitchfork bifurkation. Faseportrættet af den nye situation ses i fig. 16b.

---

18) F.eks. ved brug af en Liapunpov funktion.

Fig. 16: Faseportrætter før og efter bifurkation.



Vi indfører nu en hastighedsafhængig friktion, som indtil videre antages proportional med hastigheden. Desuden driver vi systemet med en periodisk funktion (motoren). Derved bliver modellen:

$$\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + \alpha\theta - \beta\sin\theta = B\cos(\omega t) \tag{13}$$

eller i en transformeret udgave:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \beta\sin(x) - \alpha x - \gamma y + B\sin(\omega z) \\ \dot{z} = 1 \end{cases} \tag{14}$$

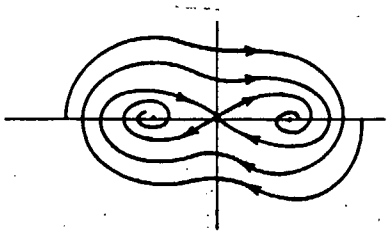
Antages B=0, dvs. motoren er endnu ikke sat igang, bliver egenværdierne til lineariseringen af (14):

$$\lambda = 1/2\left(-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\beta\left(\cos(x^*) - \frac{\alpha}{\beta}\right)}\right)$$

$$= 1/2\left(-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + 15}\right)$$

Da realdelene er negative, er de stadigt identiske ligevægtspunkter endnu stabile, men faseportrættet ser lidt anderledes ud end før, idet de nu er asymptotisk stabile (se fig. 17).

Fig. 17: Faseportræt - pendul med dæmpning.



Modellen for torsionspenduet er egentlig et 2-dimensionalt, ikke-autonomt differentialligningssystem, idet t er en uafhængig variabel. Derfor repræsenterer (14) ikke et 3-dimensionalt system. En måske smartere transformation ville være følgende:

$$(15)\qquad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \beta\sin(x) - \alpha x - \gamma y + Bu \\ \dot{u} = -wv \\ \dot{v} = wu \end{cases}$$

hvor u=cos(wt) og v=sin(wt). Herved opnås dels, at motoren fungerer som det, den er: En uafhængig harmonisk oscillator, som tilfører pendulet energi uden, at motoren får "noget igen". Dels bliver systemets grænsemængder i dette 4-dimensionale rum kompakte mængder. Dette hænger dog også sammen med, at systemet er dissipativt, hvilket følger af, at divergensen af flowet er negativt:

$$\mathrm{div}(x,y,u,v) = -\gamma < 0 \ .$$

Dette resultat er - selvfølgelig - uafhængig af om motoren er igang (B>0) eller ej. Sættes motoren igang, kan vi forestille os, at systemet for små B vil være strukturelt stabilt - familien af flows for disse B ligner hinanden. Dette, fordi en lille periodisk påvirkning ikke vil rokke synderligt ved stabiliteten af af de for B=0 stabile, stationære punkter. Til

gengæld, hvis B er tilpas stor, vil der meget sandsynligt indtræde bifurkationer - f.eks. periodefordoblings (=pitchfork-) bifurkationer.[19]

Spørgsmålet er nu, om der kan forekomme kaos i modellen. Et system kan blive kaotisk ad en af flere mulige veje. En måde er, at det gennemgår en uendelig kaskade af pitchfork bifurkationer (se App. I). En anden er gennem intermittens (se kap. 4). Det er også muligt for et system at blive kaotisk, såfremt systemet undergår specielle kombinationer af forskellige bifurkationstyper. En teoretisk forudsætning for kaos er, at en eksisterende grænsemængdes (f.eks. et fixpunkts) stabile og ustabile mangfoldighed skærer hinanden transversalt i blot eet punkt udover fixpunktet, p, selv. Sådanne punkter kaldes homokline. Er der nemlig eet homoklint punkt, $q \neq p$, vil der være uendeligt mange. Dette kan ses af, at hvis $q \in W^u(p) \cap W^s(p)$ med $q \neq p$, da vil $G^n(q) \to p$ for $n \to +\infty$ (se fig. 18).[20] Og da $G^n(q)$ både er indeholdt i den stabile og den ustabile mangfoldighed for p for alle n, må der være uendeligt mange skæringspunkter.

---

19) Vi har ikke haft mulighed for at variere på motoramplituden ("B") i eksperimenterne og har derfor heller ikke gjort det i modelkørsler.

20) Afbildningen G er en iterativ afbildning - for torsionspendulets vedkommende vil det være en Poincaré afbildning. De lokale stabile og ustabile mangfoldigheder for afbildningen G til fixpunktet p er definerede ved:

$$W_{lok}(p) = \{ x \in U \mid G^n(x) \to p \text{ for } n \to \infty \text{ og } G^n(x) \in U, \forall n \in N_0 \}$$

$$W_{lok}(p) = \{ x \in U \mid G^{-n}(x) \to p \text{ for } n \to \infty \text{ og } G^{-n}(x) \in U, \forall n \in N_0 \}$$

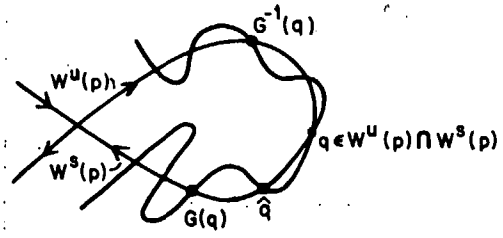
hvor U er en omegn af p. De stabile og ustabile mangfoldigheder er definerede ved:

$$W^s(p) = \bigcup_{n \in N} G^{-n}(W_{lok}(p))$$

$$W^u(p) = \bigcup_{n \in N} G^{n}(W_{lok}(p))$$

Det skal bemærkes, at mangfoldighederne er invariante, dvs. når et punkt q er indeholdt i mængden, vil også $G^n(q)$ samt $G^{-n}(q)$ være i mangfoldigheden.

Fig. 18: Homokline punkter.



Vi har dog ikke mulighed for at konstatere, om én eller flere af torsionspendulmodellens fixpunkters stabile og ustabile mangfoldigheder skærer hinanden.

Som modellen er ridset op, er der 4 parametre, der er mulige at skrue på. Man siger, at systemet er af kodimension 4. Vi har valgt "kun" at skrue på een (kodimension=1), nemlig friktionen. Og i et forsøg på at få modellen til at gengive de samme ting, som det "rigtige" pendul, har vi tilføjet endnu et led i modellen ovenfor. Et led, som skulle repræsentere effekten af faststofgnidningen. Da værdien af denne gnidning brat skifter fortegn hver gang vinkelhastigheden skifter retning, skal leddet være en sign funktion. En sådan kan man naturligvis ikke lægge ind i en integrationsalgoritme, hvorfor vi har approximeret med en stejl funktion: N*tanh(5y), hvor N er en målt værdi af faststofgnidningskoefficienten. Denne tilføjelse komplicerer en videre analytisk behandling uforholdsmæssig meget. Vi stopper derfor med analysen og går i næste kapitel over til at se på, hvorledes bevægelserne opfører sig på den kaotiske tiltrækker. Der gives endvidere et mere kvalificeret argument for, at der er tale om kaos i modellen. Dette sker gennem en numerisk fastlæggelse af systemets Liapunoveksponenter.

KAPITEL 3

Liapunov eksponent

Indledning

I dag er man ikke i tvivl om, at fænomenet deterministisk kaos eksisterer. I de seneste årtier er der udført adskillige forsøg, som udviser fænomenet.[1] Derimod er problemet omkring detekteringen og kvantificeringen af kaos stadig yderst aktuelt. En af de mere slagskraftige metoder til detektering (såvel som kvantificering) af, hvorvidt en bevægelse er kaotisk eller ej, er fastlæggelsen af bevægelsens spektrum af Liapunov-eksponenter.[2]

Vi vil i dette kapitel definere begreberne Liapunov-eksponent og en given bevægelses spektrum af Liapunov-eksponenter. Vi vil beskrive, hvorledes størrelsen af Liapunov-eksponenterne fortæller noget om informationstabet og dermed om forudsigeligheden - eller manglen på samme - af det dynamiske system, samt beskrive sammenhængen mellem Liapunov-eksponenterne og den kaotiske tiltrækkers dimension.[3]

Derudover beskriver vi en numerisk metode (udfra sættet af differentialligninger) til beregning af spektret af Liapunov-eksponenter, samt implementerer denne i "CTS". Som regneeksempel benyttes Lorenz-ligningerne, hvor dets spektrum for et sæt af begyndelsesbetingelser beregnes. Afslutningsvis beregnes og diskuteres Liapunov-spektre for torsionspendulet.

---

[1]) Se fx. referencerne i Bergé m. fl., 1986 og Thompson og Stewart, 1986.

[2]) Wolf m. fl. 1985, går så vidt til at skrive, at spektret af Liapunov-eksponenter: "...has proven to be the most useful dynamical diagnostic for chaotic system." (s. 285). Andre metoder bliver dog også anvendt, bl.a. power spektre, entropi og fraktal dimension, herom fortsætter Wolf: "We have tested many of these algorithms on both model and experimental data, and despite the claims of their proponents we have found that these approaches often fail to characterize chaotic data." (s. 286.).

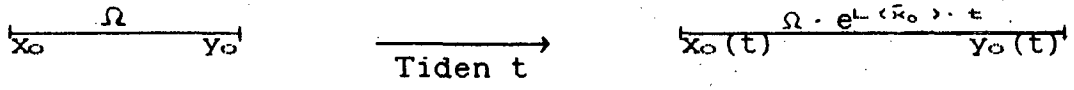
[3]) I kapitel 4 - "Intermittens" - diskuteres sammenhængen mellem Liapunov eksponenterne og fænomenet "Intermittens".

3.1 Definition af Liapunov-eksponent

Et af kendetegnene ved bevægelser på en kaotisk tiltrækker[4] er, at de er følsomme overfor begyndelsesbetingelserne.

En given usikkerhed på begyndelsesbetingelserne vil vokse med eksponentiel hastighed. Eller med andre ord: To punkter $\bar{x}_0$ og $\bar{y}_0$ på tiltrækkeren, som ligger tæt ved hinanden i fase-rummet, dvs. $\|\bar{x}_0-\bar{y}_0\| = \Omega$ er lille, vil som funktion af tiden fjerne sig fra hinanden med eksponentiel hast (fig. 1).

Fig: 1: Eksponentiel afvigelse.



Denne egenskab er et af de vigtigste karakteristika ved de kaotiske tiltrækkere, og det er den egenskab, der betyder, at det kun vil være muligt at forudsige systemets udvikling i stærkt begrænsede tidsrum.[5]

Det kan umiddelbart lyde som en modsætning, at en kaotisk tiltrækker kan have en egenskab som eksponentiel afvigelse (et såkaldt "stræk") mellem to nærtliggende punkter - eller to baner i faserummet. Forklaringen på denne tilsyneladende modsætning ligger i den kaotiske tiltrækkers specielle struktur. For dissipative systemer er tiltrækkeren en veldefineret kompakt punktmængde i faserummet. Da løsningskurverne ikke må overskride udstrækningen af punktmængden i faserummet, må en såkaldt (tilbage) foldning forekomme. Denne form for stræk og fold er et andet vigtigt karakteristisk træk ved en kaotisk tiltrækker. I figur 2 er illustreret strækkets og foldningens

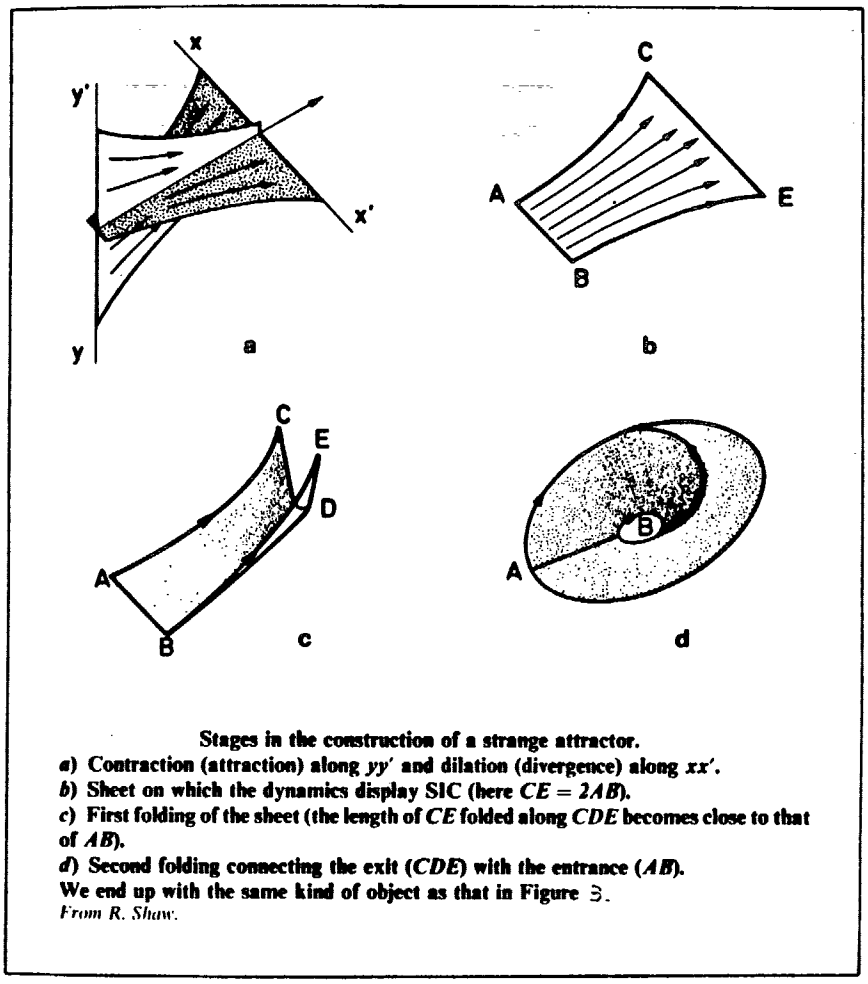
---

[4]) Ved 'tiltrækker' forstås, at bevægelser styret af det dynamiske system, der ikke befinder sig på tiltrækkeren, vil nærme sig denne.

[5]) Mere herom i afsnit 3.3.

geometriske konstruktion i Rössler tiltrækkeren.[6]

Fig. 2: Konstruktionen af Rössler tiltrækkeren.[7]



Stages in the construction of a strange attractor.
***a*) Contraction (attraction) along *yy'* and dilation (divergence) along *xx'*.**
***b*) Sheet on which the dynamics display SIC (here *CE* = 2*AB*).**
***c*) First folding of the sheet (the length of *CE* folded along *CDE* becomes close to that of *AB*).**
***d*) Second folding connecting the exit (*CDE*) with the entrance (*AB*).**
We end up with the same kind of object as that in Figure 3.
From R. Shaw.

Punkter, der ikke er på tiltrækkeren (planen (y,y',z) i fig. 2), vil tiltrækkes denne (planen (x,x',z)). Er punkterne først på tiltrækkeren, strækkes og foldes deres baner i overensstemmelse med tiltrækkerens begrænsede udstrækning. Denne proces gentager sig i det uendelige.

---

[6]) Ligningssystemet for Rössler tiltrækkeren er:

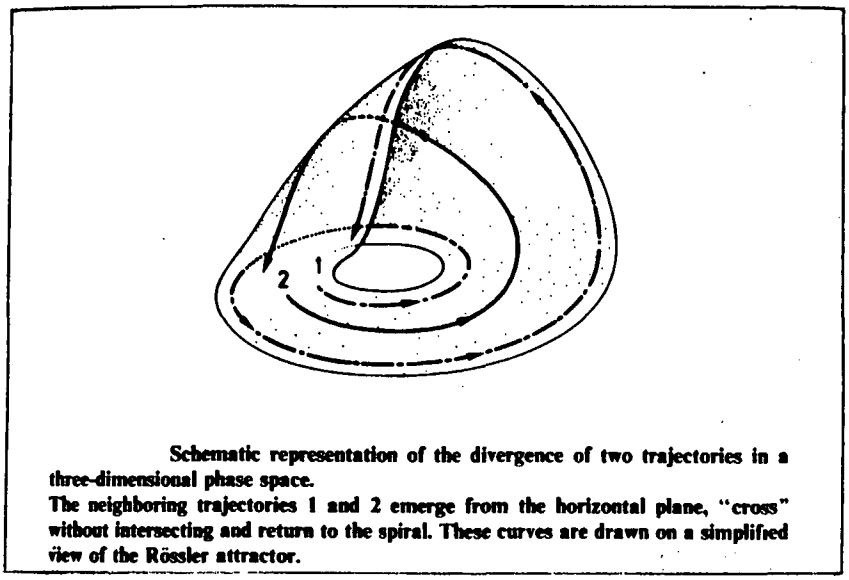
$$X' = -Y - Z$$
$$Y' = X + aY$$
$$Z' = b + XZ - cZ$$

hvor X,Y og Z er variable. Kaos opstår bl.a. ved parameterværdierne a= 0.15, b=0.20 og c=19,0.

[7]) Figurerne 2 og 3 er taget fra Bergé m. fl. 1986, s. 120-121. Forkortelsen "SIC" i fig. 2 står for "sensitivity to initial conditions".

En sådan konstruktion medfører som sagt, at to baner hurtigt vil divergere fra hinanden (fig. 3).

Fig. 3: To baner, der divergerer på Rössler tiltrækkeren.



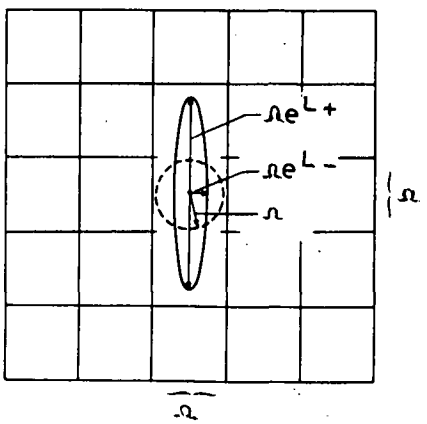
Schematic representation of the divergence of two trajectories in a three-dimensional phase space.
The neighboring trajectories 1 and 2 emerge from the horizontal plane, "cross" without intersecting and return to the spiral. These curves are drawn on a simplified view of the Rössler attractor.

Hvor hurtigt to punkter i et system henholdsvis vil kontrahere ind på tiltrækkeren og divergere fra hinanden på denne, er bestemt af størrelsen af systemets Liapunov-eksponenter.

Liapunov-eksponenten kan forstås udfra følgende betragtninger: Indlægger vi en infinitesimal d-dimensional kugle i det d-dimensionale faserum, vil Liapunov-eksponentens fortegn og størrelse i hver dimension bestemme, hvorledes denne kugle - gennem det dynamiske systems udvikling - transformeres til en d-dimensional ellipsoide (fig. 4).

Fig. 4: Positiv og negativ Liapunov-eksponent.

Et eksempel (i 2 dimensioner) på en transformation af en cirkel til en ellipse. Den største og mindste radius i ellipsen bliver transformeret i overensstemmelse med henholdsvis den positive og negative Liapunov-eksponent.



$L_+ > 0$; $L_- < 0$

Den i'te 1-dimensionale Liapunov-eksponent kan da udtrykkes i termer af længder på ellipsoidens halvakser p_i.

(1)[e] $$L_i = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \cdot \log_2\left(\frac{p_i(t)}{p_i(0)}\right)$$

---

[e]) Ligning 1 kan forstås udfra figur 1. Heraf ses, at

$$||\bar{x}_o(t)-\bar{y}_o(t)|| = ||\bar{x}_o-\bar{y}_o||_t = \Omega \cdot e^{L(\bar{x}_o)\cdot t} \Rightarrow$$

$$L = 1/t \cdot \ln |(||\bar{x}_o-\bar{y}_o||_t)/\Omega|$$

Brugen af 2-tals logaritmen i ligning 1, fremfor den naturlige logaritme, har fordele, som vi senere vil komme nærmere ind på.

For <u>iterative</u> systemer kan ovenstående for $\Omega\to 0$ og $t\sim N\to\infty$ omskrives til det formelle udtryk for $L(x_o)$ (Schuster, 1984, s. 18-19):

$$\Omega \cdot e^{N\cdot L(x_o)} = |f^N(x_o+\Omega) - f^N(x_o)|$$

$$L(x_o) = \lim_{N\to\infty} \lim_{\Omega\to 0} 1/N \cdot \ln |(f^N(x_o+\Omega) - f^N(x_o))/\Omega| \Rightarrow$$

$$L(x_o) = \lim_{N\to\infty} 1/N \cdot \ln \left| df^N(x)/dx \right|_{x=x_o}$$

v.hj.a. kædereglen bliver

$$df^2(x)/dx \Big|_{x=x_o} = df(f(x))/dx \Big|_{x=x_o} = f'(f(x_o))\cdot f'(x_o)$$

$$= f'(x_1)\cdot f'(x_o); \quad x_1 = f(x_o)$$

hermed bliver Liapunov-eksponenten

$$L(x_o) = \lim_{N\to\infty} 1/N \cdot \ln |df^N(x_o)/dx_o|$$

$$= \lim_{N\to\infty} 1/N \cdot \ln \left|\prod^{N-1} f'(x_i)\right|$$

$$= \lim_{N\to\infty} 1/N \cdot \sum_{i=0}^{N-1} \ln |f'(x_i)|.$$

Denne ligning er altså kun anvendelig overfor en-dimensionale iterative afbildninger. Generaliseres den til d dimensioner, hvor vi så også har d Liapunov-eksponenter, får vi

$$(e^{L1}, e^{L2}, .., e^{Ld}) = \lim_{N\to\infty} (\text{størrelsen af egenværdierne af } \prod_{n=0}^{N-1} J(\bar{X}_n))^{1/N}$$

hvor $J(\bar{X}_n)$ er Jacobi matricen for systemet.

hvor $p_i(0)$ er radius i kuglen, og $p_i(t)$ er længden af den i'te halvakse i ellipsoiden.

Liapunov-eksponenterne er derfor relateret til den sammentrækkende og udvidende struktur, tiltrækkeren har i de forskellige retninger i faserummet.

Da orienteringen af ellipsoidens akser konstant ændres, mens den transformeres af det dynamiske system, kan man ikke knytte en bestemt Liapunov-eksponent til en bestemt retning i rummet. Liapunov-eksponentens fortegn udtrykker altså kun noget om, hvorvidt to punkter fjerner sig fra eller nærmer sig hinanden.

3.2 Liapunov-spektret

Et d'te ordens differentialligningssystem (ODE) har d Liapunov-eksponenter. De er alle reelle tal, ordnede efter konventionen:[9]

$$L_1 \geq L_2 \geq L_3 \geq \ldots . \geq L_d .$$

Liapunov-eksponenten kan antage én af tre kvalitativt forskellige værdier: Negativ, nul eller positiv.

Har det dynamiske system en tiltrækker, må systemet have mindst én negativ eksponent, så punkter udenfor tiltrækkeren kan nærme sig denne.

Er Liapunov-eksponenten negativ, vil punkter konvergere med eksponentiel fart mod tiltrækkeren.

Er systemet dissipativt skal summen af alle eksponenterne være mindre end nul,[10] hvilket svarer til, at volumen af fase-

---

[9]) "Direction in Chaos vol. II", 1988, ed. Hao Bai-Lin, s. 306. 'ODE' står for 'Ordinary Differential Equations'.

[10]) For konservative systemer vil summen af alle eksponenterne blive nul:

$$\sum_{i=1}^{d} L_i = 0,$$

svarende til, at volumen af faserummet, hvori bevægelsen foregår, er konstant. Er systemet hamiltonsk ophæver eksponenterne hinanden parvis. "Directions in chaos vol. II", 1988, s. 306.

rummet, hvori bevægelsen foregår, uafbrudt formindskes. Efter indsvingning vil alle punkter være på en såkaldt 'nul volumen' grænsemængde - en tiltrækker/attraktor.[11]

Er eksponenten nul, betyder det, at to nærtliggende punkter vil holde samme afstand fra hinanden, eller fjerne/nærme sig fra hinanden med en hastighed, der ikke er eksponentiel.[12]

Ethvert kontinuert dynamisk system - uden et fixpunkt - vil have mindst en eksponent, der er lig nul.

Er Liapunov-eksponenten positiv, betyder det, at to punkter på forskellige nærtliggende banekurver fjerner sig fra hinanden med eksponentiel fart.

Hver positiv eksponent svarer til en "retning", hvor systemet gennemgår den gentagende stræk- og foldnings proces, der dekorrelationerer tætliggende tilstande på tiltrækkeren.

Har et dissipativt system en tiltrækker, med en eller flere

---

[11]) Mere herom i afsnit 3.4 - "Den kaotiske tiltrækkers dimension".

[12]) Retningen for "nul eksponenten" er langs tangenten til flowet. Eksponenten vil som skrevet også være nul, hvis to punkter fjerner sig fra eller nærmer sig hinanden, med en anden hastighed end eksponentiel. Dette skyldes den snævre definition af Liapunov-eksponenten, der netop kræver en eksponentiel sammenhæng. Som bevis herfor, ser vi på et 1-dimensionalt iterativt system:

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

hvor vi antager, at afstanden mellem to løsninger vokser lineært:

$$|x_o - y_o| = \Omega > 0 \quad \Rightarrow \quad |f^N(x_o+\Omega) - f^N(x_o)| = \Omega \cdot N + \beta$$

Af definitionen på Liapunov eksponenten (se note 8) ses, at

$$L(x_o) = \lim_{N\to\infty} \lim_{\Omega\to 0} 1/N \cdot \ln \left| (f^N(x_o+\,) - f^N(x_o))/\Omega \right|$$

$$= \lim_{N\to\infty} \lim_{\Omega\to 0} 1/N \cdot \ln \left| N + \beta/\Omega \right|$$

Da potensfunktionen N vokser hurtigere end ln-funktionen, bliver grænseværdien:

$$\lim_{N\to\infty} \lim_{\Omega\to 0} \left(\frac{\ln \left| N+\beta/\Omega \right|}{N} \right) = 0$$

dvs. Liapunov eksponenten er lig 0.

positive Liapunov-eksponenter, siger man, at tiltrækkeren er "underlig" (engelsk: strange attractor) - dvs. systemet er kaotisk.

Fortegnet af Liapunov-eksponenterne giver os et kvalitativt overblik over de mulige overordnede tilstande, systemet kan være i - også kaldt Liapunov-spektret for systemet.

I figur 5 har vi gengivet spektre for de mulige tilstande, 3- og 4-dimensionale systemer kan være i.

Fig. 5: Liapunov-spektre.[13]

Typen af tiltrækker	Spektre
3 dimensioner:	
Fix punkt	(−,−,−)
Grænse cykel	(0,−,−)
Kvasiperiodisk (torus)	(0,0,−)
Kaos	(+,0,−)
4 dimensioner:	
Fix punkt	(−,−,−,−)
Grænse cykel	(0,−,−,−)
Kvasiperiodisk (torus)	(0,0,0,−)
Kaos	(+,0,−,−)
	(+,0,0,−)
Hyperkaos[14]	(+,+,0,−)

[13]) Wolf m. fl., 1985, s. 287 eller Bergé m. fl., 1986, s. 287 samt (for 4 dim.) "Directions in chaos vol. II", 1988, s. 307.

Bevægelsen på torus er en såkaldt kvasiperiodisk bevægelse. Det er en bevægelse, der vil kunne beskrives som sammensat af flere enkeltsvingninger. Hvis forholdet mellem disse svingningers perioder er rationalt, vil bevægelsen være periodisk - en fast kurve på torus (en grænsecykel). Er forholdet irrationalt, vil systemet aldrig gentage sig selv - kurven vil langsomt "skride" og efterhånden fylde hele overfladen af torus. Se endvidere afsnit 3.4.

[14]) Et eksempel på et 4-dimensionalt system, med to positive eksponenter er Rössler's hyperkaos tiltrækker (a=0.25, b=3, c=0.05, d=0.5):

$$X' = -Y - Z \qquad Z' = b + XZ$$
$$Y' = X + aY + W \qquad W' = cW - dZ$$

Her er L_1=0.16, L_2=0.03, L_3=0.00 og L_4=-39.0, Wolf m. fl., 1985, s. 289.

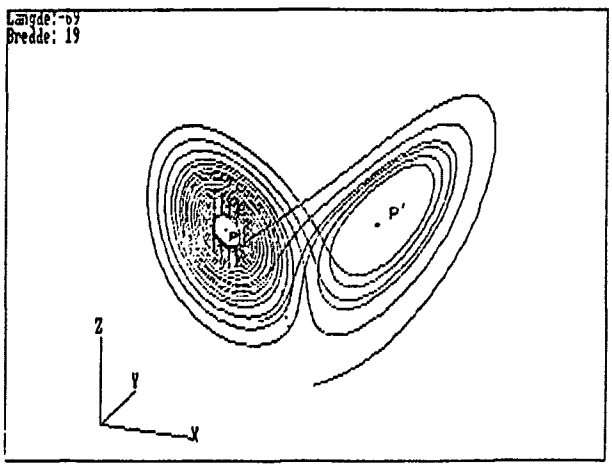
Dobbeltpendulet, som vi beskriver senere, er ligeledes et 4-dimensionalt system. Liapunov-spektret for en kaotisk bevægelse af dette system kan kun (jvf. note 10) antage spektret (+,0,0,-).

3.3 Informationstab og uforudsigelighed

Uforudsigelighed er et andet af de specielle karakteristika, vi kan knytte til fænomenet deterministisk kaos.[15] Uforudsigeligheden skyldes den kaotiske tiltrækkers specielle stræk- og foldningsstruktur. For at illustrere dette, kan vi betragte Lorenz-tiltrækkeren (fig. 6), som er et ikke-linært differentialligningssystem (med kontinuert tidsafhængighed) beskrevet ved:

$$X' = P \cdot (Y-X)$$
$$Y' = X \cdot (R-Z) - Y$$
$$Z' = X \cdot Y - B \cdot Z$$

Fig. 6: Lorenz-tiltrækkeren.



Lorenz-tiltrækkeren for P=10, R=28 og B=8/3. Begyndelsesbetingelser (1,1,1). Bevægelsen skabes, ved at et punkt tager et eller flere omløb omkring et af de ustabile fixpunkter P eller P', hvorefter den springer over i omløb om det anden etc.[16]

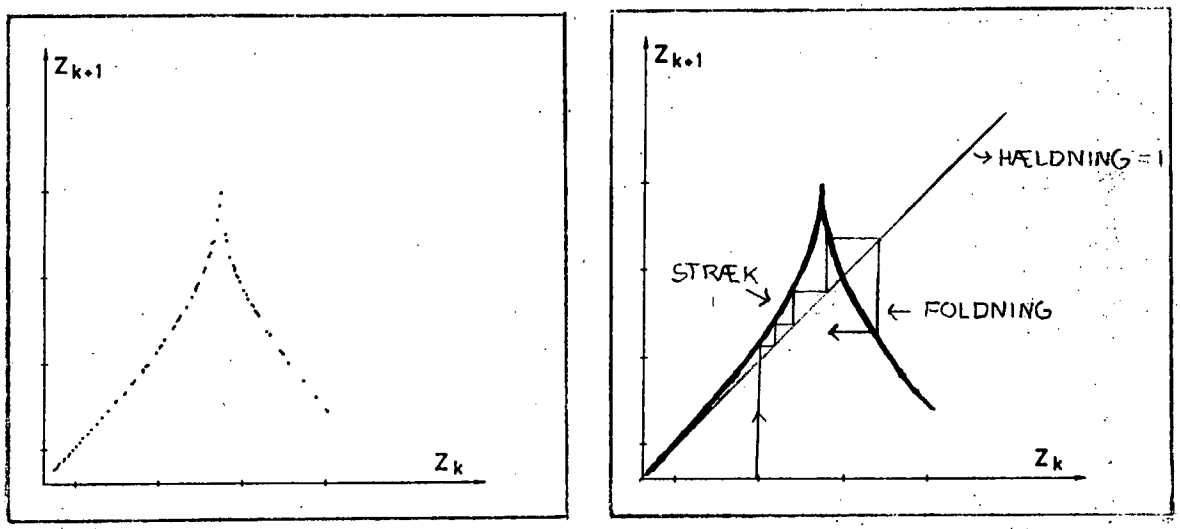
---

[15] Forudsigeligheden er ellers den egenskab, man normalt tillægger deterministiske systemer (i modsætning til stokastiske), men for deterministisk kaos går begrebet "deterministisk" på, at man principielt (men ikke i praksis) kan beregne sig frem til fremtidige tilstande i faserummet.

[16] Modellen er fra 1963, og simulerer cirkulationer i atmosfæren (eller i væske), når denne bliver opvarmet fra neden.
Ligningerne for systemet er implementeret og simuleret i programmet "CTS". En programudskrift findes i appendix II.

For at få et overblik over, hvordan bevægelsen strækkes og foldes, kan man afbilde systemet i et retur-plot (fig. 7).

Fig. 7: Retur-plots af Lorenz-tiltrækkeren.
a) Afbildningen $Z_{k+1}=f(Z_k)$ b) Stræk- og foldningsprocessen.



Figur a er fremkommet ved at afbilde successive maksimum værdier af Z (i.e. Z_{k+1}), som funktion af det foregående maksimum Z_k. Z_{max}-værdien er koordinaten af punkter på Poincaré-snittet med fladen $X \cdot Y - B \cdot Z = 0$ (dvs. $Z' = 0$ i 3. ligning i Lorenz-modellen).[17]
Figur b er den "kontinuerte" tilnærmelse til figur a, her indtegnet med illustration af stræk- og foldningsprocessen.

Venstre del af figur 7a svarer til, at banen starter nær enten P eller P' for derefter at spirallere ud. Bemærk, at Z_{k+1}-værdien altid er større end Z_k-værdien (strækprocessen). I midten er grafen reelt diskontinuert, svarende til et spring i Z-værdien. Når Z-værdien når tilstrækkelig højt op, krydser banen nemlig over (foldningsprocessen) og begynder at spirallere omkring det modsatte ustabile ligevægtspunkt - strækprocessen gentages. Når Z-værdien igen her når en vis størrelse, foldes banen igen og starter endnu en spirallering omkring det

[17] Plottet bygger på Lorenz' eget fra 1963 (s. 139), her kopieret fra Bergé m.fl., 1986, s. 127.

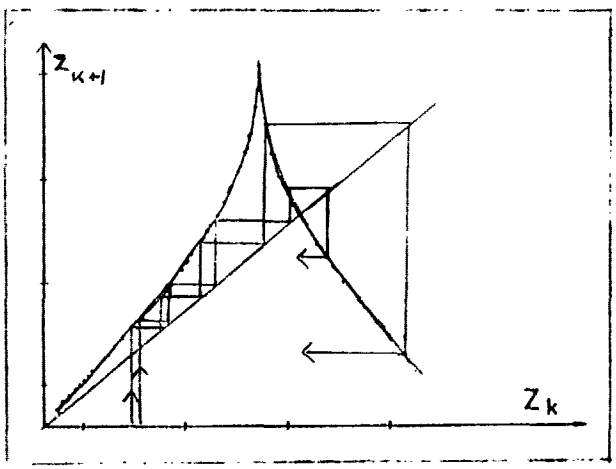
første ligevægtspunkt.

Billedligt talt svarer denne situation til, at kurven efter et vist antal omløb når randen af tiltrækkeren og derfor må foldes tilbage, hvis denne ikke skal overskrides (fig. 7b.).

Udfra figur 7b kan uforudsigelighed på Lorenz-tiltrækkeren let illustreres:

To nærtliggende punkter (baner) på tiltrækkeren (på Z_k-aksen) vil efter et omløb omkring et ligevægtspunkt blive adskilt svarende til hældningen på grafen. Denne hældning er (for de valgte parameterværdier) her altid større end 1 (venstre del af figuren) og stigende, så punkterne bliver hurtigere og hurtigere separeret (strækprocessen). Efterhånden som punkterne når randen af tiltrækkeren, "springer" de over dvs. foldes over og er således klar til omløb om det andet ligevægtspunkt. Under foldningsprocessen bliver punkterne yderligere spredt. Denne proces (stræk-fold-stræk-.. etc.) vil gentage sig, indtil punkterne er adskilt så meget, som grænsen for tiltrækkeren tillader (fig. 8).

Fig. 8: Sensitivitet overfor begyndelsesbetingelserne



Af figur 8 fremgår det, hvorledes en usikkerhed på begyndelsesbetingelserne til løsningskurven spredes (eksponentielt) udover hele definitionsområdet og således hurtigt umuliggør forudsigelse om den fremtidige tilstand af systemet (udover den konstatering, at bevægelsen foregår på tiltrækkeren).

Med andre ord: Har man et kaotisk system, vil dette system

på en uforudsigelig måde udvise forskellige forløb for hver uendelig lille ændring af begyndelsesbetingelserne, man udsætter systemet for. Derfor siges et kaotisk system at være sensitivt overfor begyndelsesbetingelserne.

Denne uforudsigelighed kan man ved hjælp af Liapunov-eksponenterne formulere i mere informationsteoretiske termer.

Eksponenterne er nemlig også et mål for, hvor hurtigt systemet på to kvalitativt forskellige måder mister information.

Den positive Liapunov-eksponent udtrykker den fart hvormed en usikkerhed i begyndelsesbetingelserne vokser.

Eksempelvis har Lorenz-tiltrækkeren på figur 6 en positiv Liapunov-eksponent[18] på 1.33. Udfra formlen i fig. 1 kan vi beregne, hvor langt tid vi kan lokalisere et givent punkt i faserummet. Fastlægges punktet med en begyndelsesnøjagtighed på 10^{-6}, skal vi altså undersøge, hvornår denne unøjagtighed har spredt sig over hele definitionsrummet (dvs. hvornår usikkerheden bliver 1):[19]

$$1 = \Omega \cdot e^{L \cdot t} \qquad \Rightarrow$$

$$t = \frac{1}{L} \cdot \log_2\left(\frac{1}{\Omega}\right) = \frac{1}{1.33} \cdot \log_2\left(\frac{1}{10^{-6}}\right) \approx 15$$

dvs. efter 15 sek.

Med en gennemsnitsomløbstid på 0.5 sek. har man altså

---

[18]) Metoden til beregning af eksponenterne beskrives i afsnit 3.5. Metoden er implementeret i "CTS". Se appendix III.

[19]) I kap. 2 og app. F i Schuster, 1984 gennemgås i detaljer sammenhængen mellem Shannon's informationsbegreb og Liapunov-eksponenterne. Konklusionen er, at:

$$L = \ln(2) \cdot |\overline{\Delta I}|,$$

hvor $\overline{\Delta I}$ er gennemsnitsændringen i information, målt i bit/sek.

Bestemmer man - som vi - Liapunov-eksponenterne v.hj.a. 2-talslogaritmen fremfor den naturlige, som Schuster, er eksponenten og ændringen i information, målt i bit/sek, identiske.

allerede efter ca. 30 omløb[20] fuldstændigt mistet kendskabet til, i hvilken tilstand systemet er. Det eneste, man kan fastslå er, at punktet er et sted på tiltrækkeren. Den lille unøjagtighed i begyndelsesbetingelserne er blevet spredt udover hele tiltrækkeren.

Den negative Liapunov-eksponent udtrykker den fart, hvormed et givet område i faserummet (under indsvingningen) kontraherer og drives ind på tiltrækkeren.[21]

For Lorenz-tiltrækkeren på figur 6 er den negative Liapunov-eksponent lig -21,03. Denne numerisk store værdi betyder, at et punkt udenfor tiltrækkeren meget hurtigt ikke vil være til at skelne fra denne. Dette fremgår tydeligt af fig. 6, hvor indsvingningen stort set er overstået efter én omgang.

3.4 Den kaotiske tiltrækkers dimension

For dissipative systemer gælder det, at volumenet, udspændt af de generaliserede koordinater i faserummet, formindskes som funktion af tiden. Formindskelsen af faserummet behøver dog ikke nødvendigvis at have så simpelt et "henfald" som det eksponentielle, vi kender fra det dæmpede pendul, hvor tiltrækkeren/attraktoren er et fixpunkt.[22] Er pendulet drevet (som torsionspendulet) kan "henfaldet" have et anderledes

---

[20]) Dette kan beregnes lidt smartere, idet $10^{-6} \sim 20$ bits nøjagtighed, så den fremtidige udvikling, kan ikke forudsiges efter

$$\frac{20 \text{ bits}}{1{,}33 \text{ bits/s}} = 15{,}0 \text{ s} \sim 30 \text{ omløb}$$

[21]) Se endvidere afsnit 3.4

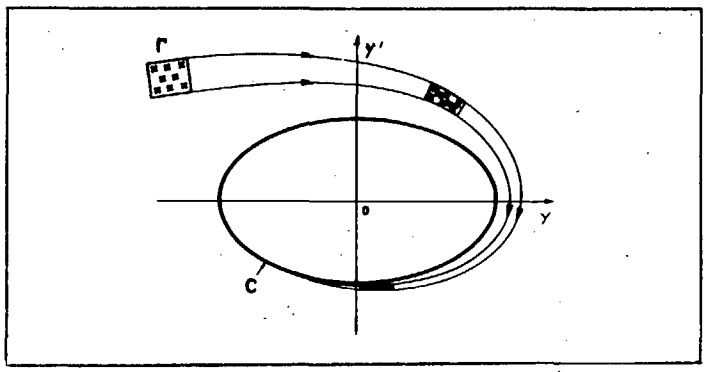
[22]) Se elevheftet "Noter til...", IMFUFA tekst 179b, 1989, fig. 6 og 12.

kompliceret forløb.[23]

For drevne dissipative systemer gælder det, at de kan indstille sig i en situation, hvor bevægelsen er periodisk. Banen i faseplanen (y,y') bliver da en grænsecykel.

Starter vi et sådant system med begyndelsesbetingelser, der optager et areal Γ i faseplanen, vil dette areal formindskes p.g.a. gnidningen og tilsidst ende på den periodiske tiltrækker C. Den 2-dimensionale plan skrumper ind til et 1-dimensionalt liniestykke på kurven C (fig. 9).

Fig 9: Sammentrækning af areal under indsvingning.[24]



I begyndelsen (hvor bevægelsen ikke er på tiltrækkeren) kræves der altså to dimensioner til karakterisering af tilstanden af det dynamiske system. Efter indsvingning, dvs. når tiltrækkeren er nået,[25] kræves der kun én dimension: En koordinat langs kurven C er tilstrækkelig til fastlæggelsen af tilstanden i faseplanen. Dette illustrerer det generelle

---

[23]) Sammentrækningen af volumenet i faserummet er ikke nødvendigvis synonymt med en formindskelse af alle "længder" men kan også forekomme ved formindskelse af nogle "længder", samtidigt med at andre "længder" vokser (dog med mindre hastighed). Var dette ikke tilfældet, kunne to punkter (baner) i faserummet ikke divergere i et dissipativt system.

[24]) Figuren er taget fra Bergé m.fl., 1986, s. 113.

[25]) I teorien er tiltrækkeren grænsen for sammentrækningen for tiden gående mod uendelig. I praksis "nås" den dog efter endelig tid, idet man kan betragte tiltrækkeren som "nået", når støjen er af samme størrelsesorden som den teoretiske afstand, punktet er fra tiltrækkeren.

princip, nemlig at dimensionen af en tiltrækker altid er mindre end dimensionen af faserummet.

Mere kvantitativt formuleret må det gælde, at den relative ændring i volumenet er lig

$$(2) \qquad \frac{dV}{dt} = V \cdot \sum_{i=1}^{d} \left(\frac{\partial X'_i}{\partial X_i} \right)$$

hvor X_i er det i'te komponent i faserummet $\mathbb{R}^d$. For dissipative systemer er denne rate som sagt negativ og måler graden af sammentrækningen. For tiden gående mod uendelig - når bevægelsen er på tiltrækkeren - må volumenet af begyndelsesbetingelserne[26] således blive lig 0: Hvilket er det samme som, at volumenet af tiltrækkeren er lig 0.

En nødvendig, men ikke tilstrækkelig, betingelse for, at et autonomt dynamisk system kan udvise kaos er, at faserummet, hvori bevægelsen løber, mindst har tre dimensioner.[27] Sammenholdt med, at dimensionen af en (evt. kaotisk) tiltrækker skal være mindre end antallet af dimensioner i faserummet, betyder, at et system med 3 variable (som Lorenz-ligningerne) - hvis

---

[26]) Ved begyndelsesbetingelser forstås her et givent volumen i faserummet.

[27]) En bevægelse på en 2-dimensional kompakt mangfoldighed kan godt være yderst kompliceret, men et af kriterierne for kaos kan bevægelsen aldrig opfylde, nemlig kravet om, at to nærtliggende baner i faserummet (planen) skal divergere eksponentielt fra hinanden. En ufravigelig konsekvens af den deterministiske hypotese omkring dynamiske systemers natur er nemlig, at to baner i faserummet aldrig vil krydse hinanden (undtagen i et evt. fixpunkt). En evt. skæring mellem to kurver ville ellers kunne føre til vidt forskellige udviklingsforløb, som ikke ville kunne beskrives udfra en endelig række af ordinære differentialligninger. I et flow på en 2-dimensional kompakt mangfoldighed er løsningskurvernes mulighed for divergens således kraftigt begrænset af, at bevægelsen skal foregå på mangfoldigheden (og uden at krydse hinanden).

I et topologisk teorem af M. Peixoto i 1962 udleder han pointen i ovenstående på anden vis: I dette står der, at i et 2 dimensionalt faserum er der kun én bevægelse (udover bevægelsen mod et fixpunkt og den periodiske) mulig, nemlig den kvasiperiodiske (altså ikke den kaotiske). Denne type bevægelse er dog strukturel ustabil, idet en arbitrær lille perturbation af de styrende differentialligninger vil medføre frekvenslåsning og dermed en tilbagevenden til en periodisk bevægelse (Thompson og Stewart, 1986, s. 64). Se endvidere afsnit 3.2.

det overhovedet har en kaotisk tiltrækker - må have en dimension mellem 2 og 3. En sådan ikke-heltallig dimension kaldes en fraktal dimension. Et system, der har en fraktal dimension - en fraktal struktur - er selvsimilær, dvs. at man ved igen og igen at forstørre dele af dens tiltrækker kan genfinde den samme struktur. Finder man en sådan sammenhæng ved en afbildning af en serie modeldata eller eksperimentielle data, har man altså et indicium for, at systemet er kaotisk.

Spektret af Liapunov-eksponenter er snævert knyttet til den fraktale dimension af den kaotiske tiltrækker. En (af flere) metode (-r) til beregning af denne er informationsdimensionen d_I. Den er foreslået lig:[28]

$$(3) \qquad d_I = j + \frac{\sum_{i=1}^{j} L_i}{|L_{j+1}|},$$

hvor j er defineret af[29]

$$\sum_{i=1}^{j} L_i > 0 \quad \text{og} \quad \sum_{i=1}^{j+1} L_i < 0.$$

Beregningen af dimensionen kræver altså kendskab til hele spektret af Liapunov-eksponenter.

Eksempelvis er vores beregnede fraktale dimension af Lorenztiltrækkeren på figur 6 (for P=10, R=28 og B=8/3) lig:

$$d_I = 2 + \frac{1.33 - 0.02}{|-21.03|} = 2.06.$$

Det bekræfter, at Lorenz-ligningerne modellerer et dissipativt system, og at dette system har en kaotisk tiltrækker.

Udfra ligning (2) bliver raten, hvormed volumenet ændres, lig:[30]

---

[28] Wolf m. fl. 1985, s. 289.

[29] Liapunov-eksponenterne er jvf. afsnit 3.2 ordnet således, at $L_1 > L_2 > L_3 > \ldots > L_d$. j er da det største heltal, for hvilket ulighederne er opfyldt.

[30] Sporet af Jacobi-matricen for systemet

$$\text{tr } J = \frac{\partial X'}{\partial X} + \frac{\partial Y'}{\partial Y} + \frac{\partial Z'}{\partial Z} = -(P + B + 1) = -13.\overline{66},$$

hvilket svarer til, at volumenet af faserummet er reduceret med $e^{-13.67} \sim 10^{-6}$, efter en tidsenhed (typisk et omløb omkring P eller P', se fig. 6), hvilket er en kraftig volumensammentrækning.

Raten for volumensammentrækningen kan også beregnes udfra Liapunov-eksponenterne. Udfra ligning (1) kan man se, at den tidslige udvikling af den tidligere betragtede kugles/ellipsoides halvakser ændres med en faktor $\exp_2(L_i \cdot t)$. Sammenlagt for et 3-dimensionalt system får vi $\exp_2((L_1+L_2+L_3)\cdot t)$, hvilket for Lorenz-ligningerne også giver en volumensammentrækningsrate på:

$$\exp_2(1.33-0.02-21.03) \simeq 10^{-6}.$$

3.5 En numerisk metode til beregning af Liapunov-spektre.[31]

I afsnit 3.1 anskuedes Liapunov-eksponenterne udfra, hvorledes akserne i en d-dimensional sfære udvikledes for $t \to \infty$. Denne procedure med at lave en lille forskydning i begyndelsesbetingelserne i hver retning og så undersøge, hvorledes disse ændrer sig under udviklingen af de ikke-linære differentialligninger, er dog ikke uproblematisk. Den kræver nemlig, at man med sikkerhed ikke forskyder mere, end at de forskudte begyndelsesbetingelser stadig befinder sig på den samme tiltrækker. Dette kræver enten et indgående kendskab til tiltrækkerens struktur og udstrækning, så man løbende kan

---

[31]) Metoden har vi fundet i Wolf. m.fl., 1985, s. 290-292, men er dog også (meget) løseligt beskrevet i såvel Bergé, 1986, Schuster, 1988 og "Directions in chaos vol II", 1988. Metoden må som sådan betragtes som værende alment accepteret.

Metoden er dog kun beskrevet anvendt på autonome systemer, hvor vi også har fundet fin konvergens (se fx. fig. 11 og 12) helt i overenstemmelse med Wolf's resultater.

Vi har dog haft problemer med at få metoden til at virke i overensstemmelse med teorien for ikke-autonome systemer som torsionspendulet. Mere herom senere.

ændre forskydningens størrelse, eller en computer, der regner med så stor nøjagtighed, at en tilstækkelig lille forskydning kan foretages. Alligevel har man ingen garanti for, at forskydningen - fx. efter 100 omløb,[32] som der kræves, hvis en ordentlig konvergens skal opnås - stadig er tilstrækkelig lille. For at komme udover dette problem benyttes de lineariserede ligninger. Per definition svarer en forskydning defineret i det lineære system altid til en infinitesimal forskydning af trajektorien.

Proceduren til bestemmelse af Liapunov-eksponenterne er derfor som følger:

Samtidigt med, at man integrerer det d-dimensionale ikke-lineære ligningssystem (der er sat igang med begyndelsesbetingelser $(x_1^0, x_2^0, \ldots\ldots, x_d^0)$, som er på tiltrækkeren[33]), integreres sættet af de d lineariserede ligninger for d forskellige begyndelsesbetingelser. De d forskellige begyndelsesbetingelser til de lineariserede ligninger skal udgøre et arbitrært orienteret ortonomeret sæt af basisvektorer - svarende til den føromtalte lille kugle, vi vil lade deformere. Nu behøver kuglen blot ikke længere at være lille, da lineariseringen overflødiggør dette krav. Efter et givent tidsinterval (se note 32) beregnes, hvorledes disse vektorer transformeres - svarende til den føromtalte ellipsoide. Herudaf kan man v.hj.a. ligning (1) beregne Liapunov-eksponenterne.

Udfra Jacobi-matricen J (af en $d \times d$ matrix) af de ikke-lineære ligninger udledes de lineariserede ligninger omkring $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_d^0)$:

$$(4) \qquad \bar{R}_d = \begin{pmatrix} r_{d1} \\ r_{d2} \\ \cdot \\ \cdot \\ r_{dd} \end{pmatrix} = J \cdot \bar{V}_d = J \cdot \begin{pmatrix} V_{d1} \\ V_{d2} \\ \cdot \\ \cdot \\ V_{dd} \end{pmatrix}$$

---

[32] Kender man ikke gennemsnitsomløbstiden, kan en karakteristisk tid enten være den gennemsnitstid, der er mellem to skæringer af et Poincaré-snit, eller den dominerende frekvens i et power-spektrum.

[33] Svarende til et punkt i faserummet.

hvor $\bar{V}_d$ er én basisvektor og $\bar{R}_d$ er billedet af basisvektoren.

Under integrationen vil basisvektorerne således ændre såvel størrelse som retning. Retningen af hver vektor vil pga. produktet med J (for et kaotisk system) efterhånden orientere sig ind efter den retning, hvor ændringen vokser mest (største positive Liapunov-eksponent).

Problemerne omkring vektorernes størrelse (de må ikke overskride computerens begrænsning) samt sammenfaldet af orienteringen af vektorerne (vi ønsker at bestemme hele Liapunovspekret), kan løses v.hj.a. en Gram-Schmidt reortonormaliserings (GSR) procedure.

Under integrationen af de lineære ligninger bliver de ortogonale basisvektorer $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \ldots, \bar{V}_d$ altså transformeret til sættet af vektorer $\bar{R}_1, \bar{R}_2, \ldots, \bar{R}_d$.

For at begrænse størrelsen af dem og bevare dem ortogonale normaliserer og reortogonaliserer GSR proceduren dem på følgende måde:

(5)
$$\bar{V}'_1 = \frac{\bar{R}_1}{||\bar{R}_1||},$$

$$\bar{V}'_2 = \frac{\bar{R}_2 - \langle \bar{R}_2 \cdot \bar{V}'_1 \rangle \cdot \bar{V}'_1}{||\bar{R}_2 - \langle \bar{R}_2 \cdot \bar{V}'_1 \rangle \cdot \bar{V}'_1||},$$

$$\vdots$$

$$\bar{V}'_d = \frac{\bar{R}_d - \langle \bar{R}_d \cdot \bar{V}'_{d-1} \rangle \cdot \bar{V}'_{d-1} - \ldots\ldots - \langle \bar{R}_d \cdot \bar{V}'_1 \rangle \cdot \bar{V}'_1}{||\bar{R}_d - \langle \bar{R}_d \cdot \bar{V}'_{d-1} \rangle \cdot \bar{V}'_{d-1} - \ldots\ldots - \langle \bar{R}_d \cdot \bar{V}'_1 \rangle \cdot \bar{V}'_1||},$$

hvor tegnet $\langle \ldots \rangle$ repræsenterer skalarproduktet. Vektorerne $\bar{V}'_1, \bar{V}'_2, \ldots, \bar{V}'_d$ er nu de nye basisvektorer, der benyttes under den videre integration.

Det er ikke afgørende, hvor tit denne reortogonalisering foretages. Typisk bruges en tid svarende til bevægelsens periode (se note 32).

Af ligningerne (5) ses, at GSR ikke påvirker den første vektors ($\bar{R}_1$) retning, og denne vektor vil rette sig ind efter den retning, hvor systemet vokser hurtigst. Længden af denne vektor er (jvf. ligning (1)) proportional med $\exp_2(L_1 \cdot t)$. Udfra dette beregnes den største Liapunov-eksponent L_1.

Den anden vektor $\bar{R}_2$ får fjernet sin retning langs $\bar{R}_1$, og bliver så normaliseret. På denne vis undgår man, at også denne vektor retter sig ind mod den hurtigst voksende retning. På den anden side kan man ikke - pga. måden hvorpå vi ændrer orienteringen - være sikker på, at den vil rette sig mod den næstmest voksende retning. Derimod vil arealet udspændt af vektor $\bar{V}'_1$ og $\bar{V}'_2$ være det samme som arealet udspændt af $\bar{R}_1$ og $\bar{R}_2$. Under integrationen vil arealet, defineret af disse vektorer, kontinuert rette sig ind mod den to-dimensionale delmængde af rummet, hvor der sker den hurtigst voksende ændring. Dette areal er proportionalt med $\exp_2((L_1+L_2)t)$. Sammenholdt med ovenstående beregning af L_1 kan L_2 nu beregnes, og således har vi bestemt den næststørste Liapunoveksponent L_2. Denne procedure kan så gentages det antal gange, som faserummet har dimensioner.

I praksis, da $\bar{V}'_1$ og $\bar{V}'_2$ er ortogonale, er det dog hurtigere blot at beregne L_2 direkte udfra ændringsraten af projektionen af $\bar{R}_2$ på $\bar{V}'_2$ - etc. for højere dimensioner.

Således opnås en korrekt opdatering af, med hvilken rate der sker ændringer i hver dimension, og hermed kan hele spektret af Liapunov-eksponenter - ordnet fra den største til den mindste - bestemmes.

3.6 Implementering i "CTS".

Som illustration af ovenstående procedure anvendes igen Lorenz ligningerne. De ikke-lineære ligninger indskrives med systemdynamisk terminologi (rate- og levelvariable) i rate

området:[34]

$$\left.\begin{aligned} X' &= P\cdot(Y-X) \\ Y' &= X\cdot(R-Z) - Y \\ Z' &= X\cdot Y - B\cdot Z \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} RA(1) &= P\cdot(LE(2)-LE(1)) \\ RA(2) &= LE(1)\cdot(R-LE(3))-LE(2) \\ RA(3) &= LE(1)\cdot LE(2)-B\cdot LE(3), \end{cases}$$

hvor LE(1)=X, LE(2)=Y, LE(3)=Z.

Jacobi matricen for ligningerne er:

$$J = \begin{vmatrix} -P & P & 0 \\ R-Z & -1 & -X \\ Y & X & -B \end{vmatrix}$$

Da systemet er tre-dimensionalt, kræves tre basisvektorer $\bar{V}_1$, $\bar{V}_2$ og $\bar{V}_3$, hvilket svarer til 3 sæt af lineariserede ligninger:

$$\bar{R}_1 = J\cdot\begin{pmatrix} V_{1x} \\ V_{1y} \\ V_{1z} \end{pmatrix}, \quad \bar{R}_2 = J\cdot\begin{pmatrix} V_{2x} \\ V_{2y} \\ V_{2z} \end{pmatrix}, \quad \bar{R}_3 = J\cdot\begin{pmatrix} V_{3x} \\ V_{3y} \\ V_{3z} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\bar{R}_1 = J\cdot\begin{pmatrix} LE(4) \\ LE(5) \\ LE(6) \end{pmatrix}, \quad \bar{R}_2 = J\cdot\begin{pmatrix} LE(7) \\ LE(8) \\ LE(9) \end{pmatrix}, \quad \bar{R}_3 = J\cdot\begin{pmatrix} LE(10) \\ LE(11) \\ LE(12) \end{pmatrix}.[35]$$

De <u>tre første</u> lineariserede (rate-) ligninger bliver da:

$$\bar{R}_1 = \begin{cases} RA(4) &= P\cdot(LE(5)-LE(4)) \\ RA(5) &= (R-LE(3))\cdot LE(4)-LE(5)-LE(1)\cdot LE(6) \\ RA(6) &= LE(2)\cdot LE(4)+LE(1)\cdot LE(5)-B\cdot LE(6) \end{cases}$$

Ved start af integrationen sættes basisvektorerne lig:[36]

---

[34]) Levelvariablerne LE(d), er bevægelsens variable. Raterne RA(d), er de tidsafledede af de variable.
Terminologien er introduceret i Christiansen, 1978. Se endvidere kap. 7.

[35]) Levelindeksene 4 til 12 svarer til de benyttede i modelleringen. Vi starter med 4, idet rateligningerne for de 3 ikke-lineære ligninger har indeks 1 til 3.

[36]) Level 1, 2 og 3 startes som sagt på værdier, der ligger på tiltrækkeren.

$$\bar{V}_1 = \begin{pmatrix} LE(4) \\ LE(5) \\ LE(6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{V}_2 = \begin{pmatrix} LE(7) \\ LE(8) \\ LE(9) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{V}_3 = \begin{pmatrix} LE(10) \\ LE(11) \\ LE(12) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Under integrationen transformeres vektorerne, og efter hver periode (her 0,5 sek) reortogonaliseres de v.hj.a. GSR proceduren.[37]

Udfra længden af de transformerede basisvektorer projiceret ind på de nye ortogonale retninger ($\bar{V}'_1$, $\bar{V}'_2$ og $\bar{V}'_3$, se ligningerne (5)), beregnes de "øjeblikkelige" Liapunov-eksponenter:

$$\begin{aligned} L_1 &= \log_2 \|\bar{R}_1\| \\ L_2 &= \log_2 |\langle \bar{R}_2 \cdot \bar{V}'_2 \rangle| \\ L_3 &= \log_2 |\langle \bar{R}_3 \cdot \bar{V}'_3 \rangle| \end{aligned}$$

For tiden gående mod uendelig (i praksis nogle hundrede perioder) midler man og finder de konvergerede værdier:

$$L_1 = \frac{1}{t} \cdot \Sigma_n \log_2 \|\bar{R}_1\|_n \text{ , etc.}$$

I praksis regner man Liapunov-eksponenterne for værende konvergerede, når nul-eksponenten (-rne) er et par størrelsesordner mindre end den mindste positive eksponent.[38]

Den (mest) negative eksponent er den eksponent, der konvergerer hurtigst, idet den repræsenterer den vedvarende bevægelse mod tiltrækkeren. Som regel er den konvergeret efter få omløb.

Den positive eksponent og nul-eksponenten konvergerer betydeligt langsommere og skal bestemmes efter flere hundrede omløb.

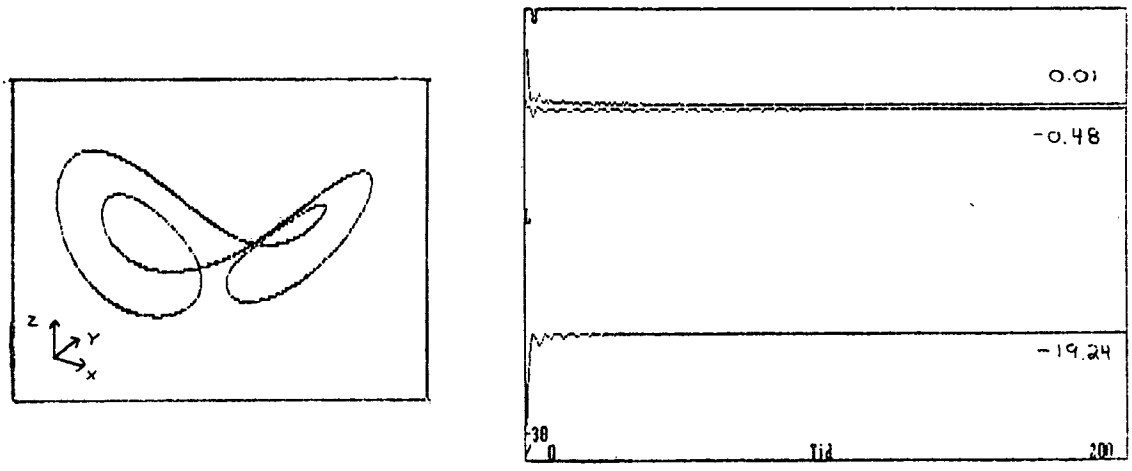
For Lorenz tiltrækkeren fik vi bla. følgende resultater:

---

[37] Se den konkrete implementering i appendix III.

[38] Wolf m.fl., 1985, s. 291.

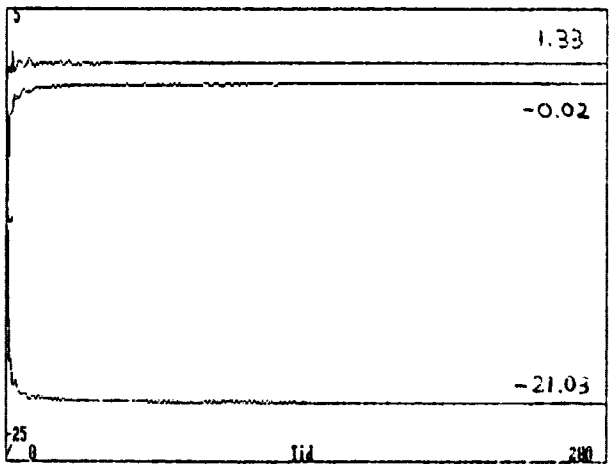
Fig. 10: Bestemmelse af Liapunov-spektret for en periodisk Lorenz tiltrækker (P=10, R=166, og B=8/3).



Af figur 10 ses, at Liapunov-eksponenterne som forventet for et 3-dimensionalt periodisk system henholdsvis konvergerer mod en nul- og to negative eksponenter.

På figur 11 ser vi ligeledes en hurtig konvergens, hen mod det karakteristiske for en kaotisk bevægelse, nemlig en positiv, en nul- og en negativ eksponent. Bemærk, at såvel i figur 10 som i figur 11 er det den (mest) negative eksponent, der konvergerer hurtigst.

Fig. 11: Bestemmelse af Liapunov-spektret for en kaotisk Lorenz-tiltrækker (P=10, R=28 og B=8/3) svarende til fig. 6.



Vi har prøvet metoden for andre autonome systemer og i alle tilfælde fundet både de forventede fortegn og sikker konvergens. Indtil videre må vi således konkludere, at metoden, ihvertfald for autonome, dissipative systemer, er pålidelig.

3.7 Liapunov-spektre for torsionspendulet.

Torsionspendulet er et to-dimensionalt dissipativt, ikke-autonomt system med *én* frihedsgrad og to generaliserede koordinater: U - udsvinget (LE(1)), L - impulsmomentet (LE(2)).[39]

Tiden T fastlægger motorpositionen P, der er uafhængig af de øvrige koordinater.

Modellen for torsionspendulet beskrives ved to 1. ordens differentialligninger:[40]

$$RA(1) = \frac{LE(2)}{ITOT}$$

$$RA(2) = K\cdot(A\cdot\sin(Wmot\cdot LE(0)) - LE(1)) + KRMO\cdot\sin(LE(1)) - ccc\cdot LE(2) - N\cdot\tanh(5\cdot RA(1))$$

For at give fysisk mening, foretager vi en koordinattransformation, så ligningerne får samme dimension, inden vi linearisérer. Dette gøres ved at indføre to nye levels:

$$X_1 = K\cdot U \quad \text{og}$$

$$X_2 = L/\sqrt{ITOT} \quad \text{(hvor ITOT er inertimomentet)},$$

der midlertidigt indføres i de første to rateligninger. Udfra

---

[39]) Modellen for torsionspendulet (samt implementeringen i CTS) diskuteres i kap. 2 og 5 og gennemgåes grundigt i elevheftet "Noter til...", IMFUFA tekst 179b, 1989. Programmet til Liapunov-eksponent bestemmelsen for torsionspendulet findes i appendix III.

[40]) Hvor LE(0)=tiden, P=A · sin(Wmot · LE(0)), K fjederkonstanten, A motoramplituden, Wmot motorvinkelhastigheden, KRMO kraftmomentet fra loddet, ccc=dæmpning/inertimoment og N faststofgnidningskoefficienten.

Jacobi-matricen af disse udledes så de lineariserede ligninger (her de første to):

$$RA(3) = LE(4) \cdot \sqrt{\frac{K}{ITOT}}$$

$$RA(4) = LE(3) \cdot \left[\frac{KRMO}{\sqrt{ITOT \cdot K}} \cos(LE(1)) - \sqrt{\frac{K}{ITOT}} \right]$$

$$+ LE(4) \cdot \left[ccc - \frac{5 \cdot N}{ITOT} \cdot \frac{1}{\cosh^2(5 \cdot RA(1))} \right]$$

Torsionspendulets bevægelse betragtes altså som værende i et to-dimensionalt faserum - en plan - og som sådan skulle vi ikke (jf. afsnit 3.4) kunne finde kaotiske bevægelser. Planen, hvor bevægelsen foregår på, opfylder dog ikke den deterministiske hypotese, hvis konsekvens er, at to baner i faserummet aldrig krydser hinanden (se note 27). Når man betragter torsionspendulets faserum som en plan, må trajektorierne gerne krydse hinanden,[41] og dermed bliver divergens mellem to baner mulig, og en kaotisk bevægelse kan forekomme.

Under en kaotisk bevægelse må Liapunov-spektret for torsionspendulet have netop én positiv eksponent. Da systemet er to-dimensionalt, og summen af alle eksponenter skal være negativ, må den anden eksponent være negativ og numerisk større end den positive.[42]

For de kaotiske situationer i begge grøfter - som i kap. 5 er vist på figur 9a og i den højre grøft på figur 10a - fik vi

---

[41]) Vi mister dog ikke determinismen ved disse betragtninger, idet motorpositionen (og retningen), i et kryds mellem to baner, nødvendigvis må være forskellige og således fastlægge det videre forløb.

[42]) Betragter vi torsionspendulet i et 3-dimentionalt faserum, med motorpositionen som tredie dimension, må eksponenten langs denne "retning" være nul.

følgende bestemmelser af Liapunov-eksponenterne:[43]

Fig. 12: Bestemmelse af Liapunov eksponenterne for torsions-pendulet - kaos i begge grøfter (D=1,737V, Q=6.2V).

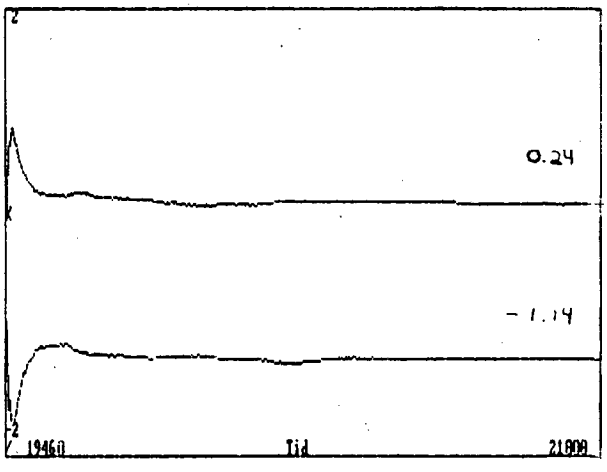
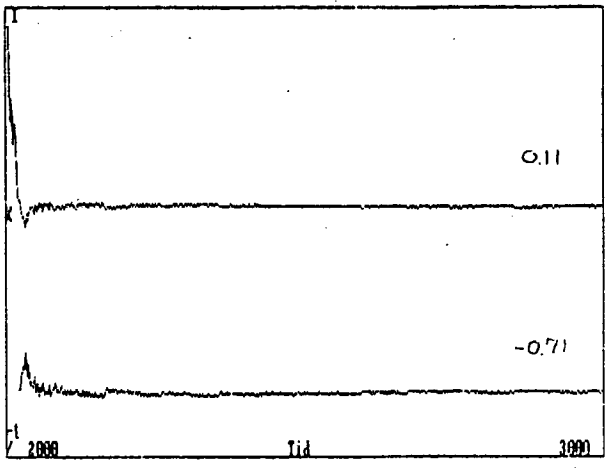


Fig. 13: Bestemmelse af Liapunov eksponenterne for torsions-pendulet - kaos i højre grøft (D=1.766 V, Q=6.2 V).



Bevægelsen hørende til figur 13 er netop den, hvor vi finder fraktale Poincaré-snit.[44] Informations-dimensionen af denne bliver, jvf. ligning 3:

---

[43]) For en periodisk bevægelse er det hverken lykkedes os at finde entydig konvergens eller fortegn af eksponenterne. Dette tyder muligvis på, at der for ikke-autonome systemer kræves en positiv eksponent, for at metoden virker. Umiddelbart finder vi det dog besynderligt, idet vi for de autonome systemer fandt metoden velegnet i alle situationer? Det kræver en nærmere undersøgelse, som vi dog ikke skal foretage i denne sammenhæng. Det vigtigste er dog også, at metoden kan detektere kaos. Har vi en kaotisk situation, giver metoden altid konvergens til *én* positiv eksponent.

[44]) Se kap. 5 figur 13a, b og c.

$$d_t = 1 + \frac{0.112}{|-0.713|} \simeq 1.16$$

For bevægelsen på figur 12 er dimensionen $d_t \simeq 1.21$.

Den numerisk set lille negative eksponent i begge kørsler viser, at systemet er lang tid om at indsvinge (hvilket stemmer overens med såvel simulationer og iagttagelser af det virkelige pendul).

Faserummet skrumper (i fig. 13) med en faktor:

$$\exp_2(L_1 + L_2) = \exp_2(0.112 - 0.713) \simeq 0.7$$

Systemet mister altså kun langsomt information.

Starter vi med et begyndelsespunkt fastlagt med en nøjagtighed på 10^{-4}, vil vi altså kun kunne sige noget om tilstanden i faserummet i ca.:

$$t = \frac{1}{L_1} \cdot \log_2\left(\frac{1}{\Omega}\right) = \frac{1}{0.112} \cdot \log_2\left(\frac{1}{10^{-4}}\right) \simeq 178 \text{ sek.}$$

Herefter er "nøjagtigheden" spredt over hele tiltrækkeren.

3.8 Opsummering

Er det muligt at bestemme en bevægelses Liapunov-eksponenter, har man mange oplysninger om systemet: Den fraktale dimension (af en tiltrækker) kan bestemmes, man kan finde raten, hvormed faserummet skrumper, og man kan sige noget om, hvor hurtigt systemet mister information. Alt dette får man alene af Liapunov-eksponentsbestemmelsen. Til kortlæggelsen af dynamiske systemers overordnede adfærd, er ovenstående metode altså yderst slagkraftig. Specielt er den velegnet til detektion af kaos, idet vi her får et kvantitativt mål for dets eksistens.

Vi har ved fundet af den positive eksponent for torsionspendulet kvantitativt bevist, at dette system kan udvise kaos. I de næste kapitler, får vi (computer eksperimentelle) kvalitative indicier for kaos.

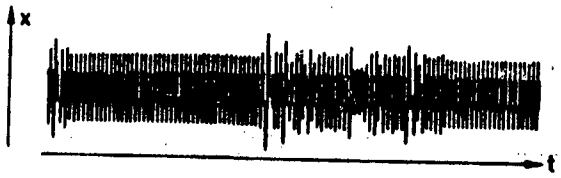
KAPITEL 4
INTERMITTENS

Indledning

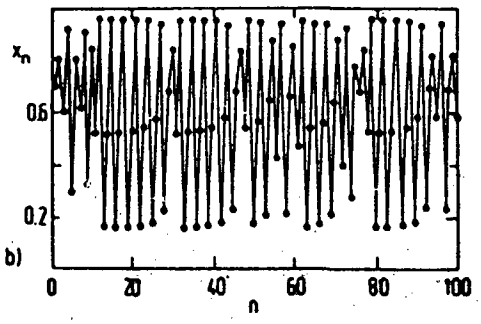
Under studiet af kaosfænomener har man bl.a. tilstræbt at kortlægge (de) mulige måder et dissipativt system kan gå fra orden til kaos på. Den indtil dato nok bedst undersøgte af de mindst 3 kendte veje er gennem gentagen periodefordobling, hvor systemet undergår en uendelig kaskade af pitchfork bifurkationer (se App. I).

En anden kendt rute er gennem intermittens, hvor en stabil periodisk løsning (en stabil grænsecykel) bliver ustabil og forårsager derved et fænomen, som tilsyneladende ser periodisk ud, men ikke er det. Nedenfor (fig. 1) er fænomenets karakteristiske udseende gengivet for 3 forskellige systemer.

Fig. 1: 3 intermittente tidsserier.

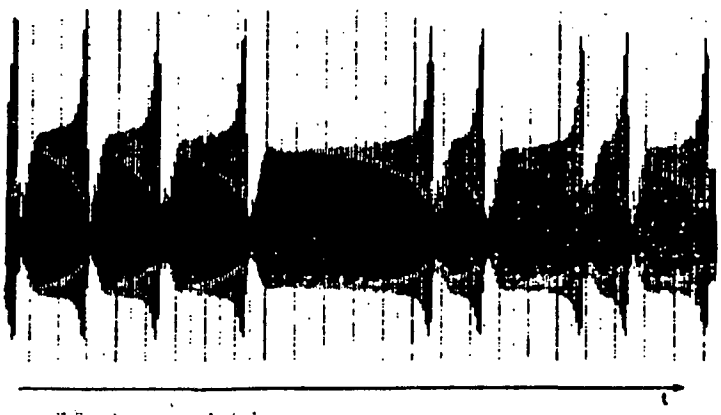


a) Lorenzmodellen



b) Logistisk afbildning:

$$X_{n+1} = rX_n(1-X_n)$$



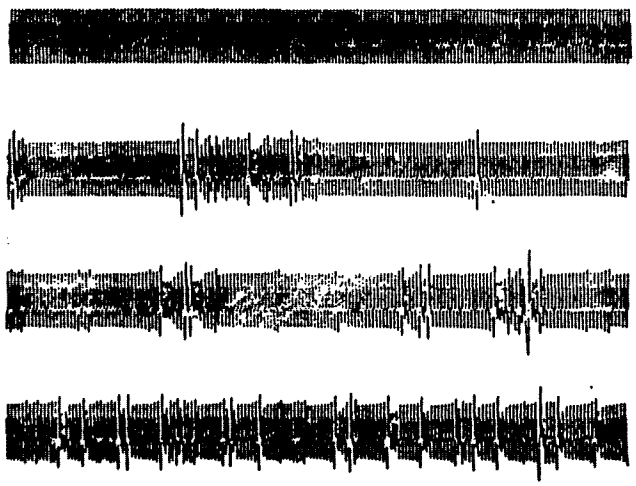
c) RB-konvektion

Som man kan se af figuren bliver de periodisk udseende tidsserier fra tid til anden afbrudt af nogle irregulære sekvenser. Disse vil i det følgende blive betegnet med deres engelske navn: 'bursts'. De regulære sekvenser kaldes laminare faser.

Fig. 1a) afbilder en af Lorenz modellens 3 variable som funktion af tiden, mens fig. 1b) afbilder den variable X som funktion af n. Begge disse modellers intermittente forløb er funderet i en samme årsag. Vi vil kalde det type I - intermittens. Fig. 1c) er en anden slags. Det er såkaldt type III intermittens. Der eksisterer ialt 3 typer, hvis oprindelse hænger på de mulige måder, hvorpå en grænsecykel kan bifurkere. Dette uddybes i afsnit 4.1.

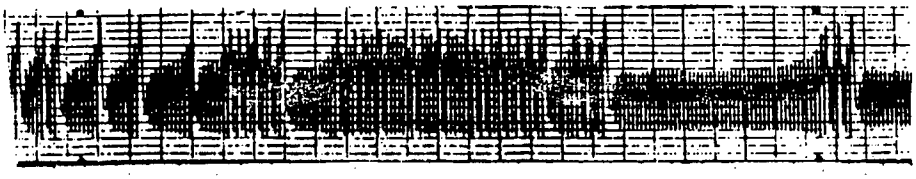
Burstfænomenet viser sig at afhænge af bifurkationsparameteren på følgende måde: De optræder aperiodisk i et givet sample og stiger i antal i takt med parameterens afstand til bifurkationsværdien (se fig. 2). Derimod øges varigheden af de enkelte burst ikke, når parameteren ændres. Men de enkelte burst i et sample er dog ikke konstante i varighed.

Fig. 2: Antallet af burst stiger med parameteren.
(Signaler fra Lorenz modellen. Schuster, 1988)



En af grundene til, at vi har medtaget et kapitel om intermittens, er følgende analoge sampling af torsionspendulet (det viste er et uddrag af en flere timer lang tidsserie. Den samlede kørsel er vist i fig. 3, kap. 5.1):

Fig. 3: Analog kørsel af torsionspendulet.



Det ses, at signalet nærmest til forveksling ligner et af de i fig. 2 viste tidsserier. Vi har desuden fundet noget intermittenslignende i modellen for torsionspendulet. Disse kørsler bliver diskuteret i afsn. 4.5 mhp. typebestemmelse.

En fyldig beskrivelse af intermittens fænomenet omfatter flere aspekter. Vi giver i afsn. 4.1 en redegørelse for de laminare fasers udseende. Det viser sig muligt at beregne de laminare fasers gennemsnitlige varighed. Om dette gør vi nogle bemærkninger i afsn. 4.2. Der er desuden udført nogle undersøgelser over, hvorledes et intermittent systems positive Liapunoveksponent afhænger af bifurkationsparameteren i konkrete systemer. Disse resultater fremlægges i afsn. 4.3. Endelig giver vi i afsn. 4.4 en antydning af, hvorledes en løsning kan vende tilbage til den laminare fase efter at have været i et burst område.

I alle afsnit koncentreres beskrivelserne til type I intermittens - og til dels type III, hvorimod omtale af type II af flere grunde er stærkt nedtonet. Dels har vi hverken eksperimentelt eller i modellen for torsionspendulet observeret type II, som iøvrigt kræver, at systemets faserum er lokalt arealudvidende. Dels er beskrivelsen af denne type umådelig teknisk kompliceret.

4.1 Beskrivelse af de laminare faser

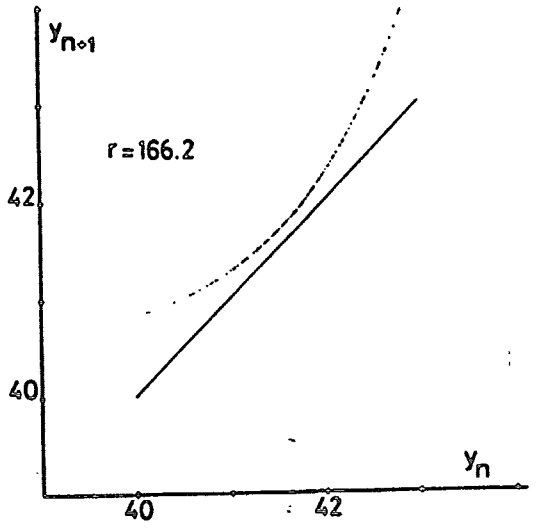
Indledningsvis ser vi på den tidligere omtalte Lorenz model (jvf. kap. 2 og 3):

$$(1) \qquad \begin{cases} \dot{x} = P(y - x) \\ \dot{y} = Rx - y - xz \\ \dot{z} = -Bz + xy \end{cases}$$

Når bifurkationsparameteren R = 166 vil systemet besidde en globalt stabil grænsecykel. Denne mister sin stabilitet, når $R \approx 166.07$: Systemet bifurkerer i denne kritiske værdi, R_c.

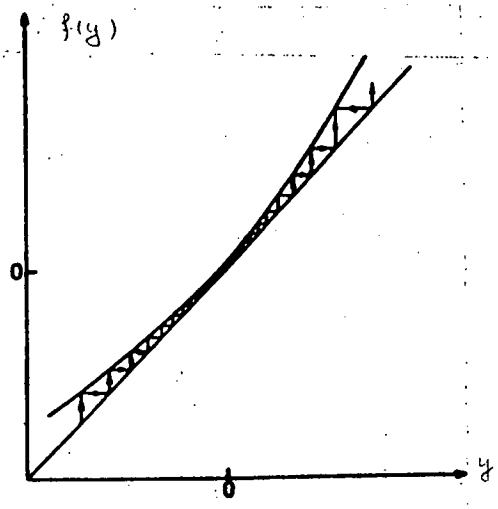
Man kan under en numerisk integration af (1) lagre y-værdierne hver gang den betragtede løsningskurve skærer planen x=0 (et Poincaré snit) fra samme side. Afbildes de opsamlede y-værdier i et returplot (dvs. en y-værdi afbildes som funktion af den foregående) fås følgende figur (for R=166.1):

Fig. 4: Returplot af y-variablen i Lorenz modellen.



Det er dog kun punkter beliggende i laminare faser, der er medtaget på figuren. Man ser, at alle punkterne tilsammen udgør et kurvestykke, der smyger sig op ad identiteten $y_n = y_{n+1}$. Sammenholdes dette billede med fig. 5, der illustrerer, hvorledes en løsning rejser gennem kanalen mellem identiteten og kurven, er det tydeligt, at systemet opretholder en næsten konstant amplitude over længere tid.

Fig. 5: En løsnings vej gennem den laminare fase.



Vi etablerer i det følgende en afbildning, der dels gengiver det kvalitative indhold i fig. 3 og dels redegør for fremkomsten af type I intermittens. Men først et par ord om de 3 typers teoretiske fællestræk.

For flows er der tale om, at en eksisterende stabil grænsecykel, γ, bliver ustabil. Anskuet i et Poincaré snit, Σ, vil cyklen fremtræde som et punkt, p. Vi betragter herefter situationen i Poincaré snittet i en omegn af p. I den sammenhæng danner vi en Poincaré afbildning, $f: \Sigma \to \Sigma$, der sender et snitpunkt $p_n \in \Sigma$ over i det efterfølgende snitpunkt, $p_{n+1} \in \Sigma$ således, at

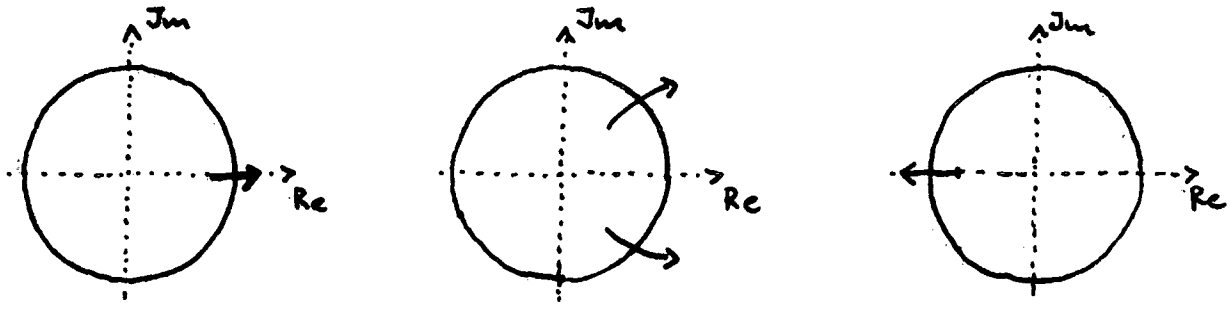
$$p_{n+1} = f_r(p_n) \quad (2)$$

hvor r er systemparameteren. Hvis r er mindre end en given kritisk værdi, r_c, hvor γ antages stabil, da vil det faktum, at

$$p_n \to p \quad \text{for} \quad n \to \infty$$

kunne udtrykkes ved, at den afledede, Df_r, af f_r har egenværdier, hvis moduli alle er mindre end 1. Der er nu 3 forskellige måder, hvorpå satbiliteten af p (og dermed af γ) kan opløses, når r øges ud over r_c: 1) En reel egenværdi $\lambda(r)$ til Df_r bliver +1, 2) 2 kompleks konjugerede egenværdier glider simultant ud af enhedscirklen i den komplekse plan eller 3) en reel egenværdi glider ud af enhedscirklen ved -1 (se fig. 6).

Fig. 6: Egenværdiens opførsel ved bifurkation af Poincaré afbildning.



For at intermittens kan forekomme kræves, at bifurkationerne er subkritiske (jvf. App. I).

Type I intermittens:

Situationen, hvor egenværdien $\lambda(r)$ bliver 1 er topologisk ækvivalent med saddelpunktsbifurkationen for flows. Normalformen (se App. I) for den subkritiske saddelpunktsbifurkation er:

$$\dot{x} = r + x^2 \tag{3}$$

Denne ligning er funderet på, at realdelen af en egenværdi til Jacobi matricen er 0. I den nuværende situation er $\lambda(r) = 1$, hvorfor normalformen for Poincaré afbildningen bliver:

$$f(x) = x + r + x^2 \tag{4}$$

Det subkritiske består i, at det ikke-lineære led virker samme vej som leddet af laveste orden. Sagt med andre ord: Førstegrads leddet virker destabiliserende på en løsning til ligningen.

Som nævnt i kap. 2 og App. I er der 2 varianter af saddelpunktsbifurkationen nemlig, den transkritiske bifurkation og pitchfork bifurkationen. Normalformerne for disse er hhv.

$$\dot{x} = rx + x^2$$

og

$$\dot{x} = rx + x^3 ,$$

der i øjemed af Poincaré afbildninger bliver hhv.:

$$f(x) = x + rx + x^2$$

og

$$f(x) = x + rx + x^3$$

Vi vil imidlertid argumentere på en mere direkte måde end v.hj.a. de umiddelbart 'himmelfaldne' normalformer.

Først defineres parameteren $\varepsilon=(r-r_\infty)/r_\infty$ (bifurkationsparameterens procentvise afvigelse fra bifurkationspunktets parameterværdi). Dernæst indses, at vi kan nøjes med at anskue f_∞ langs den ustabile mangfoldighed - dvs. den egenretning, hvor egenværdien bliver 1. Derved bliver vores Poincaré afbildning 1-dimensional, og dens lineære approximation er:

(5) $$f_\infty(x) = \lambda(r)x, \text{ hvor } \lambda(r_\infty)=1$$

Ved at rækkeudvikle f om x=0 (og $\varepsilon=0$) fås:

(6) $$f(x) = x + \varepsilon + ax^2 + \text{h.o.l.}$$ [1]

(Det er altså underforstået, at bifurkationspunktet er $(x,r) = (0,r_\infty)$ svarende til, at $\varepsilon=0$.) Med en passende skalering af x og ved at droppe højere ordens leddene fås:

(7) $$f(x) = x + \varepsilon + x^2,$$

hvilket stemmer overens med normalformen ovenfor.

Fixpunkterne for f, der findes af f(x)=x, ses at være:

$$x^* = \pm\sqrt{-\varepsilon}\ , \ \varepsilon<0 \text{ (dvs. } r<r_\infty),$$

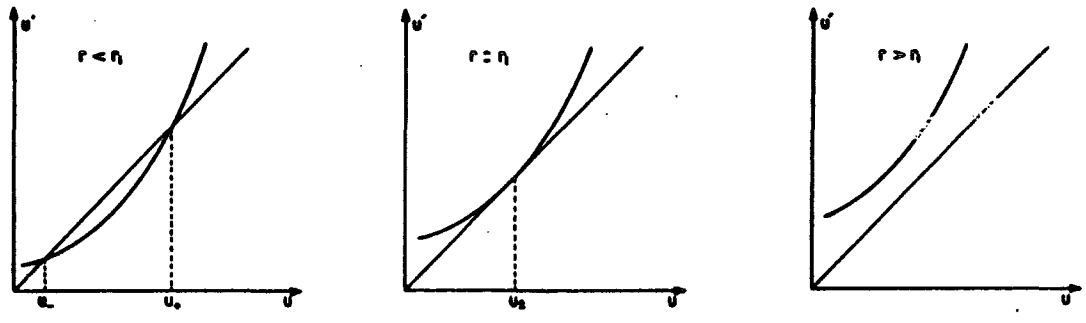
hvor $-\sqrt{-\varepsilon}$ er stabilt, mens $\sqrt{-\varepsilon}$ er ustabilt. Når ε går mod 0, nærmer de fixpunkter sig hinanden for at smelte sammen i bifurkationspunktet $\varepsilon=0$. For $\varepsilon>0$ er fixpunkterne helt forsvundet. Men dette til trods vil løsningerne til systemet over længere tid tilsyneladende opføre sig, som om der stadig eksisterede et fixpunkt. Af den grund kalder man det manglende

---

1) h.o.l. betyder højere ordens led.

fixpunkt fixpunktets spøgelse. De 3 situationer - variationen af ε - er afbildet i fig. 7.

Fig. 7: Udseendet af f, når ε varieres.



Det bemærkes, at for $\varepsilon<0$, gengiver f ikke indholdet i f.eks. Lorenz modellen, idet denne ikke har et ustabilt fixpunkt før bifurkationen. Vi har derimod opnået et kvalitativt holdbart billede for $\varepsilon>0$, hvilket også var det vi tilstræbte.

Type II intermittens:

Det, at 2 komplekse egenværdier til Df_r simultant forlader enhedscirklen, gør beskrivelses situationen uforholdsmæssig teknisk, idet man både skal medtage den komplekse variabel, z, og dennes konjugerede, $\bar{z}$. I en rækkeudvikling af f_r vil der være produkter af komplekse tal, hvilket indebærer rotation. Der skal derfor både tages højde for moduli og argument. Vi anfører 2 forskellige afbildninger, der hver udviser type II intermittens. Den første reflekterer over det faktum, at komplekse tal er at opfatte som punkter i planen beskrevet ved polære koordinater:

$$(8)\qquad \begin{cases} R_{n+1} = (1+\varepsilon)R_n + u(R_n)^2 \\ v_{n+1} = v_n + w \qquad (w \text{ er en konstant}) \end{cases}$$

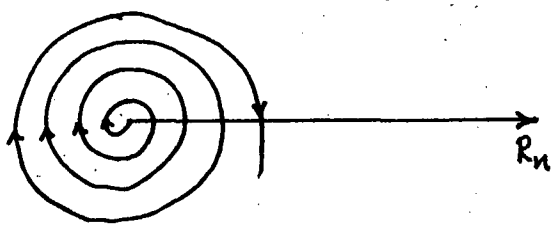
Dens kvalitative adfærd i den intermittente situation er vist på fig. 8. Den anden afbildning bliver diskuteret i Pomeau og Manneville, 1980, hvor den bruges til [illegible] eksponent bestemmelse:

bestemmelse:

$$(9)\qquad \begin{cases} z_{n+1} = \lambda z + u|z|^{2}z & \text{for } z \text{ nær } (0,0) \\ z_{n+1} = 2z & \text{langt fra } (0,0) \end{cases}$$

Det skal bemærkes, at (9) skal suppleres med en glat overgang mellem de to områder, hvor udtrykkene gælder. Intermittens optræder, når den komplekse parameter λ forlader enhedscirklen (u er reel).

Fig. 8: Kvalitativt billede af (8).



Da vi ikke har observationer af fænomenet i torsionspendulet, omtaler vi ikke denne type yderligere.

Type III intermittens:

I denne situation, hvor $\lambda(r_n)=-1$, vil den lineære tilnærmelse til f være:

$$(10)\qquad f(x) = -(1+\varepsilon)x$$

hvor $\varepsilon=(r-r_n)/r_n$ og x atter antages nær 0 ligesom ε. Rækkeudvikles til 3. orden fås:

$$(11)\qquad f(x) = -(1+\varepsilon)x + ax^{2} + bx^{3}$$

hvor a og b er konstante koefficienter afhængig af 2. og 3. afledede af f. Der er imidlertid fordel i at sammensætte f med sig selv:

$$f \circ f(x) = f^{2}(x) = -(1+\varepsilon)(-(1+\varepsilon)x + ax^{2} + bx^{3}) + a(-(1+\varepsilon)x + ax^{2} + bx^{3})^{2} + b(-(1+\varepsilon)x + ax^{2} + bx^{3})^{3}$$

Fordelen ved sammensætningen er ikke umiddelbar, men elimineres led af orden højere end 3 og ikke-lineære led i ε samt produkter af konstantled og ε, hvilket er rimeligt, idet vi er interesseret i situationen, hvor ε går mod 0, fås:

(12) $$f^{2}(x) = (1+2\varepsilon)x - 2(b+a^{2})x^{3} .$$

Altså er led af 2. grad forsvundet. For at bifurkationen skal være subkritisk kræves, at koefficienten til 3. gradsleddet er negativt, thi det lineære led derved vil virke destabiliserende på en løsning til ligningen. Bifurkationsteoretisk forlanges, at den Schwarz'ske afledede[2] - $b+a^{2}$ er negativ. Med $c=-2(b+a^{2})$ har vi, at

(13) $$f^{2}(x) = x((1+2\varepsilon) + cx^{2}), \text{ hvor } c>0.$$

Denne afbildning afbilder kun hvert andet snitpunkt, og da udtrykket i parentesen er positivt, vil fortegnet af f^{2} kun afhænge af fortegnet på x. Er x således positiv, vil de itererede værdier alle blive positive og negative, hvis x er negativ. Derfor vil f selv skifte mellem positive og negative værdier. En yderligere analyse viser, at de positive værdier bliver større og større, mens de negative bliver numerisk større og større. Et billede af situationen er givet i fig. 9.

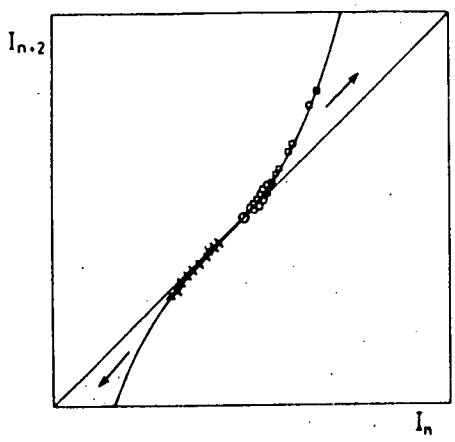
---

2) Den Schwarz'ske afledede, Sf, er defineret som:

$$Sf = f'''/f' - 3/2(f''/f')^{2}.$$

(Schuster, 1988, p. 227)

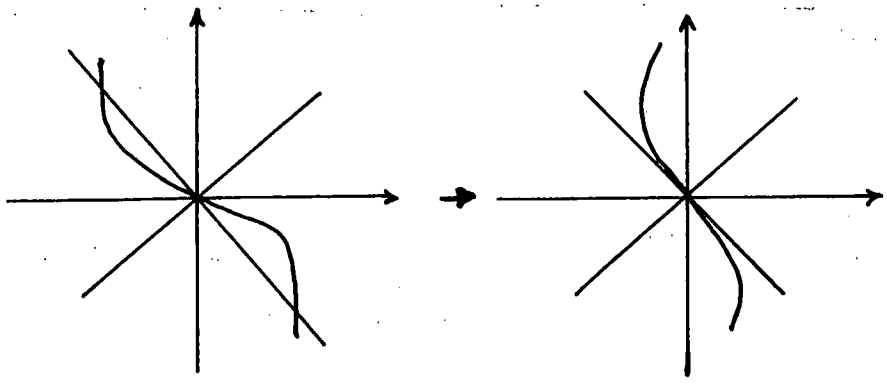
Fig. 9: Et plot af f^{∞}.
(Schuster, 1988)



Vi har hermed også redegjort for, at de laminare faser i fig. 1c) har det viste udseende: Amplituderne bliver skiftevis større og mindre. Den intermittente situation forklares altså ved en subkritisk bifurkation af Poincaré afbildningen. Den tilsvarende superkritiske bifurkation implicerer almindelig periodefordobling (flipbifurkationen), hvor den dannede cykel er stabil og har dobbelt periode. Der er således både forskelle og ligheder mellem den super- og subkritiske bifurkation. Man kalder 'svingningen', der falder i amplitude for den fundamentale, mens 'svingningen' med forøget amplitude kaldes den subharmoniske.

Dynamikken i type III intermittens er søgt illustreret i fig. 10.

Fig. 10: Returplot for f.



Efter nu at have beskrevet de kvalitative forhold ved de laminare faser, går vi videre med at bestemme nogle kvantitative egenskaber ved disse faser.

4.2 Laminare fasers gennemsnitlige varighed

Dette afsnit omtaler en beskrivelse af, hvorledes det er muligt at give kvantitative udsagn om de laminare fasers gennemsnitlige varighed. En sådan beskrivelse er dybest set af probalistisk natur. En mulig indgangsvinkel ville være at tælle antallet af oscillationer i hver laminar fase for at lave almindelig statistisk analyse: Etablere et histogram etc. Denne metode vil give en sandsynligheds fordeling, men den vil ikke medføre en sammenhæng mellem varighed og parameterværdi - umiddelbart. Det er imidlertid også muligt gennem nogle antagelser og approximationer at gå den anden vej: At bestemme sammenhængen og derefter konstruere en sandsynlighedsfordeling.

Type I intermittens:

I en laminar fase nær ved bifurkationspunktet dvs. for ε tæt ved 0+, kan den iterative afbildning

$$x_{n+1} = x_n + \varepsilon + (x_n)^2$$

$$<=> \qquad x_{n+1} - x_n = \varepsilon + (x_n)^2$$

erstattes med differentialligningen:

$$(14) \qquad dx/dn = \varepsilon + x^2 ,$$

idet forskellen mellem to på hinanden følgende snitpunkter antages at være lille. Denne ligning er umiddelbar at løse ved separation af de variable.

Når en løsningskurve har befundet sig i et burst og skal tilbage til et laminart forløb, må den starte et eller andet sted i kanalen på fig.2. Den værdi, hvor det sker, kan vi kalde x_{start}, mens værdien, hvor løsningen forlader den laminare fase, kan kaldes x_{end}. Vi kan antage, at værdierne x_{start} og $-x_{start}$ er lige sandsynlige, dvs. $P(x_{start}) = P(-x_{start})$. Sagt med andre ord er chancen for at relaminariseringen sker på den ene eller den anden side af x=0 (der hvor kanalen er smallest) er lige stor, og P er således symmetrisk om x=0. Integreres (14) fås:

(15) $n(x_{i+1}, x_{i+1}) = 1/\sqrt{\varepsilon}(\text{Arctan}(x_{i+1}/\sqrt{\varepsilon}) - \text{Arctan}(x_{i+1}/\sqrt{\varepsilon}))$

Dette angiver antallet af iterationer i en enkelt laminar fase. Vi er imidlertid interesseret i det gennemsnitlige antal iterationer <n> - for et uendeligt forløb. Til det formål vil vi antage, at der findes en største værdi K af x_{i+1}, som er meget mindre end 1:

$$|x_{i+1}| < K << 1$$

hvor $x_{i+1} = K$. Da P er symmetrisk fås ved integration af (15):

(16) $$\langle n \rangle = \int_{-K}^{K} P(x_{i+1}) \cdot n(x_{i+1}, K) \cdot dx_{i+1}$$

$$= 1/\sqrt{\varepsilon}\ \text{Arctan}(K/\sqrt{\varepsilon}).$$

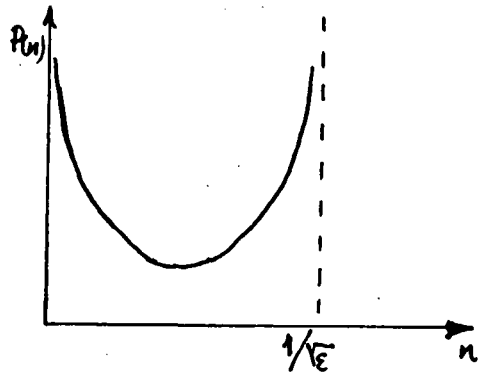
Er $K/\sqrt{\varepsilon}$ meget større end 1, vil Arctan-funktionen være nær $\pi/2$, og dermed vil <n> være af størrelsesorden $1/\sqrt{\varepsilon}$.

Man kan herefter beregne sandsynlighedsfordelingen P(n) til:

(17) $$P(n) = \varepsilon/(2K)(1 + \tan^2(\text{Arctan}(K/\sqrt{\varepsilon})) - n\cdot\sqrt{\varepsilon})$$

under antagelse af, at $P(n) = P(x_{i+1})|dx_{i+1}/dn|$. Udseendet af (17) er antydet på fig. 11.

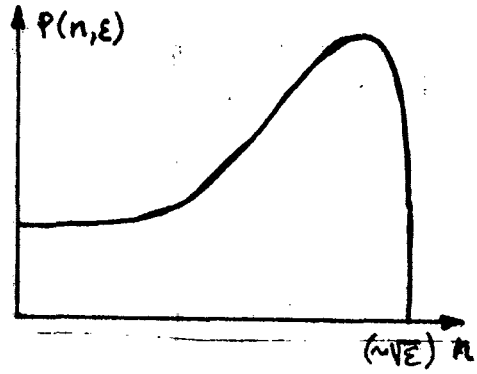
Fig. 11: Distribution af laminare fasers længde.



Der ligger et problem i at bestemme den nøjagtige værdi af bifurkationsparameteren r, og dermed kan ε heller fastlægges. Det har af denne grund ikke været muligt i modellen for torsionspendulet at checke de laminare fasers gennemsnitslængde.

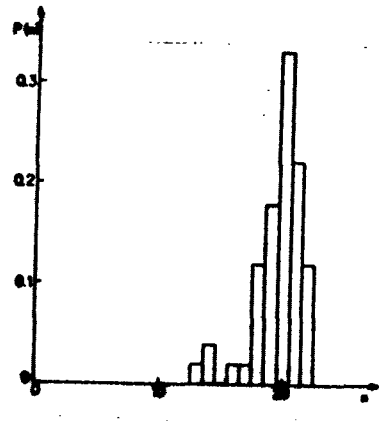
Vi nævnte i indledningen, at der var en anden måde at gå frem på: At opsamle de enkelte fasers antal iterationer og siden lave et histogram. Det forudsætter dog et meget stort sample, så stort, at det i forbindelse med modellen for torsionspendulet ville tage et par uger på de forhåndenværende maskiner. Man ville imidlertid finde, at histogrammet måtte have et udsende svarende til det i fig. 12 viste, såfremt der var tale om type I intermittens.

Fig. 12: Typisk fordeling af de laminare faser.



Et forløb som det viste er iøvrigt eksperimentelt bekræftet i den kemiske reaktion kaldet BZ-reaktionen (se fig. 13).

Fig. 13: Bekræftelse på type I intermittens i BZ-reaktionen. (Bergé et al., 1986)



Finder man en fordeling svarende til fig. 11 og 12, vil det være et argument for type I intermittens, idet fordelingerne for de øvrige typer er meget anderledes, hvilket vil fremgå af det følgende.

Type II intermittens:

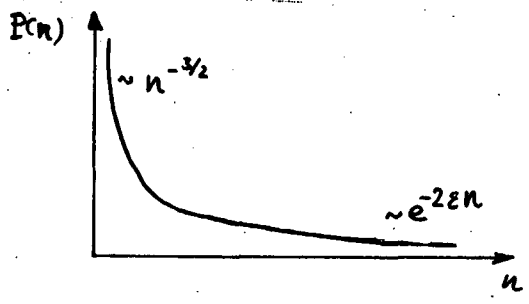
Metoden til at bestemme middelvarighed og sansynlighedsfordeling for type II intermittens følger samme ide som den for type I. Vi vil af denne grund derfor kun angive resultaterne.

De laminare fasers gennemsnitlige antal iterationer er af størrelsesorden $1/\varepsilon$, og tæthedsfunktionen varierer som

$$P(n) \sim \varepsilon^{\infty} e^{4\varepsilon n}/(e^{4\varepsilon n} - 1)^{\infty}.$$

Det kvalitative indhold i dette udtryk er vist i fig. 14.

Fig. 14: Fordeling af de laminare fasers middelvarighed.



Type III intermittens:

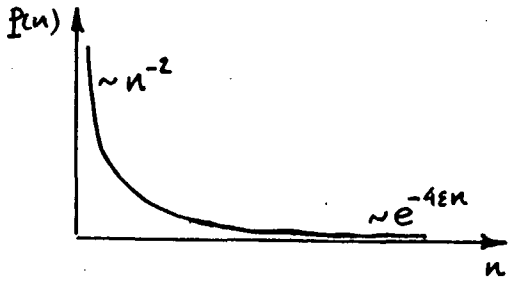
Med samme argumentation som i type II vil vi her begrænse os til præsentation af resultaterne.

Middelvarigheden af de laminare faser er af samme størrelsesorden som for type II, dvs. $1/\varepsilon$, hvorimod tæthedsfunktionen varierer lidt anderledes:

$$P(n) \sim \varepsilon^{\infty/\infty} e^{4\varepsilon n}/(e^{4\varepsilon n} - 1)^{\infty/\infty}$$

Billedet af dette er angivet i fig. 15.

Fig. 15: Fordelingen af de laminare fasers middelvarighed.



4.3 Intermittens og Liapunoveksponenter

Efter at systemets løsning har været i en laminar fase, ryger den ind i et burst. Burstområderne optræder i et aperiodisk forløb. Desuden stiger frekvensen af burstområder afhængig af parameteren. Det er derfor rimeligt at spørge: Er der tale om et kaotisk forløb? Lad os minde om, at et system er kaotisk, såfremt der er mindst en positiv Lyapunov eksponent.

Resultaterne i det følgende er baseret på analyse af konkrete modeller.[3]

Type I intermittens:

Det viser sig, at hos denne og kun denne type implicerer intermittens ikke nødvendigvis kaos. Intermittens kan f.eks. forekomme på en torus (et sædvanligt pendul), hvor signalet ikke kan være kaotisk og dermed ikke have positiv Liapunov eksponent. Men det er undtagelsen fra reglen om, at intermittens er en vej til kaos. Vi betragter dog situationen, hvor systemet bliver kaotisk. Vi vil antage, at oscillationerne korrelerer med sig selv i de laminare faser, mens korrelationen er forsvindende i burstområder. Idet Liapunov eksponenten er det samme som den inverse af korrelationstiden[4], og da korrelationstiden (middelvarigheden) ifølge forrige afnit går som $1/\sqrt{\varepsilon}$, vil et bud på eksponenten være $\sqrt{\varepsilon}$.

Denne påstand kan efterprøves på modeller, men det er svært, idet det kan være tidskrævende at bestemme bifurkationsparameterens værdi tilstrækkelig præcist.

I de modeller, hvor vi har set påstanden testet[5] holder den.

---

3) Resultaterne er primært baseret på beregninger udført Pomeau og Manneville, 1980.

4) Bergé et al., 1986.

5) Pomeau og Manneville, 1980, samt Schuster, 1988.

Type II intermittens:

Hvis man her anvender samme hypotese om, at Liapunov eksponenten gives af det omvendte af middelvarigheden, får man, at eksponenten skulle være af størrelsesorden ε. Imidlertid giver en undersøgelse af modellen (9) i afsn. 4.1.2, at Liapunov eksponenten snarere går som ε^{α}, hvor α er lille.[6]

Type III intermittens:

Igen kan man udnytte hypotesen ovenfor, hvormed Liapunov eksponenten vil gå som ε nær ved bifurkationen.[7]

4.4 Relaminarisering

Det er i dette afsnit hensigten at give et kvalitativt billede af, hvorledes en intermittent løsning finder tilbage til et laminart forløb - dette kaldes at relaminarisere. Beskrivelsen vil kun omhandle type I intermittens - og dette i det væsentlige kun i forbindelse med Lorenz modellen.

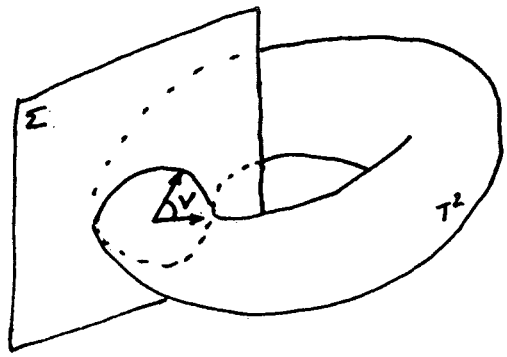
Vi har tidligere set, at Lorenz ligningerne udviser type I intermittens. Vi vil i det følgende forsøge at opstille en (retur)afbildning, der samtidig modsvarer egenskaberne ved det kontinuerte flow og redegør for relaminariseringen. Den endeligt etablerede afbildning kaldes baker's transformation.

Men indledningsvis retter vi blikket mod kontinuerte flows på 2-dimensionale tori, T^2. På en sådan kan der kun forekomme periodisk eller kvasiperiodisk adfærd. I et Poincaré snit vil der derfor enten findes et endeligt antal punkter (periodisk opførsel) eller en lukket kurve (kvasiperiodisk opførsel). Systemets to variable kan opfattes som vinkler, der hver især ligger i intervallet $[0;2\pi]$ (eller et helt multiplum af 2π herfra), hvor 2. topologisk set er identificerbar med 0. I Poincaré snittet er kun den ene variabel synlig (svarende til den lille cirkel). Denne variabel kalder vi v (se fig. 16).

---

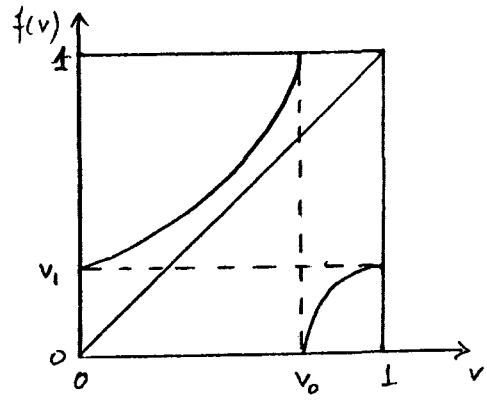
6) En mere overvejet beregning giver, at eksponenten skulle gå som $1/\ln(\varepsilon)$, men dette stemmer ikke med den numeriske behandling af modellen.
7) Dette resultat er givet i Bergé et al., 1986, mens Pomeau og Manneville, 1980, finder, at eksponenten går som $\sqrt{\varepsilon}$.

Fig. 16: Poincaré snit i en torus.



Vi kan således sige, at en returafbildning, f, af den variable, v, er en (strengt) voksende afbildning af en cirkel ind i sig selv (f: $S^1 \rightarrow S^1$). Da $[0;2\pi]$ er ækvivalent med $[0;1]$, kan vi skalere v så f på entydig måde afbilder enhedsintervallet ind i sig selv (f: $[0;1] \rightarrow [0;1]$). På denne måde er cirklen blevet klippet op og rettet ud. En mulig repræsentation, der opfylder de givne krav, er vist i fig. 17.

Fig. 17: Returplot for flow på T^3.

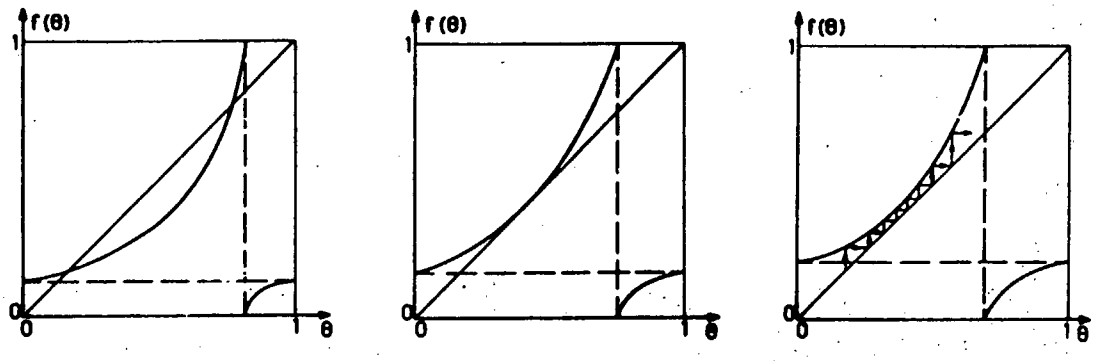


Det det betragtede flow er kontinuert, skal det også forlanges, at f er kontinuert. Så den tilsyneladende diskontinuitet på fig. 17 skal elimineres. Og det bliver den ved at identificere intervalendepunkterne i begge retninger.

Af figurerne nedenfor fremgår, at der er 2 fixpunkter før bifurkationen, som under bifurkationen smelter sammen til eet. Efter bifurkationen (fig. 18c) er kun fixpunktets spøgelse tilbage, og den intermittente situation er tilstede. En løsning gennemløber kanalen - hver iteration svarer til en rotation/omløb på den store cirkel i torus. Denne tilstand

afbrydes ved, at den ene oscillator henter en periode i forhold til den anden. Derved opstår en faseforskydning mellem oscillatorerne, hvorefter signalet igen bliver laminart.

Fig. 18: Vejen til intermittens tilstanden.



Afhængig af om frekvensforholdet er rationalt eller irrationalt vil bevægelsen være periodisk eller kvasiperiodisk hhv.

Den viste afbildning repræsenterer imidlertid ikke en vej fra orden til kaos - men derimod en tilstand mellem periodicitet og kvasiperiodicitet. Det vil råde bod på nu.

Lorenz ligningerne har et globalt fixpunkt, som er ustabilt nemlig, O=(0,0,0). Punktet har derfor en stabil mangfoldighed (se kap. 2), $W^s(O)$. Hvis denne skærer det valgte Poincaré snit i et punkt forskellig fra O, vil returafbildningen være diskontinuert i dette skæringspunkt. Så for at etablere en returafbildning, der modsvarer kravene fra Lorenz flowet, kræves altså ikke, at den skal være kontinuert, selvom flowet er det. Afbildningen skal dog ligesom før være injektiv og dermed invertibel.

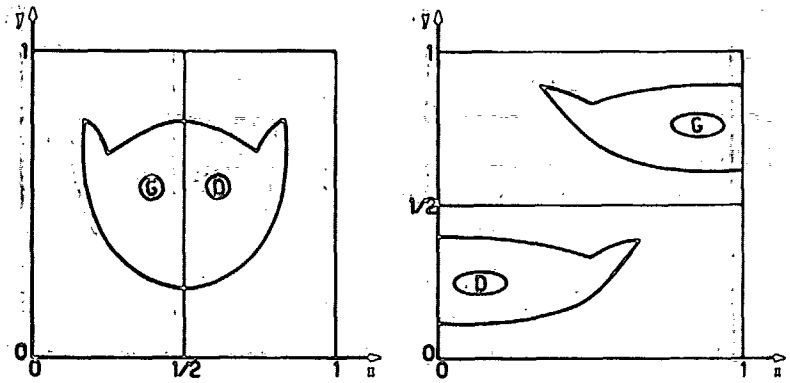
En afbildning, der tilfredsstiller disse betingelser er baker's transformation:

$$f(x,y) = \begin{cases} (2x \bmod 1, by/2) & \text{for } 0<x<1/2 \\ (2x \bmod 1, b(y+1)/2 & \text{for } 1/2<x<1 \end{cases},$$

der er diskontinuert i x=1/2.

For b=1 er f arealbevarende og virker på følgende måde: Området $[0;1] \times [0;1]$ bliver trykket sammen langs y-aksen og trukket ud langs x-aksen (se fig. 19).

Fig. 19: Baker's transformation.



Hvis $|b|$ ligger i intervallet $]0;1[$, er f arealkontraherende og repræsenterer derved dissipation i modellen.

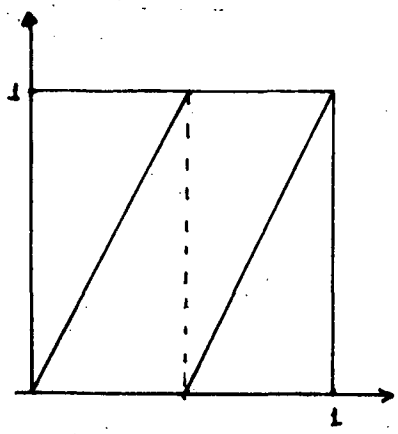
Baker's transformation er opbygget med baggrund i 'shift' afbildningen:

$$g: x \Rightarrow \{2x\}$$

hvor $\{y\}$ betyder decimaldelen af y. Denne afbildnings graf er vist i fig. 20, hvor det også fremgår, at hver funktionsværdi har to originalpunkter. Det påstås[8], at alle monotont voksende afbildninger med denne egenskab kan udvise type I intermittens!

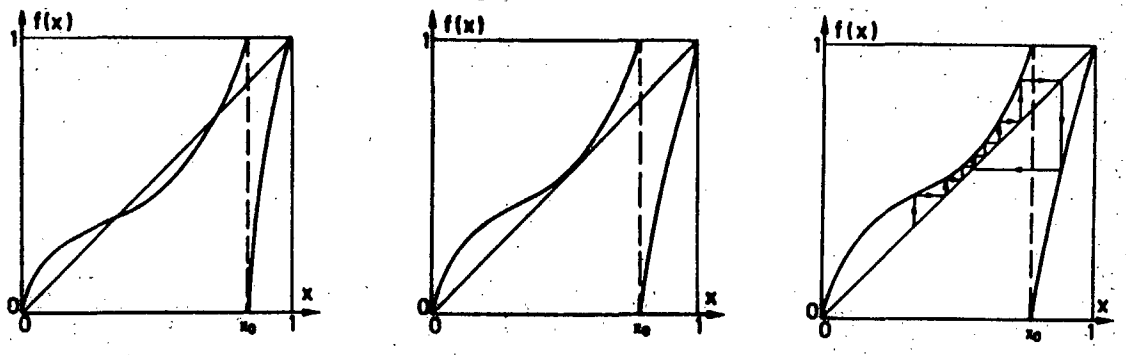
8) Bergé et al., 1986.

Fig. 20: Shift afbildningen.



Det er i fig. 21 vist, hvorledes overgangen til intermittens tager sig ud for en afbildning med de ovennævnte egenskaber.

Fig. 21: Vej til type I intermittens.



Den viste afbildning er diskontinuert i x_0, der kunne repræsentere den omtalte skæring mellem $W^s(0)$ og Poincaré snit i Lorenz modellen. Iterationsprocessen forløber i kanalen indtil værdierne kommer over diskontinuitetspunktet, x_0, hvor den (almindeligvis) ikke rammer. Vi ser også, at hvis værdien x_{n+1} lige inden et burst er nær ved x_0, da vil relaminariseringen starte nær ved 0, som er et ustabilt (fix)punkt også efter bifurkationen.

Vi vil som sagt ikke diskutere relaminarisering af de andre intermittenstyper, selvom situationen for type III intermittens er meget analog til baker's transformation. I stedet går vi over til nogle konkluderende bemærkninger.

4.5 Konklusion

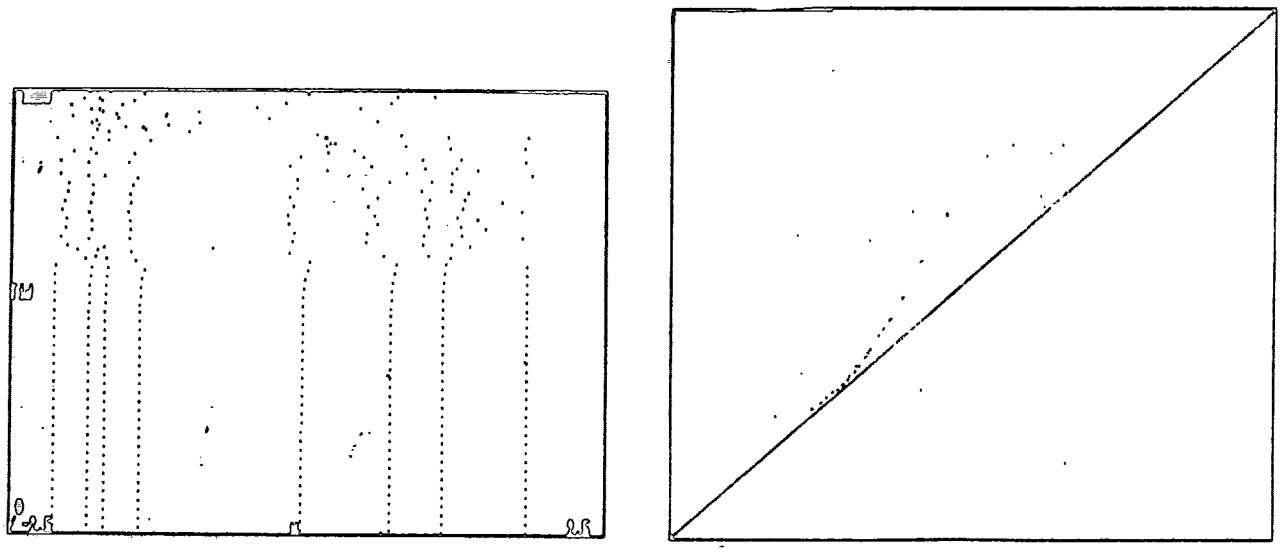
Vi har eksperimentelt set, at torsionspendulet udviser intermittenslignende adfærd (fig. 3). Da vi ikke har haft mulighed for at opsamle data til et returplot, er det vanskeligt at afsige den endelige dom: Er der tale om intermitens? Og i bekræftende fald, hvilken type er der da tale om?

Hvis vi antager, at det er en intermittent tilstand, kan vi i hvert fald udelukke type III, idet vi ikke ser en vekslen mellem en fundamental og en subharmonisk oscillator, hvis amplituder i så fald skulle blive skiftevis mindre og større respektivt i de laminare faser.

Signalet minder en del om tidsserierne fra Lorenz ligningerne. Men det er dog ikke tilstrækkeligt til at konkludere type I intermittens.

Til gengæld hersker der ingen tvivl i typebestemmelsen for følgende kørsel af modellen for torsionspendulet:

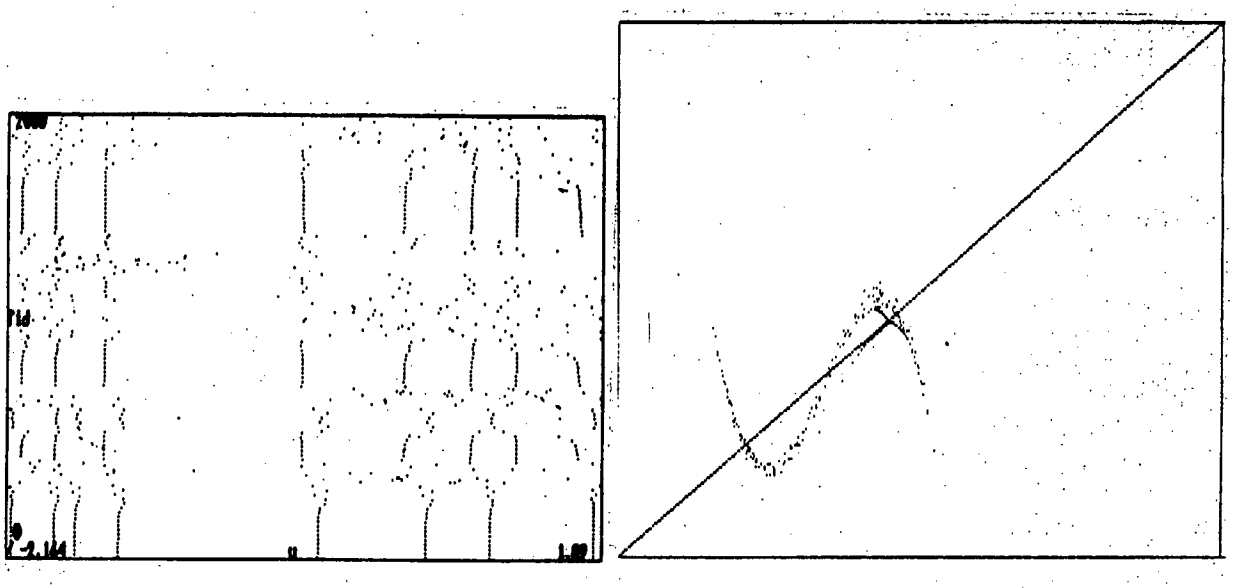
Fig. 22: Intermittens i torsionspendulet.



Det fremgår af fig. 22a), at der er tale om, at en 8-periodisk cykel er bifurkeret. Et snit i faserummet ville derfor give anledning til en afbildning f, der før bifurkationen er 8-periodisk. For at fremkalde et returplot, der svarer til det i afsn. 4.1.1 viste, skal f sammensættes med sig selv 8 gange. Det er derfor et plot af f^8, der er type I intermittent, hvilket fremgår af fig. 22b).

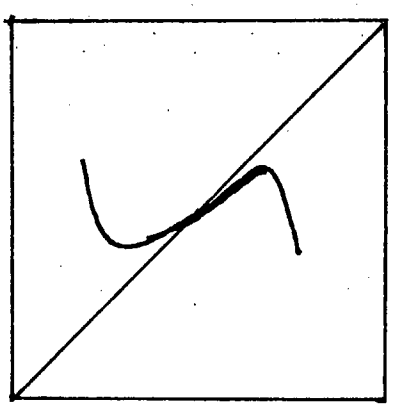
Vi har detekteret yderligere en kørsel, der umiddelbart kunne mistænkes for at være intermittent (se fig. 23).

Fig. 23: Kørsel og returplot fra model af torsionspendulet.



Med belæg i fig. 23a) kunne det se ud som, at en periodisk 8- eller 16-cykel er bifurkeret til en intermittent tilstand. Afbildes imidlertid hvert ottende punkt i et returplot fås en figur som vist i fig. 23b). Også her kunne man forledes til umiddelbart at mene tilstanden er intermittent. Der er dog et problem. Type III intermittens ville kræve, at kurven skar identiteten med en hældning mindre end 1, hvor den her er større end 1 (se fig. 24).

Fig. 24: Type III situation.



Vi vil på denne baggrund derfor ikke entydigt påstå, at vi ser et intermittent forløb. En anden fortolkning kunne være, at der er 2 koeksisterende 8-cykler, hvis stabile mangfoldigheder er viklet inde i hinanden i faserummet, og på

grund af afrundingsfejl giver denne tilsyneladende ustabile optræden.

Vi stopper foreløbig her med intermittens diskussionen for at se, hvad torsionspendulet og tilhørende model ellers kan udvise.

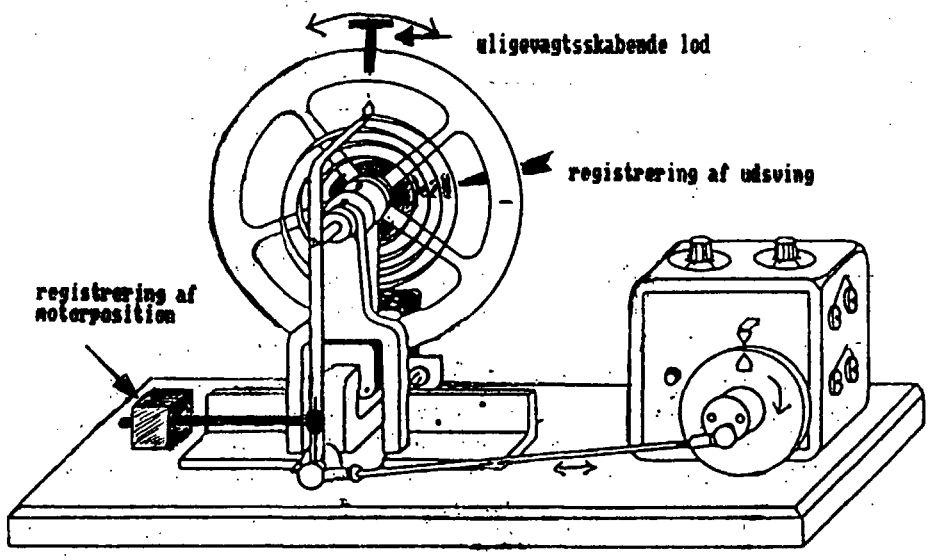
KAPITEL 5

Torsionspendulet, modellering og simulationer

Indledning

I afsnit 5.1 af dette kapitel vil vi diskutere modelleringen af torsionspendulet og sammenligne kontinuerte simulationer af denne model med analogt datamateriale fra det virkelige torsionspenduls bevægelser. I afsnit 5.2 vil vi benytte de bedre muligheder for databehandling som bla. diskrete simuleringer giver (f.eks. Poincaré-snit og returafbildninger) til at fremlægge en oversigt over bevægelsesmønstre og indicier for kaos i modellen.

Fig.1 Torsionspendulet



5.1 Modellering af torsionspendul

I elevheftet [1] og i kap. 2 har vi grundigt gennemgået torsionspendulets opbygning og dets modellering udfra klassisk mekanik. Vi vil derfor her nøjes med en kort gennemgang af modellens implementering i simulationsprogrammet "CTS", samt

---

1) IMFUFA tekst 179b.

diskutere en række problemer i modelleringen, nemlig dæmpning, motorperiode og fjederkonstant. Desuden vil vi diskutere overensstemmelsen mellem modellen og det virkelige torsionspendul ved løbende at sammenholde tidsserier fra torsionspendulet med tilsvarende simuleringer.

I elevheftet har vi opstillet følgende 2.ordens differentialligning for torsionspendulet:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu \cdot dy}{I \cdot dt} + \frac{k}{I} y - \frac{m \cdot g \cdot R}{I} \sin(y) = - k \frac{A}{I} \cos(\omega_{Mot} t + p)$$

I forhold hertil er implementeringen i "CTS", ændret på tre punkter. Dels har vi indført en vækstrampe, f(t), på μ/I, så den kan ændres gradvist under simulationerne. Dels har vi indført et led for faststofgnidningen (der kun afhænger af hastighedens fortegn). Endelig har vi sat fasen (p) i motoren til $\pi/2$, hvorved motorleddet bliver en $\sin(\omega_{Mot} t)$, idet det er ønskeligt, at motoren er i positionen 0 for t = 0.

Transformeret til to 1.ordens differentialligninger og suppleret med ovennævnte tilføjelser fås to rateligninger for hhv. udsvinget og impulsmomentet [2]:

RA(1) = L/I

$$RA(2) = \frac{K}{I}(A \cdot \sin(\omega_{Mot} t) - u) + \frac{m \cdot g \cdot R}{I} \sin(u) - f(t) \frac{\mu \cdot du}{I \cdot dt} - N \cdot h\left(\frac{du}{dt}\right)$$

Vi vil nedenfor diskutere problemer i modelleringen af leddene for dæmpning (μ og N h(du/dt)), motorperiode ($\sin(\omega_{Mot} t)$) og fjederkonstant (K) når deres virkninger sammenholdes med torsionspendulet.

---

2) Udsvinget y = LE(1) = u,
vinkelhastigheden w = RA(1) = dy/dt = LE(2)/I,
Impulsmomentet L = LE(2) = I dy/dt, RA(2) = dL/dt
I appendix IV viser vi en udskrift af implementeringen i "CTS", og redegør for opbygningen af vækstrampen f(t). Funktionen N·h(dy/dt) diskuteres nedenfor.

5.1.1 Dæmpning

Lad os først gennemgå de elementer, som dræner torsionspendulet for energi. Der er tre, nemlig 1) dæmpningen fra spolerne, 2) faststofgnidningen og 3) luftmodstanden.

1) Spolerne dæmper torsionspendulet med et moment, som er modsatrettet og proportionalt med skivens hastighed og med størrelsen af magnetfeltet.

2) Faststofgnidningen består af en fast friktionskraft rettet modsat bevægelsen. Afbildet som funktion af w bliver denne funktion en SIGN funktion (se fig.2).

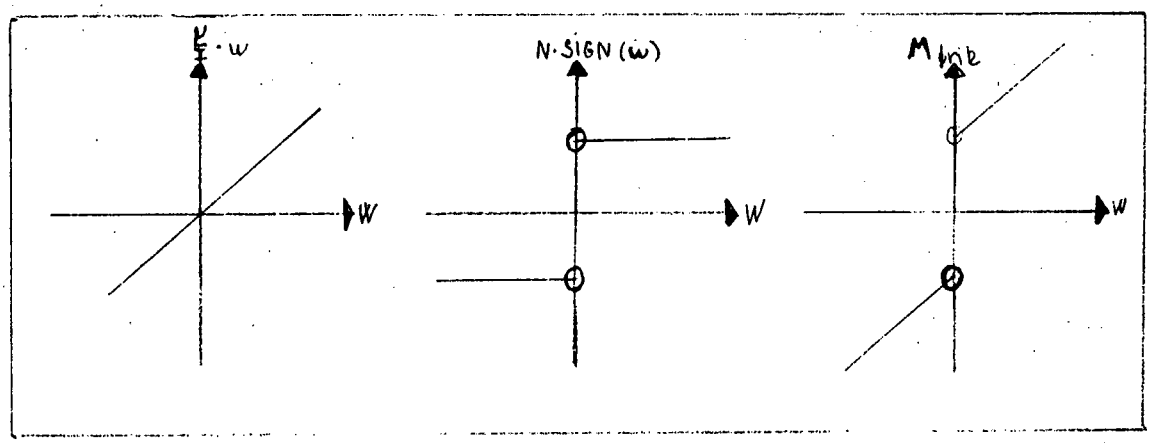
3) Luftmodstanden er ligesom dæmpningen fra spolerne proportional med hastigheden, og slåes i det følgende sammen med den.

Det samlede dæmpningsmoment består altså af to led nemlig, et hastighedsafhængigt og et hastighedsretningsafhængigt led.

$$M_{frik} = \frac{\mu}{I} \cdot w + N \cdot SIGN(w)$$

I nedenstående figur er de to elementer skitseret hver for sig og samlet:

Fig.2 Dæmpningens to led.



Vi har eksperimentelt udskilt de to "vægte" $\mu(D)/I$ og N. Som funktion af spændingen, D, over spolerne, bliver det hasighedsafhængige led givet ved relationen

$$M_{hast} = w \cdot 2.3\ 10^{-5} \cdot \exp(D \cdot \ln(2)/0.7) = w \cdot \mu(D)/I$$

μ/I ligger i intervallet $[2.3 \cdot 10^{-5};\ 4.5 \cdot 10^{-4}]$. I det andet led er der stor usikkerhed i bestemmelsen af N, men størrelses-

ordenen er $N \simeq 10^{-3}$, altså større end μ/I.

På grund af problemerne med integration af diskontinuerte funktioner har vi modelleret faststofdæmpningen med

$$M_{faststof} = N \cdot \tanh(5 \cdot w).$$

Overensstemmelsen mellem denne modellering og torsionspendulets bevægelser fremgår af nedenstående tidsserier af indsvingninger uden elektromagnetisk dæmpning i torsionspendulet (a) og fra simulationer af modellen (b) hhv. med og uden lod.

Fig.3a og b Indsvingning til ligevægt uden lod [3]

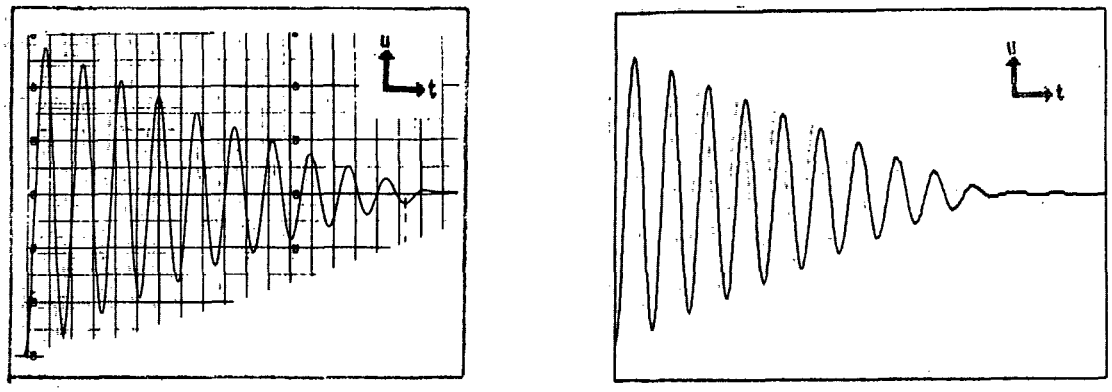
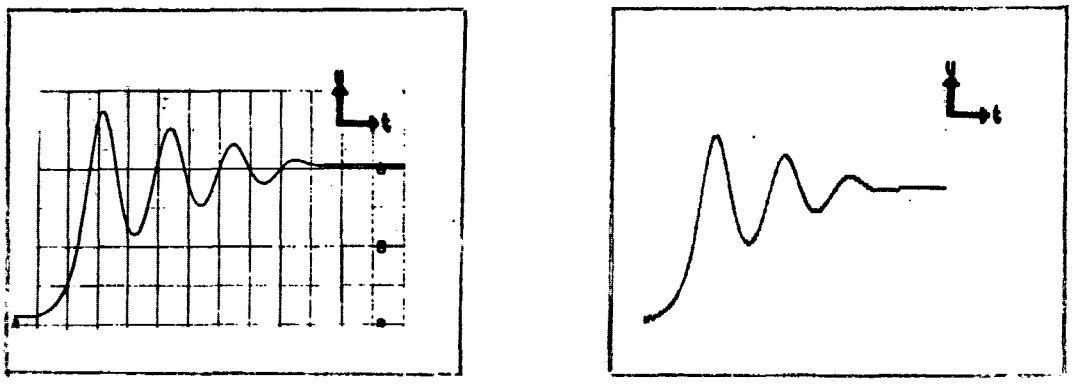


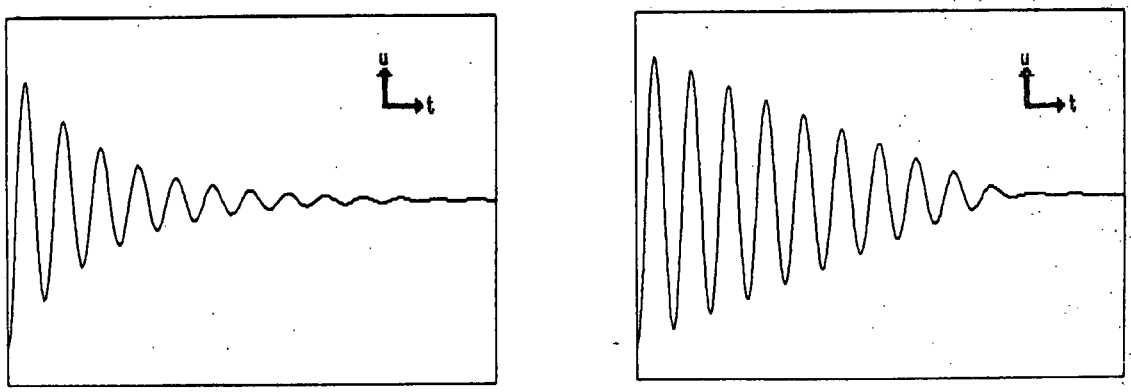
Fig.4a og b Indsvingning til ligevægt i højre grøft med lod



3) Skaleringerne er sammenlignelige her, som alle andre steder, hvor andet ikke er anført. Pendulet siges at være i højre grøft, når $\pi > u > 0$. I figurer, der illustrerer svingninger i begge grøfter, er højre altid vist øverst.

I stedet for det ekstra ikke-lineære led, som faststofgnidningen repræsenterer, og som jo oven i købet er en ufuldstændig modellering heraf, kunne man have givet det hastighedsafhængige led en værdi til at modsvare faststofgnidningen. I fig.5 sammenholdes simulerede tidsserier heraf.

Fig.5a og b Indsvingning uden lod med hhv. kompenserende hastighedsafhængig dæmpning og fastofgnidning.



Udfra vort ønske om god overensstemmelse mellem torsionspendulet og modellen giver den kvalitative forskel på disse indsvingninger (exponentiel hhv. "lineær") begrundelsen for at medtage leddet for faststofgnidningen i modellen.

5.1.2. Motorperiode

Vi har modelleret motorpositionen, P, med en sinusfunktion

$$P = \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{PERI} + F\right) \quad [4]$$

Her vil vi kun diskutere selve motorens ustabilitet, og kun i tilfældet, hvor torsionspendulet er påmonteret loddet. I fig.6 er vist et plot af udsvinget samtidigt med motorspændingen,

---

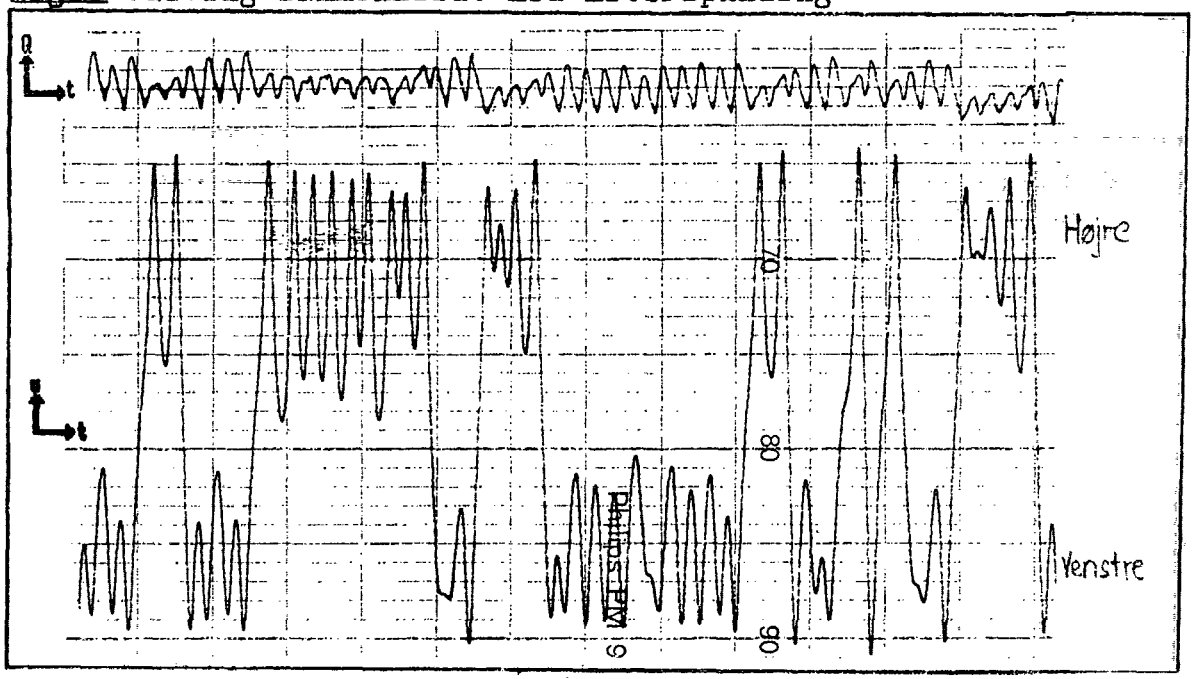
4) F er startfasen. Sammenhængen

$$PERI = (\ 0.08 \cdot Q - 0.1)^{-1}$$

mellem motorspændingen Q og motorperioden PERI er fastlagt ved samme procedure, som vi beskriver i øvelse B5 i undervisningsmaterialet, IMFUFA tekst 179a.

hvor torsionpendulet er i en kaos-situation i begge grøfter (k-2) [5].

Fig.6 Udsving sammenholdt med motorspænding



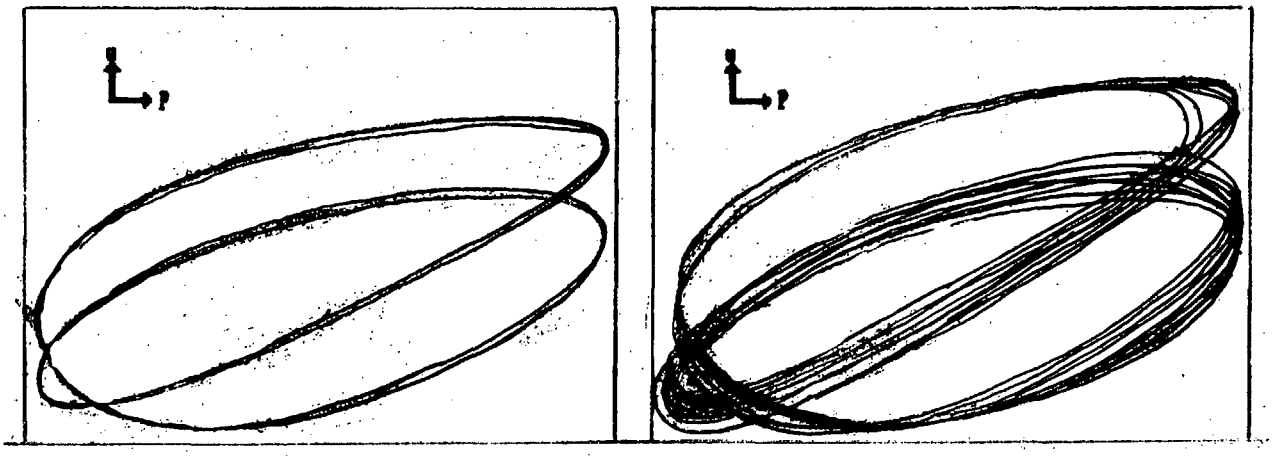
Når det overhovedet er relevant at iagttage motorspændingen, er det fordi, det må antages, at den til en vis grad afspejler motorens belastning. Videre må det antages, at motoramplitudens momentane frekvens falder, når belastningen af motoren stiger.

Det ses, at der er tale om to ustabiliteter. Dels et længerevarende drift (her et fald) i motorspændingen. Dels en variation af motorspændingen i takt med svingningerne, som er systematisk på den måde, at variationen er mindre og gennemsnittet lavere, når torsionspendulet er i højre grøft, end når det er i ventre grøft. Betydningen heraf er vanskelig at gennemskue, men antagelsen om, at amplituden varierer harmonisk, er ikke holdbar. Det ser ud til, at der optræder en

5) Vi benytter betegnelsen k-2 for kaotiske bevægelser, som foregår i begge potentialgrøfter, dvs. på begge sider af den oprindelige, nu ustabile ligevægtsstilling (u=0). Tilsvarende betegner k-1 kaotiske bevægelser i een af de to grøfter. Betegnelsen p-n beskriver en periodisk bevægelse med n gange så lang periode som motorperioden.

kobling, så variationen af motoramplituden kommer til at afhænge af f.eks. torsionspendulets impulsmoment. Sålænge torsionspendulet bevæger sig i p-1- eller p-2-bvægelser, har motorperiodens ustabilitet ingen væsentlig indflydelse på bevægelsens stabilitet. Men når torsionspendulet bevæger sig i f.eks. en p-4, betyder motorens uregelmæssighed, at der kommer små variationer i faseforholdet mellem motor og udsvinget. Det ses f.eks. tydeligt af, at et (u,P)-plot [6] heraf hurtigt sejler ud; dets karakteristiska udviskes. Fig.7a og b viser to (u,P)-plot af en periode-4 bevægelse på torsionspendulet efter hhv. 30 sek og 3 min.

Fig.7a og b (u,P)-plot af p-4 efter hhv. 30 og 180 sek.

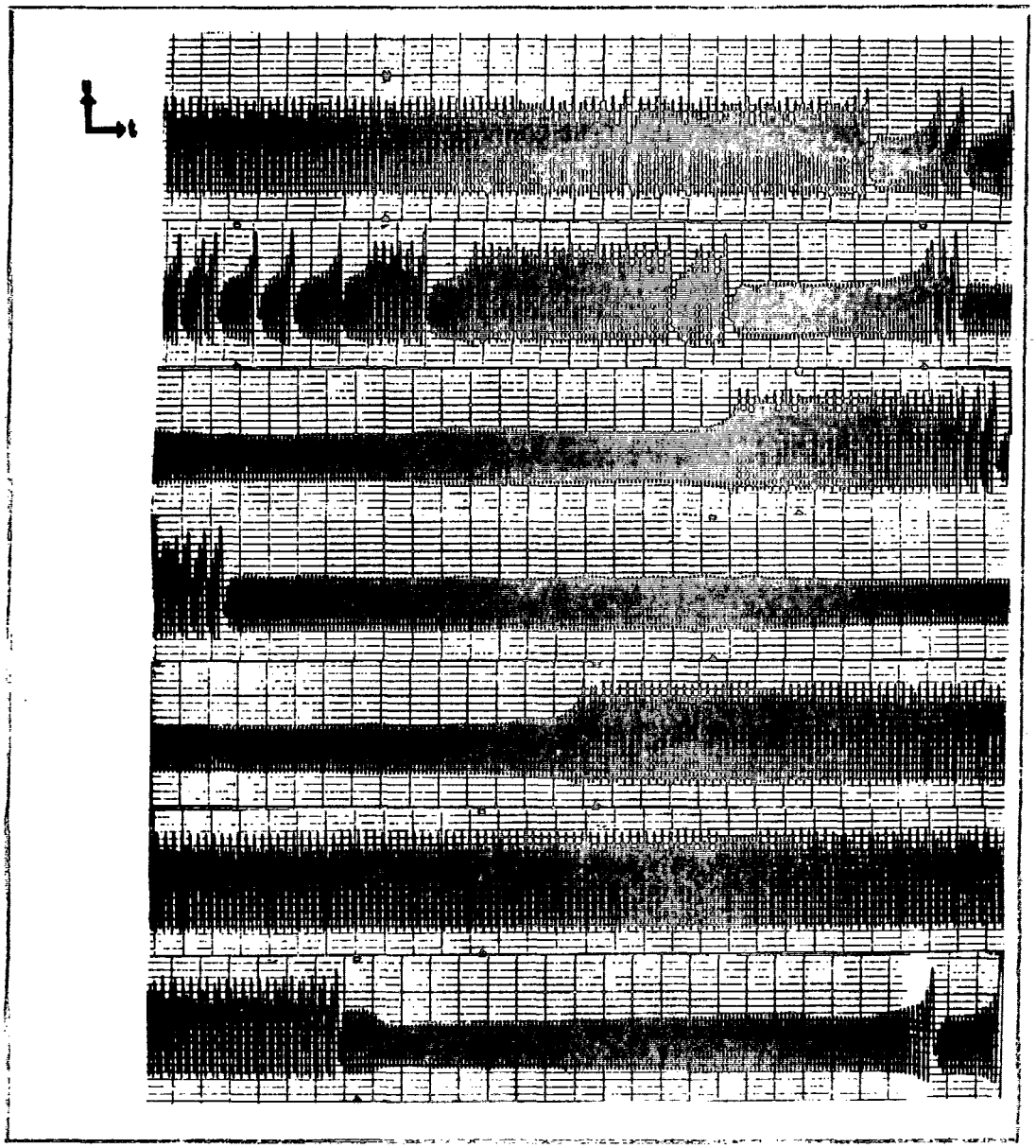


Denne ustabilitet har konsekvenser for vurderingen af lange kørsler på torsionspendulet. Et eksempel herpå er vist i fig.8. Det er et (t,u)-plot af et overordentligt langt intermittent forløb fra torsionspendulet i venstre grøft. Forløbet strækker sig over ca. 1½ time. Der er ingen tvivl om, at vi her ser et intermittent forløb. Spørgsmålet er blot, om det er ustabiliteterne i motorperioden som bringer torsionspendulet ud af den periode-1 bevægelse, det er i, og at forløbet derfor ikke skyldes ikke-lineariteten fra loddet. Vi har nemlig ikke kunnet finde et tilsvarende intermittent

6) (u,P)-plottet er diskuteret i elevheftet s. 22.

forløb i een grøft i modellen [7]. Desuden falder det viste intermittente forløb uden for de tre typer af intermittens, vi gennemgik i kap.4, men det kan selvfølgelig også skyldes disse fluktuationer.

Fig.8 Intermittent forløb i venstre grøft.

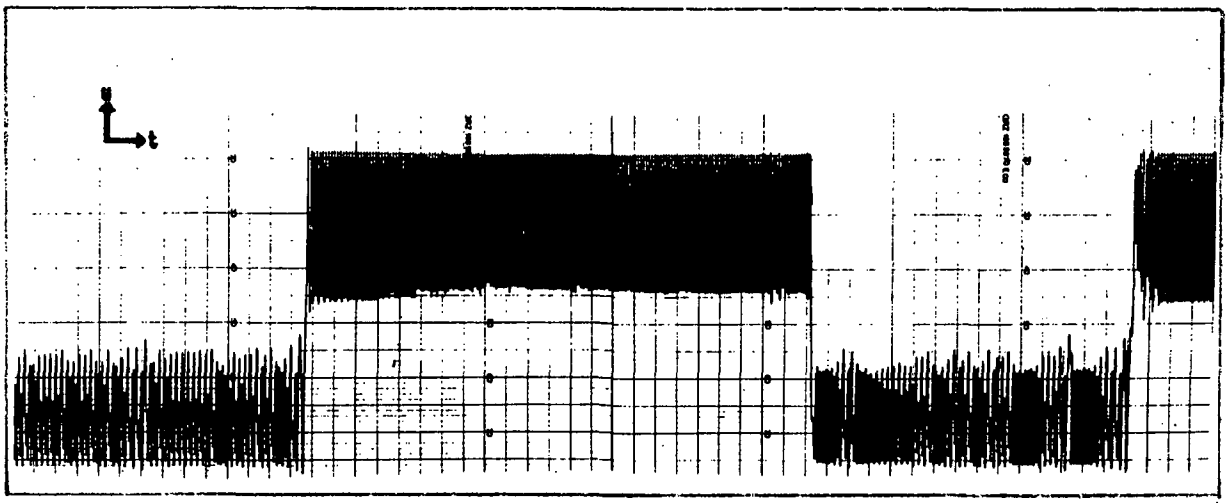


7) Vi har dog (som vi skal vende tilbage til), set andre intermittente forløb, f.eks. omkring en p-20 i een grøft, og en p-8 i begge grøfter.

5.1.3 Fjederkonstant

Det har vist sig, at fjederkonstanten[8] ikke er konstant. Mens det er lykkedes os i venstre grøft at observere både p-1, p-2, p-4, og k-1 går torsionspendulet direkte fra en p-1 i højre grøft til kaos i begge grøfter (k-2). I fig.9 kan man se, at torsionspendulet i højre grøft svinger i en regulær p-1, mens det i venstre side er i en kaossituation, vel at mærke ved de samme parameterværdier.

Fig.9 Forskel på bevægelser i højre (øverst) og venstre grøft.



Man må især hæfte sig ved, at amplituden af svingningen i fig.9 kan blive så stor i højre grøft, uden i synderlig grad at blive anfægtet af potentialets skævhed. Det kan næsten kun forklares ved en skævhed i fjederpotentialet, omend de førnævnte variationer synkront med motoromdrejningen for periodiske svingninger også kan have sin del af forklaringen[9].

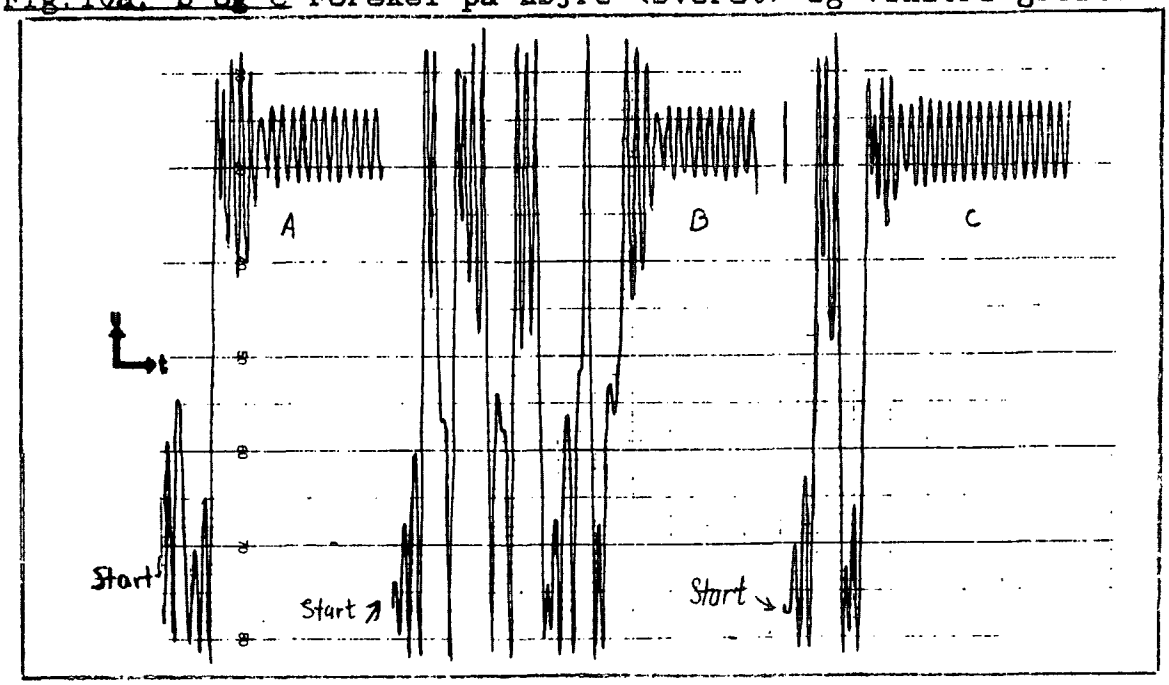
---

8) En gruppe fra KU har observeret det samme fænomen på deres torsionspendul (se Jensen et al. s. 18). Den værdi vi bruger for fjederkonstanten, har vi fastlagt ved samme procedure som anvises i øvelse B1 og krydstjeck'et gennem kontrol af ressonansfrekvens for torsionspendulet som anvist i øvelse B3 og B4, iøvrigt til samme værdi, som Leybold opgiver. (Vi har ved integration beregnet inertimomentet af skiven, og ved krydstjecket hermed var afvigelsen under 1%).

9) Endelig kan der være tale om uensartet friktion i det potentiometer, som opsamler informationen om torsionspendulets position. Heroverfor må indvendes, at gruppen på KU har set den samme skævhed, selv om de har et andet og langt lettere glidende potentiometer.

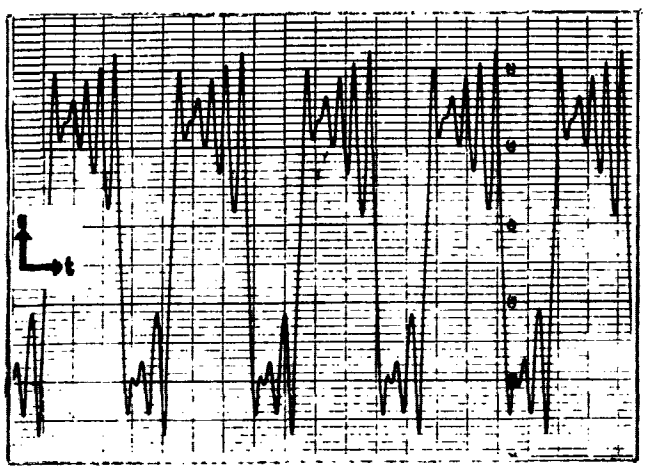
I fig.10a, b og c startes torsionspendulet hver gang i venstre side i en k-2 lignende tilstand. Torsionspendulet falder herefter hver gang ned i den højre grøft i en meget stabil p-1.

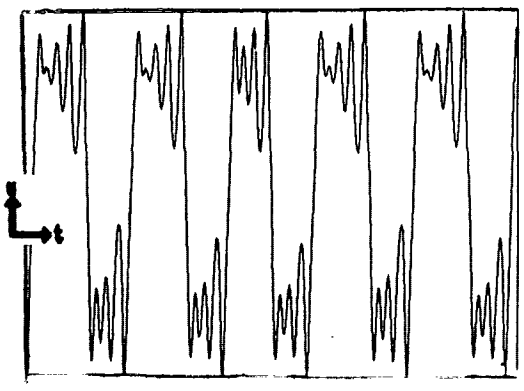
Fig.10a, b og c Forskel på højre (øverst) og venstre grøft.



Til slut vil vi sammenligne et par tidsserier af dels periodiske forløb i begge grøfter og dels k-2 på hhv. torsionspendulet og i modellen. I fig.11a og b sammenholdes periodiske bevægelser som foregår i begge grøfter hhv. fra torsionspendulet og fra modellen.

Fig.11a og b Periodiske bevægelser i begge grøfter (højre fo.)



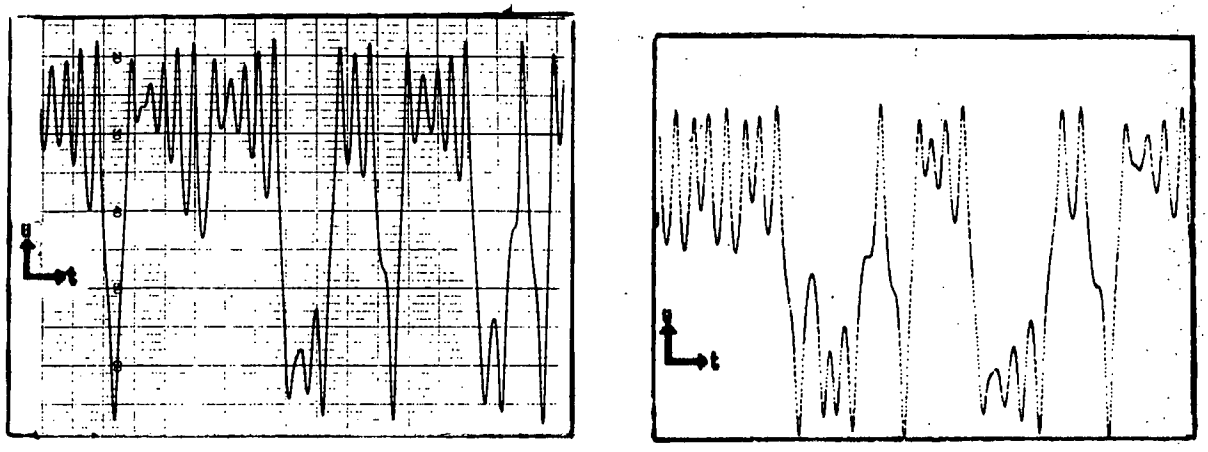


Uens skalering

Bevægelsesmønsteret i torsionspendulet er her en p-9, mens modellens er en p-8 [10].

Endelig sammenligner vi torsionspendulet med modellen i k-2 situation, hvilket fremgår af fig. 12a og b.

Fig. 12a og b Kaotiske bevægelsesmønstre (højre grøft øverst).



Uens skalering

5.1.4 Opsummering

Torsionspendulets bevægelsesmønstre har været helt umulige at reproducere ved de samme parameterværdier, men er genfundet ved andre. Og her er der tale om store variationer. Det udelukker en kvantitativ sammenligning mellem torsionspendulet og modellen. Derimod er der god kvalitativ overensstemmelse.

På grund af torsionspendulets store ustabilitet er det dog næppe muligt, at genfinde ret mange af de bevægelsesmønstre her, som vi nu vil gennemgå for modellens vedkommende. Bevægelsesmønstre, som kan analyseres udfra de langvarige simulationer og matematiske og grafiske manipulationer, computerne muliggør.

---

10) Dette bevægelsesmønster optræder i et "vindue", nærmere herom i afs. 5.2.5 intermittens.

5.2 Simuleringer af torsionspendulet

Vi vil nu gå over til diskussionen af de bevægelsesmønstre, vi har iagttaget i modellen af torsionspendulet. Disse baserer sig hovedsagligt på langvarige, diskrete simuleringer[1] af torsionspendulet. Gennemgangen af simuleringerne er opbygget således: Først redegør vi for valg af bifurkationsparameter og begrænsninger i simuleringernes betingelser og omfang. Dernæst giver vi en oversigt over nogle af modellens karakteristiske og fysisk relevante bevægelsesmønstre. Endelig vil vi give fire indicier for, at modellen udviser kaos, nemlig 1) periodefordoblinger, 2) fraktale Poincaré-snit, 3) følsomhed overfor variation af begyndelsesbetingelser og 4) intermittens.

5.2.1 Bifurkationsparameter og -værdier

Udfra et ønske om at bruge forskellige metoder til identifikation af kaos i modeller, har vi indskrænket vore undersøgelser til simuleringer, der på forskellig måde indicerer kaos i modellen. Som bifurkationsparameter har vi valgt dæmpningsspændingen D, der styrer dæmpningen fra de elektromagnetiske spoler.[2]

---

1) I en diskret simulering tages kun output af modellens tilstand, når et givent tidsrum er forløbet. M.h.p. etablering af bifurkationsdiagrammer, returafbildninger og Poincaré-afbildninger er dette outputinterval sat til samme værdi som motorperioden. Herved måles dette 2-dimensionale, ikke-autonome systems tilstand (udsvinget (u) og vinkelhastigheden (w) eller impulsmomentet (L)) hvergang den ydre påvirkning (motoren) er i samme fase. (se afsnit 2.2 om etablering af Poincaré-afbildninger)

2) Andre parametre kunne have været varieret, f.eks. motoramplituden, fjederkonstanten, inertimomentet af skiven osv. En særligt interessant parameter er inertimomentet (eller blot vægten) af det uligevægtsskabende lod. Systemets overgang fra lineært til ikke-lineært kunne hermed (man skulle så se bort fra faststofgnidningen) undersøges som en perturbation af det lineære system. En lignende fremgangsmåde for Hamiltonske systemer diskuteres i. kap. 6.

Når vi har valgt at variere dæmpningsspændingen, skyldes det to forhold. For det første har ønsket om den umiddelbare sammenligning mellem model og fysisk eksperiment fået en kraftig vægt, bl.a. pga. udarbejdelsen af øvelsesforløbet "Kaos". Netop dæmpningsspændingen er en umiddelbart varierbar parameter på det fysiske apparatur. For det andet, og til dels sammenhængende med det første, ligger begrundelsen for valget i, at det netop er (forts.)

Vi har simuleret med to motorspændinger, Q, nemlig 6,2 og 6,25 Volt, hvilket svarer til oscillatorperioder på hhv. 2,52525253 og 2,5 sek. Disse perioder ligger ganske tæt på systemets egenperiode, omend denne med det uligevægtsskabende lod ikke har en fikseret værdi, men snarere bevæger sig i et interval. Nedre grænse i dette interval gælder for svingninger lige omkring bunden i hver af de to potentialgrøfter. I kap 2.3 beregnede vi den naturlige frekvens her til ≈ ____ sek^{-1}, hvilket svarer til en egenperiode på knap ____ sek. Såvel faststofgnidningen, dæmpningen fra spolerne og skævheden i potentialet bidrager til at gøre egenperioden større. Eksperimentelt har det vist sig, at systemet hurtigst kan optage energi ved oscillatorperioder omkring 2,5 sek. Principielt går sytemets øvre egenperiode mod uendelig, idet det ved svingninger, der bringer loddet uendeligt tæt til toppunktet af potentialbarrieren, vil være uendelig lang tid om at vende. Imidlertid vil motoren længe inden være kommet i modfase, og enten tvinge loddet ned i grøften igen eller over bakken til den anden grøft. Netop dette forhold, at motoren har (antaget) fast frekvens, mens systemet har varierende egenfrekvens, deler systemets bevægelsesmønstre op i to generelle typer, nemlig:

A) bevægelser, hvor der ikke kan opsamles energi nok til at komme over barrieren, og bevægelsen derfor kun foregår i een grøft, og

B) bevægelser, hvor der kan opsamles tilstrækkelig energi hertil og bevægelsen derfor foregår i begge grøfter.

En tredie type af bevægelsesmønstre udgøres af dem, hvor pendulet vedvarende oppebærer energi på et niveau over poten-

---

note 2 fortsat) dæmpningen fra spolerne, som mest gennemskueligt styrer systemets energitab. Ønsket om fysisk relevans, har også indskrænket simuleringerne til kun at omhandle fysisk relevante parametre og sæt af begyndelsesbetingelser.

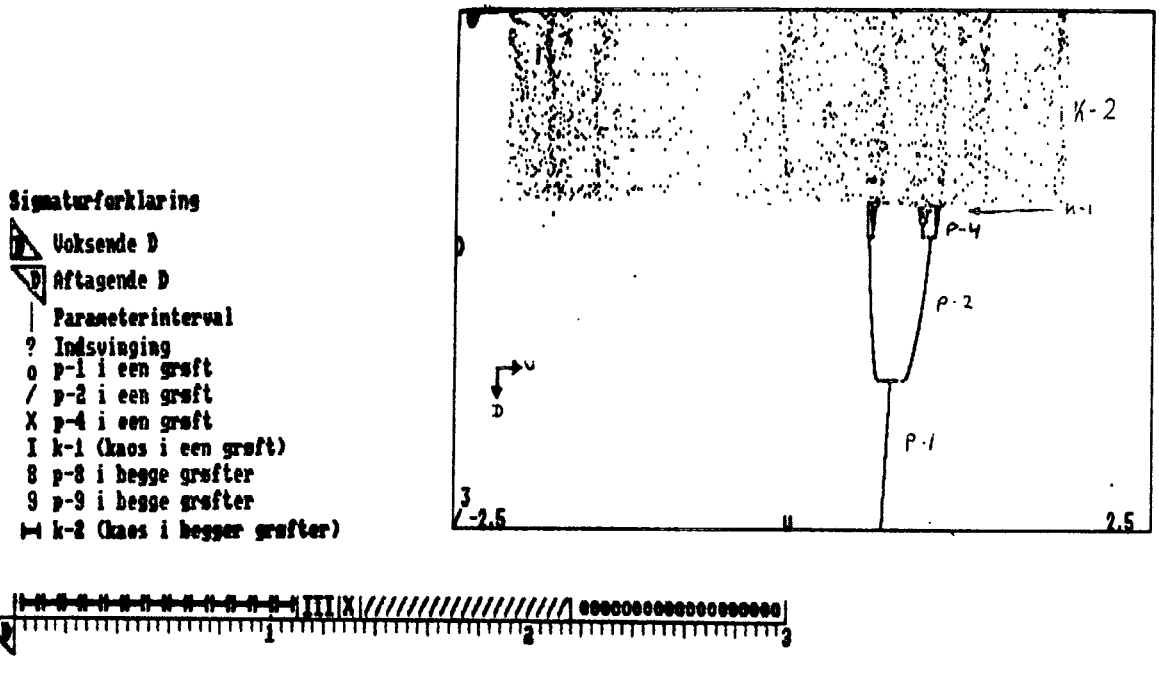
En systematisk og fuldstændig undersøgelse af modellen ville kræve, at alle 8 parametre, som indgår i modellen, skulle varieres. Desuden skulle der principielt ved hver kombination af parameterværdier indsvinges uendeligt længe for alle sæt af begyndelsesbetingelser.

tialbarrieren, og bevægelsesmønsteret derved bliver periodisk igen. På grund af faststofgnidningen (såvel i det fysiske eksperiment som i simuleringen) er det dog umuligt for systemet at optage så megen energi, hvorfor vi ikke yderligere vil beskæftige os med denne type.

5.2.2 Oversigt

Vi har primært søgt efter forskellige indicier for, at modellen kunne udvise kaos. I vores søgen herefter er vi sandsynligvis kommet nogenlunde rundt i de vigtigste bevægelsesmønstre, modellen indeholder. I det følgende giver vi en oversigt herover. Vi skal samtidig diskutere nogle problemer i modellen omkring indsvingning, strukturel stabilitet, multistabilitet og vækstrampens betydning herfor. Fig.1 viser en simulering, hvor parameteren for dæmpningsspændingen D er

Fig.1 Bifurkationsdiagram; D aftagende fra 3 til 0 Volt [3].



3) D ændres lineært med tiden; se appendix V om vækstrampens virkemåde. Simuleringen beskriver 10000 sek. Motorens periode er her 2.5 sek. Tallinien under fig.1 beskriver flg. bevægelsesmønstre: i D-intervallet [3;2.16] findes periode-1 (p-1) attraktorer. I intervallet fra [2.16;1.34] findes (svagere) p-2 attraktorer; for D ϵ [1.34;1,26] er der p-4 attraktorer. For D ϵ [1.26;1.1] er systemet i forskellige kaotiske attraktorer i den højre grøft (k-1). For D ϵ [1.1;0] udviser systemet kaos i begge grøfter (k-2).

varieret i det fysisk relevante område, nemlig fra 3 til 0 Volt. Det ville ikke være urimeligt at antage, at vi gennem denne variation ville se de fleste af modellens fysisk relevante karakteristiske bevægelsesmønstre repræsenteret.

Som "kort" over attraktorer i modellen, et såkaldt bifurkationsdiagram, lider fig.1 dog af to alvorlige problemer: Det kan dels være vanskeligt at afgøre, om et mønster i diagrammet repræsenterer en indsvingningsfase, eller en reel attraktor. Dels kan det ikke siges, om der findes andre attraktorer ved de pågældende parameterværdier end dem, diagrammet viser.

Indsvingning

Når den automatiske variation af bifurkationsparameteren anvendes, som f.eks. i simuleringen bag fig.1, får systemet særegne vilkår for indsvingning[4]. Den "kontinuerte" ændring af D flytter lige så "kontinuert" dén attraktor, systemet måske var ved at indsvinge til. Det er ikke et reelt problem, sålænge en attraktor er klart dominerende i forhold til evt. andre attraktorer[5]. Er dette tilfældet vil trajektorien hurtigt nærme sig attraktoren selv om systemet udsættes for ret store variationer. Men jo mindre dominerende attraktoren bliver, des mere kritiske bliver de perturbationer, computeren nødvendigvis foretager, når den afrunder (her regnes med max. 9 betydende cifre). Trajektorien kan bringes ud af attraktoren - eller af dens stabile mangfoldighed, hvis den endnu ikke var indsvinget. Systemet kan så begynde indsvingning til en anden attraktor, hvis der er tale om multistabilitet, eller begynde en ny indsvingningsfase til den samme attraktor.

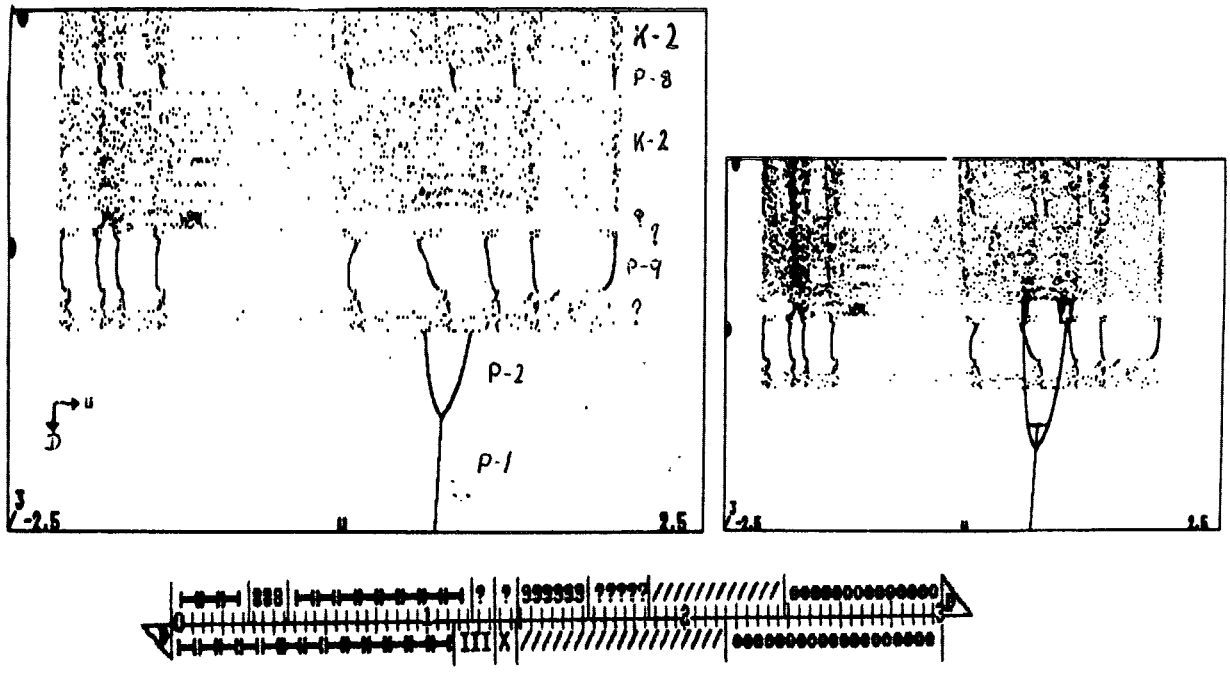
---

4) Principielt skal der indsvinges uendeligt længe til en attraktor. I praksis siges systemet at være indsvinget, når afstanden til attraktoren er af samme størrelsesorden som usikkerheden på beregningen. Udfra denne definition varier modellens indsvingingstider fra nogle få sek. helt op til en halv time.

5) Se kap. 3 om Liapunov eksponenter. For at en attraktor kan siges at være dominerende kræves to ting: dels skal rumfanget af dens stabile mangfoldighed være stort i forhold til rumfanget af evt. andre attraktorers stabile mangfoldigheder. Dels skal attraktoren være stærk i det område af faserummet trajektorien befinder sig, svarende til, at attraktorens Liapunov eksponent er meget negativ.

Vi kan få en lidt bedre baggrund for at vurdere vækstrampens betydning samt eksistensen og styrken af de attraktorer, fig.1 viser, ved at foretage den omvendte simulering. Vi lader så D vokse fra 0 til 3, og lader begyndelsesbetingelserne være systemets tilstand ved afslutningen af den første simulering. Hvis systemet var på en attraktor, vil det altså stadig være på den, når denne simulering starter. Hvis endvidere de attraktorer, vi så i den første simulering, er eneeksisterende ved hver deres parameterværdi-interval, vil systemet efter al sandsynlighed atter svinge ind til disse attraktorer på tilbagevejen. Fig.2a viser, at det ikke sker.

Fig.2a og b Bifurkationsdiagram for voksende D, sml. fig.1.



Sammenholder man tallinierne for fig.1 og 2a, hvilket vi gør under fig.2a, ses det, at der i de to simuleringer optræder forskellige attraktorer ved samme parameterværdier. Det tyder på multistabilitet. I fig.1 ses f.eks. p-2 i det interval, hvor der er k-2 og p-9 i begge grøfter i fig.2a, mens p-4 og k-1 kun optræder i fig.1.

Samtidig ses de samme attraktorer ved forskellige parameterværdier, hvilket tyder på indsvingningsproblemer. F.eks. er

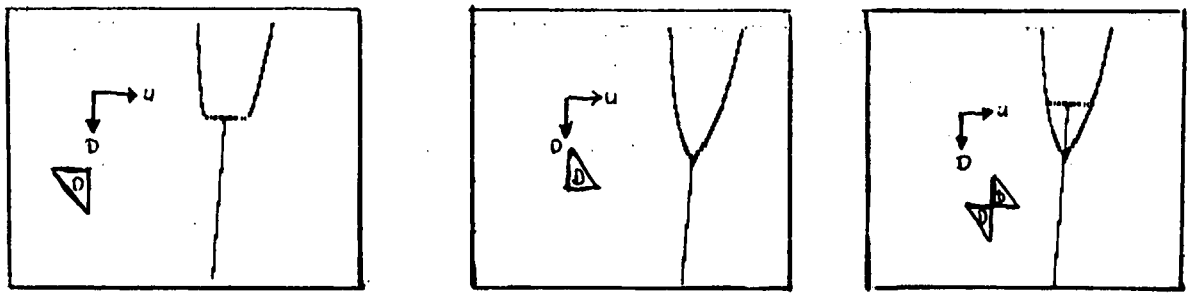
der k-2 i langt større parameterområder i fig.2a end i fig.1 [6] mens p-1 og p-2 til gengæld findes i større parameterområder i fig.1.

Ved at lægge fig.1 og 2a sammen (fig.2b), ses det, at der for p-1 og p-2 sandsynligvis er tale om de samme attraktorer.[7] Der er dog en forskel i bifurkationsværdierne, hvilket bringer os frem til diskussionen af begyndelsesbetingelsernes betydning for bifurkationsdiagrammerne.

Begyndelsesbetingelser

Fig.3a, b og c. viser forstørrelser af fig.1 og 2a omkring bifurkationen mellem p-1 og p-2 med hhv. voksende og aftagende dæmpningsspænding. Det ses, at der tilsyneladende er tale om en hysterese omkring bifurkationspunktet. Det skyldes, at systemet bliver på den grænsecykel, det er indsvinget til henover bifurkationspunktet, hvor den nye og periodefordoblede

Fig.3a, b og c Periodefordoblings bifurkation.



grænsecykel opstår.[8] Når systemet passerer bifurkationspunktet "nedefra" vedbliver den at være på dén grænsecykel. Systemet når ikke at indsvinge til den nye periodefordoblede

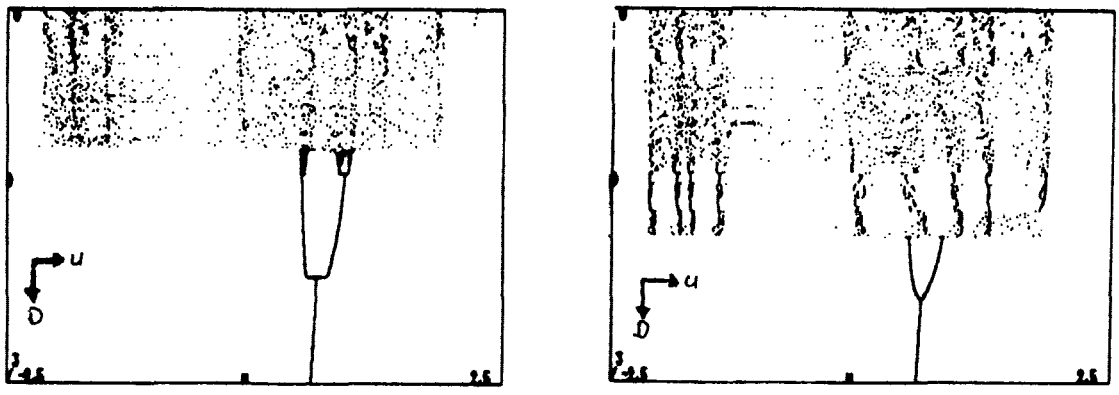
---

6) Der kan dog også være tale om forskellige k-2 attraktorer.
7) Systemet er symmetrisk omkring u=0, så det kunne ligeså godt være havnet i venstre grøft. P.g.a. symmetrien vil der være de samme attraktorer dér, omend selve plottets form vil være noget anderledes i kraft af motorpositionens betydning for aflæsningsøjeblikket. Det svarer til at Poincaré-snittet lægges et andet sted i faserummet.
8) Jvf. kap. 4 svarer det til, at egenværdien af Floquet-matricen bliver -1 i bifurkationspunktet. Herved splitter punktet i Poincaré-afbildningen op i to som skiftevis ligger på hver sin side af det oprindelige punkt.

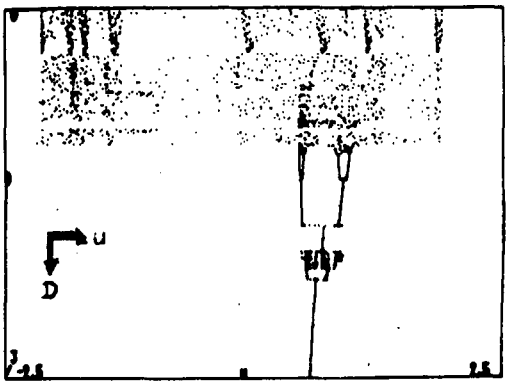
grænsecykel, fordi denne hele tiden ændres, i kraft af ændringen af D. Når forskellen mellem de to grænsecykler bliver tilstrækkelig stor indfanges systemet hurtigt af den nye attraktor, og begynder at bevæge sig i den nye grænsecykel. Det svarer til det T-lignende mønster i fig.3a. Passeres bifurkationspunktet "ovenfra", vil systemet blive på den dobbelte attraktor, indtil dén forsvinder, og systemet herefter svinger ind til den ny attraktor. Det giver anledning til Y-mønsteret i fig.3b. Forskellen mellem de to indsvingningsforløb fremgår af fig.3c. Der er ikke tale om, at de to attraktorer er sameksisterende i "overlappet". Man kan derimod sige, at det tager et stykke tid for en attraktor at blive tilstrækkelig manifesteret til at indfange trajektorien fra det bevægelsesmønster, systemet var indsvinget til før bifurkationen. Starter man derimod simuleringer med nye og tilfældige begyndelsesbetingelser hver gang man ændrer bifurkations parameteren, vil "hysteresen" kunne undgåes, og bifurkationsværdien kunne dermed fastlægges nøjere.

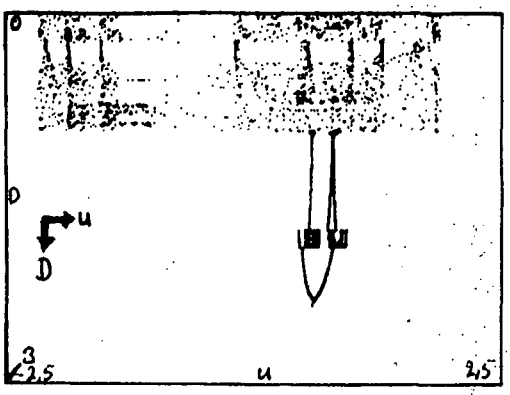
Vi vil afslutte denne oversigt med i fig.4 at vise en række bifurkationsdiagrammer. Der er startet fra forskellige begyndelsesbetingelser og/eller med forskellige vækstramper for dæmpningsspændingen.

Fig.4 Bifurkationsdiagrammer med forsk. vækstrater (dD/dt)

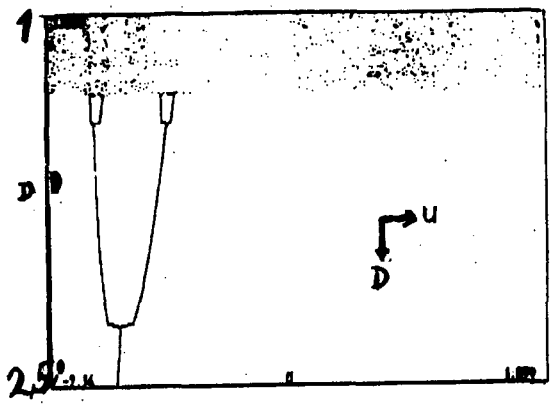


dD/dt=3 10⁻⁴ *dD/dt=-3 10⁻⁴*



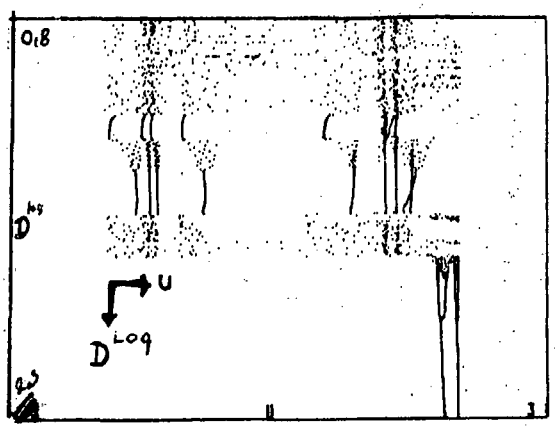


dD/dt=2.3 10⁻⁴



dD/dt=1.3 10⁻⁴

dD/dt=-2.3 10⁻⁴



dD/dt=2.13 10⁻⁴ [9]

Det kan opsummeres, at vi ikke udfra oversigten med sikkerhed kan sige, at der netop ved en parameterværdi findes netop een bestemt attraktor. Ejheller kan vi med sikkerhed sige om denne attraktor (for så vidt den overhovedet eksisterer netop dér) er aleneeksisterende, endsige om den er dominerende. Endelig kan det siges, at måden bifurkationsparameteren varieres på, og fra hvilket udgangspunkt, har stor indflydelse på, hvilket bevægelsesmønster, systemet får.

At der findes attraktorer i forskellige intervaller er der ingen tvivl om, ligesom der heller ikke er tvivl om, at der i visse parameterintervaller er multistabillitet.

---

9) Her er Q=6.2 V., mens Q i de øvrige diagrammer i oversigten er 6.25 V. Forskellige skaleringer (anført i de enkelte diagrammer).

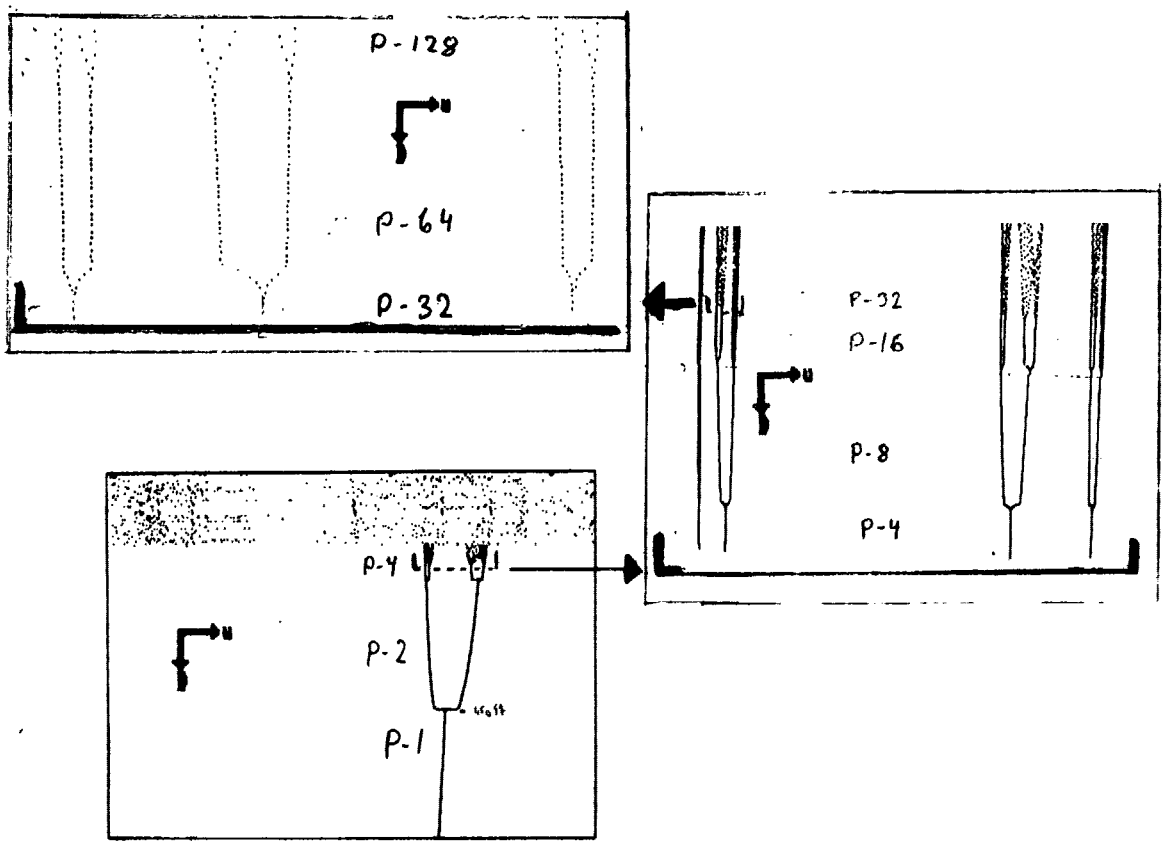
5.2.3 Fire indicier på kaos

Vi skal i det følgende gennemgå en række simulationer som på fire måder indicerer kaos i modellen. Vi skal diskutere tilstedeværelsen af en periodefordoblingskaskade som vej til kaos, vise eksempler på fraktale Poincaré-snit, undersøge modellens følsomhed overfor variationer af begyndelsesbetingelser, når systemet er på en kaotisk attraktor, og endelig skal vi vise eksempler på intermittens i modellen.

Periodefordoblinger

Det første indicium er systemets periodefordoblingskaskade. I oversigten viste vi en række simulationer (fig.1, 2 og 4), hvor dæmpningsspændingen D "kontinuert" blev ændret. På flere af dem, hvor D formindskedes kunne vi se de to første periodefordoblinger. Ved passende indstillinger af vækstrampen for D, er det lykkedes at få systemet til at bifurkere i alt 7 gange til en periode-128. Se fig.5.

Fig.5 Bifurkationskaskade



Et karakteristisk (og måske universelt) træk ved en bifurkationskaskade er den måde, bifurkationspunkterne ligger i forhold til hinanden. Mitchell Feigenbaum har vist[10] at flg. relation

$$\delta_n \equiv \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\lambda_{n+2} - \lambda_{n+1}}$$

(hvor λ er parameterværdien i bifurkationspunktet og n er index for bifurkationen) hurtigt bliver en konstant

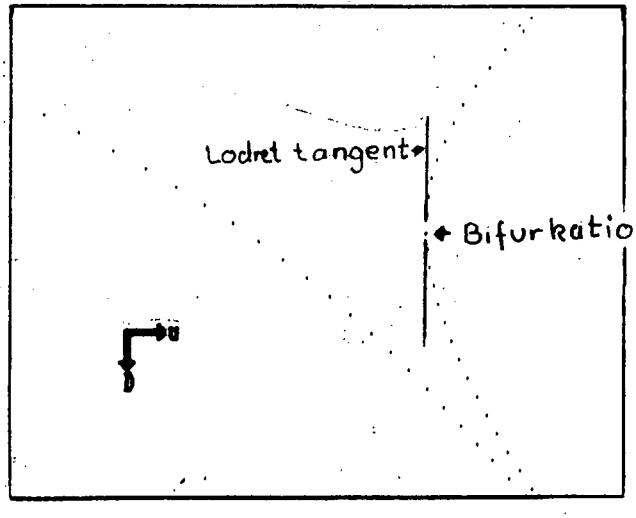
$$\delta_\infty = 4.6692016....$$

Konstanten er empirisk konstateret for en lang række fysiske systemer. Det er dog ofte (som her) vanskeligt at fastlægge de enkelte bifurkationsværdier, jvf. diskussionen ovenfor i forbindelse med fig.3.

Da bifurkationspunkterne ligger stadigt tættere, bliver parameterværdiens nøjagtighed naturligvis også mere aktuel.

Fig.6 antyder vanskeligheden ved at afgøre det præcise punkt, hvor trajektorien skifter fra den ene grænsecykel til den anden.

Fig.6 Forstørrelse af 1.bifurkation fra fig.5.



I vores beregninger har vi taget parameterværdien dér, hvor den ene gren har lodret tangent, da det først er her, de bifurkerede punkter i Poincaré-snittet ligger på hver sin side

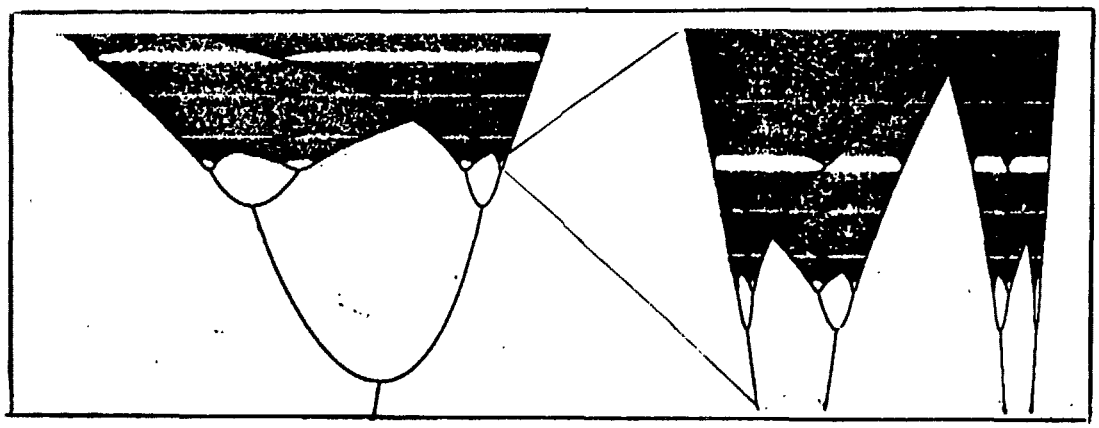
10) Los Alamos Science/summer 1980, s. 5.

af punkterne fra p-1 grænsecyklen[11].

Antageligt p.g.a. de ovennævnte problemer, er det ikke lykkedes os at bestemme en tilfredsstillende grænseværdi for δ. Vores δ_n værdier ligger mellem 3 og 7 i de bifurkationskaskader, vi har bearbejdet.

Et vindue er et interval af parameterværdier, hvor systemet - efter at have været i kaos - atter indfanges af en periodisk attraktor. Vi har ikke fundet vinduer af en slags, som kan sammenlignes med dem fra "figentræet" fig.7. De let detekterbare vinduer ("store" parameterintervaller) optræder først efter, at de to "grene" fra 1.bifurkation har forgrenet sig ind over hinanden.

Fig.7 "Figentræer"[12]



Før dette sker, er vores system skiftet til den anden klasse af bevægelsesmønstre, nemlig dem, som foregår i begge grøfter. Man kunne have forventet at se et p-6 vindue, som optræder i figentræet, før grenene fra 1.bifurkation når indover hinanden. Det har imidlertid ikke kunnet lade sig gøre at identificere, muligvis p.g.a. af det ekstra ikke-lineære led fra faststofgnidningen.

---

11) Jvf. note 8.
12) Om "Figentræer" se f.eks. tidsskriftet "Paradigma" nr 1., 1986 s. 35-47.

Fraktale Poincaré-snit

Her skal vi blot give et par eksempler på fraktale Poincaré-snit, vi har set[13].

Vi har tidligere diskuteret problemerne omkring indsvingning, når vækstrampen anvendes. I nedenstående afbildninger er

Fig.8a og b (u,t)-plot[14] og Poincaré-snit af k-1 med udsnit

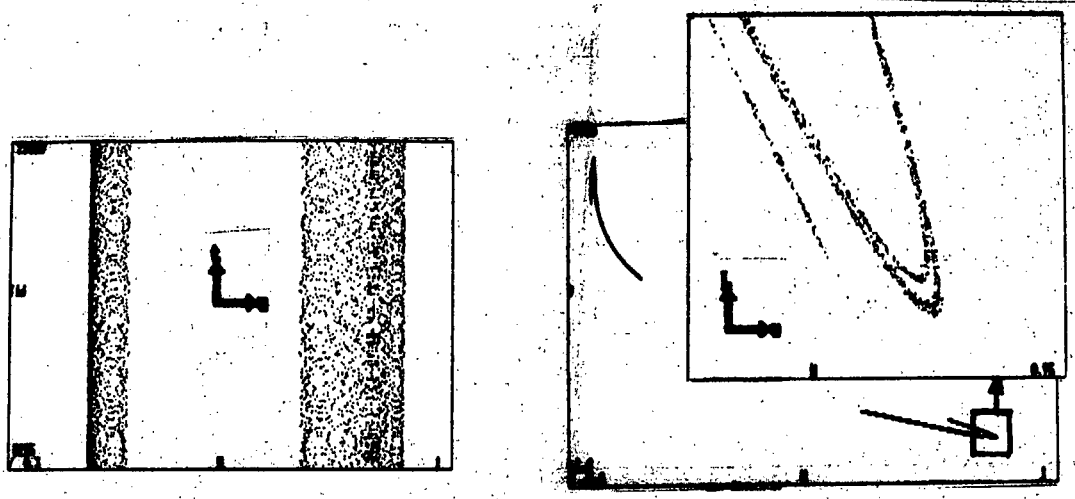
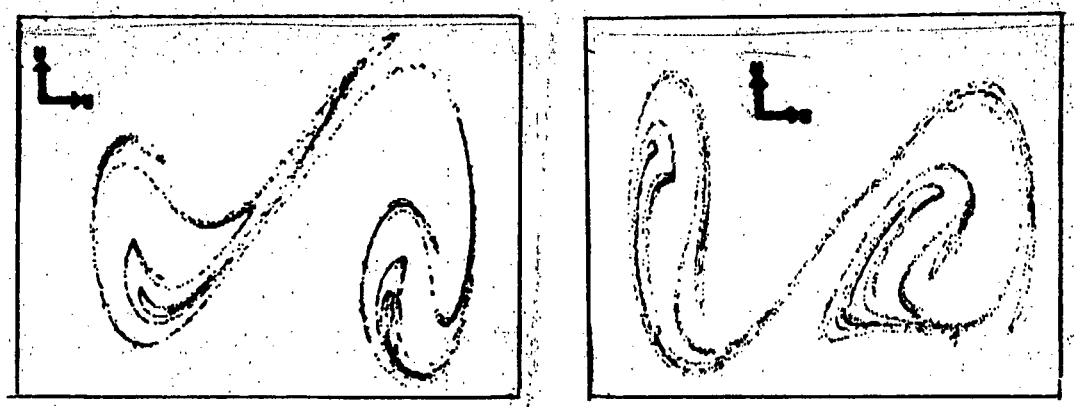


Fig.9a og b Poincaré-snit af k-2 med Q=6,2 og Q=6,25[15]



13) "CTS"'s lagringsfunktion udelukker yderligere detaljering, som ville være nødvendig, hvis selvsimilaritet skulle kunne konstateres. De fratale strukturer fremtræder dog rimeligt tydeligt.

14) (u,t)-plottet er konstrueret på samme måde som bifurkationsdiagrammerne, blot fastholdes D, og u plottes derfor i f.h.t. til den simulerede tid.

15) I kap. 3 om Liapunov eksponenter har vi udregnet den fraktale dimension (informationsdimension) for attraktoren, vi viser i fig. 9a til 1.21

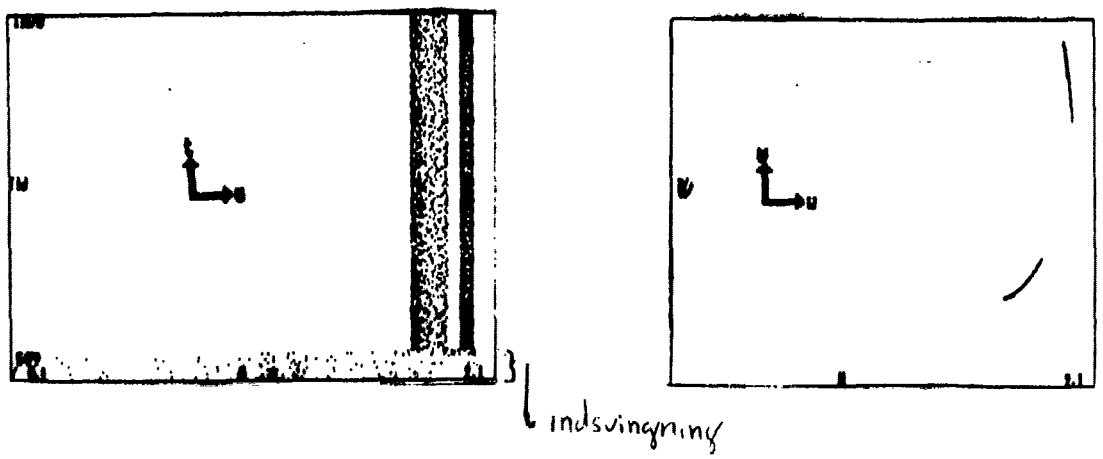
D fastholdt, og selvom der også her er tale om indsvingningsfaser førend systemet indfanges af de her viste attraktorer, udviser de en stor strukturel stabilitet. Ret hurtigt under simuleringerne træder grundtrækkene i mønstrene frem, og videre simulering udfylder blot disse træk. På denne måde vidner disse Poincaré-snit om tilstedeværelsen af dominerende kaotiske attraktorer i modellen.

Følsomhed overfor variationer af begyndelsesbetingelser

Som vi skrev i kap. 3, kan en kaotisk attraktor bl.a. defineres ved, at der skal være mindst een positiv, og mindst een negativ Liapunoveksponent, som konvergerer mod endelige værdier. Een konsekvens heraf er, at to trajektorier, som er indfanget af den pågældende kaotiske attraktor, men som er startet med forskellige begyndelsesbetingelser vilkårligt tæt på hinanden, vil divergere ekponentielt fra hinanden. De skal dog ikke varieres mere end, at de stadig er "på" attraktoren. Vi skal udfra en sådan variation af modellen i det følgende give indicier for at en given attraktor er kaotisk.

Først må systemet svinge ind til attraktoren. Det sikres gennem en lang (diskret) simulation, som udviser stor stabilitet i udfaldsrum og struktur i Poincaré-snit.

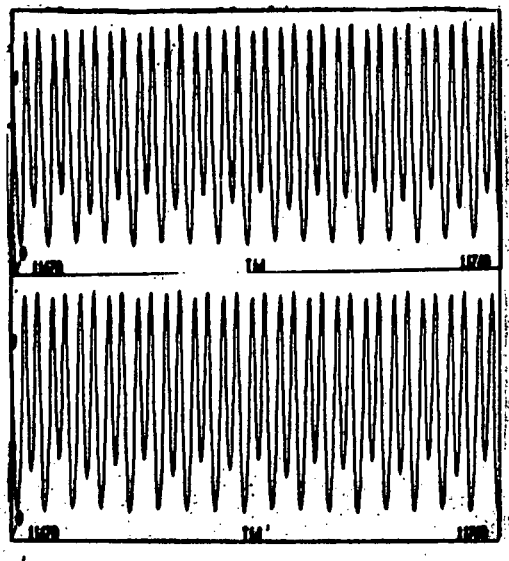
Fig.10a og b (u,t)-plot og Poincaré-snit af k-1.



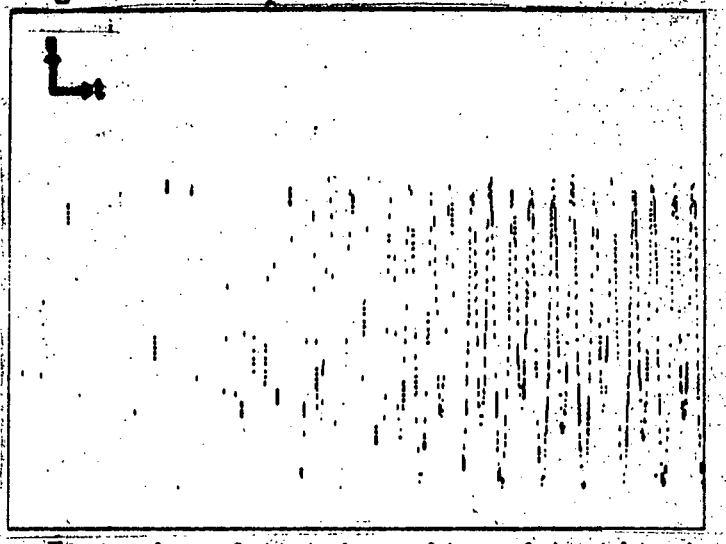
Herefter simuleres to forløb kontinuert udfra en tilstand på attraktoren. Værdien for impulsmomentet er i det ene forløb blot varieret fra $-3.3570605587\ 10^{-3}$ til $-3.357\ 10^{-3}$. Plot af de to forløb sammenholdes.

Fig.11a, b og c Sammenligning af (t,u)-plot af de to forløb.

a



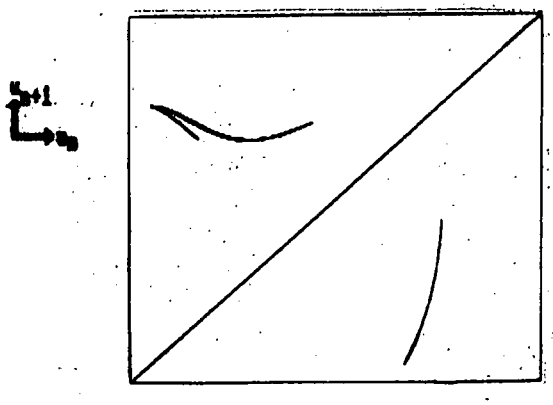
b

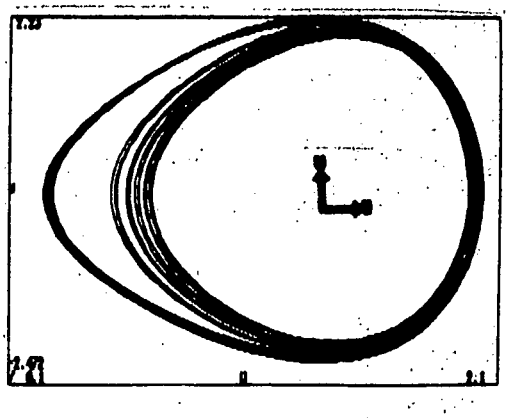


c Her er kun plottet de punkter af trajektorierne, som ikke er sammenfaldende i fig. 11a og b

Trajektoriernes divergens fremgår tydeligt, omend det ikke er muligt udfra disse figurer at afgøre, om den er eksponentiel. For det første fordi divergensen først set over lang tid konvergerer mod en eksponentiel afvigelse (hvorved Liapunov-eksponenten bliver konstant). For det andet fordi det kun gælder for systemets tilstand i faserummet som helhed, mens vi her kun ser på den ene tilstandsvariabel (udsvinget).

Fig.12a og b Returafbildning og faseplot af attraktoren.





For det tredie gennemgår systemet for hver motorperiode såvel en foldning som et stræk (se fig.12a). Herved holdes systemet i fase med motoren (for bevægelser i een grøft) og indenfor et stærkt begrænset område af faserummet (se fig. 12b). Forskellen mellem de to forløb kan derfor ikke i (t,u)-plottet blive større, end at der ikke er sammenfald af punkter - afvigelsen "stopper".

For at konstatere, at trajektorien stadig er på attraktoren, simuleres systemets udvikling videre med de to kontinuerte simulationers nu vidt forskellige slutværdier for udsving og impulsmoment. Poincaré-snit heraf sammenholdes med hinanden, og med det første (fig.10b).

Fig.13a Sammenligning af Poincaré-snit af de to simuleringer.

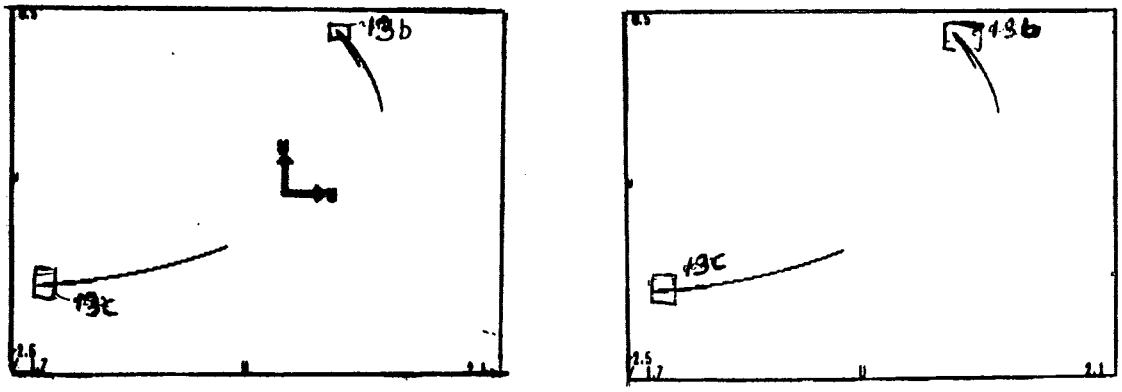


Fig.13b Sammenligning af detaljer fra fig.13a.

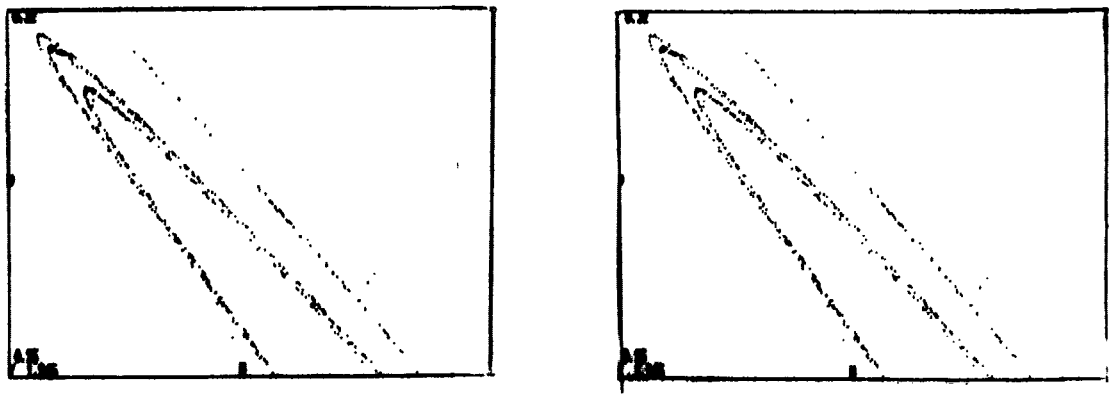
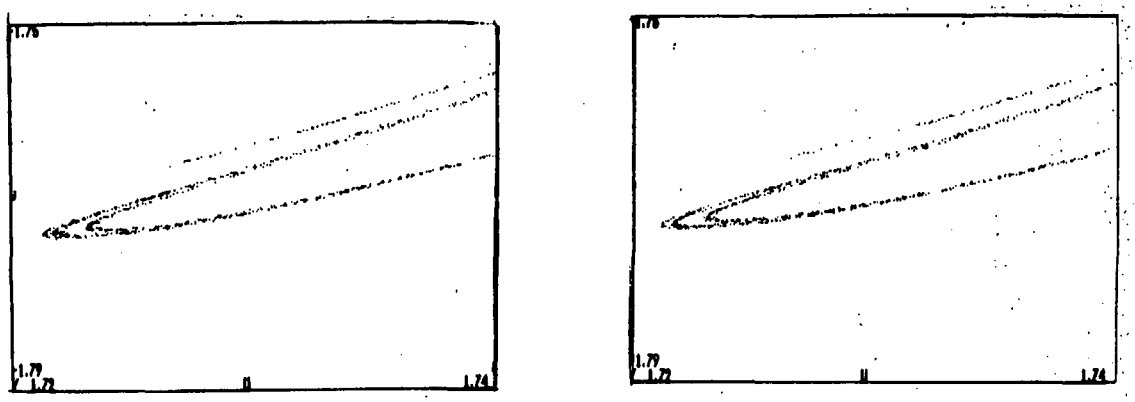


Fig.13c Sammenligning af detaljer fra fig.13a.

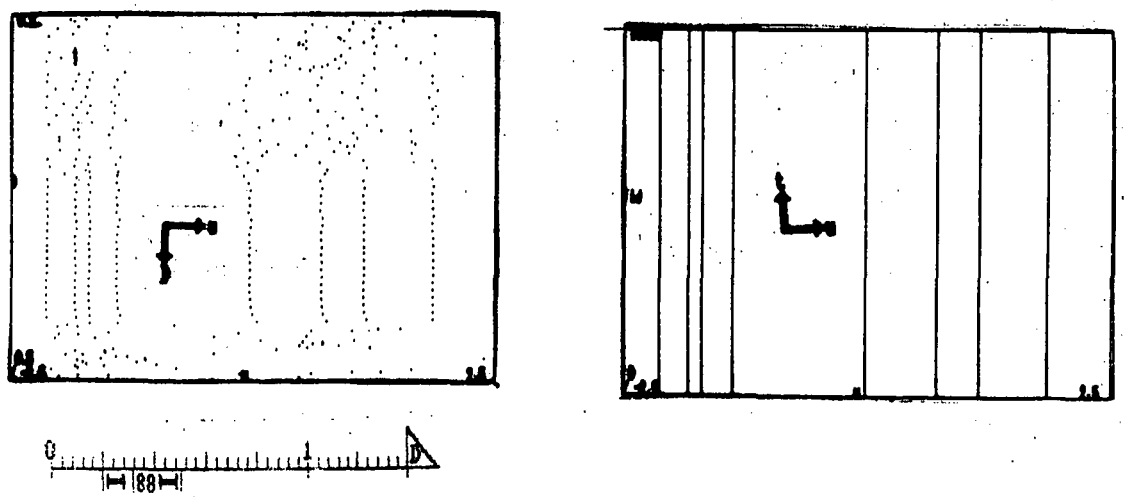


Vi har hermed sandsynliggjort tilstedeværelsen af en stabil kaotisk attraktor, og vist trajektoriens følsomhed overfor variationer af begyndelsesbetingelserne.[16]

Intermittens

Vi vil i dette afsnit undersøge et intermittent forløb i ottevinduet fra fig.2a.

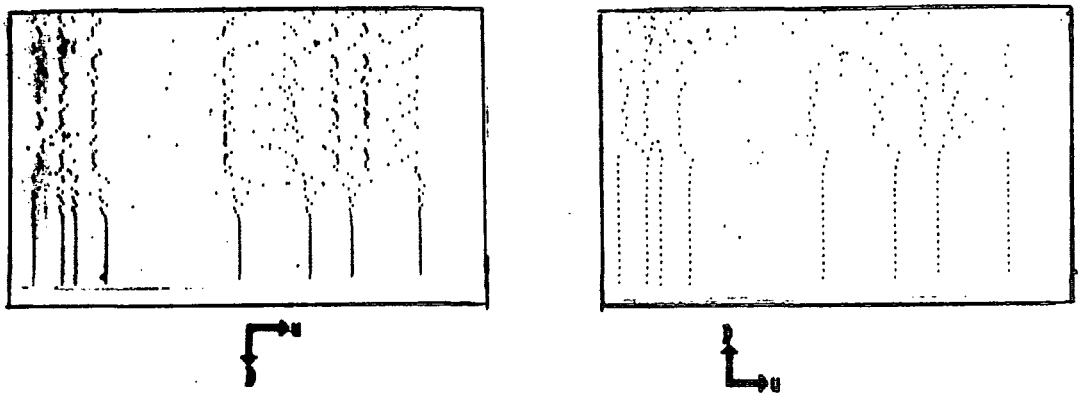
Fig.14a og b Ottevinduet og den stabile periode-8.[17]



16) Ved at anvende metoden fra kap. 4. til bestemmelse af Liapunoveksponenter, har vi fastlagt dem til 0.112, og -0.713 for denne attraktor.

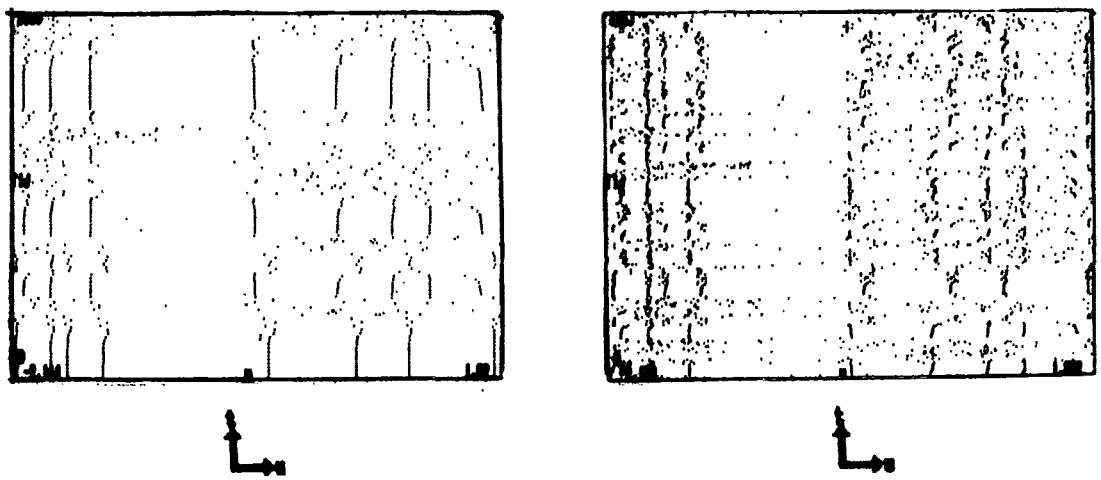
17) Q=6,25. Periode-8 vinduet strækker sig fra D=0.4231 til D=0.3172. Den stabile p-8 findes ved fast D=0.317217.

Fig.15a og b Øverste og nederste grænse for vinduet.[18]



Simulerer vi nu med faste D-værdier tættere og tættere til "grænsen"bliver de laminare faser stadigt kortere.

Fig.16a og b Intermittens ved hhv. D=0.422 og D=0.423



I fig.16 ser det ud som var der to periode-8 attraktorer, een med 4 perioder i begge grøfter, og een med 3 i venstre og 5 i højre grøft. Der er imidlertid blot tale om, at udsvinget under de kaotiske "bursts" kommer i modsat fase af motoren. Da output kun tages, når motoren er i samme fase, afsættes udsvinget forskelligt.[19]

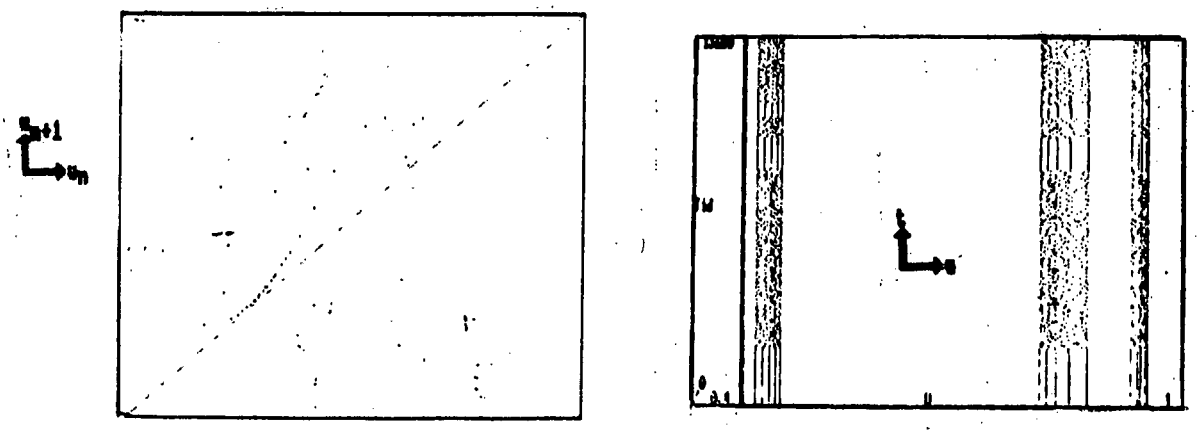
---

18) I fig.15b er D afsat voksende opad, mod normalt omvendt.
19) I den ene situation afblides toppene, i den anden bundene af svingningerne, som de f.eks. kan ses i fig.12b i afs. 5.1.3.

Begrænsninger i lagring af simulationerne vanskelliggør en statistisk analyse af hyppigheden af "burst's" og varigheden af de laminare faser i lighed med den i kap. 4 anviste mhp. nøjere beskrivelse af denne af systemets veje til kaos. Der kræves meget lange simulationer (flere i forlængelse af hinanden) ved hver værdi af D, for at den statistiske analyse bliver god. Returafbildningen i fig.30a taget omkring u=0.7 af den "lige" periode-8's bursts viser, hvor få punkter en lang simulation giver. "Tunnelen" mellem punkterne og identiteten $u_n=u_{n+1}$ kan kun lige anes.

Fig.17b viser et intermittent forløb omkring et 20-vindue i den højre grøft. Det samme argument som ovenfor gør sig også her gældende i fht. videre statistisk analyse. Figuren er medtaget for at vise et eksempel på intermittens i een grøft.

Fig.17a og b Returafbildning af "tunnel" og intermittens i højre grøft.



Opsummering

Vi har i de to foregående afsnit (5.1 og 5.2) diskuteret det uliniære torsionspendul, opstilling af en model herfor og simulation heraf. For torsionspendulets vedkommende kunne vi som belæg for tilstedeværelsen af kaos fremføre fire indicier, baseret på tidsfølger ((t,u)-plot): periodefordobling (1. og 2. bifurkation), intermittent foløb, ikke-periodiske bevægelser (k-1 og k-2) og ikke-reproducerbarhed. Nogle af indicierne er svagt dokumenterede, bl.a. p.g.a. den manglende mulighed for matematisk og statisktisk bearbejdning.

I gennemgangen af modelleringen måtte vi konstatere en række karakteristiske fænomener ved torsionspendulet, som det ikke var muligt at modellere i vores simulationsprogram, om overhovedet, nemlig: fastofgnidningen, motoramplitudens svingninger og skævheden i fjederpotentialet. Disse tre udgør alle ikke-linære elementer ved torsionspendulet.

I beskrivelsen af torsionspendulet i sin normale version uden det uligevægtsskabende lod, spiller disse elementer ingen nævneværdig rolle. At de derimod spiller afgørende ind i det her beskrevne pendul, skulle være fremgået. I modellen optræder kun to ikke-lineære led, nemlig kraftmomentet fra loddet og faststofgnidningen (tilnærmet). Vi har også her kunnet give fire gode indicer for tilstedeværelsen af kaos i modellen, nemlig: periodefordoblinger, fraktal-lignende Poincaré-snit, følsomhed overfor variation af begyndelsesbetingelser og intermittens. Også her har analysen været kvalitativ, omend bedre underbygget.

Havde formålet udelukkende været at undersøge modeller for kaos, burde vi nok have prioriteret dette arbejde. Imidlertid var hovedformålet med vores arbejde, at undersøge netop torsionspendulet for kaos. Hvad angår den kvalitative sammenligning mellem torsionspendulet og modellen, har den været tilfredsstillende. Men en kvantitativ overensstemmelse er ikke opnåelig med modelleringens mangler. Som udsigelseskraft overfor torsionspendulet, er det derfor ikke rimeligt at drive det videre med kvantiseringen af modellen.

KAPITEL 6
HAMILTONSKE SYSTEMER

Indledning

Karakteristisk for de systemer, vi hidtil har betragtet, er, at alle har været dissipative. Dissipationen medfører, som vi har set, at løsningerne til de enkelte systemer går mod grænsemængder, hvis volumen er 0. I nogle tilfælde bliver den tiltrækkende grænsemængde underlig - en strange attractor. Hvis det indtræffer er systemet kaotisk.

Kaos kan der imidlertid også være i systemer, der ikke dissiperer. Sådanne systemer kaldes konservative. Mere specifikt taler vi her om Hamiltonske systemer, der opfylder Liouville's teorem.[1] Det er hensigten med dette kapitel at se, hvorledes kaos kan opstå, og hvordan kaos 'ser ud' i den slags systemer.

Det er ikke almindeligt, at fænomener på det makroskopiske niveau er energibevarende. Der er sædvanligvis en eller anden slags friktion inde i billedet. Men på de to andre niveauer - det 'mikroskopiske' og det 'supermakroskopiske' - eller mere specifikt i kvantemekaniske og himmelmekaniske systemer er energien normalt antaget bevaret. Af bl.a. denne grund er der en vis raison i at undersøge konservative systemers langtidsadfærd. En anden bevæggrund er, at den statistiske mekanik bygger på en antagelse om, at et systems løsninger vil komme overalt på systemets energiflade. Denne antagelse betegnes den ergodiske hypotese. Der er almindeligvis tale om systemer bestående af et stort antal partikler ($N \to \infty$). Derfor har det interesse at afsøge de Hamiltonske systemers adfærd for $N \to \infty$.

I første afsnit (6.1) præciseres et formelt grundlag, der skal gøre det muligt at diskutere kaos i Hamiltonske systemer. I den forbindelse indses, at det betragtede systems faserum indeholder nogle tori, hvorpå bevægelserne finder sted. Disse tori bliver undertiden destruerede, når det integrable system

---

1) Liouville's teorem siger i det væsentlige blot, at et område af faserummet ikke ændrer volumen under dynamikken.

perturberes. De integrable systemers bevægelse foregår på invariante tori, der udfylder energifladen. Karakteren af disse tori kan ændres radikalt - de kan bryde sammen - når systemerne perturberes tilstrækkeligt. Det er derfor oplagt at spørge til, hvilke tori der først bryder sammen, og hvilke der holder skansen længst. Et delsvar kan hentes i et centralt teorem, det såkaldte KAM-teorem (Kolmogorov-Arnold-Moser). Vi giver i afsnit 6.2 en fortolkning af dette teorems effekter. Dette realiseres primært gennem betragtninger af en grundigt undersøgt afbildning: Standard afbildningen (eller Chirikov afb.).

Kapitlets sidste afsnit handler primært om, hvorvidt et Hamiltonsk system tilfredsstiller den ergodiske hypotese, hvilket som sagt har stor relevans for forbindelsen mellem den statistiske mekanik og den klassiske mekanik.

6.1 Det Hamiltonske grundlag

Traditionelt beskrives et Hamiltonsk system med d frihedsgrader ved d generaliserede koordinater q_i og d konjugerede impulser p_i. Faserummets dimension er da 2d. Systemets bevægelsesligninger kan udledes til[2]:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dot{q}_i = \partial H/\partial p_i & \text{og} \\ \dot{p}_i = -\partial H/\partial q_i\ , & \text{hvor} \end{cases}$$

$$H = H(q_1,\ldots,q_d,p_1,\ldots,p_d).$$

Hamiltonfunktionen, H, antages her at være systemets totale energi angivet som funktion af $\bar{q}$ og $\bar{p}$. Desuden antages H at være tidsuafhængig og konstant. H består af summen af det betragtede systems kinetiske energi, $T(\bar{q},\bar{p})$, og dets potentielle energi, $V(\bar{q},\bar{p})$. Altså er systemet beskrevet ved et differentialligningssystem bestående af 2d 1.ordens ligninger, samt en bevægelseskonstant, H.

---

2) Se f.eks. Hamilton, 1977, eller Arnold, 1978.

At systemet er konservativt, følger matematisk af, at divergensen af vektorfeltet, der frembringer flowet, er lig med 0:

$$\mathrm{div}(\dot{\bar{q}},\dot{\bar{p}}) = 0$$

Denne betingelse er ækvivalent med, at sporet, trDF, af den lineariserede afbildning, DF, af vektorfeltet:

$$(\dot{\bar{q}},\dot{\bar{p}}) = F(\partial H/\partial \bar{q}, -\partial H/\partial \bar{p})$$

er 0. Betingelsen er automatisk opfyldt, når H er passende glat. Det ses umiddelbart (her for d=2), idet:

$$DF = \begin{pmatrix} \partial^2 H/(\partial p_1 \partial q_1) & \partial^2 H/(\partial p_1 \partial p_2) \\ -\partial^2 H/(\partial q_2 \partial q_1) & -\partial^2 H/(\partial q_2 \partial p_2) \end{pmatrix}$$

og dermed er:

$$trDF = \partial^2 H/(\partial p_1 \partial q_1) + \partial^2 H/(\partial p_2 \partial q_2) - \partial^2 H/(\partial q_1 \partial p_1) - \partial^2 H/(\partial q_2 \partial p_2)$$

$$= 0 ,$$

fordi differentiationsordenen er ligegyldig.

Alle løsninger til (1) er beliggende på en hyperflade H=konstant. Derfor reduceres dimensionen af det oprindelige system til 2d-1. Hvis man yderligere indlejrer et Poincaré snit i energifladen vil dimensionen komme ned på 2d-2. Det gør det således muligt at få et overblik over, hvad der udspiller sig i et system med 2 frihedsgrader, idet Poincaré snittet herved bliver 2-dimensionalt.

Det er i de fleste tilfælde ikke muligt at løse (1), selvom det er symptomatisk, at lærebøger og kurser udi klassisk mekanik udelukkende medtager eksempler, der netop er integrable. For integrable systemer er det muligt at finde kanoniske

transformationer[3] af de givne koordinater og impulser, der gør systemet særlig simpelt og løsbart.[4]

Vi antager for et øjeblik, at vi står ansigt til ansigt med et integrabelt system. Det er da muligt at etablere en speciel kanonisk transformation nemlig til de såkaldte action-angle variable. Et særlig attraktivt træk ved denne transformation er, at den nye Hamiltonfunktion, K - også kaldet Kamiltonfunktionen - kun er afhængig af halvdelen af de nye variable. Betegnes angle variablerne med θ_i og action-variablerne med J_i, vil $H(\bar{q},\bar{p})$ transformeres til $K(\bar{J})$ = konstant. Derved bliver bevægelsesligningerne:

$$\dot{J}_i = -\partial K(\bar{J})/\partial\theta_i = 0$$

(2)

$$\dot{\theta}_i = \partial K(\bar{J})/\partial J_i = w_i(\bar{J}) = \text{konstant}$$

Det ses, at (2) umiddelbart kan integreres til:

(3) $$J_i = a_i \quad \text{og} \quad \theta(t) = w_i t + b_i \quad ,$$

hvor a_i og b_i er integrationskonstanter, der fastlægges af begyndelsesbetingelserne. Et sådant resultat svarer til d harmoniske oscillatorer. Dvs. bevægelsen foregår på en d-dimensional torus. Dette system kan hverken være kaotisk eller ergodisk. Kaos kan ikke forekomme, da systemet er integrabelt. Årsagen til ikke-ergodiciteten hænger på, at energifladen er (2d-1)-dimensional, mens bevægelsen er restrikeret til en d-dimensional flade. Derfor kan løsningerne ikke komme overalt på energifladen.

---

3) At en transformation er kanonisk vil sige, at bevægelsesligningerne i de nye variable har samme form som det oprindelige.

4) Det er dog ikke en simpel opgave at checke, om et givet system er integrabelt eller ej. En definitorisk metode er, at opskrive de generaliserede koordinater og impulser som potensrækker i de nye variable. Rækkernes ukendte koefficienter kan derefter fastlægges ved successivt at substituere rækkerne ind i Hamiltonfunktionen og i de oprindelige ligninger. Hvis rækkerne viser sig at konvergere, vil systemet pr. definition være integrabelt. Jvf. Helleman, 1980, og Birkhoff, 1927.

Som nævnt er Hamiltonske systemer almindeligvis ikke-integrable. Men det ekskluderer ikke muligheden for at opfatte et ikke-integrabelt system som sammensat af et integrabelt led og et perturbationsled:

(4) $$H_\delta(\bar{\theta},\bar{J}) = K(\bar{J}) + \delta H(\theta,J) \ ,$$

hvor δ er en lille perturbationsparameter. Man kan f.eks. opfatte $H(\bar{\theta},\bar{J})$ som en periodisk perturbation, hvor δ står for perturbationens amplitude. Det er denne ligning, som i næste afsnit udgør basis for fortolkningen af KAM-teoremet.

Vi antager i det følgende, at systemet under betragtning er 4-dimensionalt (2 frihedsgrader). Det meste af det følgende kan snildt generaliseres til højere dimensionale systemer, men

vi opnår ved reduktionen, at tingene bliver direkte applikabel til dobbeltpendulet. Ligningerne (2) og (3) bliver i udskrevet form til:

$$\dot{J}_1 = -\partial K/\partial\theta_1$$
$$\dot{J}_2 = -\partial K/\partial\theta_2$$

(2')

$$\dot{\theta}_1 = \partial K/\partial J_1 = w_1(J_1,J_2) = \text{konst.}$$
$$\dot{\theta}_2 = \partial K/\partial J_2 = w_2(J_1,J_2) = \text{konst.} \ ;$$

hvor

$$K = K(J_1,J_2) = \text{konst.}$$

hvilket ved integration giver:

(3') $J_1 = a_1$, $J_2 = a_2$, $\theta(t) = w_1 t + b_1$ og $\theta(t) = w_2 + b_2$

Endelig bliver lign.(4) til:

(4') $$H_\delta(\theta_1,\theta_2,J_1,J_2) = K(J_1,J_2) + \delta H(\theta_1,\theta_2,J_1,J_2)$$

Bevægelsen vil da for δ=0 foregå på en 2-dimensional torus, hvorved den er sammensat af 2 frekvenser (w_1 og w_2). Be-

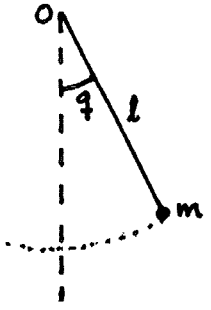
vægelsesmønstret vil afhænge af forholdet mellem frekvenserne. Et rationalt forhold implicerer periodiske løsninger, mens et irrationalt forhold medfører kvasiperiodiske løsninger. Også disse betragtninger skal benyttes i sammenhæng med KAM-teoremet.

6.2 KAM-teoremet og dets interpretation

Inden vi diskuterer kaos og KAM-teorem er det på sin plads at give et geometrisk billede af situationen. Det gøres nemmest ved at beskrive det almindelige penduls (d=1) bevægelse. Hamiltonfunktionen for pendulet kan indses at være:

$$H(q,p) = p^2/(2m) - mgl\cos(q)$$

Fig. 1: Et pendul med betegnelser.



H er lig systemets totale energi E, hvoraf p kan isoleres til:

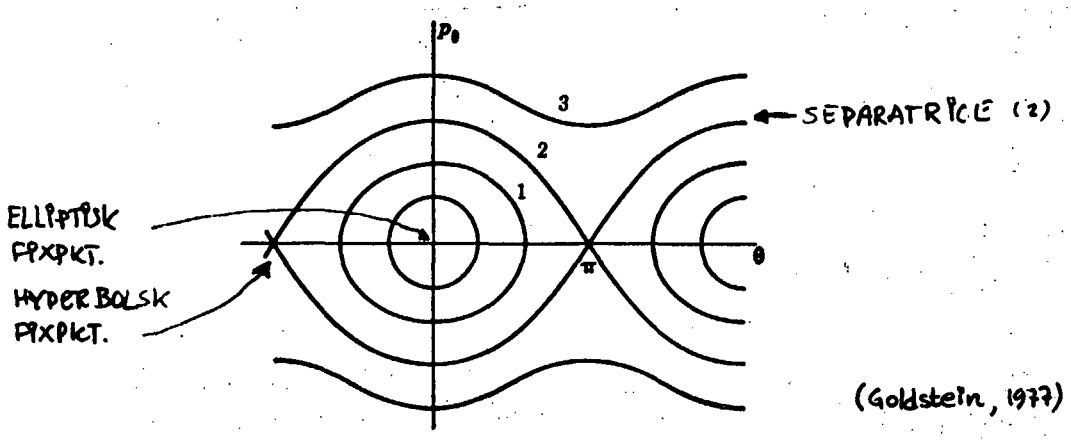
$$p = \sqrt{2m(E+mgl\cos(q))}$$

$$= \sqrt{2m^2gl(E/(mgl) - \cos(q))}$$

Hvis $E<mgl$, da vil $|\cos(q)|<E/(mgl)<1$, hvorfor der findes en maksimal udslagsvinkel q_m. Pendulet vil således svinge mellem $-q_m$ og q_m. Det giver i faserummet (q,p) anledning til en ellipse med centrum i origo. Den slags bevægelse kaldes libration.

Hvis derimod $E>mgl$, da vil q vokse, og pendulet roterer hele vejen rundt om ophængningspunktet. Mens q vokser, vil p være periodisk oscillerende. Grænsesituationen E=mgl fører i faserummet til separatricer, der adskiller de andre bevægelsestyper - libration og rotation (se fig. 2).

Fig. 2: Faseplot for fysisk pendul.



Hver af ellipserne indenfor separatricen er frembragt af een værdi af energien E. Punkterne A og B er hyperbolske fixpunkter, mens O er et elliptisk fixpunkt. Pendulsystemet kan ikke udvise kaos, idet det kun er 2-dimensionalt. I Hamiltonsk regi fordres mindst 4 dimensioner (da 3 er umuligt). Vi kan imidlertid bruge det geometriske indhold i pendulsystemet til at bygge videre på.

Med δ=0 kan vi opfatte fig. 2 som et Poincaré snit af flowet (2'), idet energifladen nu er en 3-dimensional flade, der indeholder bevægelsernes 2-dimensionale tori. Hver af disse udgør en mangfoldighed af begyndelsesbetingelser. Imellem disse findes to typer periodiske løsninger (fixpunkter) nemlig hyperbolske og elliptiske. De hyperbolske fixpunkter er bundet sammen af hinandens stabile og ustabile mangfoldigheder. Dette ses også på fig. 2, hvor den stabile mangfoldighed til A, $W^s(A)$, er lig med B's ustabile mangfoldighed, $W^u(B)$. Det er disse mangfoldigheder, der først ændrer karakter, når systemet perturberes.

2-dimensionale Poincaré snit kan repræsenteres af afbildninger af planen ind i planen. En forholdsvis generel afbildning af denne type er standardafbildningen:

$$J_{n+1} = J_n + k\sin(\theta_n)$$

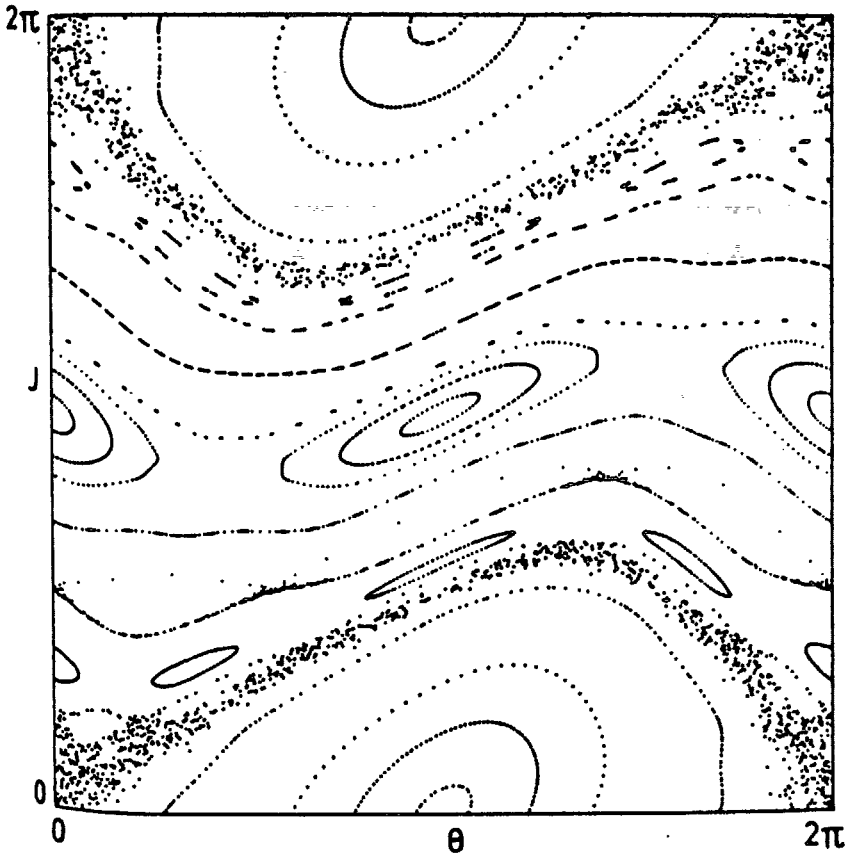
(5)

$$\theta_{n+1} = \theta_n + J_{n+1} \pmod 1$$

Her vil både θ_n og J_n tilhøre intervallet $[0;2\pi]$. k er sy-

stemparameteren (en bevægelseskonstant). Vi viser og kommenterer nedenfor en række kørsler af (4).[*]

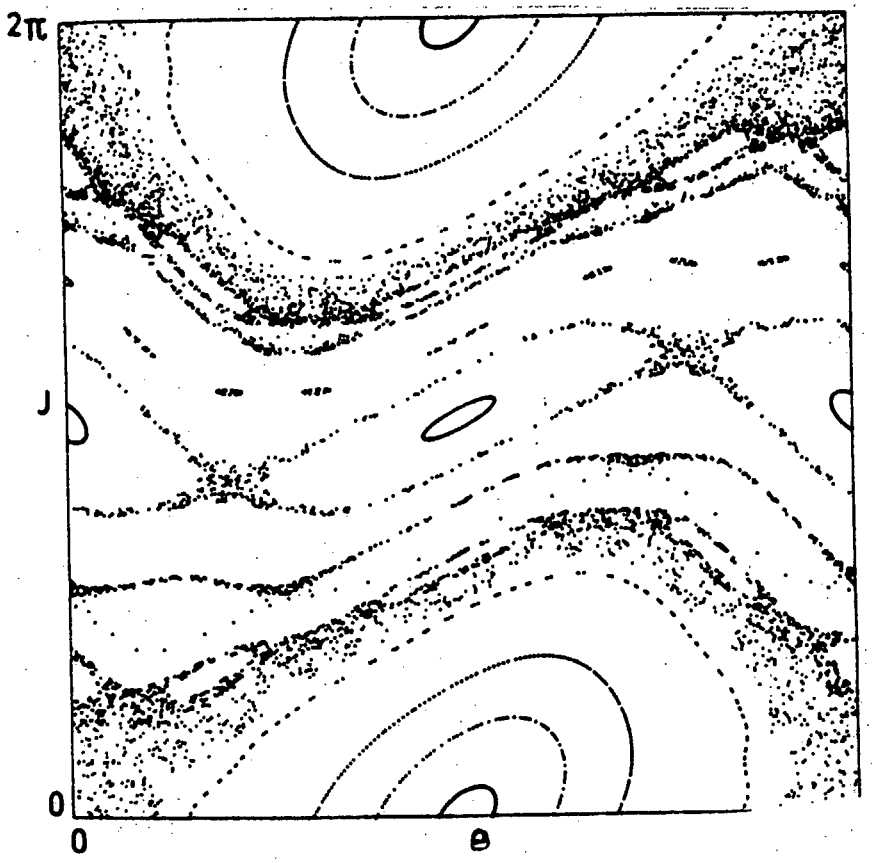
Fig. 3: Standardafbildningen for k=0.9.



De 'lukkede' kurver på figuren illustrerer kvasiperiodisk adfærd (for flowet). Det vandrette bælte i midten er topologisk set mage til forløbet i fig. 2. Der er dermed et hyperbolsk fixpunkt mellem det midterste ellipsesystem og hver af de 2 ydre. Disse forhold gør sig også gældende for de øvrige ellipsebælter. Når k hæves en anelse ses på fig. 4, at separatricerne er blevet fyldige - de mange punkter nær en separatrice er frembragt af en enkelt løsningskurve. Disse områder er kaotiske.

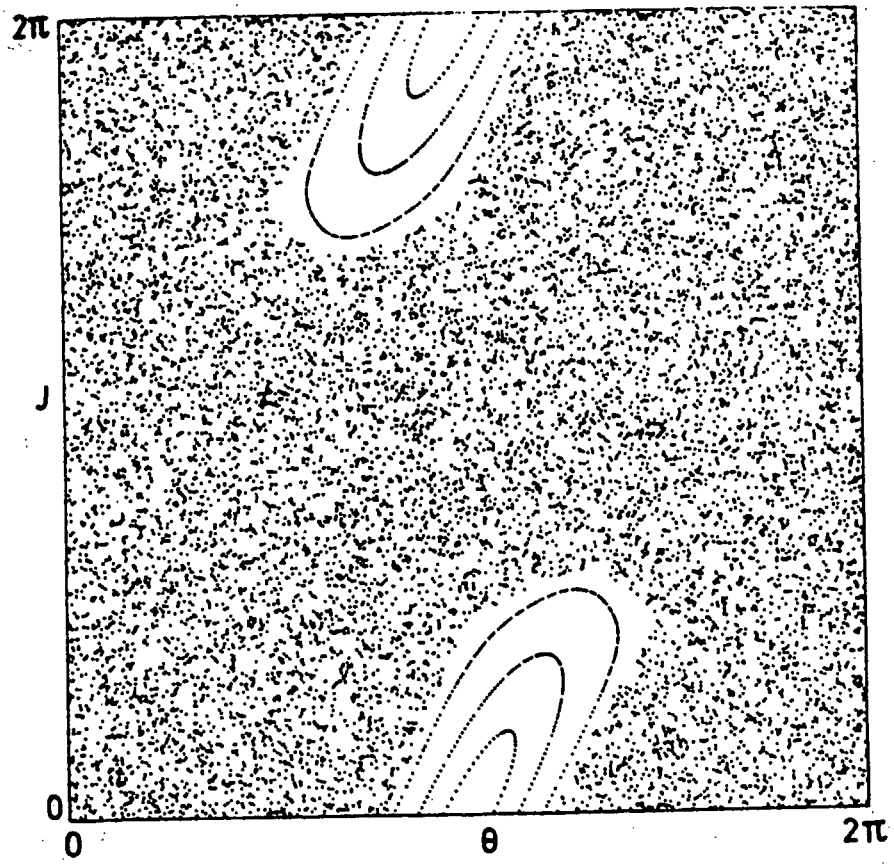
[*] Figurerne af standard afbildningen er sakset fra Thompson og Stewart, 1987.

Fig. 4: Standardafbildningen for k=1.0.



Hæves k-værdien yderligere ses, at det kaotiske er blevet mere udbredt:

Fig. 5: Standardafbildningen for k=3.



For at kunne kommentere denne proces, må vi nævne et par ord om KAM-teoremet. Det udtrykker, at de fleste af det integrable systems invariante tori overlever en tilpas lille perturbation ($\varepsilon>0$ er lille). Dette fremgår af forløbet ovenfor. Vi kalder disse overlevende tori for KAM-tori.

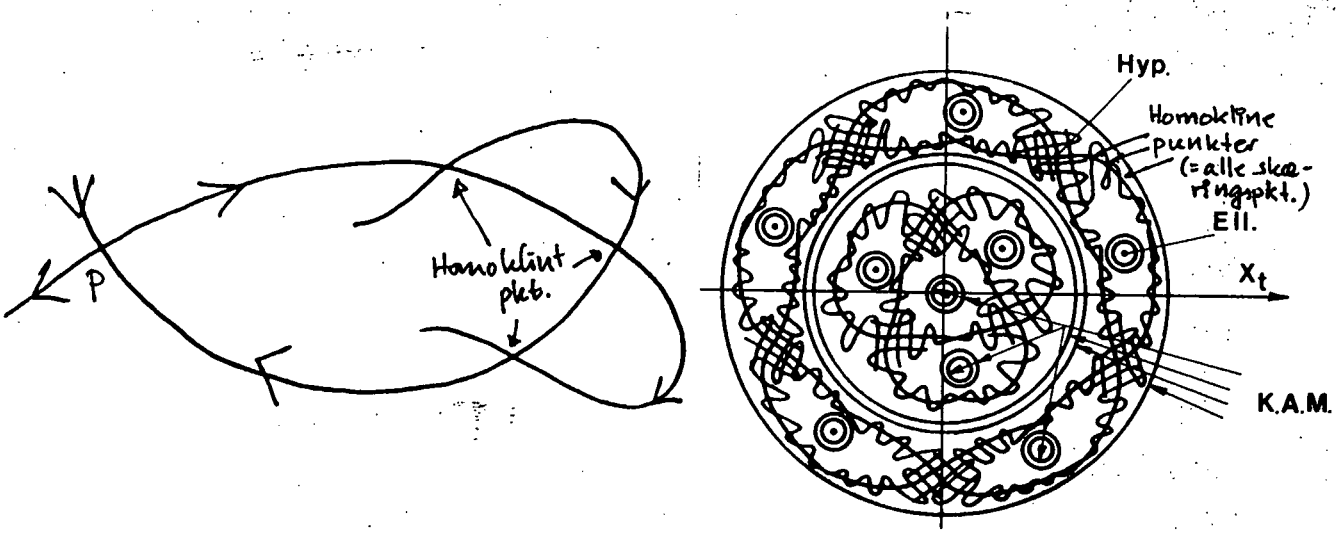
Bevægelseskvaliteten er kvasiperiodisk, idet frekvensforholdet mellem de konkurrerende cirkelbevægelser på torusfladen er irrationalt. Der er imidlertid forskellige grader af irrationalitet. Det mest irrationale tal er det gyldne snit, $(1+\sqrt{5})/2$, eller relaterede tal (f.eks. det gyldne snits inverse). Tori, hvorpå bevægelsens vindingstal (eller rotationstal=frekvensforholdet) er lig det gyldne snit, vil så være relativt stabile overfor perturbationer. Det godtgør, at de KAM-tori, der overlever længst, må have vindingstal, der minder om det gyldne snit. Disse tori kaldes noble KAM-tori.

Det resterer nu at se, hvorledes de første tori bliver nedbrudt. Vi har delvist været inde på argumentet herfor i kap. 2. Et hyperbolsk fixpunkts stabile magfoldighed kan i Poincaré snittet skære et andet hyperbolsk fixpunkts ustabile mangfoldighed, hvorved der opstår et homoklint punkt.[6] Vi har set, at eksistensen af et sådant imlicerede en uendelighed af homokline punkter - i nærheden af fixpunkterne. Denne proces er skitseret i fig. 6.

---

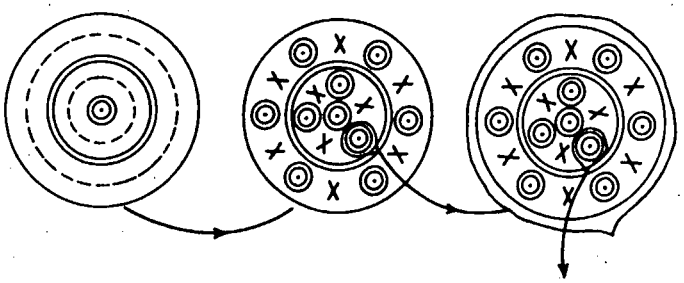
6) I kap. 2 nævnte vi ikke, at det kun er fixpunkter for afbildninger (altså ikke for flows), der kan give anledning til homokline punkter. Det er der hermed rådet bod på.

Fig. 6: Perturbationseffekter nær et hyperbolsk fixpunkt.



Når det ene punkts mangfoldighed nærmer sig det andet punkt vil de dannede buer blive længere og længere, men bueområdernes areal er konstant. I hver af disse områder findes elliptiske og hyperbolske fixpunkter, der gennemgår samme proces under perturbationen. Dette sker ad infinitum. Derfor er billedet selvsimilær (se fig. 7).

Fig. 7: Dannelsen af kaos er selv-similært.
(Schuster, 1988)



Af disse grunde vil kaotiske områder og regulære områder være indvævet tæt i hinanden.[7]

Vi går herefter over til at se på de forskellige niveauer, Hamiltonske systemer kan befinde sig i.

---

7) Der kan opstå situationer, hvor perturbationen og integrable del af (3) eller (3') danner resonans. Dette fænomen vil vi ikke behandle her, men vi kan henvise til f.eks. Sagdeev et al.,1988.

6.3 Ergodicitet i Hamiltonske systemer

Det er velkendt, at beskrivelsen af en gas i en beholder ikke er håndterbar med det Hamiltonske begrebsapparat, idet faserummets dimension 'nærmer' sig det uendelige. I stedet for anvendes metoderne fra den statistiske mekanik, der forudsætter at den ergodiske hypoteses holder. Der eksisterer imidlertid ingen eller kun få kendte fysiske systemer, der med sikkerhed vides at tilfredsstille hypotesen.

For Hamiltonske systemer er det muligt at opstille et hieraki af bevægelseskompleksiteter. Alle Hamiltonske systemer er rekurrente som følge af volumenbevarelsen (et teorem af Poincaré[8]). Med rekurrens menes, at et punkt i faserummet vil vende tilbage til en omegn af dette punkt vilkårligt ofte. Men det medfører ikke, at mængden af den slags punkter er fordelt over hele energifladen. Vi har jo indset, at integrable systemers løsninger er bundet til flader, hvis dimension er lavere end energiflades dimension. Den slags systemer er derfor ikke ergodiske, men de er altså rekurrente. Så mens ergodicitet implicerer rekurrens, er det omvendte ikke givet. Den stærkere egenskab, mixing, medfører til gengæld ergodicitet. Mixing kan billedliggøres ved et eksperiment, hvor en dråbe farvestof dryppes i et glas med væske. Efter behørig omrøring vil farvestoffet (antagelig) være homogent fordelt i hele glasset.

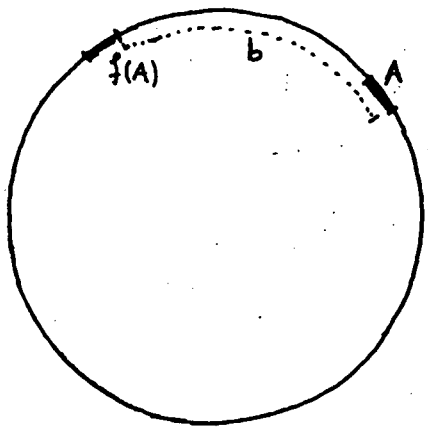
Et eksempel på en afbildning, der er ergodisk, men ikke mixing er følgende:

(6) $\qquad x_{n+1} = x_n + b \pmod 1$ for b irrational.

(6) er en afbildning af enhedsintervallet (dvs. en cirkel) på sig selv. Et sammenhængende område A (se fig. 8) vil i uændret form komme hele vejen rundt, hvormed afbildningen er ergodisk. Hvis der skulle være mixing, skulle A også spredes over hele periferien.

8: Jvf. Arnold, 1978.

Fig. 8: En ergodisk afbildning.

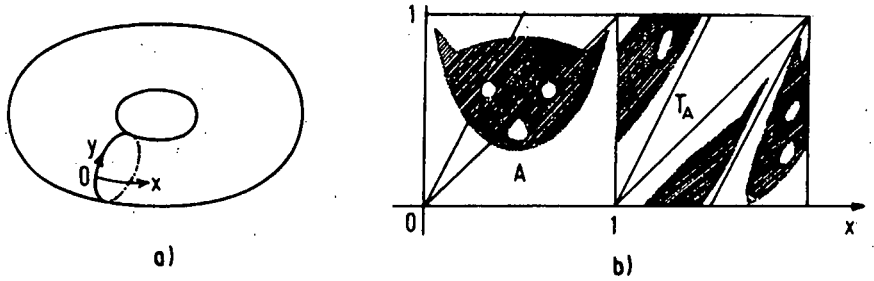


Den følgende afbildning - Arnold's katte afbildning - er mixing og dermed også ergodisk. Afbildningen er:

$$(7) \qquad \begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n \pmod 1 \\ y_{n+1} = x_n + 2y_n \pmod 1 \end{cases}$$

x og y repræsenterer de to 'retninger' på en torus (se fig. 9a). Torus kan klippes op, hvorved dynamikken kan udspilles og ses i enhedskvadratet (fig. 9b).

Fig. 9: Arnold's katte afbildning.



De nævnte bevægelsestyper kan afledes af egenværdispektret til Liouville operatoren, L. Man kan i faserummet følge tidsudviklingen af et områdes densitet, ρ:

$$(7) \qquad d/dt(\rho(q,p)) = iL\rho \ ,$$

hvor i er den imaginære enhed, og L er en matrix defineret ved (7). Løsningen til denne differentialligning er:

(8) $$\rho(t) = \rho(0)e^{-Lt}$$

Det er egenværdierne til L, der giver bevægelsestypen. Hvis L har en simpel egenværdi lig med 0, er bevægelsen ergodisk. Hvis ovenikøbet resten af spektret er kontinuert, da er bevægelsen mixing. Og dermed vil korrelationen gå mod 0 - svarende til termodynamisk ligevægt - for tiden gående mod uendelig.

Et system kan også være mere indviklet end mixing. Hvis løsningskurverne bevæger sig eksponentielt væk fra hinanden i tid, siges systemet at have positiv K-entropi (Kolmogorov). Positiv K-entropi er snævert forbundet med positiv Liapunov eksponent*, hvorfor disse K-systemer er kaotiske. Arnold's katte afbildning har eksempelvis denne egenskab. I et 4-dimensionalt, kaotisk, Hamiltonsk system vil man finde, at de 4 Liapunov eksponenter antager følgende 'værdier': (+,0,0,-). I alle tilfælde vil summen af eksponenterne være 0, og de vil ophæve hinanden parvist. Derfor vil den negative eksponent være numerisk lige så stor som den positive.

Nedenfor er vist et skema over de Hamiltonske systemers mulige bevægelseskompleksiteter. Skemaet opsummerer samtidig indholdet i dette afsnit:

Skema 1: Konservative systemers kompleksitetsgrader. (Schuster, 1988)

Hierarchy of classical chaos.

Property	Definition	Example
Recurrent	The trajectory returns to a given neighborhood of a point an infinite number of times	Any Hamiltonian system (or area-preserving map) which maps a finite region of phase space onto itself
Ergodic	Time averages can be replaced by averages over phase space ↔ Zero is a simple eigenvalue of the Liouville operator L.	$x_{n+1} = x_n + b \bmod 1$ b = irrational
Mixing	Correlation functions decay to zero in the infinite time limit → L has one simple eigenvalue 0 and the rest of the spectrum is continuous	Cat map
K-system	The map has a positive *K*-entropy, i.e. close orbits separate exponentially → L has a Lebesque spectrum with denumerably infinite multiplicity.	Cat map

De følgende kapitler omhandler modelteori samt modelopstillingen og -behandlingen af dobbeltpendul systemet, der i sagens anledning er antaget friktionsfrit.

9) For 1-dimensionale afbildninger gælder, at Liapunov eksponenten og K-entropien er identiske.

KAPITEL 7

Fysisk dobbeltpendul

Indledning

Kaosteorien kan, som vi har set det i kapitel 6, deles i to hovedkategorier - nemlig kaos i dissipative systemer og kaos i konservative systemer. I dette kapitel ser vi på det konservative system: dobbeltpendulet.

Beskrivelsen af pendulbevægelser har altid været centralt placeret i den klassiske fysiks historie, ligesom det stadig er et vigtigt emne ikke mindst i gymnasieskolen og introducerende kurser i mekanik på højere niveauer. Oftest nøjes man dog med at undersøge det helt simple pendul, hvis bevægelsesmønster er fastlagt og velkendt. Andre penduler, omend stadig ganske simple, kan dog udvise anderledes komplicerede bevægelsesmønstre - bla. kaos.

Vi vil i dette kapitel ved hjælp af den Hamiltonske formalisme og energibåndsteknikken[1] opstille bevægelsesligningerne for dobbeltpendulet samt implementere disse i CTS.

7.1 Hamiltonske systemer og energibåndsdiagrammer

Dobbeltpendulet er et autonomt system, der fuldstændigt kan beskrives ved de Hamiltonske bevægelsesligninger,[2] med de generaliserede koordinater og impulser q_i og p_i:

$$(1) \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

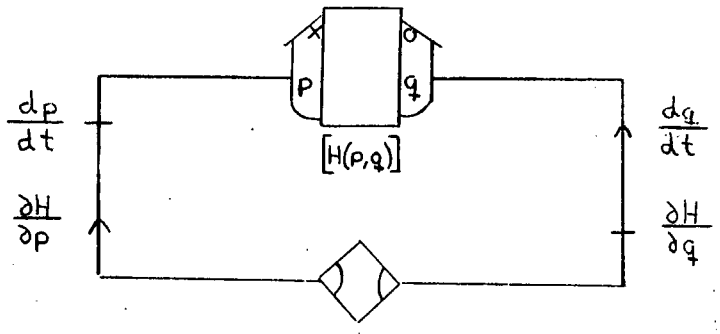
---

[1]) I det følgende knytter vi an til terminologien og metoden i Christiansen's version af Paynter's "energy band graphs", på dansk: "energibåndsteknik". Christiansen, 1978.

[2]) Dvs. alle kræfter er konservative og alle bånd - dvs. hvordan systemets legemer er forbundet og energien bevaret - er holonome. Goldstein, 1980, s. 11.

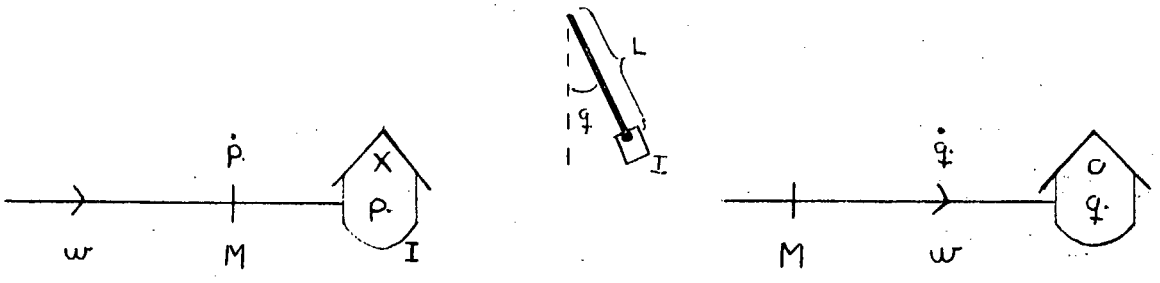
I energibåndsterminologi kan koblingen mellem ligningerne udtrykkes ved et energibåndsdiagram med et multiportlager:[3]

Diagram 1: Hamilton's ligninger.[4]



Al information om systemets bevægelse er gemt i lagringsfunktionen H. Dynamikken skal forstås udfra definitionerne af X-lagrene (kryds-lagrene) - der lagrer kinetisk energi - og O-lagrene (bolle-lagrene) - der lagrer potentiel energi. Her eksemplificeret for et almindeligt fysisk pendul med inertimomentet I (lagerkapaciteten), vinkelhastigheden w (strømmen) og kraftmomentet M (spændingen).

Fig. 1: X-lagre og O-lagre.



$$w = \frac{dE_{kin}}{dp} = \frac{p}{I} \qquad M = \frac{dE_{pot}}{dq} \; ; \; \frac{dq}{dt} = w$$

$$\frac{dp}{dt} = M \; ; \quad E_{kin} = \frac{p^2}{2 \cdot I} \qquad E_{pot} = -L \cdot m \cdot g \cdot \cos(q)$$

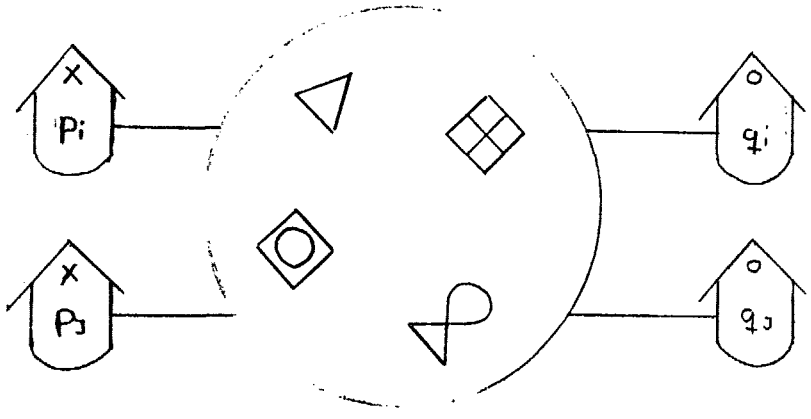
---

[3]) Et multiportlager har flere levelvariable og en energifunktion, der afhænger af alle levels. Christiansen, 1980 s. 70.

[4]) De konstitutive relationer for de forskellige elementer (ikoner) i energibånds-diagrammerne findes i appendix V.

Fra et programmeringssynspunkt er det ikke heldigt, at al information om systemet er gemt i lagringsfunktionen H. Her er det, at energibåndsteknikken kan være en stor hjælp. En af fordelene ved denne teknik er netop, at dynamikken i systemet kan gøres mere synlig. I diagramform kan man opbygge den samme model ved hjælp af nye lagervariable. Derved kan multiport-lagret splittes op i simple enkelt lagre som illustreret i diagram 2:

Diagram 2: Skeletdiagram for et Hamiltonsk's system.



I næste afsnit beskriver vi, hvorledes skelettet er struktureret.

7.2 Hamilton og Lagrange reticulation.[5]

For at beregne de nye lagervariable til den udvidede model for det hamiltonske system, må en del transformationer foretages.

Vores udgangspunkt for systembeskrivelsen er nu de generaliserede koordinater q_1, q_2,...., q_n, og de generaliserede hastigheder $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$,...., $\dot{q}_n$.

---

[5]) Afsnittet bygger primært på Christiansen, 1978 samt noter af Christiansen: "Klassisk mekaniske energibåndsmodeller", derudover også på Gundermann, 1976, og Goldstein, 1980, kap. 1, 2 og 9.

Antagelse 1: Den potentielle energi antages hastighedsuafhængig og afhænger derfor kun af positionerne:

$$(2) \qquad E_{pot} = V(q_1, q_2, \ldots, q_d) = V(\bar{q})$$

Antagelse 2: Den kinetiske energi antages kvadratisk i hastighedselementerne $(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_d)$:[6]

$$(3)^{7} \qquad E_{kin} = T(q_1, q_2, \ldots, q_d; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_d) \quad \text{(App. VI)}$$

$$= T(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = 1/2 \cdot \dot{\bar{q}}^* \cdot T \cdot \dot{\bar{q}}$$

$$= 1/2 \cdot \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} T_{ij}(\bar{q}) \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j$$

Definition 1:

For at transformere de generaliserede hastigheder $\dot{\bar{q}}$ til de kanoniske impulser $\bar{p}$, der benyttes i Hamilton ligningerne, defineres $\bar{p}$ som:

$$(4)^{8} \qquad p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^{d} T_{ij}(\bar{q}) \cdot \dot{q}_j \qquad \text{(App. VI)}$$

Antages det, at determinanten af T, det T, er forskellig fra 0, kan T inverteres til T^{-1}, og ligningssystemet (4) kan løses og generaliseres til et udtryk, hvor hastighederne $\dot{q}_i$ udtrykkes ved impulserne p_j:

$$\dot{q}_i = \sum_{j=1}^{d} T^{-1}_{ij}(\bar{q}) \cdot p_j \qquad \text{(App. VI)}$$

Herved bliver den kinetiske energi (3) udtrykt ved de kanoniske impulser $\bar{p}$:

$$(5) \qquad T(\bar{q}; \dot{\bar{q}}) = T(\bar{q}; \bar{p}) = 1/2 \cdot \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} T^{-1}_{ij}(\bar{q}) \cdot p_i \cdot p_j \qquad \text{(App. VI)}$$

---

[6]) Når der udfor en ligning er anført (App. VI), betyder det, at udledningen af ligningen er gennemgået i appendix VI.

[7]) Tænk f.eks. på $E_{kin} = 1/2 \cdot m \cdot v^2$.

[8]) Tænk f.eks. på $d(1/2 \cdot m \cdot v^2)/dv = m \cdot v = p$.

Definition 2:

Systemets samlede energi angivet som funktion af (generaliseret) position og (kanonisk) impuls kaldes systemets Hamilton funktion:[9]

$$H(\bar{q},\bar{p}) = V(\bar{q}) + T(\bar{q},\bar{p}) \tag{6}$$

I denne (almindelige) Hamiltonfunktion er den kinetiske energi en funktion af såvel $\bar{q}$ som $\bar{p}$. Dvs. skal $\partial H/\partial q_i$ findes, bidrager både den potentielle og kinetiske energi. Denne kobling kan ikke beskrives ved enkeltportlagre, som i diagram 2, men kræver et multiportlager som i diagram 1. For at komme ud over denne komplikation, laver vi en omskrivning:

Da den kinetiske energi er kvadratisk i p'erne og positiv definit,[10] kan den diagonaliseres. Dette gøres ved at transformere impulserne $\bar{p}$ til impulserne $\bar{P}$. Man skal altså finde en invertibel matrix A så

$$\bar{P} = A\cdot\bar{p} \quad \Rightarrow \quad \bar{p} = A^{-1}\cdot\bar{P}$$

eller på koordinatform:

$$P_k = \Sigma_{j=1}^{d}\, a_{kj}(\bar{q})\cdot p_j \tag{7}$$

Indsættes dette i (5) fås

$$\begin{aligned} T(\bar{q};\bar{P}) &= 1/2\cdot(A^{-1}\cdot\bar{P})^{*}\cdot T^{-1}\cdot(A^{-1}\cdot\bar{P}) \\ &= 1/2\cdot\bar{P}^{*}\cdot(A^{-1*}T^{-1}A^{-1})\cdot\bar{P} \end{aligned}$$

Matricen $A^{-1*}T^{-1}A^{-1}$ er da en diagonalmatrix:

$$1/2\cdot A^{-1*}T^{-1}A^{-1} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1/m_1 & & .. 0 .. \\ & 1/m_2 & \\ & & ... \\ ..0.. & & 1/m_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/(2m_1) & & \\ & 1/(2m_2) & \\ & & ... \\ & & 1/(2m_d) \end{pmatrix} = M,$$

hvor egenværdierne er sat til 1/m (inertanserne i minus

---

[9] Udfra denne definition og Tellegens teorem - arbejdsprincippet- udledes Hamilton ligningerne.

[10] Dvs. positiv eller 0, og kun 0, når alle p'erne er nul.

første).

Det følger nu, at

$$T = (\bar{q};\bar{P}) = \bar{P}^* \cdot M \cdot \bar{P} = \sum_{i=1}^{n} 1/(2 \cdot m_i) \cdot p_i^2$$

hvor inertanserne er positive, idet T er positiv definit.

Hamilton funktionen H kan nu udtrykkes som en ny funktion E af de nye variable $\bar{q}$ og $\bar{P}$:

$$H(\bar{q},\bar{p}) = E(\bar{q},\bar{P}) = V(\bar{q}) + T(\bar{P}) \tag{8}$$

Fordelen ved denne nye formulering af Hamilton funktionen (fremfor (6)) er altså, at den kinetiske energi nu kun er afhængig af P'erne.[11] Derfor bliver $\partial H/\partial q_i = \partial V/\partial q_i$, og systemet kan så beskrives ved enkeltportlagre.

Det sidste, vi mangler, er at bestemme enkeltportlagrenes input $\dot{\bar{q}}$ og $\dot{\bar{P}}$. Disse kan findes v.hj.a. (1), (7) og (8).

Af (1) og (8) fås:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_j} = \sum_k \left(\frac{\partial E}{\partial P_k} \cdot \frac{\partial P_k}{\partial p_j} + \frac{\partial E}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial q_k}{\partial p_j} \right)$$

da q'erne ikke afhænger af p'erne, kan sidste led droppes. Sættes $\partial P_k/\partial p_j = a_{kj}$ (jf. den lineære transformation (7)), fås:

$$\boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_j} = \sum_k \frac{\partial E}{\partial P_k} \cdot a_{kj}} \tag{9}$$

Af (7) fremgår det, at P'erne afhænger af positionen $\bar{q}$ og impulsen $\bar{p}$. Differentieres (7) (v.hj.a. kædereglen og (1)) fås

$$P_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial P_i}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial P_i}{\partial p_j} \cdot \dot{p}_j \right) \tag{10}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial P_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial P_i}{\partial p_j} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) = [P_i, H],$$

---

[11]) Dette under forudsætning af, at man vælger P'erne således, at inertanserne m_i er uafhængig af q'erne.

hvormed vi har indført Poisson parentesen.[12]

I ligning (10) er det kun leddet $\partial H/\partial q_j$, der endnu ikke er fastlagt. V.hj.a. kædereglen og (8) fås:

$$(11) \qquad \frac{\partial H}{\partial q_j} = \sum_k \left(\frac{\partial E}{\partial P_k} \cdot \frac{\partial P_k}{\partial q_j} + \frac{\partial E}{\partial q_j} \right)$$

Ved indsættelse af (9) og (11) i (10) fås:

$$\dot{P}_i = [P_i, H] \quad <=>$$

$$(12) \qquad \boxed{\dot{P}_i = \sum_j \left(\sum_k \frac{\partial E}{\partial P_k} \left[a_{kj} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_j} - a_{ij} \cdot \frac{\partial P_k}{\partial q_j} \right] - a_{ij} \cdot \frac{\partial E}{\partial q_j} \right)}$$

Med ligning (9) og (12) har vi nu de generelle bevægelsesligninger for et konservativt system.

For dobbeltpendulet, der er et system med to frihedsgrader, får de konkrete bevægelsesligninger og de tilhørende energibåndsdiagrammer følgende udformning.

Udfra ligning (9) fastlægges inputene $\dot{q}_1$ og $\dot{q}_2$ til O-lagrene:

$$(13) \qquad \dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{\partial E}{\partial P_1} \cdot a_{11} + \frac{\partial E}{\partial P_2} \cdot a_{21}$$

$$\dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{\partial E}{\partial P_1} \cdot a_{12} + \frac{\partial E}{\partial P_2} \cdot a_{22}$$

O-lagrenes input er altså en sum af "strømme" $\partial E/P_k$, ganget med en faktor a_{ki} (transformeren). Strømme lægges i energi-

---

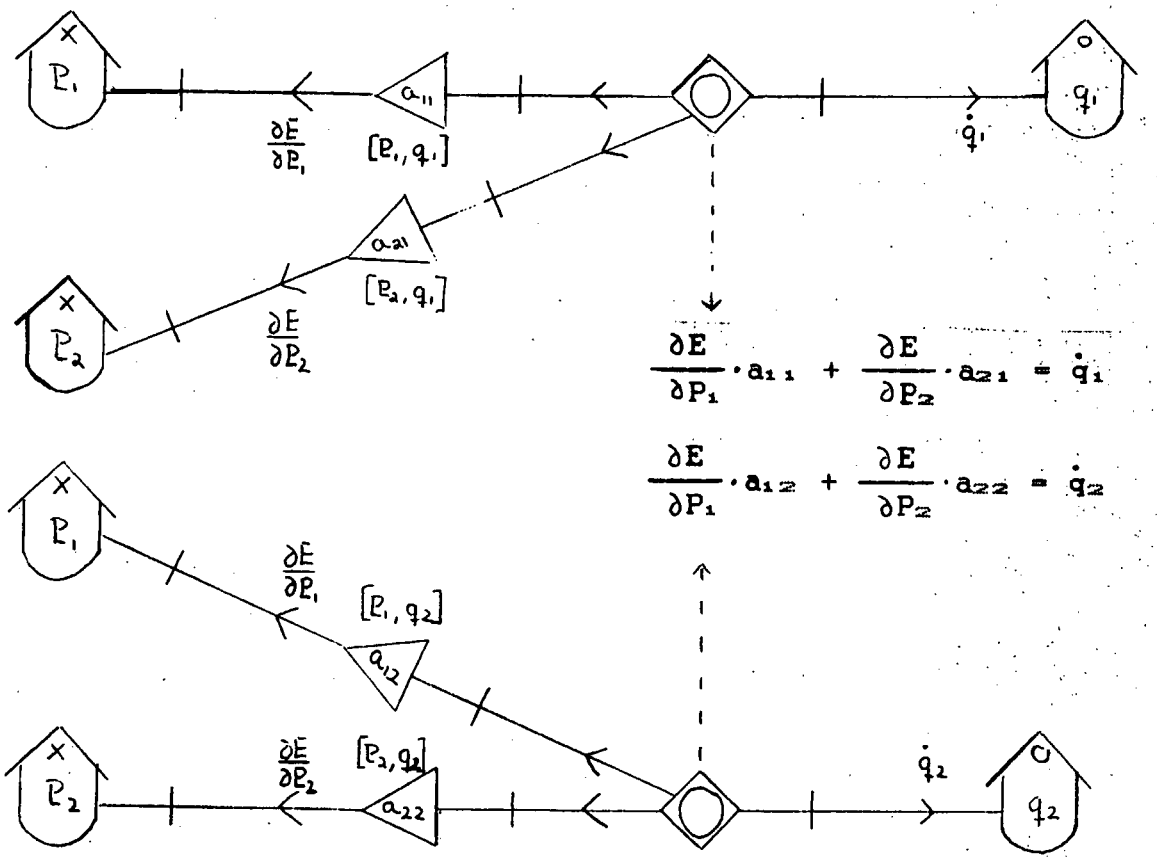
[12]) Poisson parentesen (firkantparenteser) er defineret som:

$$[X,Y] = \sum_j \left(\frac{\partial X}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial Y}{\partial p_j} - \frac{\partial X}{\partial p_j} \cdot \frac{\partial Y}{\partial q_j} \right)$$

Specielt gælder at $\dot{X} = [X,H]$ og $\dot{H} = [H,H] = 0$.

båndsteknikken sammen v.hj.a. 0-samlere, så energibånds-(del)-diagrammet for 0-levelsene q_1 og q_2 bliver:

Diagram 3: 0-samlere og ligningerne for $\dot{q}_1$ og $\dot{q}_2$.



Inputene $\dot{P}_1$ og $\dot{P}_2$ til X-lagrene fastlægges udfra (11):

$$\dot{P}_1 = \frac{\partial E}{\partial P_2}\left[a_{21}\cdot\frac{\partial P_1}{\partial q_1} - a_{11}\cdot\frac{\partial P_2}{\partial q_1} + a_{22}\cdot\frac{\partial P_1}{\partial q_2} - a_{12}\cdot\frac{\partial P_2}{\partial q_2}\right]$$

$$- a_{11}\cdot\frac{\partial E}{\partial q_1} - a_{12}\cdot\frac{\partial E}{\partial q_2}$$

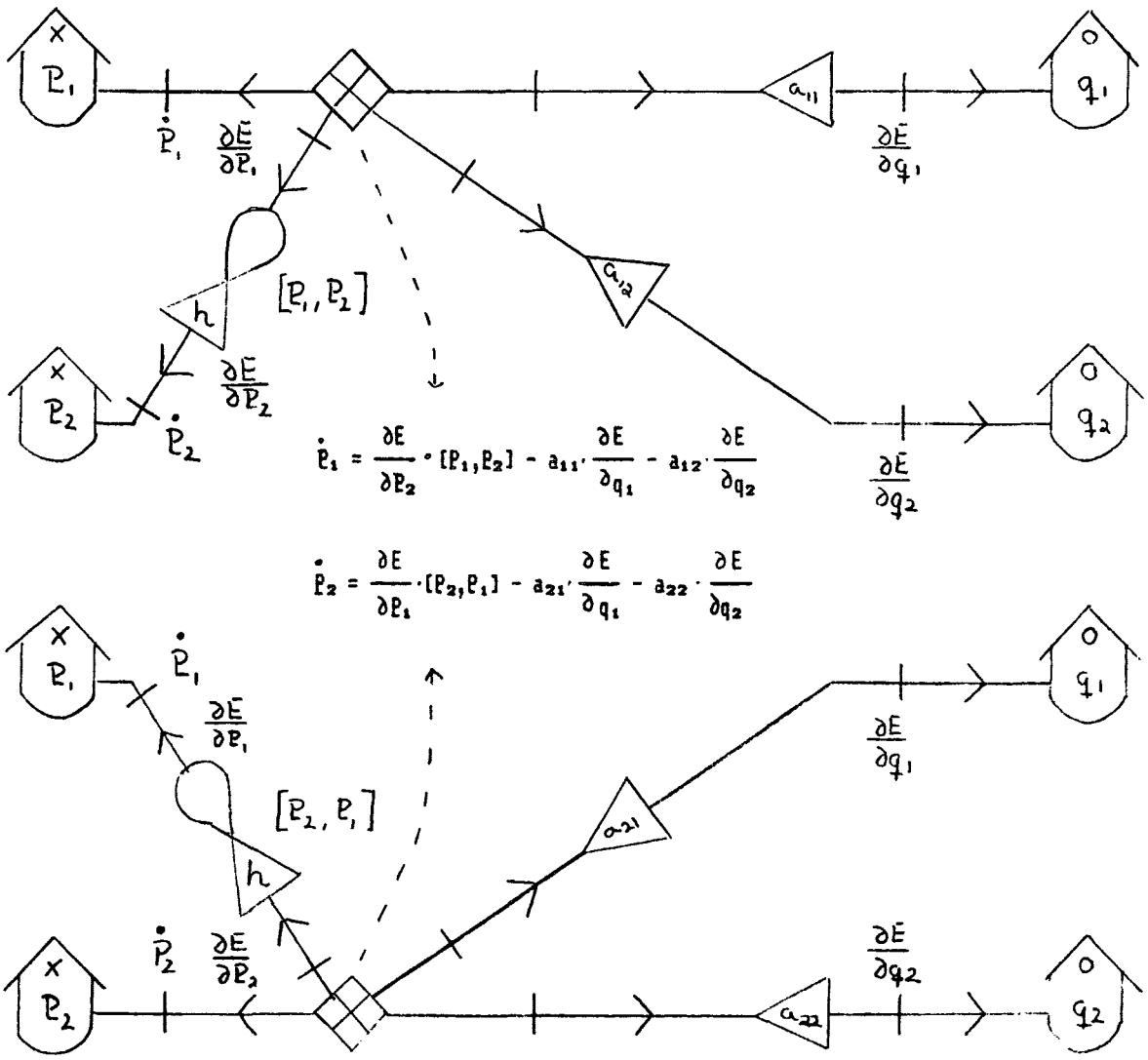
(14)

$$\dot{P}_2 = \frac{\partial E}{\partial P_1}\left[a_{11}\cdot\frac{\partial P_2}{\partial q_1} - a_{21}\cdot\frac{\partial P_1}{\partial q_1} + a_{12}\cdot\frac{\partial P_2}{\partial q_2} - a_{22}\cdot\frac{\partial P_1}{\partial q_2}\right]$$

$$- a_{21}\cdot\frac{\partial E}{\partial q_1} - a_{22}\cdot\frac{\partial E}{\partial q_2}$$

X-lagrenes input er altså et produkt af strømme $\partial E/\partial P$ og spændinger $\partial P/\partial q$ (ganget med en faktor a_{ik}), der lægges til en sum af spændinger. Skal to forskellige levelvariable ganges sammen, gøres det v.hj.a. gyratorer. Spændinger lægges sammen v.hj.a. X-samlere. Energibånds-(del)-diagrammerne for X-lagrene P_1 og P_2 bliver da:

Diagram 4: X-samlere og ligningerne for $\dot{P}_1$ og $\dot{P}_2$.[13]

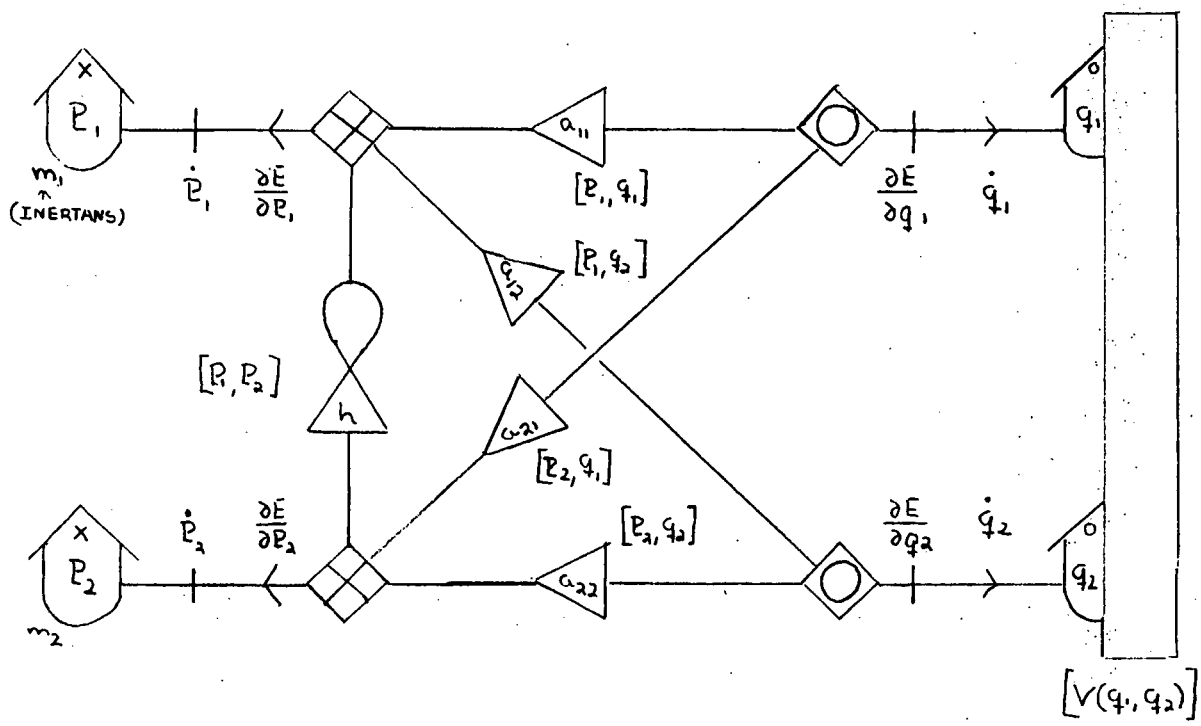


Lægger vi alle fire deldiagrammer sammen får vi diagram 5:

---

[13] Gyratoren med operatoren $h = [P_k,P_j]$ svarer til udtrykket i firkantparenteserne i ligningerne (14).

Diagram 5: Hamiltonsk reticulation med simple enkeltport lagre.



Selvom vi nu har fået foldet energidiagram 1 voldsomt ud, er det dog stadig et betragteligt stykke arbejde at regne rateligningerne ud, idet vi jo stadig skal regne p'erne ud, selvom vi ikke skal bruge dem i den endelige model. Der er imidlertid en anden metode, som går ud fra $\dot{q}$'erne i stedet for p'erne. Denne metode benytter sig af de såkaldte Lagrange-parenteser ("tuborg"-parenteser), defineret ved:[14]

$$\{X,Y\} = \sum_k \left(\frac{\partial q_k}{\partial X} \cdot \frac{\partial p_k}{\partial Y} - \frac{\partial p_k}{\partial X} \cdot \frac{\partial q_k}{\partial Y} \right)$$

Som for Poisson-parentesen gælder, at

$$\{X,Y\} = - \{X,Y\}$$

og at $\{X,Y\}$ er uafhængig af, hvilke generaliserede koordinater $\bar{q}$ og konjugerede impulser, $\bar{p}$ der benyttes.

Goldstein har vist,[15] at produktet af Poisson- og Lagrange-

---

[14]) Goldstein, 1980, s. 401 eller Gundermann, 1976, s. 143.

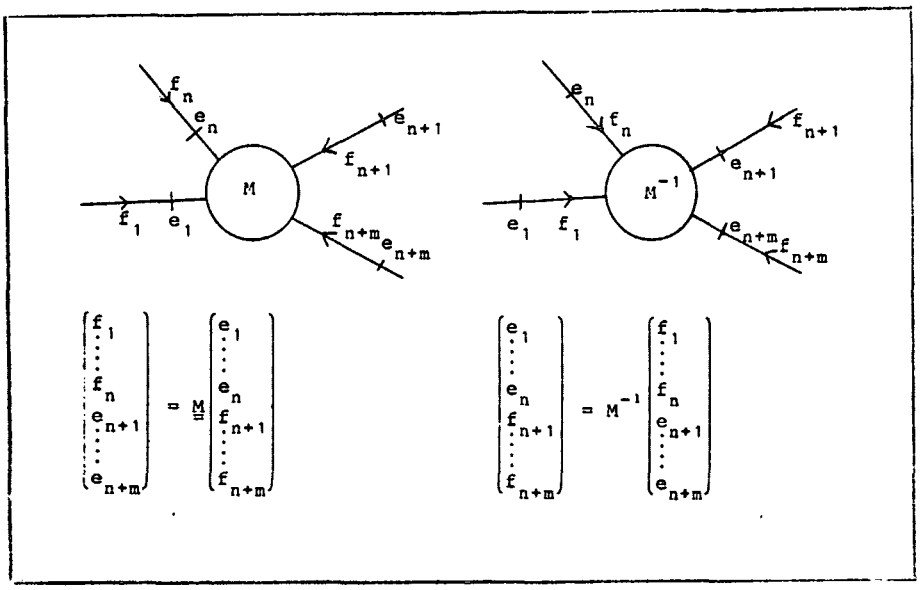
[15]) Goldstein, 1978, s. 252.

parenteser er:

$$\sum_j [X_i, Y_j] \cdot \{X_k, Y_j\} = \delta_{ik} = -1$$

når X og Y er et fuldstændigt sæt af uafhængige variable. Hermed kan vi konkludere, at de to parenteser er (pånær et fortegn) hinandens inverse. I energibåndsdiagrammer svarer inverteringen til et skift i kausalitet (fig. 2).

Fig. 2: Inversion af skeletdiagram.[16]

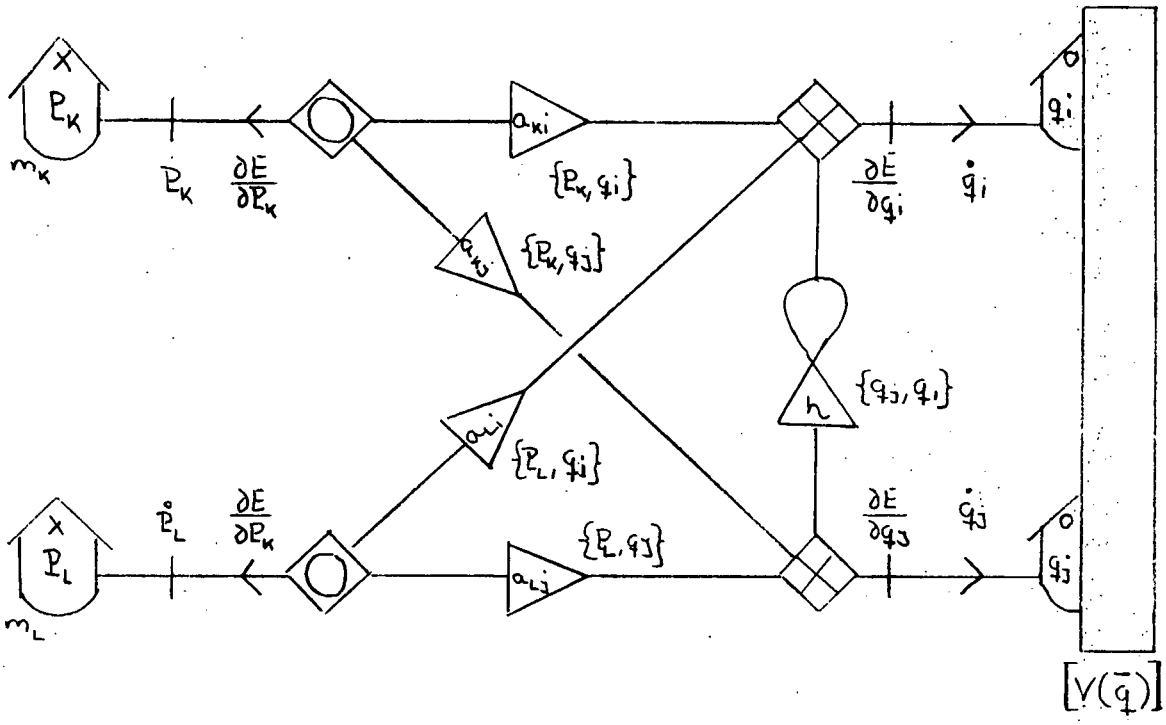


Figuren viser et skeletdiagram med n+m energibånd. Ved inverteringen skifter strømmene f og spændningerne e kausalitet.

Ved brug af Lagrange-parenteser i stedet for Poissonparenteser, får vi energibåndsdiagrammet 6:

[16] Figuren og gennemgangen af denne findes i Gundermann, 1976, s. 143.

Diagram 6: Lagrange-reticulation.



Sammenligner vi diagram 4 og diagram 6 ses det, at der blot er sket det, at skeletdiagrammet, som i diagram 4 har stærk kausalitet, er "vendt", så det i diagram 6 har svag kausalitet.[17] Hvor såvel transducerne og gyratorerne i diagram 4 er Poisson parenteser (henholdsvis $[P_K, q_i] = a_{Ki}$ og $[P_K, P_L] = h$), er de i diagram 6 Lagrange-parenteser (henholdsvis $\{P_K, q_i\} = a_{Ki}$ og $\{q_i, q_j\} = h$).

Det er diagram 6, vi i næste afsnit benytter til at opstille bevægelsesligningerne for dobbeltpendulet.

Metoden er, at vi med udgangspunkt i ligning (3), starter med at vælge et sæt nye hastigheder w_i, som diagonaliserer den kinetiske energi:

(15) $$T = 1/2 \cdot \Sigma_i \; m_i \cdot w_i^2, \text{ hvor}$$

$$w_i = \Sigma_j \; a_{ij}(\bar{q}) \cdot \dot{q}_j$$

---

[17] For en nærmere gennemgang af stærk og svag kausalitet henvises til Christiansen, 1978, s. 57-58.

Hvis vi antager, at inertanserne m_i er uafhængige af q'erne, bliver

$$P_i = \partial T/\partial w_i = m_i \cdot w_i$$

hvilket så er vores X-level. Disse X-levels er i realiteten de samme X-levels, som blev benyttet i Hamilton reticulationen, men nu er de defineret direkte ud fra q'erne (ikke over p'erne), så tranformatorerne $a_{i,j}$ i Lagrange-reticulationen er derfor ikke de samme som i Hamilton reticulationen. Arbejdet, der nu ligger tilbage, er at bestemme udtrykket for transformererne $a_{i,j}$ og for gyratoren h. Herefter springer bevægelsesligningerne for systemet direkte ud af diagrammet.

7.3 Modellen for dobbeltpendulet

I dette afsnit skal vi som sagt udlede de konkrete ratelignинger for dobbeltpendulet. Da den benyttede metode - energibåndsteknikken - ikke er så udbredt, trods dens åbenlyse fordele, vil vi her gennemgå modelleringen trin for trin.

1) Først vælges de generaliserede koordinater q_1 og q_2. For dobbeltpendulet er vinklerne θ_1 og θ_2 de oplagte:

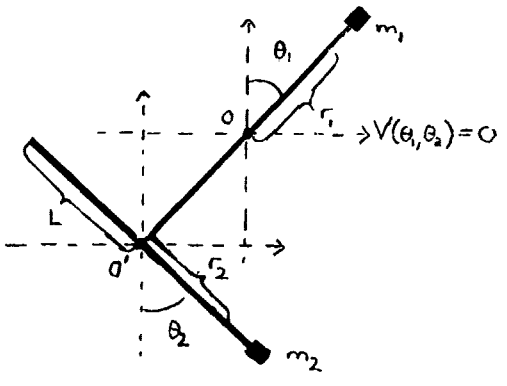


Fig. 3: Dobbeltpendulet.

Stængerne er lige lange med længden 2L. r_1 er afstanden fra O til tyngdepunktet af stang 1. r_2 er afstanden fra O' til tyngdepunktet af stang 2. m_1 er massen af stang 1 med lod, mens m_2 er massen af stang 2 med lod.[18]

[18]) I implementeringen bruger vi af programmeringsmæssige årsager andre parameternavne.

2) Den potentielle energi (med $V(\theta_1,\theta_2)=0$ i niveauet O) er:

(16) $$V(\theta_1;\theta_2) = m_1 g r_1 \cos(\theta_1) - m_2 g(L\cos(\theta_1) + r_2\cos(\theta_2))$$
$$= (m_1 r_1 - m_2 L)g\cos(\theta_1) - m_2 g r_2 \cos(\theta_2)$$

3) Den kinetiske energi udtrykkes som funktion af de afledede generaliserede koordinater $\dot{\theta}_1$ og $\dot{\theta}_2$:

$$T(\bar{v}_1;\bar{v}_2) = 1/2\cdot m_1\cdot v_1^2 + 1/2\cdot m_2\cdot v_2^2,$$

hvor $\bar{v}_1$ og $\bar{v}_2$ er hastighederne langs tangenterne. I polære koordinater udtrykkes hastighederne:

$$\bar{v}_1 = r_1\cdot\dot{\theta}_1 \begin{pmatrix}\cos(\theta_1)\\ -\sin(\theta_1)\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad v_1^2 = r_1^2\cdot\dot{\theta}_1^2$$

$$\bar{v}_2 = -L\cdot\dot{\theta}_1 \begin{pmatrix}\cos(\theta_1)\\ -\sin(\theta_1)\end{pmatrix} + r_2\cdot\dot{\theta}_2 \begin{pmatrix}\cos(\theta_2)\\ -\sin(\theta_2)\end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$v_2^2 = L^2\cdot\dot{\theta}_1^2 + r_2^2\cdot\dot{\theta}_2^2 - 2\cdot L\cdot r_2\cdot\dot{\theta}_1\cdot\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)$$

og den kinetiske energi bliver

$$T(\dot{\theta}_1,\dot{\theta}_2) = 1/2(m_1 r_1^2+m_2L^2)\dot{\theta}_1^2 - m_2 r_2 L\cos(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 +$$
$$1/2\cdot m_2 r_2^2\dot{\theta}_2^2$$

Med indførelse af inertimomenterne

$$I_1 = m_1 r_1^2 \quad \text{og} \quad I_2 = m_2 r_2^2$$

bliver den kinetiske energi

(17)

$$T(\dot{\theta}_1,\dot{\theta}_2) = 1/2(I_1 + m_2L^2)\dot{\theta}_1^2 - m_2 r_2 L\cos(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + 1/2\cdot I_2\dot{\theta}_2^2$$

4) Herefter diagonaliseres T ved at indføre nye vinkelhastigheder (som i (15)):

$$w_1 = a_{11}\cdot\dot{\theta}_1 + a_{12}\cdot\dot{\theta}_2$$
$$w_2 = a_{21}\cdot\dot{\theta}_1 + a_{22}\cdot\dot{\theta}_2$$

ofte kan man dog klare sig med tre transformere:

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= a\cdot\dot{\theta}_1 + b\cdot\dot{\theta}_2 \\ w_2 &= c\cdot\dot{\theta}_1 \end{aligned}\right\} \quad =>$$

(18)

$$\dot{\theta}_1 = w_2/c$$
$$\dot{\theta}_2 = 1/b\cdot w_1 - a/(bc)\cdot w_2$$

Ved indsættelse af (18) i (17) fås:

$$\begin{aligned} T = {} & [1/2\cdot I_2\cdot 1/b^2]\cdot w_1^2 \\ & - [m_2 r_2 L\cos(\theta_1-\theta_2)/(bc) + I_2 a/(b^2 c)]\cdot w_1 w_2 \\ & + 1/c^2\cdot[1/2(I_1+m_2L^2) + m_2 r_2 L\cos(\theta_1-\theta_2)\cdot a/b \\ & + 1/2\cdot I_2 a^2/b^2]\cdot w_2^2 \end{aligned}$$

Diagonaliseringen kræver, at koefficenterne til $w_1 w_2$ er nul. Sætter vi desuden $b = 1$, får vi:

$$a = -\frac{m_2 r_2 L\cos(\theta_1-\theta_2)}{I_2}$$

Det er ønskeligt, at koefficienterne til w_1^2 og w_2^2 er lige store. Sættes de lig hinanden (og isoleres c) fås:

$$c = \sqrt{1/I_2(I_1+m_2L^2(1-\cos^2(\theta_1-\theta_2)))} = \sqrt{1/I_2(I_1+m_2L^2\sin^2(\theta_1-\theta_2))}$$

Vi har nu bestemt udtrykket for transformatorerne $a_{11} = a$, $a_{12} = b$ og $a_{21} = c$.

5) Gyratoren h beregnes udfra Lagrange-parentesen $\{\theta_1,\theta_2\}$. Jvf. diagram 6 er $\{P_k,\theta_i\} = a_{ki}$, Hermed kan parentesen skrives:

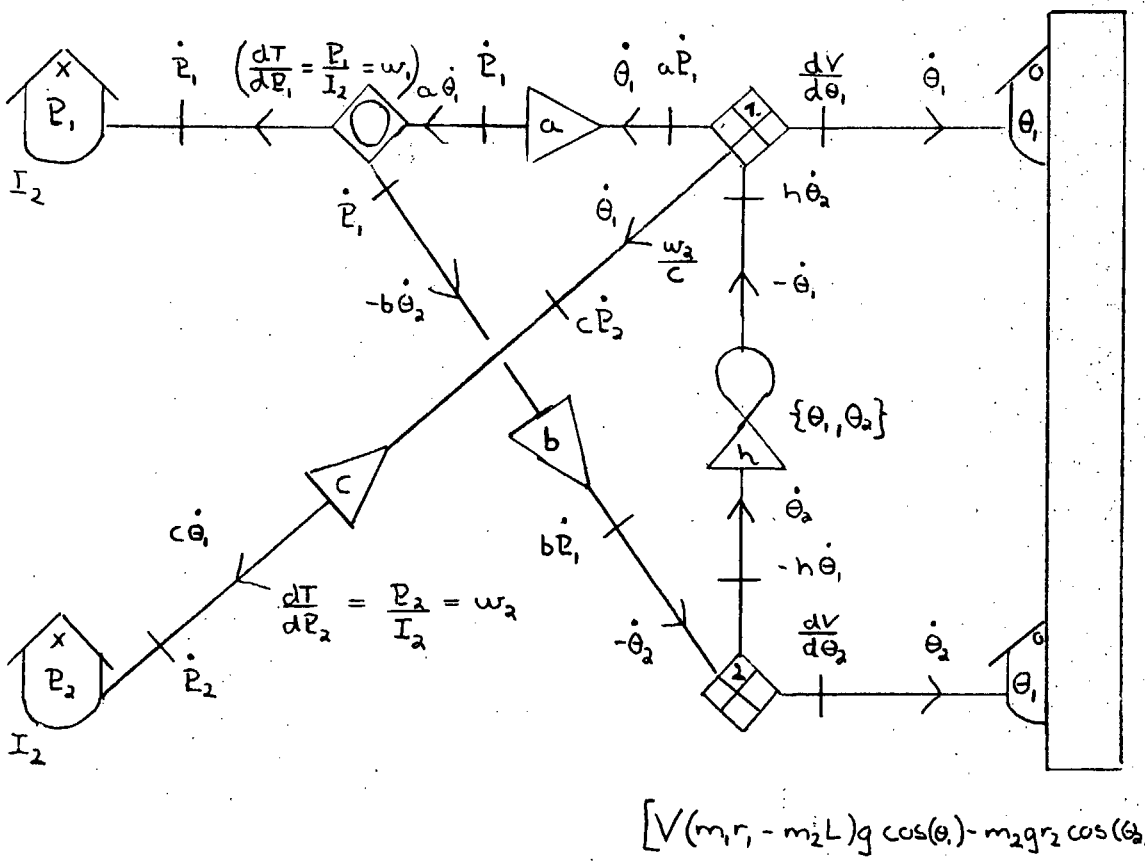
$$\{\theta_1,\theta_2\} = \sum_{m=1}^{2} P_m \cdot \left(\frac{\partial a_{m1}}{\partial \theta_2} - \frac{\partial a_{m2}}{\partial \theta_1} \right)$$

Udskrevet bliver h lig:

$$h = -\frac{m_2 r_2 L}{I_2} \sin(\theta_1-\theta_2)\cdot P_1 - \frac{m_2 L^2 \sin(2(\theta_1-\theta_2))}{2\cdot I_2 \cdot c}\cdot P_2$$

Vi får da følgende diagram:

Diagram 7: Energibåndsdiagram for dobbeltpendulet.[19]



6) Herefter skal diagrammet "oversættes" til ligninger. Dette følger direkte af de konstitutive regler for 0-samlere og X-samlere:

---

[19]) Kausaliteten i diagrammet følger de konstitutive regler, som styrer relationerne mellem de forskellige elementer i diagrammet. Se appendix V.

Af X-samler 1 fås, m.h.t. strømmene:

$$\dot{\theta}_1 = \frac{w_2}{c} = \frac{P_2}{I_2 c}$$

hvilket er vores 1. rateligning.

Med hensyn til spændingerne, får vi også fra X-samler 1:

$$a\dot{P}_1 + dV/d\theta_1 + h\dot{\theta}_2 + c\dot{P}_2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\dot{P}_2 = 1/c \cdot (-a\dot{P}_1 - h\dot{\theta}_2 + (m_1 r_1 - m_2 L) g \sin(\Theta_1))$$

hvilket er den 4. rateligning.

Af X-samler 2 får vi m.h.t. spændingerne:

$$b\dot{P}_1 - h\dot{\theta}_1 + dV/\Theta_2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\dot{P}_1 = 1/b \cdot (h\dot{\theta}_1 - m_2 g r_2 \sin(\theta_2))$$

hvilket er den 3. rateligning.

Af 0-samleren får vi m.h.t. strømmene:

$$w_1 + a\dot{\theta}_1 - b\dot{\theta}_2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\dot{\theta}_2 = 1/b \cdot (a\dot{\theta}_1 + w_1) = 1/b \cdot (-aP_2/(cI_2) + P_1/I_2)$$

hvilket er den 2. rateligning.

Vi er nu færdige, og den endelige model kan implementeres direkte efter rateligningerne og parametrene a, c, og h. Herom i næste afsnit.

7.4 Dobbeltpendulet, simuleringer

Vi skal i dette kapitel gennemgå nogle af de simuleringer, vi har gennemført af modellen for dobbeltpendulet. Mens vi i simuleringerne af torsionspendulet ledte efter løsninger med kaos er opgaven her (jvfr. kapitel 6) nærmest den modsatte, nemlig at lede efter løsninger, som ikke er kaotiske. Vi har etableret en række KAM-kort, som viser hvordan udbredelsen af kvasiperiodiske løsninger aftager til fordel for kaotiske, når energien øges.

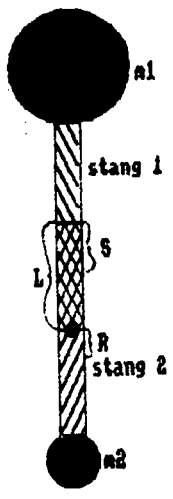
Indledningsvis vil vi dog sammenligne et par simulerede forløb med tilsvarende forløb på det virkelige dobbeltpendul.

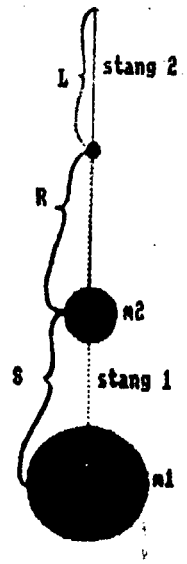
7.4.1. Sammenligning af model og virkelighed.

Vi har simuleret dobbeltpendulet ved to forskellige parametersæt, eet, som passer på de fysiske parametre, vores virkelige dobbeltpendul har, og eet som af forskellige grunde er mere hensigtsmæssigt (se appendix VII). I fig.1 har vi skematisk tegnet de to dobbeltpenduler i deres stabile ligevægtsstillinger og angivet deres parameterværdier.

Fig.1 Penduler i ligevægtsstillinger

m1=90gr	m1=1kg
m2=30gr	m2=0.25kg
L=0.19m.	L=1m
mL=100gr	mL=0kg
N=190gr	N=1kg
S=0.09m	S=1m
M=130gr	M=0.25kg
R=0.04m	R=1



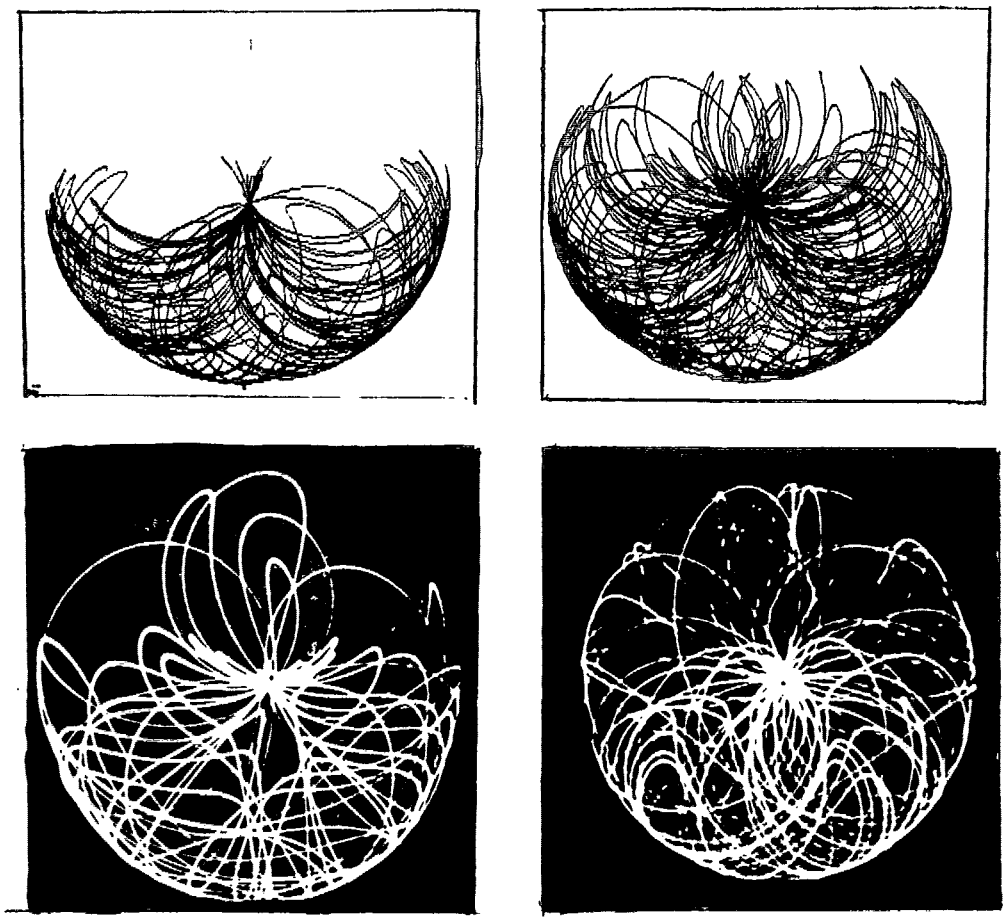


Parametrene står for flg.: mL er hver stangs masse; N er m1+mL; S er afstanden fra midten af stang 1 til massemidtpunktet af stang 1 med lod; M er m2+mL og R er afstanden fra midten af stang 2 til massemidtpunktet af stang 2 med lod.

Den væsentligste forskel er, at stængerne i pendul 2 er gjort masseløse.

Når vi har simuleret dobbeltpendulet med de fysisk virkelige parameterværdier, er det udfra et ønske om, at kunne give en kvalitativ sammenligning mellem model og virkelighed, hvilket vi kort skal gøre her. I fig. 2 sammenholdes X-Y-plot af to simuleringer med to fotografier af dobbeltpendulet sat igang med nogenlunde sammenlignelige begyndelsesbetingelser. Den kvalitative overenstemmelse er fuldt tilfredstillende, idet der dels skal ses bort fra forskellen på det analoge og digitale plot, og fra, at det virkelige dobbeltpendul jo ikke er friktionsfrit, og således hele tiden taber energi.

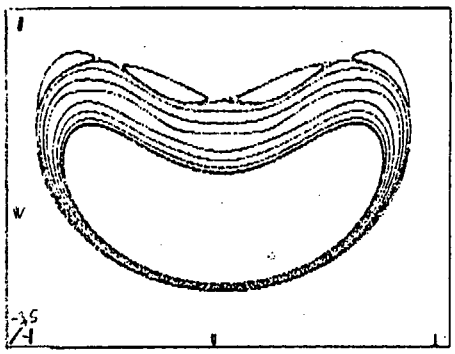
Fig.2 X-Y-plot sammenholdt med foto af dobbeltpendul



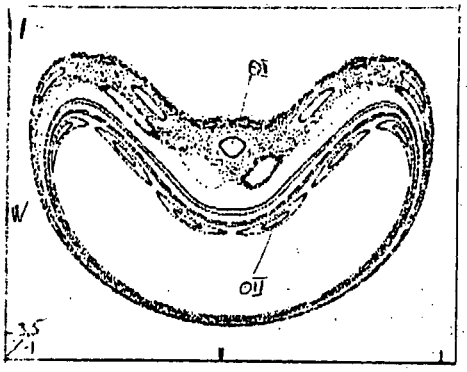
7.4.2. Simuleringer

I fig.3 sammenholder vi en række KAM-kort for simuleringer ved energier mellem -6 J og -5 J.

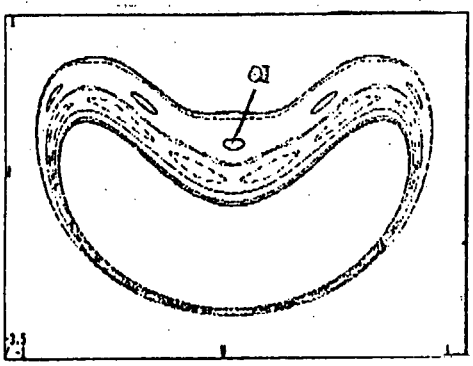
Fig.3 KAM-kort for energier mellem -6 J og -5 J



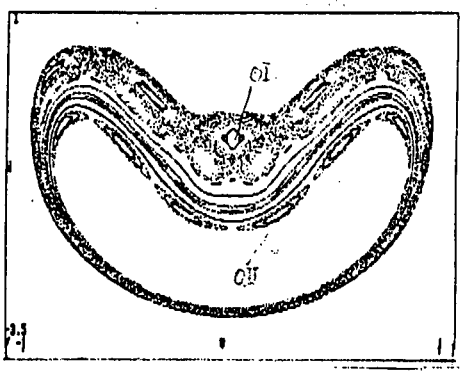
a: E = -6 J



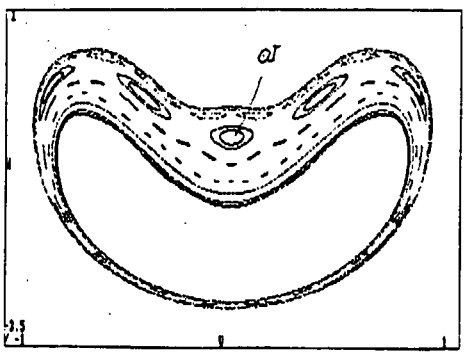
d: E = -5.2 J



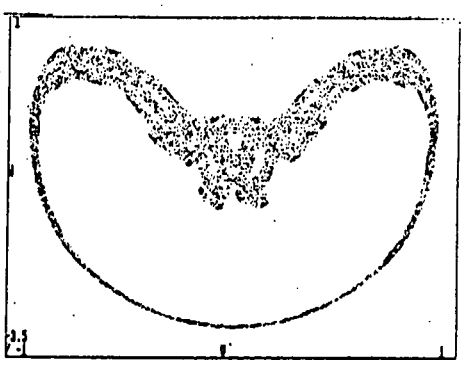
b: E = -5.5 J



e: E = -5.15 J



c: E = -5.4 J

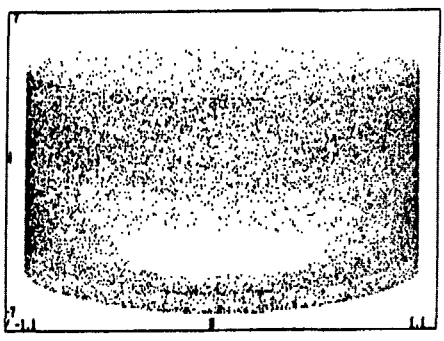


f: E = -5 J

Hvert af kortene a-f er sat sammen af en række Poincaré-snit af simuleringer med samme energi, men med forskellige begyndelsesbetingelser. Poincaré-snittene er konstrueret ved kriteriet P=0, dvs. vi opsamlerr de tre andre dimensioner V (sinus til udsvinget af stang 1), W (vinkelhastigheden af stang 1) og Z (vinkelhastigheden af stang 2) når P bliver nul fra negativ side, altså når stang 2 passerer lodret fra venstre. De her viste Poincaré-snit afbilder V overfor W.

Det generelle træk er væksten af områder med kaotisk adfærd fra a hvor der kun er kvasiperiodisk adfærd til f, hvor der kun er kaotisk adfærd. Man må hæfte sig ved den lave energi (-6 < E < -5 J) de her viste bevægelsesmønstre foregår ved. Ved E = -9.82 J er systemet i sin lavest mulige energitilstand idet begge lodder da er i den laveste position. Omvendt er E = 9.82 J når begge lodder er den højeste position. I de her viste simulationer overstiger stang 1's udsving således ikke ± 50°. Systemet ophører altså med kvasiperiodsk adfærd ved ret begrænsede energier. Til sammenligning viser vi i fig.4 et kort konstrueret ved energien 9.82 J.

Fig.4 KAM kort ved E = 9.82 J

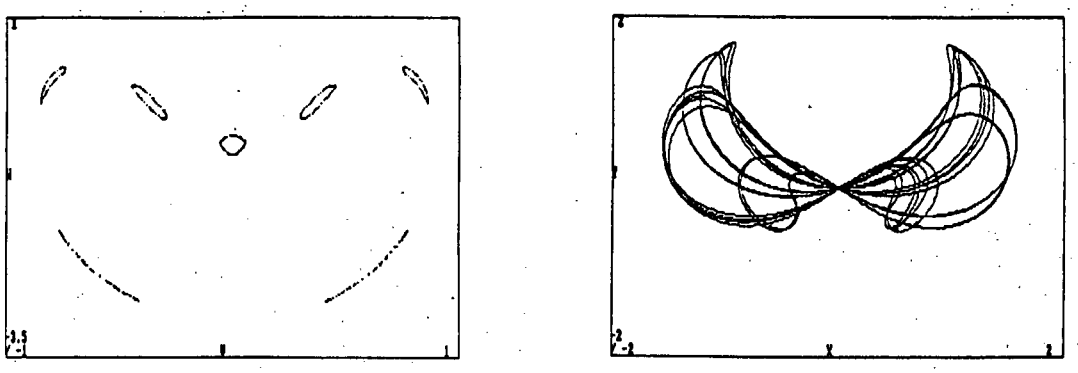


Bemærk den ændrede skalering

I kortene c,d og e ses eksempler på elliptiske fixpunkter (mærket ⊙I og ⊙II). Man kan endvidere følge sammenbruddet af

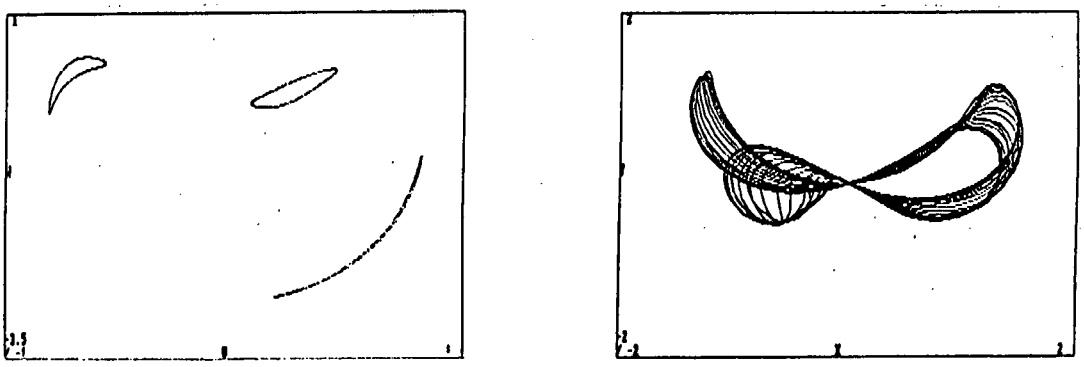
⊙I hen gennem kortene b-c-d-e. Især i kort e er deformationen af ⊙I struktur omkring de hyperbolske punkter tydelig. I fig.5 viser vi et Poincaré-snit af et kvasiperiodisk bevægelsesmønster, svarende til ⊙I ved E = -5.2 J sammenholdt med X-Y-plot heraf.

Fig.5 Poincaré-snit og X-Y-plot af kvasiperiodisk bevægelse.



Af Poincaré-snittet fremgår det, at det ene svingningstal (sammenholdt med det valgte kriterium P = 0-) er 7. Det er dog vanskeligt at gennemskue på X-Y-plottet. Sammenhængen mellem svingningstal og Poincaré-snit fremgår tydeligere ved at se på et af de kvasiperiodiske bevægelsesmønstre fra kort a (E = -6 J) hvor det ene svingingstal er 3.

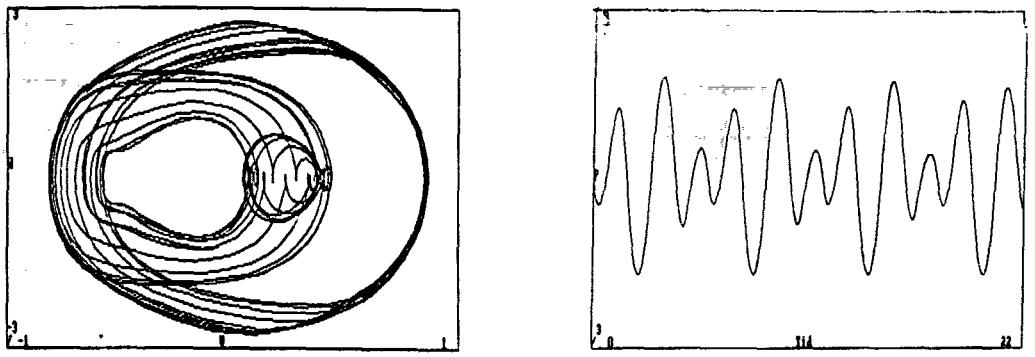
Fig.6 Poincaré-snit og X-Y-plot af kvasiperiodisk bevægelse



Endvidere kan man sammeholde disse plot med faseplot og plot

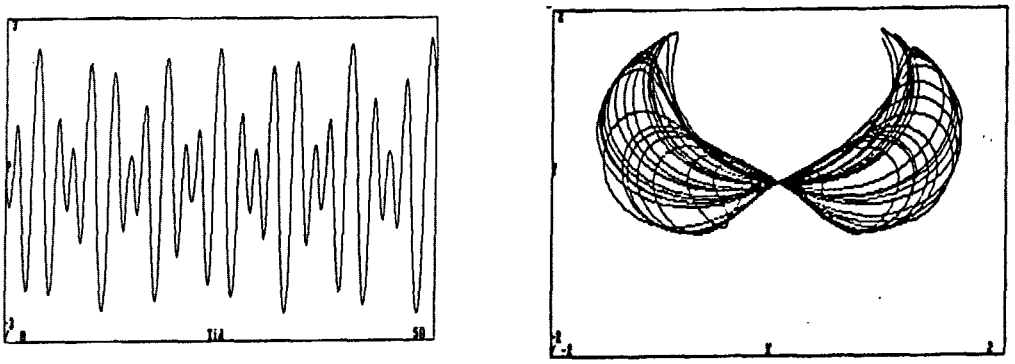
af stang 2's udsving over tiden, hvoraf svingningstallet også fremgår.

Fig.7 Faseplot og (t,P)-plot af kvasiperiodisk bevægelse



Regulariteten i (t,P)-plottet af dette kvasiperiodiske bevægelsesmønster står i skarp kontrast til det (t,P)-plot vi i fig.8 viser af et af de kaotiske bevægelsesmønstre fra kort f (E = -5 J) sammenholdt med X-Y-plot heraf.

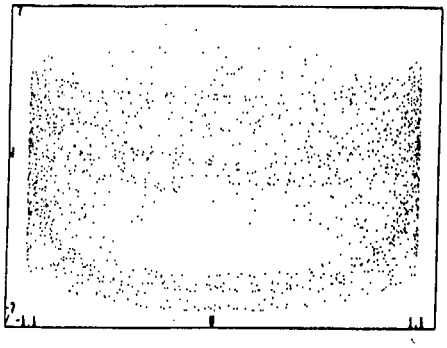
Fig.8 (t,P)-plot og X-Y-plot af kaotisk bevægelsesmønster

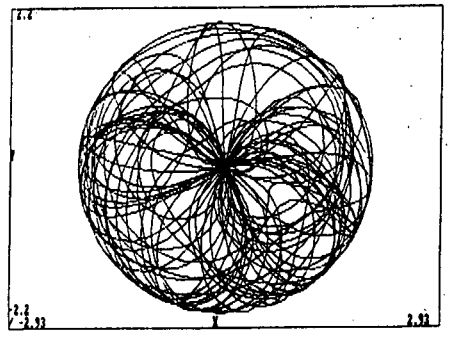


Endelig viser vi et Poincaré-snit og X-Y-plot af et kaotisk bevægelsesmønster ved E = 9.82 J.

Som det ses af X-Y-plottet svinger både stang 1 og 2 her hele vejen rundt, idet både maximum (Y = 2 m) og minimum (Y = -2 m) nås, hvilket giver anledning til det meget varierede bevægelsesmønster. Tilsvarende er Poincaré-snittet næsten helt udfyldt.

Fig.9 Poincaré-snit og X-Y-plot af kaotisk bevægelsesmønster





Opsummering

Som forventet jvfr. kap. 6 og KAM-teoremet har vi ved simuleringer set kvasiperiodiske bevægelsesmønstre bryde sammen for at blive fortrængt af områder med kaotiske bevægelsesmønstre når energien i systemet øgedes, hvilket også kan tages til indtægt for rigtigheden af KAM-teoremet.

KAPITEL 8

Afslutning

I dette kapitel opsummerer vi arbejdet med begge pendulsystemer samt processen med kursusmaterialet. Udover, at specialearbejdet som helhed har været yderst givende for alle i gruppen, har det også fostret nogle problemstillinger, der eventuelt kan arbejdes videre på. Nogle af dem er allerede oprullet undervejs i rapporten. Derfor vil vi her primært omtale spin-offs, som endnu ikke har været berørt. Diskussionen er delt i 3: 1) Torsionspendulet, 2) Dobbeltpendulet og 3) Kursusmaterialet.

Torsionspendulet

Meningen med behandlingen af torsionspendulet har været flersidig. Dels at ville konstatere kaos i såvel model som eksperiment og dels at se en eller flere veje til de kaotiske bevægelsesmønstre. Om vi har set kaos - i streng matematisk forstand - i de eksperimentelle situationer ikke afgjort med sikkerhed, idet mulighed for adekvat dataopsamling ikke har eksisteret. Men mange af de analoge udskrifter ser temmelig kaotiske ud. Derimod er der sikre vidnesbyrd om kaos i modellen. For det første har vi beregnet Liapunov spektre med positiv Liapunov eksponent, og for det andet har vi påvist type I intermittens. Derudover har vi konstateret krattige indicier for en anden vej til kaos - nemlig gennem successive periodefordoblinger (pitchfork bifurkationer). I den forbindelse er det dog ikke lykkedes at beregne den universelle konstant (se kap.5) særlig præcist, idet bifurkationsværdierne ikke har kunnet fastlægges tilstrækkeligt nøjagtigt. Endelig har vi set fraktallignende Poincaré-snit af attraktoren i modellen.

Under arbejdet med etableringen af proceduren til bestemmelse af Liapunov spektre er vi løbet ind i spørgsmålet om den anvendte metode egentlig er egnet til periodisk perturberede systemer. Der ligger derfor en opgave i at løse dette problem samt eventuelt at opbygge en anden og mere velegnet metode.

Problemet er vigtigt i den forstand, at Liapunov spektre anses for at være det mest sikre mål for om der er kaos eller ej.

En videre og dybere behandling af torsionspendulet forekommer os irrelevant al den stund, at det jo ikke er verdens vigtigste system. Desuden vil kommende gymnasielever gennem arbejdet med torsionspendulet kursusforløbet om kaos måske finde andre og supplerende ting at sige om kaos i dette pendul.

Til sidst skal nævnes, at vi - måske uhensigsmæssigt - valgte at medtage et 'ekstra' ikke lineært friktionsled i modellen. Den oprindelige tanke var, at vi ad den vej kunne få større kvantitativ overensstemmelse mellem model og virkelighed. Men dengang var det også meningen, at der skulle etableres videoopsamling, så sammenligningen kunne realiseres. Videoopsamlingen blev ikke til noget i denne ombæring, men der er et eksperimentelt projekt i at få et sådant apparat virkeliggjort. Herigennem kunne man også komme nærmere til en analyse af andre 'naturlige' (friktion, asymmetrier, støj m.v.) ikke-lineære elementers betydning for fysiske systemers bevægelsesmønstre - i torsionspendulet såvel som i andre fysiske systemer.

Dobbeltpendulet

Dette pendul er på flere måder anderledes end torsionspendulet. Den i denne sammenhæng vigtigste forskel er, at dobbeltpendulet er et konservativt system. Det medfører en kvalitativt anderledes adfærd end man finder hos de dissipative systemer. Modsat den (tidligere) udbredte opfattelse, at Hamiltonske systemer nok opfører sig pænt, viser det sig, at kaos i konservative systemer er mere almindeligt end (kvasi)-periodiske bevægelser. Hensigten med at undersøge dette pendul var da heller ikke at finde kaos. Det var snarere at se om og hvordan det kvasiperiodiske brød sammen. Og det fik vi set til fulde. Det interessante er at undersøge, hvordan kaos opstår ud af orden og hvordan orden og kaos er relateret. Heri ligger måske nøglen til at anskue verden som sammensat af orden og kaos - af lineært og ikke-lineært, hvilket igen kan give anledning til at tænke over, hvad det betyder for vor opfattelse af natur og videnskab og brugen heraf.

Vi vil i denne sammenhæng gerne advokere for energibåndsteknikkens fordele fremfor den Hamiltonske formalisme. Vi har på et tidligt stadium i specialearbejdet udregnet de Hamiltonske ligninger for dobbeltpendulet (se appendix VI). At energibåndsligningerne er betydeligt simplere og "computervenlige" skulle være åbenbart.

Kursusmaterialet

Specialeforløbets første halvdel gik med at fremstille lærebog, lærevejledning samt øvelsesvejledinger. Udgangspunktet for dette arbejde var et ønske fra IMFUFA's side om at få udarbejdet et kursusforløb for gymnasieelever samt materiale hertil. Resultatet af dette arbejde foreligger i IMFUFA teksterne 179a og 179b. Efterhånden som arbejdet skred frem, blev det klart, at en gennemførelse af kursusforløbet i sin helhed nok er en uoverkommelig opgave for en enkelt klasse. Der er derfor grund til at henlede opmærksomheden på de forskellige muligheder for udvalg af emner og øvelser, der er gennemgået i lærervejledningen.

Den af os uventede store efterspørgsel til materialet og kurset tyder på, at vi alligevel har ramt rigtigt - eller, at kaos er et fænomen, som er meget aktuelt. Uanset svaret er det i alle tilfælde rart, at ens arbejde kommer til nytte!

Litteraturliste

Arnold, V.I. : "Mathematical Methods of Classical Mechanics". Springer, 1978.

Bergé, P., Pomeau,Y. & Vidal, C : "Oder within chaos" 1986, Paris

Bai-Lin, Hao (ed.) : "Direction in Chaos" Vol. I + II. World Scientific 1988

Birkhoff, G. D. : "Dynamical Systems" AMS 1927

Christiansen, P.V. : "Dynamik og Diagrammer" IMFUFA tekst nr. 8, 1978.

Christiansen, P.V. : "Simulation i kontinuert tid" IMFUFA tekst nr. 121, 1986.

Christiansen, P.V. : "Tilfældighedens nødvendighed" "Paradigma", nr.1, dec. 1986.

Curry, J. H. : "On the Hénon Transformation." Commun.Math. Phys. 68. s. 129-140, 1979.

Eckmann, J.-P. : "Roads to turbulence in dissipative dynamical systems". Rev. Mod. Phys. vol 53, no. 4, ocy. 1981.

Feigenbaum, M. : "Universal Behavior in Nonlinear systems" Physical 7D, s. 16-39, 1985 eller Los Alamos Science/summer 1980.

Feit, S.D. : "Charcteristic exponents and strange attractors." Commun. math. Phys. 61, s. 249-260, 1978.

Goldstein H. : "Classical Mechanics" a) Første udgave, 13. tryk 1978. b) Anden udgave 1980.

Guckenheimer, J : "A Brief Introduction to Dynamical Systems" Lect. in Appl. Math. vol. 17, 1979.

Guckenheimer, J & Holmes, P. : "Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fiels". Springer, 1978.

Gundermann, J. : "EB-modeller i de grundlæggende fysikdiscipliner". Fysik speciale fra H.C.Ørsted instituttet, 1979. (Upubliceret)

Haken, H. (ed.) : "Synergetics - A Workshop". Springer, 1977.

Helleman, R.H.G. : "Self-Generated Chaotic Behavior in Non-linear Mechanics". fra: Fundamental Problems in Statistical Mechanics V. Proc. Enschede Summer School, 1980.

Hénon, M. : "A two-dimensional mapping whit a strange attractor." Commun. Math. Phys. 50. s. 69-77, 1976.

Lorenz, E. N. : "Deterministic Nonperiodic Flow". Jour. Atmos. Scien., vol. 20, s. 130-141, 1963.

Lorenz, E. N. : "The Problem of deducicy the climate from the governing equations". Telhus XVI, 1964.

Luchner, K. : "Chaotic Motions (Mechanical Systems in Experiment and Simulations)". "Teaching Non-Linear Phenomena I-II" Chaos in Euducation (ed. George Marx). Proceedings og the International Work-shop on non-linear phenomena af schools and universities. Hungary, April 1987.

Marsden, J.E. & McCracken K. : "The Hopf Birfurcation and its Applications". Springer, 1976.

Moser, J. : "Is the Solar System stable?". Math. Intelligencer, 1 s. 65-71, 1978.

Nielsen K. & Andersen, B. : "Periodiske og kaotiske fænomener i kemiske systemer". Kemi rapport fra 2. modul på overbygningsfaget kemi på RUC 1985.

Olsen F. & Christensen I. : "Kaos på RUC". IMFUFA 89. Video (VHS), der introducerer de centrale begreber m.m., vi benytter i elevheftet: "Noter til et eksperimentelt kursus om kaos", IMFUFA tekst nr. 179b.

Peixoto, M.M : "Sturtural Stability on Two-Dimensional Manifolds". Topology, vol. 1, s. 101-120, 1962.

Pomeau, Y. & Mannevielle, P. : "Intermittent Transition to Turbulence in Dissipative dynamical systems". Commun. Math. Phys., 74, s. 189-197, 1980.

Richter, P. H. & og Peitgen H. O. : "The Beauty of Chaos" (Morphology of Complex Boundaries) "Teaching Non-Linear Phenomena I-II" Chaos in Euducation (ed. George Marx). Proceedings og the International Workshop on non-linear phenomena af schools and universities. Hungary, April 1987.

Sagdeev, R. Z., Usikov, D. A. & Zaslavsky, G. H. : "Nonlinear Physics - From the Pendulum to Turbulence and Chaos". Moscow, 1978.

Schuster, H.G. : "Deterministic Chaos - An Introduction". 1984. Frankfurt. 2. udgave, Springer, 1988.

Sørensen, T. S. : "Roden til al udvikling: Instabiliteter 1" a) Naturens Verden, s. 145-153, 1980.

: "Roden til al udvikling: Instabiliteter 2" b) Naturens Verden, s. 240-248, 1980.

Sørensen, T. S. : "Roden til al udvikling: Instabiliteter 3" Naturens Verden, s. 108-119, 1982.

Thompson, J.M.T.& Stewart, H.R. : "Nonlinear Dynamics and chaos" Great Britian, 1986.

Velarde, M. G. : "Intermittencies and Chaos" s. 230-245 fra: "Teaching Non-Linear Phenomena I-II" Chaos in Euducation (ed. George Marx). Proceedings og the International Workshop on non-linear phenomena af schools and universities. Hungary, April 1987.

Wierød, A, & Brønd, S. & Staal, J. : "Elevhefte: Noter til et eksperimentelt kursus på RUC" IMFUFA tekst nr. 179b, 1989.

Wiggins, S. : "Global Bifurcations and Chaos". Springer, 1988.

Wolf, A, & Swift, J.B. & Swinney, H.L. & Vastano, J.A. : "Determininc Lyapunov exponent from a time series". Physica 16D, 1985, s. 285-317, Amsterdam

Appendix I

Bifurkationsteoremer

I dette appendix fremlægges og kommenteres en række teoremer, hvori de matematiske betingelser, som er nødvendige for, at visse bifurkationer kan forekomme, figurerer. Til hvert teorem knyttes en kommentar. Vi forventer, at læseren har tilegnet sig "byggestenene" fra kap. 2 samt har et kendskab til grundlæggende spektral- og diffenrentialligningsteori. Til en fyldig forståelse er denne baggrund næppe heller tilstrækkelig, hvorfor vi henviser til f.eks. Guckenheimer og Holmes, 1983, pp. 145-165, hvori der findes yderligere henvisninger, eksempler og opgaver.

Appendixet omhandler først bifurkationer, der har med kontinuerte flows at gøre, dvs. differentialligningssystemer: $\dot{\vec{x}} = F_\mu(\vec{x})$, $\vec{x} \in \grave{R}^d$, $\mu \in \grave{R}$. En del af bifurkationstyperne for denne slags systemer har vist sig at kunne reduceres til nogle få arketyper, som kun afhænger af een variabel (og parameteren)! Disse kaldes <u>normalformer</u> og opstår gennem koordinattransformationer og rækkeudviklinger (op til 3.orden) af de betragtede d-dimensionale systemer. Normalformerne betegnes også <u>superkritiske</u> af grunde, vi senere kommer ind på.

Det skal nævnes, at de omtalte bifurkationer er lokale (i nærheden af et ligevægtspunkt) og af codimension = 1 (parameteren er én-dimensional). Det er i nærheden af det betragtede ligevægtspunkt, at flowet kan erstattes med en normalform.

Den anden type systemer, appendixet omhandler er de iterative afblidninger: $\vec{x}_{n+1} = f_\mu(\vec{x}_n)$, hvor $\vec{x}_i \in \grave{R}^d$ og $\mu \in \grave{R}$. Også disse kan bifurkere og i den sammenhæng, lokalt, reduceres til normalformer. For at opnå en god forståelse af intermittensfænomenet, er disse birfurkationer de væsentlige. - Men først de kontinuerte flows.

Bifurkationer i kontinuerte systemer

Det første teorem angår (bl.a.) den såkaldte saddelpunktsbifurkation (SP):

TEOREM 1 Lad $\dot{\vec{x}} = F_\mu(\vec{x})$ være et d-dimensionalt diffentialligningssystem afhængig af parameteren $\mu \in \grave{R}$. Antag, at der for $\mu = \mu_\circ$ findes et ligevægtspunkt p, om hvilket følgende er opfyldt:

(SP1): $D_x F_{\mu_\circ}(p)$ har én egenværdi lig med 0 med højre egenvektor $\vec{v}$ og venstre egenvektor $\vec{w}$[1].
$D_x F_{\mu_\circ}(p)$ har desuden k egenværdier med negativ realdel og d-k-1 egenværdier med postitiv realdel.

(SP2): $\vec{w}\left(\frac{\delta F_\mu}{\delta \mu}(p, \mu_\circ)\right) \neq 0$

(SP3): $\vec{w}(D_x^2 F_{\mu_\circ}(p)(\vec{v}, \vec{v})) \neq 0$

Da findes en glat (dvs. en uendelig gange differentiabel; C^∞) kurve bestående af ligevægtspunkter i $\grave{R}^d \times \grave{R}$, som går gennem $(p, \mu_\circ)$ og tangerer hyperplanen $\grave{R}^d \times (\mu_\circ)$. Afhængig af fortegnene på udtrykkene (SP2) og (SP3), findes der ikke ligevægtspunkter i nærheden af $(p, \mu_\circ)$, når $\mu < \mu_\circ$ [$\mu > \mu_\circ$] og to ligevægtspunkter i nærheden af $(p, \mu_\circ)$ for hver parameterværdi $\mu > \mu_\circ$ [$\mu < \mu_\circ$]. De to ligevægtspunkter for $\dot{\vec{x}} = F_\mu(\vec{x})$ nær $(p, \mu_\circ)$ er hyperbolske (altså ikke elliptiske) og har (derfor) stabile mangfoldigheder med dimensioner k og k+1, henholdsvis. Desuden er mængden af ligningssystemer ($\dot{\vec{x}} = F_\mu(\vec{x})$), der tilfredsstiller (SP1) - (SP3) åben og tæt i rummet af C^∞-én-parameterfamilien af vektorfelter F_μ med ligevægtspunkt i $(p, \mu_\circ)$ med en egenværdi lig 0.

Bemærkninger til TEOREM 1

Normalformen, den betragtede familie kan reduceres til, er: $\dot{x} = \mu - x^2$, hvor ligevægtspunktet er $(p, \mu_\circ) = (0, 0)$. Der

---

1) En egenvektor (højre) $\vec{v}$ af n × n matrix **A**, er en vektor forskellig fra nulvektoren, som tilfredsstiller ligningen

$$\mathbf{A}\vec{v} = \lambda\vec{v} \text{ (eller } (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\vec{v} = 0$$

for nogle $\lambda \in C$. (λ er en egenværdien til $\vec{v}$).

En venstre egenvektor $\vec{w}$ af den samme matrix **A**, er en vektor, der tilfredsstiller ligningen

$$\vec{w}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$$

eksisterer altså ikke noget ligevægtspunkt for $\mu < 0$, men derimod to for $\mu > 0$, nemlig $x = \pm\sqrt{\mu}$. Den ene af disse er stabil ($x = +\sqrt{\mu}$), men den anden er ustabil ($x = -\sqrt{\mu}$). Transversalitetsbetingelserne (SP2) og (SP3) bliver i dette tilfælde 1 og -2 hhv. og er derfor opfyldt.

Teoremet forudsætter, at der ikke er et ligevægtspunkt i nærheden af (p, μ_0). Det udelukker situationen, hvor f.eks. $\vec{x} = \vec{0}$ er ligevægtspunktet for alle μ. I det tilfælde bryder (SP2) sammen og må erstattes med $\vec{w}\left(\frac{\delta^2 F_\mu}{\delta\mu\delta x}(\vec{v})\right) \neq 0$ i $(0, \mu_0)$. Da kaldes bifurkationen <u>transkritisk</u>. Normalfunktionen for denne type er $\dot{x} = \mu x - x^2$.

Mange fysiske systemer er symmetriske. Hvis et én-dimensionalt system skal være symmetrisk (om 0) skal F_μ være en ulige funktion (dvs. $F_\mu(-x) = -F_\mu(x)$). Specielt vil F_μ have fixpunkt i $x = 0$. Ulige funktioner kan ikke tilfredsstille betingelsen $\frac{\delta^2 F_\mu}{\delta\mu\delta x} \neq 0$, hvorfor der ikke kan forekomme en transkritisk bifurkation. Man kan imidlertid erstatte (SP 3) med betingelsen $\frac{\delta^3 F_\mu}{\delta x^3} \neq 0$. Derved får man en <u>pitchforkbifurkation</u>.

I denne situation vil ligevægtspunktet ($x = 0$) skifte stabilitet og der opstår to nye ligevægtspunkter (gennem symmetrien af F_μ). Normalformen for pitchforkbifurkationen er <u>$\dot{x} = \mu x - x^3$</u>.

Hver af normalformerne ovenfor giver superkritiske (det 'normale') bifurkationer. Dvs. det ikke lineære led virker modsat det lineære led, hvorfor de giver stabilitet. Hvis det ikke-lineære led virker samme vej som det lineære vil det lineære virke destabiliserende og man får subkritiske bifurkationer (se fig. 1, 2 og 3). De tilhørende ligninger er:

$$\dot{x} = \mu + x^2$$

$$\dot{x} = \mu x + x^2$$

$$\dot{x} = \mu x + x^3$$

Fig.1 Subkritisk saddelpunktsbifurkation

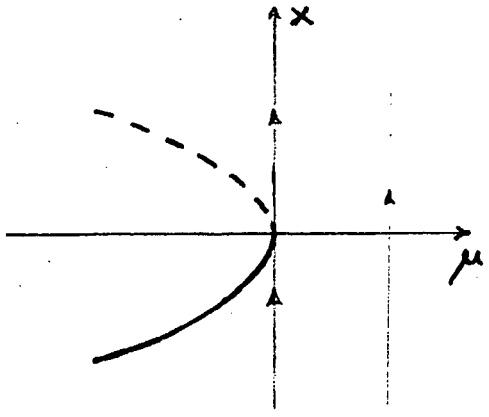


Fig.2 Subkritisk transkritisk bifurkation

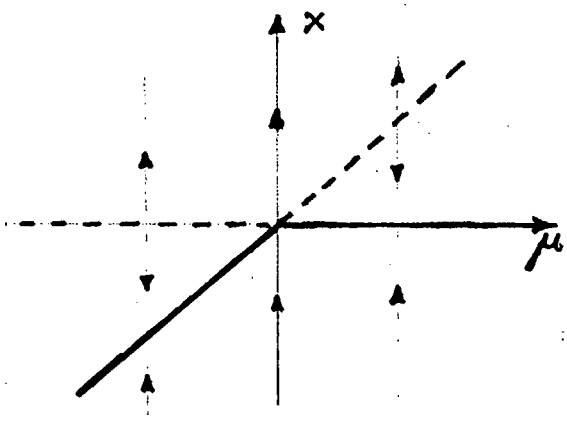
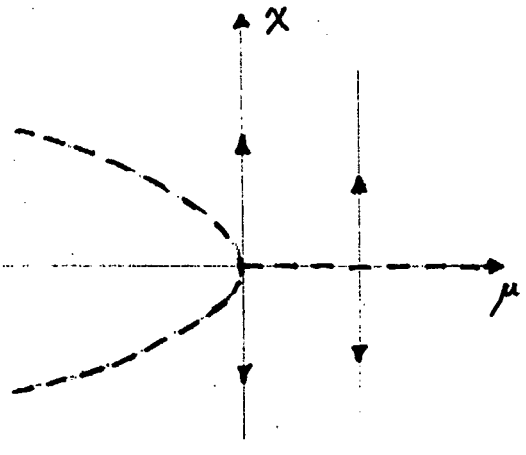


Fig.3 Subkritisk pitchforkbifurkation



Alle de nævnte bifurkationer hænger altså på, at een egenværdi antager værdien 0 (jvf. teoremet).

Den følgende bifurkationstype - Hopf-birfurkationen - kan opstå, hvis realdelen til to forskellige egenværdier (og disse er komplekst konjugerede) bliver 0 i bifurkationspunktet. Selvom teoremet (TEOREM 2 altså) kan generaliseres til at gælde for d-dimensionale flows, vil vi for overskuelighedens skyld kun angive det for to-dimensionale flows.

TEOREM 2 Lad det to-dimensionale differentialligningssystem $\dot{\vec{x}} = F_\mu(\vec{x})$, hvor $\vec{x} \in \grave{R}^2$, $\mu \in \grave{R}$ og $F_\mu \in C^K$ $(K \geq 4)$ have ligevægtspunktet $\vec{x} = (0,0)$ for alle $\mu \in \grave{R}$. Antag, at $D_x F_\mu(0,0)$ har to forskellige, simle, komplekst konjugerede egenværdier $\lambda(\mu)$ og $\overline{\lambda(\mu)}$, hvor $\mu < 0 \Rightarrow Re(\lambda) < 0$; $\mu = 0 \Rightarrow Re(\lambda) = 0$ og $\mu > 0 \Rightarrow Re(\lambda) > 0$. Antag desuden at

$$\left.\frac{dRe(\lambda(\mu))}{d\mu}\right|_{\mu = \mu_0} > 0$$

Da findes en (mindst to gange differentiabel) funktion $\mu :]-\epsilon;\epsilon[\to \grave{R}$ således, at punktet $(x_1, 0, \mu(x_1))$ ligger på en lukket kurve med periode $\approx \frac{2\pi}{|\lambda(0)|}$ og radius voksende som μ for $x_1 \neq 0$, og således at $\mu(0) = 0$.

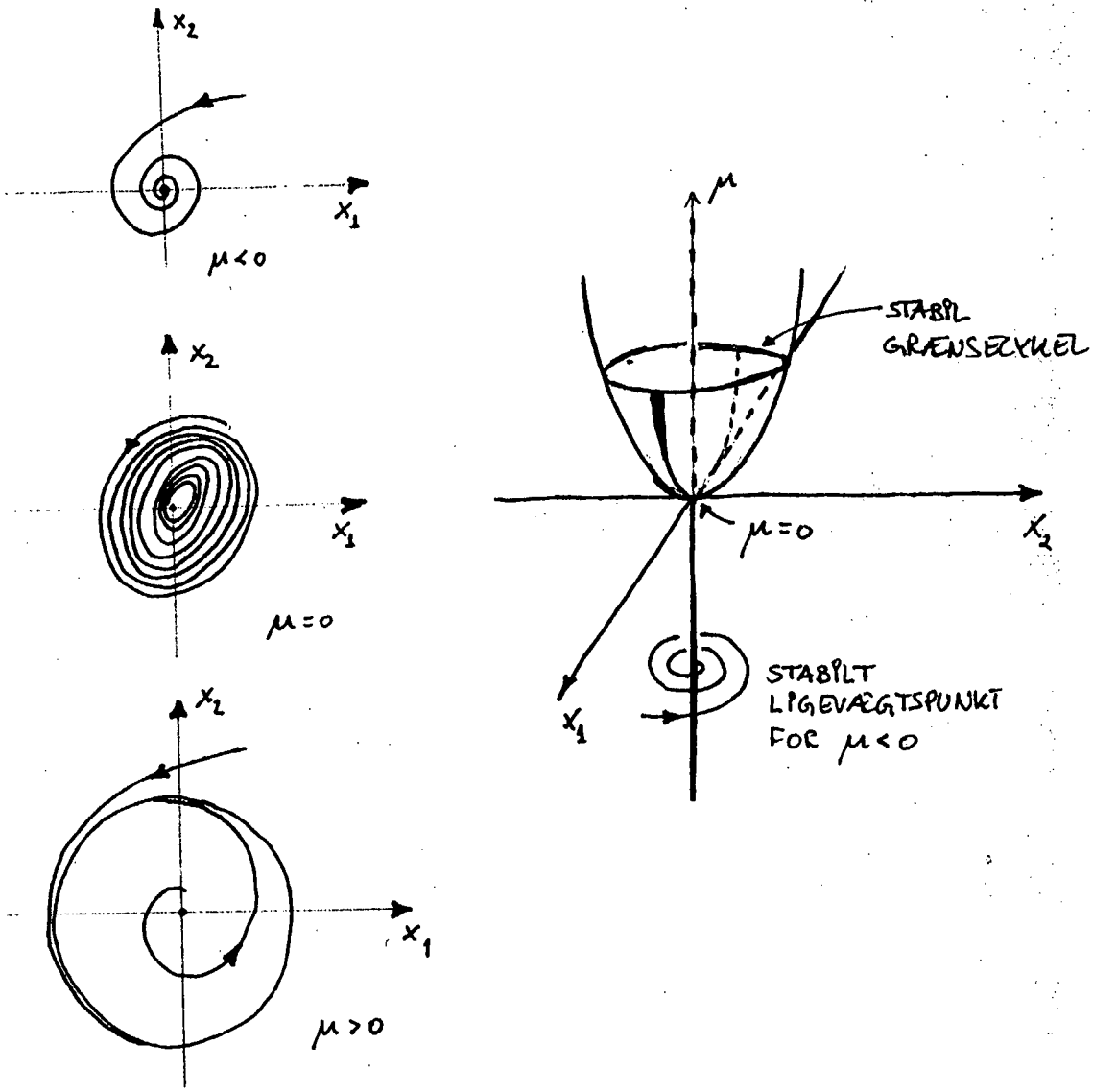
Desuden findes en omegn **U** af $(0,0,0)$ i $\grave{R}^2 \times \grave{R}$ således, at enhver lukket kurve i **U** er en af de ovenfor nævnte.

Hvis yderligere $x = (0,0)$ er asymptotisk stabil for $\mu = 0$, da er $\mu(x_1) > 0$ for alle $x_1 \neq 0$ og kurverne vil være tiltrækkende.

Bemærkninger

Forudsætningen, at $Re(\lambda) < 0$ for $\mu < 0$ betyder, at ligevægtspunktet $(x_1, x_2) = (0,0)$ er asymptotisk stabilt, mens det er ustabilt for $\mu > 0$, idet $Re(\lambda) > 0$. Da der desuden er tale om komplekse egenværdier vil løsningskurverne spiralere ind mod ligevægtspunktet for $\mu < 0$. Den sidste del af sætningen siger, at dette også er tilfældet i $\mu = 0$. For $\mu > 0$ etableres en grænsecykel med radius $\approx \mu$. Denne vil - iflg. teoremets sidste punkt - være stabil. Nedenfor er teoremets kvalitative indhold søgt illustreret:

Fig. 4



Den viste Hopf-bifurkation er superkritisk. Der findes ligeledes en subkritisk, som er omtalt i kap. 2. At redegøre for de tekniske betingelser, der fører til en subkritisk Hopf-bifurkation kræver, at vi stabler et større matematisk apparat på benene, hvilket vil føre for vidt her. Vi kan i stedet henvise til Marsden og McCracken, 1976, kap. 4.

Bifurkationer i iterative systemer

De følgende bifurkationsteoremer vil udelukkende handle om iterative afbildninger (f.eks. Poincaré-afbildninger).

Som nævnt i hovedteksten vil der være 3 fundamentalt set forskellige typer af bifurkationer af fixpunkter for en Poincaré afbildning f, svarende til, at en egenværdi til Df bliver +1, -1 eller at to komplekst konjugerede egenværdier samtidigt opnår normen 1. Vi vil angive teoremer for de to sidstnævnte typer. Tilfældet +1 giver anledning til en bifurkation analog til saddelpunktsbifurkationen, en transkritisk bifurkation eller en pitchfork bifurkation. De afledte ligninger for egenværdi = +1 er

$$1)\ f(x) = x + \mu - x^2 \qquad \text{(SP)}$$

$$2)\ f(x) = (1 + \mu)x - x^2 \qquad \text{(Transkritisk)}$$

$$3)\ f(x) = (1 + \mu)x - x^3 \qquad \text{(Pitchfork)}$$

Den transkritiske bifurkation kan illustreres med den logistiske afbildning

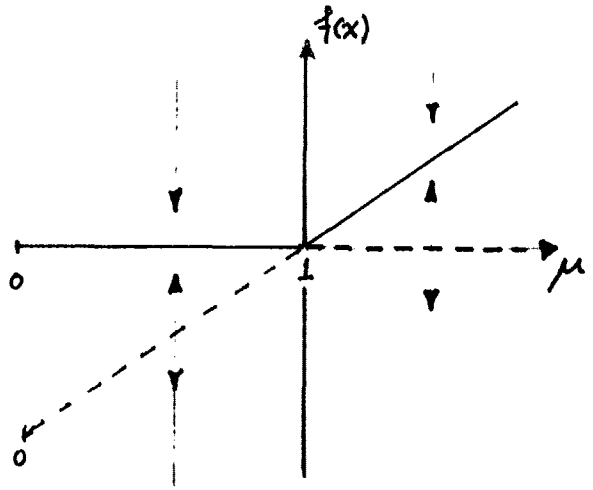
$$f_\mu(x) = \mu x(1 - x),$$

der har fixpunktet $x_0 = 0$. Egenværdier til Df_μ er bestemt ved

$$\lambda = \mu - 2\mu x_0 = \mu \quad \text{for } x_0 = 0.$$

Der er således bifurkation i $(x_0, \mu_0) = (0,1)$. Udover $x_0 = 0$ har f_μ også fixpunktet $x_1 = 1 - 1/\mu$. For $0 < \mu < 1$ er $x_0 = 0$ et stabilt fixpunkt, mens $x_1 = 1 - 1/\mu$ er ustabilt. Disse stabilitetsforhold skifter i $(0,1)$ i overensstemmelse med den transkritiske bifurkation:

Fig. 5



Saddelpunkts- og pitchforkbifurkationerne er ligeledes i overensstemmelse med de tilsvarende for kontinuerte flows.

Afbildninger, hvor egenværdien bliver -1 kan undergå en flipbifurkation, som også kaldes en subharmonisk bifurkation eller en periodeforboblingsbifurkation.

Metoden til reduktion til én-dimensionale afbildninger f_μ er afledt af et centralt teorem: centermangfoldighedsteoremet, der iøvrigt også er argumentet for at d-dimensionale flows kan reduceres til dimension = 1. Vi vil ikke fordybe os i dette teorem, men blot udvikle den én-dimensionale afbildning. Hvis 0 er et fixpunkt for afbildningen med tilhørende egenværdi = -1 bliver Taylorudviklingen til 3.grad:

$$f_{\mu_0}(x) = -x + ax^2 + bx^3 + \text{h.o.l.}$$

Sætningen om implicit givne funktioner giver, at der findes en glat kurve $(x(\mu),\mu)$ af fixpunkter i planen, som går gennem $(0,\mu_0)$. Ved at sammensætte f_{μ_0} med sig selv fås:

$$\begin{aligned} f^2_{\mu_0}(x) &= -(-x + ax^2 + bx^3) + a(-x + ax^2)^2 + b(-x)^3 + \text{h.o.l.} \\ &= x - 2bx^3 - 2a^2x^3 + \text{h.o.l.} \\ &= x - 2(b + a^2)x^3 + \text{h.o.l.} \end{aligned}$$

Denne afbildning, f^2_μ vil have fixpunkter nær $(0,\mu_0)$, men disse vil ikke være fixpunkter for f_μ. Man kan indse, at $f^2_{\mu_0}$ har ligheder med pitchforkbifurkationen, hvilket betyder, at f_μ er periodefordoblet. Man kan vise følgende:

TEOREM 3 Lad $f_\mu : \grave{R} \to \grave{R}$ være en familie af afbildninger, hvor f_{μ_0} har fixpunkt i x_0 med egenværdi -1. Antag at

$$\text{(F1)} \qquad \frac{\delta f}{\delta \mu} \cdot \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} + 2 \cdot \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta \mu} \neq 0 \text{ i } (x_0,\mu_0)$$

$$\text{(F2)} \qquad a = \frac{1}{2}\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{\delta^3 f}{\delta x^3} \neq 0 \text{ i } (x_0,\mu_0).$$

Da findes en glat kurve af fixpunkter gennem (x_0,μ_0), hvis stabilitet skifter i (x_0,μ_0) således at $\gamma \setminus ((x_0,\mu_0))$ er en forening af hyperbolske periode-2 baner. γ har desuden kvadratisk tangens med linien $\grave{R} \times (\mu_0)$ i (x_0,μ_0).

Bemærkninger

For at illustrere indholdet af denne sætning, der her handler om én-dimensionale afbildninger, vil vi fremhæve den

logistiske vækstmodel:

$$(*) \quad f_\mu(x) = \mu x(1 - x) \quad , \; x \in [0;1] \; , \; \mu \in [0;4].$$

Fixpunkter, $\bar{x}$, til (*) findes af $\bar{x} = f_\mu(\bar{x})$ til

$$\bar{x} = \begin{cases} 0 \\ 1 - 1/\mu \end{cases}$$

Jacobimatricen til f_μ i punktet $x = 1 - \frac{1}{\mu}$ er

$$\frac{\delta f_\mu}{\delta x}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) = \mu - 2\mu \cdot \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) = 2 - \mu$$

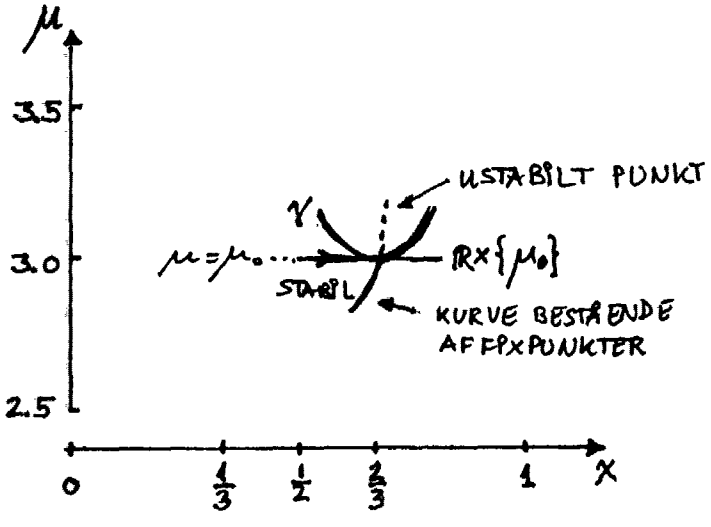
hvilket samtidig er egenværdien til matricen. Denne skal i bifurkationspunktet være -1. Dvs. $2 - \mu = -1 \Leftrightarrow \mu_0 = 3$. Dermed er det akuelle fixpunkt $x_0 = 1 - 1/3 = 2/3$. Indsættelse i venstresiden til hhv. (F1) og (F2) giver:

$$(F1): \; x_0(1 - x_0)(-2\mu_0) + 2(-2x_0) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}(-2\cdot 3) - 4\cdot\frac{2}{3} = -4 \neq 0$$

$$(F2): \; a = \frac{1}{2}\cdot(-2\mu_0) + \frac{1}{3}\cdot 0 = -\mu_0 = -3 \neq 0$$

Altså er begge betingelser i sætningen tilfredsstillet, hvorfor der eksisterer en glat kurve af fixpunkter for f_μ gennem (x_0, μ_0), og disse vil skifte stabilitet i (x_0, μ_0). I dette tilfælde vil der være tale om at gå fra stabil til ustabil (jvfr. fig.6). Desuden vil der være en differentiabel kurve γ bestående af hyperbolske (dvs. egenværdien i disse punkter er $\neq 1$ - eller rettere modulus af egenværdierne) periode-2 baner samt punktet $(x_0, \mu_0) = (2/3, 3)$ (se fig.6)

Fig.6



Ved sammensætning af f med sig selv, kan man vise, at f^{2n} for $n \in \mathbb{N}$ alle vil undergå en flipbifurkation som ovenfor.

Hvis a i TEOREM 3 er positiv er flipbifurkationen superkritisk, mens den er subkritisk, hvis $a < 0$. Hvis der er tale om en Poincaré afbildning for et flow, kan flipbifurkationen kun forekomme, hvis dimensionen af systemet ≥ 3.

Det sidste bifurkationsteorem, vi nævner, vil vi ikke kommentere, da dets indhold og implikationer er dybt tekniske, og bl.a. involverer rotationstal i dets geometriske fortolkning:

TEOREM 4 (Den sekundære Hopf-bifurkation)

Lad $f_\mu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være en én-parameter familie af to-dimensionale afbildninger, som har en glat familie af fixpunkter $\vec{x}(\mu)$, hvor egenværdierne er komplekst konjugerede $\lambda(\mu)$ og $\bar{\lambda}(\mu)$. Antag, at

(SH 1) $\quad |\lambda(\mu_0)| = 1$, men $\lambda^j(\mu_0) \neq 1$ for $j = 1,2,3,4$.

(SH 2) $\quad \dfrac{d|\lambda(\mu)|}{d\mu} = d \neq 0.$

Da findes en glat ændring i koordinater $\mathbf{h}$ så udtrykket for $\mathbf{h} f_\mu \mathbf{h}^{-1}$ i polære koordinater har formen:

$$\mathbf{h} f_\mu \mathbf{h}^{-1}(r,\theta) = (r(1 + d(\mu - \mu_0) + ar^2), \theta + c + br^2) + \text{h.o.l.}$$

Hvis desuden

(SH 3) $\quad a \neq 0$

er opfyldt, findes en 2-dimensional flade Σ i $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ med kvadratisk tangens med planen $\mathbb{R}^2 \times \{\mu_0\}$ som er invariante overfor f. Hvis $\Sigma \cap \mathbb{R}^2 \times \{\mu\}$ indeholder mere end eet punkt, da er $\Sigma \cap \mathbb{R}^2 \times \{\mu\}$ en simpel lukket kurve.

Appendix II

Implementering af Lorenz-modellen i "CTS"

PROGRAMUDSKRIFT:

```
'---------------  MODELDEFINITION TIL CTS  ---------------
MN$=        "LORENZ"
UserPath$= "c:\tb\cts\data\"
$INCLUDE "CTS.INC"
NLBetingelser:
'------------------  NL-BETINGELSER -----------------------
RETURN                                          (benyttes ikke)
InterneKonstanter:
'-----------------  INTERNE KONSTANTER -------------------
RETURN                                          (benyttes ikke)
OutputVariable:
'--------------------  OUTPUT-VARIABLE --------------------
X=LE(1)
Y=LE(2)
Z=LE(3)
RETURN
RateLigninger:
'--------------------  RATE-LIGNINGER ---------------------
X=LE(1):Y=LE(2):Z=LE(3)
RA(1)=P*(Y-X)
RA(2)=X*(R-Z)-Y
RA(3)=X*Y-B*Z
RETURN
```

(Det følgende benyttes ikke, men er med på brugerfladen)

```
StyringOgStøj:
'--------------------  STYRING OG STØJ --------------------
RETURN
BrugerMenu:
'-----------  BRUGERDEFINERET ELEMENT PÅ CTSMENU -----------
RETURN
BrugerPlot:
'---------  BRUGERDEFINERET ELEMENT PÅ GRAFISK MENU --------
RETURN
'--------  BRUGERDEFINEREDE FUNKTIONER OG SUBRUTINER -------
```

Appendix III

Implementering af Liaupnov-eksponent proceduren
i Lorenz-modellen og i torsionspendul-modellen.

PROGRAMUDSKRIFT AF LORENZ-MODELLEN MED LIAPUNOV-PROCEDUREN:

```
'----------------  MODELDEFINITION TIL CTS -------------------
MN$=        "LIALOREN"
UserPath$= "c:\tb\cts\data\"
$INCLUDE "CTS.INC"
NLBetingelser:
'-------------------  NL-BETINGELSER -------------------------
RETURN                                          (benyttes ikke)
InterneKonstanter:
'------------------  INTERNE KONSTANTER ---------------------
XXX=0:YYY=0:ZZZ=0
ln2=log(2)
RETURN
OutputVariable:
'---------------------  OUTPUT-VARIABLE ----------------------
IF LE(0)=T0 THEN XXX=0:YYY=0:ZZZ=0:RETURN
V1X=LE(4):V1Y=LE(5):V1Z=LE(6)              (de 3 basisvektorer)
V2X=LE(7):V2Y=LE(8):V2Z=LE(9)
V3X=LE(10):V3Y=LE(11):V3Z=LE(12)

(normalisering og reortogonalisering af de 3 vektorer)

V1L=SQR(V1X^2+V1Y^2+V1Z^2)
LE(4)=V1X/V1L:LE(5)=V1Y/V1L:LE(6)=V1Z/V1L

PRIK21=V2X*LE(4)+V2Y*LE(5)+V2Z*LE(6)
T2X=V2X-PRIK21*LE(4)
T2Y=V2Y-PRIK21*LE(5)
T2Z=V2Z-PRIK21*LE(6)
T2L=SQR(T2X^2+T2Y^2+T2Z^2)
LE(7)=T2X/T2L:LE(8)=T2Y/T2L:LE(9)=T2Z/T2L
V2L=V2X*LE(7)+V2Y*LE(8)+V2Z*LE(9)
```

```
PRIK32=V3X*LE(7)+V3Y*LE(8)+V3Z*LE(9)
PRIK31=V3X*LE(4)+V3Y*LE(5)+V3Z*LE(6)
T3X=V3X-PRIK32*LE(7)-PRIK31*LE(4)
T3Y=V3Y-PRIK32*LE(8)-PRIK31*LE(5)
T3Z=V3Z-PRIK32*LE(9)-PRIK31*LE(6)
T3L=SQR(T3X^2+T3Y^2+T3Z^2)
LE(10)=T3X/T3L:LE(11)=T3Y/T3L:LE(12)=T3Z/T3L
V3L=V3X*LE(10)+V3Y*LE(11)+V3Z*LE(12)

(beregning af Liapunov-eksponenterne L, I og A)

XXX=XXX+LOG(V1L)/ln2
L=XXX/(LE(0)-T0)
YYY=YYY+LOG(V2L)/ln2
I=YYY/(LE(0)-T0)
ZZZ=ZZZ+LOG(V3L)/ln2
A=ZZZ/(LE(0)-T0)
(intern leveljustering)
FOR kkk=4 to 12:L1(kkk)=LE(kkk):LN(kkk)=LE(kkk):next
RETURN
RateLigninger:
'---------------------  RATE-LIGNINGER ----------------------
RA(1)=P*(LE(2)-LE(1))                          (Lorenz-ligningerne)
RA(2)=LE(1)*(R-LE(3))-LE(2)
RA(3)=LE(1)*LE(2)-B*LE(3)

RA(4)=P*(LE(5)-LE(4))                (de lineariserede ligninger)
RA(5)=(R-LE(3))*LE(4)-LE(5)-LE(1)*LE(6)
RA(6)=LE(2)*LE(4)+LE(1)*LE(5)-B*LE(6)
RA(7)=P*(LE(8)-LE(7))
RA(8)=(R-LE(3))*LE(7)-LE(8)-LE(1)*LE(9)
RA(9)=LE(2)*LE(7)+LE(1)*LE(8)-B*LE(9)
RA(10)=P*(LE(11)-LE(10))
RA(11)=(R-LE(3))*LE(10)-LE(11)-LE(1)*LE(12)
RA(12)=LE(2)*LE(10)+LE(1)*LE(11)-B*LE(12)
RETURN
```

PROGRAMUDSKRIFT AF TORSIONSPENDUL-MODELLEN
MED LIAPUNOV-PROCEDUREN:

```
'----------------   MODELDEFINITION TIL CTS ------------------
MN$=        "TORPED"
UserPath$= "C:\TB\CTS\RESUL\"
$INCLUDE "CTS.INC"
NLBetingelser:
'-------------------------   NL-BETINGELSER --------------------
RETURN                                              (benyttes ikke)
InterneKonstanter:
'----------------------  INTERNE KONSTANTER -------------------
                  (fastlæggelsen af diverse interne kontstanter)
R=0: M=0.024: I=0.00154: K=0.02: ln2=log(2)
TOPI=2*PI: RaMa=0.1248-0.490*R: ITOT=M*RaMa^2+I:KRMO=M*9.82*RaMa
omega=TOPI*(0.08*Q-0.1): BEGY=2.3E-5*exp(B*ln2/0.7)
aaa=SQR(K/ITOT): bbb=KRMO/SQR(ITOT*K): ccc=BEGY/ITOT:ddd=5/ITOT
    (bestemmelse af egenværdi og retningen for basisvektorerne)
csu=cos(LE(1)): sq1=SQR((ccc^2)/4+(bbb*csu/2)^2)
la1=sq1-ccc/2: la2=-sq1-ccc/2
T2U=bbb*csu/(2*la1): T2L=SQR(T2U^2+1):LE(3)=T2U/T2L:LE(4)=1/T2L
T2U=bbb*csu/(2*la2): T2L=SQR(T2U^2+1):LE(5)=T2U/T2L:LE(6)=1/T2L
          (fastlæggelse af MMM og NNN for hurtigere konvergens)
MMM=la1*PA(0)/(2*ln2): NNN=la2*PA(0)/(2*ln2)
RETURN
OutputVariable:
'-------------------------  OUTPUT-VARIABLE -------------------
U=LE(1)                                                 (udsving)
P=LE(2)                                             (impulsmoment)
(udfra egenværdierne bestemmes det første gæt på Liapunov-eks.)
IF LE(0)=T0 THEN X=la1/ln2: Y=la2/ln2: RETURN
         (normalisering og reortogonalisering af de 2 vektorer)
V1L=SQR(LE(3)^2+LE(4)^2)
LE(3)=LE(3)/V1L:LE(4)=LE(4)/V1L
prik=LE(3)*LE(5)+LE(4)*LE(6)
T2U=LE(5)-prik*LE(3):T2P=LE(6)-prik*LE(4):T2L=SQR(T2U^2+T2P^2)
T2U=T2U/T2L:T2P=T2P/T2L:V2L=T2U*LE(5)+T2P*LE(6)
LE(5)=T2U: LE(6)=T2P
```

```
                    (beregning af Liapunov-eksponenterne X og Y)
MMM=MMM+log2(V1L):NNN=NNN+log2(V2L)
TTT=LE(0)-T0+PA(0)/2
X=MMM/TTT: Y=NNN/TTT
          (intern leveljustering)
FOR kkk=3 TO 6: L1(kkk)=LE(kkk): LN(kkk)=LE(kkk): NEXT
RETURN
RateLigninger:
'------------------------   RATE-LIGNINGER --------------------
                                    (Torsionspendul-ligningerne)
RA(1)=LE(2)/ITOT
RA(2)=K*(A*sin(omega*LE(0))-LE(1))+KRMO*sin(LE(1))-BEGY*RA(1)-_
      N*(exp(5*RA(1))-exp(-5*RA(1)))/(exp(5*RA(1))+_
      exp(-5*RA(1)))

    (de lineariserede ligninger)
RA(3)=LE(4)*aaa
RA(4)=LE(3)*(-aaa+bbb*cos(LE(1)))-_
      LE(4)*(ccc+N*ddd*(2/(exp(5*RA(1))+exp(-5*RA(1))))^2)
RA(5)=LE(6)*aaa
RA(6)=LE(5)*(-aaa+bbb*cos(LE(1)))-_
      LE(6)*(ccc+N*ddd*(2/(exp(5*RA(1))+exp(-5*RA(1))))^2)


                                    (benyttes ikke)
RETURN
StyringOgStoej:
'------------------------  STYRING OG  STØJ -------------------
RETURN
BrugerMenu:
'-------------- BRUGERDEFINERET  ELEMENT PA CTSMENU ------------
RETURN
BrugerPlot:
'------------ BRUGERDEFINERET ELEMENT PAA  GRAFISK MENU --------
RETURN
'---------- BRUGERDEFINEREDE FUNKTIONER OG SUBRUTINER --------
```

Appendix IV

Implementering af torsionspendulmodel i "CTS"

I dette appendix vil vi kort gennemgå implementeringen af modellen for torsionspendulet i simulationsprogrammet "CTS"[1]. Selve ratelingningerne RA(1) og RA(2) er gennemgået i kap 5.1.

Fig 1 Udskrift af programmet "TORSIMUL"

```
'----------------------  INTERNE KONSTANTER ----------------------
PERI=1/(0.08*Q-0.1)
RaMa=0.1248-0.490*R
ILOD=M*RaMa^2
ITOT=ILOD+I
TOPI=2*PI
KRMO=M*g*RaMa
BEGY=2.3e-5*exp(log(2)/0.7*B)
SLUT=2.3e-5*exp(log(2)/0.7*S)
DEMP=log(2)/0.7*(S-B)/(T+1)

RETURN
OutputVariable:
'------------------------  OUTPUT-VARIABLE ------------------------
u=LE(1)
L=LE(2)
D=B+(DEMP*LE(0)*0.7/log(2))
P=A*sin(TOPI*LE(0)/PERI+F)

RETURN
RateLigninger:
'-------------------------  RATE-LIGNINGER -------------------------
ra(1)=LE(2)/ITOT
ra(2)=K*(A*sin(TOPI*LE(0)/PERI+F)-LE(1))+KRMO*sin(LE(1))_
      -BEGY*exp(DEMP*LE(0))*ra(1)_
      -(exp(5*ra(1))-exp(-5*ra(1)))/(exp(5*ra(1))+exp(-5*ra(1)))*N
```

I afsnittet "Interne konstanter" defineres omregninger, som kun foretages een gang - ved simulationsopstart. Heri omregnes de brugerdefinerede fysiske parameterværdier til modellens konstanter, f.eks.

$$PERI = 1/(0.08*Q-0.1)$$

omregner fra motorspændingen Q til motorperioden PERI. Relationen

$$RaMa = 0.1248-0.490*R$$

---

1) For en nærmere gennemgang af selve simulationsprogrammets opbygning henvises til IMFUFA tekst nr. 121.

fastlægger afstanden fra torsionspendulets centrum til massemidtpunktet af loddet og stangen, loddet sidder på. Denne indgår dels i fastlæggelsen af det samlede inertimoment ITOT og dels i den konstant, KRMO, der nede i rateligningen RA(2) skal ganges på sinus til udsvinget SIN(LE(1)) for at give tyngdekraftens kraftmoment på systemet. Relationerne

```
BEGY = 2.3e-5*exp(log(2)/0.7*B),

SLUT = 2.3e-5*exp(log(2)/0.7*S) og

DEMP = log(2)/0.7*((S-B)/(T+1))
```

fastlægger i leddet

```
BEGY*exp((DEMP*LE(0))*RA(1))
```

en vækstrampe som løber lineært fra **B**egyndelsesdæmpningsspændingen **B** til **S**lutdæmpningsspændingen **S** i kørsels**T**iden T, nemlig:

```
D(t) = ((S-B)/(T+1))*LE(0)
```

Når **D**æmpningsspændingen **D** således ændres lineært betyder det at selve faktoren foran RA(1) følger en aftagende ekponentiel funktion, således at ændringerne i dæmpningen foregår langsommere, når D er tæt på 0. Det er hensigtsmæssigt på to måder. Dels fordi systemet ændrer karakter ved mindre og mindre variationer af D, jo mindre D bliver. Dels er det hensigtsmæssigt udfra pædagogiske hensyn, at D ændrer sig lineært.

I afsnittet "Output-variable" defineres de størrelser, der ønskes lagret for senere bearbejdning. Vi lagrer udsvinget u (LE(1)), Impulsmomentet af skiven L (LE(2))[2], den øjeblikkelige dæmpningsspænding D og motorpositionen P. D er valgt som output for at lette arbejdet med simulationerne således, at systemet kan startes med de helt samme betingelser i en ny simulation.

Fig. 2 viser en konkret initialisering af modellen.

---

2) I nogle versioner har vi dog lagret vinkelhastigheden w=RA(1)=L/ITOT.

Fig. 2 Initialisering af modellen.

```
Model: TORSIMUL  ( 23 skridt, max  4095 )  Path: C:\cts\gym\
LE( 0 )= 57.51953125 : Tid (Q-levels: 0)
LE( 1 )= 0.553561895145543
                          :
LE( 2 )=-1.3944311075493BE-003
                          :
LE( 3 )= 0                :
LE( 4 )= 0                :
Output variable:
u: Udsving (rad)
L: Impulsm.(I*w)
D: Daempspnd.V(t)
P: mot.Pos.(rad)
Eksterne konstanter
A =  0.1375    motorAmplitude (rad)
F =  0         motorstartFase (Rad)
Q =  6.25      motorspaending (volt)
g =  9.82      tyngdeacc. (m/s^2)
I =  1.54E-003Inerti af hjul (kg*m^2)
K =  2E-002    elasticitetsKonstant (J)
M =  2.4E-002 Masse af stang+lille lod (kg)
N =  1E-003    faststofgNidning (J)
R =  0         afstand fra yderpunkt af stang til lod (m)
B =  3         Begyndelses-daempningsspaending (V)
S =  0         Slut-daempningsspaending (V)
T =  13000     koerselsTid (sek)
Antal Cifre       DG =  9
Reference level   LR =  1
Outputinterval    OU =  2.5
```

Appendix V

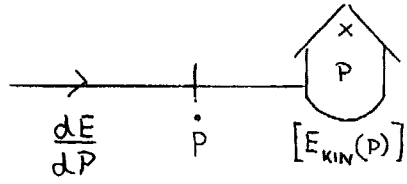
De konstitutive regler for de forskellige elementer (ikoner) i energibånds-diagrammerne.[1]

Energibånd med orienteringen fra A til B:

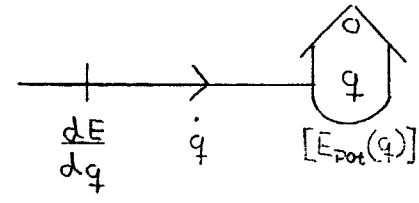
hvor f (flows) er strømme og e (efforts) er spændinger.

Lager til oplagring af levelvariablen:

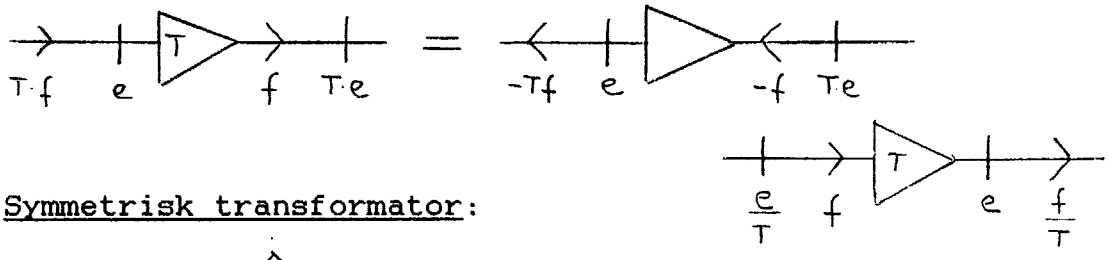
X-lager for kinetisk energi:



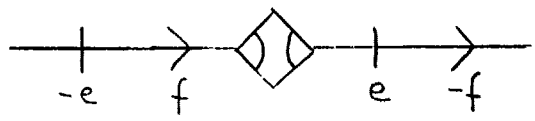
0-lager for potentiel energi:



Transformatorer:

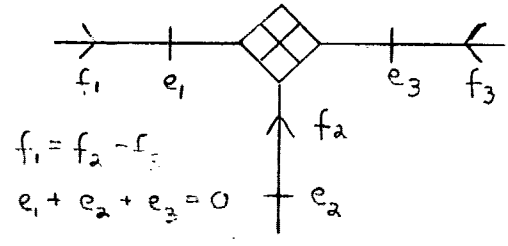


Symmetrisk transformator:

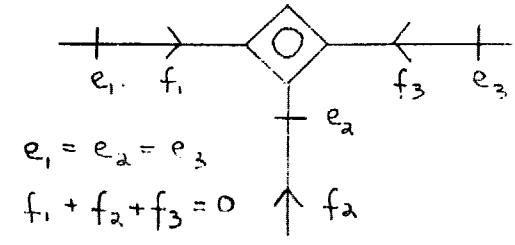


Symmetriske samlere:

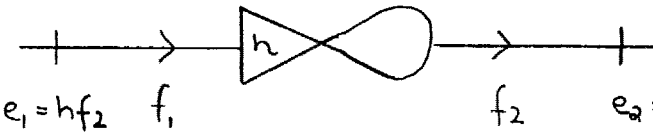
X-samler:



0-samler:



X-gyrator:



[1]) I dette appendix er kun medtaget de regler, vi benytter i kapitel 7. En mere omfattende og kommenteret gennemgang af de konstitutive regler findes i Christiansen, 1978.

Appendix VI

Supplement til kapitel 7

Ligning (3): En kvadratisk form kan udtrykkes som en funktion $f(\bar{q})$, der er lig en sum af produkter mellem to koordinater fra vektoren $\bar{q}$. En kvadratisk form kan altid skrives som $f(\bar{q}) = \bar{q}^* T \bar{q}$, hvor T er en symmetrisk matrix.

Sættes $\dot{\bar{q}} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ . \\ . \\ \dot{q}_d \end{pmatrix}$ er $\dot{\bar{q}}^* = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_d)$ konjugeringen har her ingen effekt idet alle $\dot{q}$ er reelle.

$$\dot{\bar{q}}^* T \dot{\bar{q}} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_d) \cdot \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \ldots & T_{1d} \\ T_{21} & T_{22} & \ldots & T_{2d} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ T_{d1} & T_{d2} & \ldots & T_{dd} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ . \\ . \\ . \\ \dot{q}_d \end{pmatrix}$$

$$= (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_d) \begin{pmatrix} T_{11}\dot{q}_1 + T_{12}\dot{q}_2 + \ldots + T_{1d}\dot{q}_d \\ T_{21}\dot{q}_1 + T_{22}\dot{q}_2 + \ldots + T_{2d}\dot{q}_d \\ . \\ . \\ . \\ T_{d1}\dot{q}_1 + T_{d2}\dot{q}_2 + \ldots + T_{dd}\dot{q}_d \end{pmatrix}$$

$$= (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_d) \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{d} T_{1i} \cdot \dot{q}_i \\ . \\ . \\ . \\ \sum_{i=1}^{d} T_{di} \cdot \dot{q}_i \end{pmatrix}$$

$$= \dot{q}_1 \cdot \sum_{i=1}^{d} T_{1i} \cdot \dot{q}_i + \dot{q}_2 \sum_{i=1}^{d} T_{2i} \cdot \dot{q}_i + \ldots + \dot{q}_d \sum_{i=1}^{d} T_{di} \cdot \dot{q}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{d} T_{1i} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_i + \sum_{i=1}^{d} T_{2i} \dot{q}_i \cdot \dot{q}_2 + \ldots + \sum_{i=1}^{d} T_{di} \dot{q}_i \cdot \dot{q}_d$$

$$= \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} T_{ij} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j .$$

Ligning (4):

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^{d} T_{ij}(\bar{q}) \cdot \dot{q}_j$$

Først skriver vi (jvf. ligning (3)) den kinetiske energi op:

$$E_{kin} = 1/2 \cdot \dot{\bar{q}}^{*} T \dot{\bar{q}} = 1/2 \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} T_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad \text{hvor } T_{ij} = T_{ji} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} E_{kin} = 1/2 \cdot (& T_{11} \cdot \dot{q}_1^2 + T_{12} \cdot \dot{q}_1 \cdot \dot{q}_2 + \ldots\ldots + T_{1d} \cdot \dot{q}_1 \dot{q}_d \\ & + T_{21} \cdot \dot{q}_2 \cdot \dot{q}_1 + T_{22} \cdot \dot{q}_2^2 + \ldots\ldots + T_{2d} \cdot \dot{q}_2 \cdot \dot{q}_d \\ & + \ldots\ldots \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & + T_{d1} \cdot \dot{q}_d \cdot \dot{q}_1 + T_{d2} \cdot \dot{q}_d \cdot \dot{q}_2 + \ldots\ldots + T_{dd} \cdot \dot{q}_d^2) \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{kin} = 1/2 \cdot (& T_{11} \cdot \dot{q}_1^2 + 2 \cdot T_{12} \cdot \dot{q}_1 \cdot \dot{q}_2 + \ldots\ldots + 2 \cdot T_{1d} \cdot \dot{q}_1 \cdot \dot{q}_d \\ & + T_{22} \cdot \dot{q}_2^2 + \ldots\ldots + 2 \cdot T_{2d} \cdot \dot{q}_2 \cdot \dot{q}_d \\ & + \\ & \ldots \\ & \ldots \\ & \ldots \\ & + T_{dd} \cdot \dot{q}_d^2). \end{aligned}$$

Derfor bliver f.eks.

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} &= 1/2 \cdot (2 \cdot T_{11} \cdot \dot{q}_1 + 2 \cdot T_{12} \cdot \dot{q}_2 + \ldots\ldots + 2 \cdot T_{1d} \cdot \dot{q}_d) \\ &= T_{11} \cdot \dot{q}_1 + T_{12} \cdot \dot{q}_2 + \ldots\ldots + T_{1d} \cdot \dot{q}_d \\ &= \sum_{j=1}^{d} T_{1j} \cdot \dot{q}_j \end{aligned}$$

eller mere generelt

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} &= T_{i1} \cdot \dot{q}_1 + T_{i2} \cdot \dot{q}_2 + \ldots\ldots + T_{id} \cdot \dot{q}_d \\ &= \sum_{j=1}^{d} T_{ij} \cdot \dot{q}_j . \end{aligned}$$

Ligning (5):

Jvf. (3) er $T(\bar{q};\dot{\bar{q}}) = 1/2 \cdot \dot{\bar{q}}^* \cdot T \cdot \dot{\bar{q}}$.

Jvf. vores antagelse omkring matricen $T_{i,j}$, kan vi skrive

$T^{-1}\bar{p} = T^{-1}(T\dot{\bar{q}}) = (T^{-1}T)\dot{\bar{q}} = E\dot{\bar{q}} = \dot{\bar{q}}$, hvor E er enhedsmatricen.

Hermed bliver

$$\begin{aligned} T(\bar{q};\dot{\bar{q}}) &= 1/2 \cdot \dot{\bar{q}}^* \cdot T \cdot \dot{\bar{q}} \\ &= 1/2 \cdot (T^{-1}\bar{p})^* \; T \; (T^{-1}\bar{p}) \\ &= 1/2 \cdot \bar{p}^* \cdot (T^{-1})^* \cdot (T \; T^{-1}\bar{p}) \quad ① \\ &= 1/2 \cdot \bar{p}^* \cdot (T^{-1})^* \cdot (E \cdot \bar{p}) \\ &= 1/2 \cdot \bar{p}^* \cdot (T^{-1})^* \cdot \bar{p} \\ &= 1/2 \cdot \bar{p}^* T^{-1} \bar{p} \quad ② \end{aligned}$$

Skrives ovenstående ud (jvf. metoden ved udledningen af ligning (3)) fås ligning (5):

$$T(\bar{q};\dot{\bar{q}}) = T(\bar{q};\bar{p}) = 1/2 \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} T^{-1}_{i,j} \cdot \bar{p}_i \bar{p}_j .$$

---

① Når et matrixprodukt transponeres flyttes om på rækkefølgen af de transponerede matricer - ellers passer antallet af rækker og søjler (jo) heller ikke med hinanden.

② $T^{-1*} = T^{-1}$, idet T er symmetrisk, hvorfor også T^{-1} er symmetrisk.

Ligningerne for dobbeltpendulet i Hamiltonsk formulering.

$$\dot{q}_1 = \frac{I_2 p_1 + m_2 r_2 l \cos(q_1 - q_2)\, p_2}{I_2 \left[I_1 + m_2 l^2 \sin^2(q_1 - q_2) \right]} \quad , \quad \dot{q}_2 = \frac{m_2 r_2 l \cos(q_1 - q_2)\, p_1 + (I_2 + m_2 l^2)\, p_2}{I_2 \left[I_1 + m_1 l^2 \sin^2(q_1 - q_2) \right]}$$

$$\dot{p}_1 = \frac{1}{I_2^2 \left[I_1 + m_2 l^2 \sin^2(q_1 - q_2) \right]^2} \Big[-\tfrac{1}{2} I_2^2 m_2 l^2 \sin[2(q_1 - q_2)]\, p_1^2$$

$$+ I_2 m_2 r_2 l \sin(q_1 - q_2) \left[I_1 + m_2 l^2 (1 + \cos^2(q_1 - q_2)) \right] p_1 p_2$$

$$- \tfrac{1}{2} I_2 (I_1 + m_2 l^2) m_2 l^2 \sin[2(q_1 - q_2)]\, p_2^2 \Big]$$

$$\dot{p}_2 = \frac{1}{I_2 \left[I_1 + m_2 l^2 \sin^2(q_1 - q_2) \right]^2} \Big[\tfrac{1}{2} m_2 l^2 I_2^2 \sin[2(q_1 - q_2)]\, p_1^2$$

$$- \tfrac{1}{2} I_2 m_2 r_2 l \cdot \sin(q_1 - q_2) \left[I_1 + m_2 l^2 \sin^2(q_1 - q_2) - 2 m_2 l^2 \cos^2(q_1 - q_2) \right] p_1 p_2$$

$$+ \tfrac{1}{2} (I_1 + m_2 l^2)\, m_2 l^2 \sin[2(q_1 - q_2)]\, p_2^2 \Big]$$

$$- m_2 \cdot g \cdot r_2 \sin q_2$$

$$H = \frac{\tfrac{1}{2} I_2 p_1^2 + m_2 r_2 l \cos(q_1 - q_2) p_1 p_2 + \tfrac{1}{2}(I_1 + m_2 l^2)\, p_2^2}{I_2 \left[I_1 + m_2 l^2 \sin^2(q_1 - q_2) \right]} + g(m_1 r_1 - m_2 l) \cos q_1$$

$$- m_2 r_2 g \cos q_2$$

Appendix VII

Implementering af dobbeltpendul i "CTS"

I implementeringen af modellen for dobbeltpendulet i "CTS" er der tre ekstra procedurer - udover selve ratteligningerne og konstanter, som er gennemgået i kap.6 - som skal have have et par ord med på vejen.

Energijustering: Proceduren sørger for, at man fra brugerfladen kan definere den størrelse, systemets samlede energi skal have under simulationen (område 1a i programudskriften nedenfor). Fra brugerfladen defineres udover energien, E, et sæt begyndelsesbetingelser, som ønskes simuleret. Når programmet startes læses først området "INTERNE KONSTANTER" og altså område 1a. Udfra de angivne LE(3) og LE(4) (impulsmomenterne for hhv. stang 1 og 2) udregnes systemets kinetiske energi E_{kin}, og tilsvarende udfra LE(1) og LE(2) (udsvinget af stang 1 og 2) den potentielle energi E_{pot}. Summen af disse er den totale energi E_{var}. Nu ønsker vi at denne størrelse skal være lig det E vi definerede i brugerfladen. Dette sikres i procedurerne

$$LE(3)=LE(3)*sqr(1+(E-E_{var})/E_{kin}) \text{ og}$$

$$LE(4)=LE(4)*sqr(1+(E-E_{var})/E_{kin})$$

som justerer impulsmomenterne af stængerne, og dermed E_{kin} så E_{var} bliver E. Justeringsproceduren tager udgangspunkt i den betragtning, at E_{kin} er proportional med længden af den vektor, (LE(3),LE(4)) udgør. Se fig.1.

Fig.1

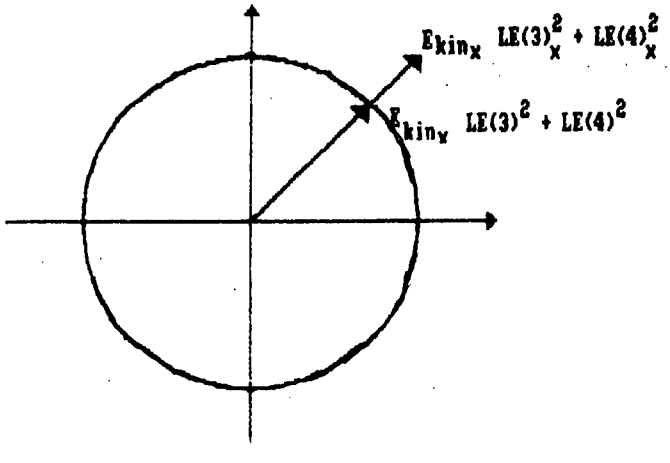


Fig. 2 Udskriftaf program

```
'---------------------- INTERNE KONSTANTER ----------------------
TOPI=2*PI:gacc=9.82
m112=M*L*L:mgr2=M*gacc*R
Ine2=M*R*R:Jne1=N*S*S
konn=-L/R
LE(1)=LE(1)-TOPI*int(LE(1)/TOPI):LE(2)=LE(2)-TOPI*int(LE(2)/TOPI)   1c
a=konn*cos(LE(1)-LE(2))
c=sqr((Jne1+m112*(sin(LE(1)-LE(2)))^2)/Ine2)
h=konn*(sin(LE(1)-LE(2))*LE(3)-konn*LE(4)*sin(2*(LE(1)-LE(2)))/(2*c))
Ekin=(LE(3)^2+LE(4)^2)/(2*Ine2)
Epot=gacc*(N*S-M*L)*cos(LE(1))-mgr2*cos(LE(2))
Evar=Ekin+Epot
LE(3)=LE(3)*sqr(1+(E-Evar)/Ekin)                    1a
LE(4)=LE(4)*sqr(1+(E-Evar)/Ekin)
TGam=LE(0)
VGam=sin(LE(1))
PGam=sin(LE(2))                                     1b
WGam=LE(4)/(Ine2*c)
ZGam=(LE(3)-a*LE(4)/c)/Ine2
XGam=PGam
RETURN
OutputVariable:
'---------------------- OUTPUT-VARIABLE ----------------------
LE(1)=LE(1)-TOPI*int(LE(1)/TOPI):LE(2)=LE(2)-TOPI*int(LE(2)/TOPI)   2c
Ekin=(LE(3)^2+LE(4)^2)/(2*Ine2)
Epot=gacc*(N*S-M*L)*cos(LE(1))-mgr2*cos(LE(2))
Evar=Ekin+Epot
LE(3)=LE(3)*sqr(1+(E-Evar)/Ekin)                    2a
LE(4)=LE(4)*sqr(1+(E-Evar)/Ekin)
T=LE(0)
V=sin(LE(1))
P=sin(LE(2))
W=LE(4)/(Ine2*c)
Z=(LE(3)-a*LE(4)/c)/Ine2
Y=Evar
X=P
CO=(SGN(X*XGam)>=0) OR (X<0)
IF NOT CO THEN
  deltaX=XGam-X
  OV(0)=(T*XGam-TGam*X)/deltaX
  T=OV(0)                                           2b
  V=(V*XGam-VGam*X)/deltaX
  P=(P*XGam-PGam*X)/deltaX
  W=(W*XGam-WGam*X)/deltaX
  Z=(Z*XGam-ZGam*X)/deltaX
END IF
TGam=T:VGam=V:PGam=P:WGam=W:ZGam=Z:XGam=X
For kkk=3 to 4:L1(kkk)=LE(kkk):LN(kkk)=LE(kkk):next   3a
RETURN
RateLigninger:
'---------------------- RATE-LIGNINGER ----------------------
a=konn*cos(LE(1)-LE(2))
c=sqr((Jne1+m112*(sin(LE(1)-LE(2)))^2)/Ine2)
h=konn*(sin(LE(1)-LE(2))*LE(3)-konn*LE(4)*sin(2*(LE(1)-LE(2)))/(2*c))
RA(1)=LE(4)/(Ine2*c)
RA(2)=(LE(3)-a*LE(4)/c)/Ine2
RA(3)=-mgr2*sin(LE(2))+h*RA(1)
RA(4)=(-a*RA(3)-h*RA(2)+gacc*(N*S-M*L)*sin(LE(1)))/c
```

Længden af vektor $|\vec{V}| = |(LE(3), LE(4))|$ henviser til den størrelse, E_{kin} skal have for at E fastholdes, mens længden af vektor $|\vec{X}| = |(LE(3)_x, LE(4)_x)|$ henviser til den størrelse E_{kin} har inden justeringen (E_{kinx}). Den kinetiske energi er givet ved:

$$E_{kin} = \frac{LE(3)^2 + LE(4)^2}{2\ I}$$

Tilsvarende er den ujusterede kinetiske energi givet ved:

$$E_{kin_x} = \frac{LE(3)_x^2 + LE(4)_x^2}{2\ I}$$

Forholdet mellem E_{kin} og E_{kinx} bliver da

$$\frac{E_{kin}}{E_{kin_x}} = \frac{LE(3)^2 + LE(4)^2}{LE(3)_x^2 + LE(4)_x^2}$$

Idet $E_{kin} = E - E_{pot}$ fås

$$LE(3)^2 + LE(4)^2 = \frac{(LE(3)_x^2 + LE(4)_x^2)(E - E_{pot})}{E_{kin_x}}$$

Før justeringen gælder tillige at $E_{pot} = E_{var} - E_{kinx}$. Indsættes dette fås

$$LE(3)^2 + LE(4)^2 = \frac{(LE(3)_x^2 + LE(4)_x^2)(E_{kin_x} + E - E_{var})}{E_{kin_x}}$$

Heraf fås

$$LE(3)^2 + LE(4)^2 = (LE(3)_x^2 + LE(4)_x^2)\left(1 + \frac{E - E_{var}}{E_{kin_x}}\right)$$

Lader vi denne justeringsfaktor virke på hvert af leddene fås:

$$LE(3) = LE(3)_x \sqrt{1 + \frac{E - E_{var}}{E_{kin_x}}}$$

$$LE(4) = LE(4)_x \sqrt{1 + \frac{E - E_{var}}{E_{kin_x}}}$$

Justeringsproceduren stiller visse krav til valget af begyndelsesbetingelser, f.eks. må LE(3) og LE(4) ikke være nul på een gang, og man må ikke sætte LE(1) og LE(2) på en sådan måde, at $E_{pot} > E$.

For at modvirke kumulerede afrundingsfejl gentages proceduren for hvert tidsskridt (i område 2a). Område 3a, sikrer at

et antal hjælpelevels i programmet korrigeres i overensstemmelse med energijusteringen.

Poincaré-snit-proceduren, som foregår i områderne 1b og 2b, består af to trin. Basalt fungerer den ved at frakoble lagringen og udskriften af outputvariblerne når kriteriet CO (Cancel Output) er sandt. Kriteriet vi har sat er

$$CO=(SGN(X*Xgam)>=0) \text{ or } (X<0)$$

Dette kriterium betyder, at der kun kommer output, når X bliver positiv. Vi har ladet kriteriet virke på P, som er sinus til udsvinget af stang 2, hvilket betyder, at vi får output, når stang 1 passerer lodret fra venstre mod højre. Den anden afdeling af proceduren laver en lineær interpolation mellem værdierne af outputvariablerne lige før (Xgam) og lige efter (X) snittet, for at sikre, at Poicaré-snittet virkelig udgør en flad flade og ikke en bulet, svarende til den tilfældige (omend lille) variation af størrelsen, hvormed P overskrider kriteriet.

Den tredie ekstraprocedure er simpel, og består blot i, at fratrække 2π fra hhv. LE(1) og LE(2), når de bliver større end 2π (TOPI). Proceduren ser således ud: (område 1c og 2c)

$$LE(1) = LE(1) - TOPI*int(LE(1)/TOPI)$$

og ligeså for LE(2)'s vedkommende.

Ønskes **X-Y-plot** anvendes en anden implementering, hvor Poincaré-snit proceduren er udeladt. Desuden kan vi tillade os at udelade den løbende energijustering, fordi kørslerne her ikke går over mere end ca. 30 sek. hvorfor afvigelserne ikke når at blive ret store. Vi har her lavet to output mere, nemlig X og Y som giver positionen af spidsen af stang 2. Vi har lavet dette output for at kunne sammenligne simulationerne med det virkelige dobbeltpendul. 1)

---

1) At det netop er den ene ende af stang 2 vi plotter, hænger sammen med, at vi i det virkelige dobbeltpendul dér har påsat en lysdiode mhp. fotografisk registrering og sammenligning med simuleringer. I gennemgangen af simulationerne af dobbeltpendulet i kap. gives eksempler herpå.

Fig. 3 Udskrift af program til X-Y-plot

```
'---------------------- INTERNE KONSTANTER ----------------------
TOPI=2*PI
gacc=9.82
ml12=M*L*L
mgr2=M*gacc*R
Ine2=M*R*R
Jne1=N*S*S
konn=-L/R
LE(1)=LE(1)-TOPI*int(LE(1)/TOPI)
LE(2)=LE(2)-TOPI*int(LE(2)/TOPI)
a=konn*cos(LE(1)-LE(2))
c=sqr((Jne1+ml12*(sin(LE(1)-LE(2)))^2)/Ine2)+0.000001
h=konn*(sin(LE(1)-LE(2))*LE(3)-konn*LE(4)*sin(2*(LE(1)-LE(2)))/(2*c))
RETURN
OutputVariable:
'------------------------  OUTPUT-VARIABLE ------------------------
X=L*(sin(LE(2))-sin(LE(1)))
Y=-L*(cos(LE(1))+cos(LE(2)))
V=sin(LE(1))
P=sin(LE(2))
W=LE(4)/(Ine2*c)
Z=(LE(3)-a*LE(4)/c)/Ine2
RETURN
RateLigninger:
'------------------------  RATE-LIGNINGER ------------------------
a=konn*cos(LE(1)-LE(2))
c=sqr((Jne1+ml12*(sin(LE(1)-LE(2)))^2)/Ine2)
h=konn*(sin(LE(1)-LE(2))*LE(3)-konn*LE(4)*sin(2*(LE(1)-LE(2)))/(2*c))
RA(1)=LE(4)/(Ine2*c)
RA(2)=(LE(3)-a*LE(4)/c)/Ine2
RA(3)=-mgr2*sin(LE(2))+h*RA(1)
RA(4)=(-a*RA(3)-h*RA(2)+gacc*(N*S-M*L)*sin(LE(1)))/c
RETURN
```

1/78 "TANKER OM EN PRAKSIS" - et matematikprojekt.
Projektrapport af: Anne Jensen, Lena Lindenskov, Marianne Kesselhahn og Nicolai Lomholt.
Vejleder: Anders Madsen

2/78 "OPTIMERING" - Menneskets forøgede beherskelsesmuligheder af natur og samfund.
Projektrapport af: Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen, Gert Krenøe og Peter H. Lassen
Vejleder: Bernhelm Boss.

3/78 "OPGAVESAMLING", breddekursus i fysik.
Af: Lasse Rasmussen, Aage Bonde Kræmmer og Jens Højgaard Jensen.

4/78 "TRE ESSAYS" - om matematikundervisning, matematiklæreruddannelsen og videnskabsrindalismen.
Af: Mogens Niss
Nr. 4 er p.t. udgået.

5/78 "BIBLIOGRAFISK VEJLEDNING til studiet af DEN MODERNE FYSIKS HISTORIE".
Af: Helge Kragh.
Nr. 5 er p.t. udgået.

6/78 "NOGLE ARTIKLER OG DEBATINDLÆG OM - læreruddannelse og undervisning i fysik, og - de naturvidenskabelige fags situation efter studenteroprøret".
Af: Karin Beyer, Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen.

7/78 "MATEMATIKKENS FORHOLD TIL SAMFUNDSØKONOMIEN".
Af: B.V. Gnedenko.
Nr. 7 er udgået.

8/78 "DYNAMIK OG DIAGRAMMER". Introduktion til energy-bond-graph formalismen.
Af: Peder Voetmann Christiansen.

9/78 "OM PRAKSIS' INDFLYDELSE PÅ MATEMATIKKENS UDVIKLING". - Motiver til Kepler's: "Nova Stereometria Doliorum Vinariom".
Projektrapport af: Lasse Rasmussen.
Vejleder: Anders Madsen.

10/79 "TERMODYNAMIK I GYMNASIET".
Projektrapport af: Jan Christensen og Jeanne Mortensen.
Vejledere: Karin Beyer og Peder Voetmann Christiansen.

11/79 "STATISTISKE MATERIALER".
Af: Jørgen Larsen.

12/79 "LINEÆRE DIFFERENTIALLIGNINGER OG DIFFERENTIALLIGNINGSSYSTEMER".
Af: Mogens Brun Heefelt.
Nr. 12 er udgået.

13/79 "CAVENDISH'S FORSØG I GYMNASIET".
Projektrapport af: Gert Kreinøe.
Vejleder: Albert Chr. Paulsen.

14/79 "BOOKS ABOUT MATHEMATICS: History, Philosophy, Education, Models, System Theory, and Works of".
Af: Else Høyrup.
Nr. 14 er p.t. udgået.

15/79 "STRUKTUREL STABILITET OG KATASTROFER i systemer i og udenfor termodynamisk ligevægt".
Specialeopgave af: Leif S. Striegler.
Vejleder: Peder Voetmann Ckristiansen.

16/79 "STATISTIK I KRÆFTFORSKNINGEN".
Projektrapport af: Michael Olsen og Jørn Jensen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

17/79 "AT SPØRGE OG AT SVARE i fysikundervisningen".
Af: Albert Christian Paulsen.

18/79 "MATHEMATICS AND THE REAL WORLD", Proceedings af an International Workshop, Roskilde University Centre, Denmark, 1978.
Preprint.
Af: Bernhelm Booss og Mogens Niss (eds.)

19/79 "GEOMETRI, SKOLE OG VIRKELIGHED".
Projektrapport af: Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen og Per H.H. Larsen.
Vejleder: Mogens Niss.

20/79 "STATISTISKE MODELLER TIL BESTEMMELSE AF SIKRE DOSER FOR CARCINOGENE STOFFER".
Projektrapport af: Michael Olsen og Jørn Jensen.
Vejleder: Jørgen Larsen

21/79 "KONTROL I GYMNASIET-FORMÅL OG KONSEKVENSER".
Projektrapport af: Crilles Bacher, Per S.Jensen, Preben Jensen og Torben Nysteen.

22/79 "SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (1)".
1-port lineært response og støj i fysikken.
Af: Peder Voetmann Christiansen.

23/79 "ON THE HISTORY AF EARLY WAVE MECHANICS - with special emphasis on the role af realitivity".
Af: Helge Kragh.

24/80 a+b "MATEMATIKOPFATTELSER HOS 2.G'ERE".
1. En analyse. 2. Interviewmateriale.
Projektrapport af: Jan Christensen og Knud Lindhardt Rasmussen.
Vejleder: Mogens Niss.

25/80 "EKSAMENSOPGAVER", Dybdemodulet/fysik 1974-79.

26/80 "OM MATEMATISKE MODELLER".
En projektrapport og to artikler.
Af: Jens Højgaard Jensen m.fl.

27/80 "METHODOLOGY AND PHILOSOPHY AF SCIENCE IN PAUL DIRAC's PHYSICS".
Af: Helge Kragh.

28/80 "DIELEKTRISK RELAXATION - et forslag til en ny model bygget på væskernes viscoelastiske egenskaber".
Projektrapport af: Gert Kreinøe.
Vejleder: Niels Boye Olsen.

29/80 "ODIN - undervisningsmateriale til et kursus i differentialligningsmodeller".
Projektrapport af: Tommy R. Andersen, Per H.H. Larsen og Peter H. Lassen.
Vejleder: Mogens Brun Heefelt.

30/80 "FUSIONSENERGIEN - - - ATOMSAMFUNDETS ENDESTATION".
Af: Oluf Danielsen.
Nr. 30 er udgået.

31/80 "VIDENSKABSTEORETISKE PROBLEMER VED UNDERVISNINGSSYSTEMER BASERET PÅ MÆNGDELÆRE".
Projektrapport af: Troels Lange og Jørgen Karrebæk.
Vejleder: Stig Andur Pedersen.
Nr. 31 er p.t. udgået.

32/80 "POLYMERE STOFFERS VISCOELASTISKE EGENSKABER - BELYST VED HJÆLP AF MEKANISKE IMPEDANSMÅLINGER MÖSSBAUEREFFEKTMÅLINGER".
Projektrapport af: Crilles Bacher og Preben Jensen.
Vejledere: Niels Boye Olsen og Peder Voetmann Christiansen.

33/80 "KONSTITUERING AF FAG INDEN FOR TEKNISK - NATURVIDENSKABELIGE UDDANNELSER. I-II".
Af: Arne Jakobsen.

34/80 "ENVIRONMENTAL IMPACT AF WIND ENERGY UTILIZATION".
ENERGY SERIES NO. I.
Af: Bent Sørensen
Nr. 34 er udgået.

35/80 "HISTORISKE STUDIER I DEN NYERE ATOMFYSIKS UDVIKLING".
Af: Helge Kragh.

36/80 "HVAD ER MENINGEN MED MATEMATIKUNDERVISNINGEN?".
Fire artikler.
Af: Mogens Niss.

37/80 "RENEWABLE ENERGY AND ENERGY STORAGE".
ENERGY SERIES NO. 2.
Af: Bent Sørensen.

38/81 "TIL EN HISTORIETEORI OM NATURERKENDELSE, TEKNOLOGI OG SAMFUND".
Projektrapport af: Erik Gade, Hans Hedal, Henrik Lau og Finn Physant.
Vejledere: Stig Andur Pedersen, Helge Kragh og Ib Thiersen.
Nr. 38 er p.t. udgået.

39/81 "TIL KRITIKKEN AF VÆKSTØKONOMIEN".
Af: Jens Højgaard Jensen.

40/81 "TELEKOMMUNIKATION I DANMARK - oplæg til en teknologivurdering".
Projektrapport af: Arne Jørgensen, Bruno Petersen og Jan Vedde.
Vejleder: Per Nørgaard.

41/81 "PLANNING AND POLICY CONSIDERATIONS RELATED TO THE INTRODUCTION OF RENEWABLE ENERGY SOURCES INTO ENERGY SUPPLY SYSTEMS".
ENERGY SERIES NO. 3.
Af: Bent Sørensen.

42/81 "VIDENSKAB TEORI SAMFUND - En introduktion til materialistiske videnskabsopfattelser".
Af: Helge Kragh og Stig Andur Pedersen.

43/81 1."COMPARATIVE RISK ASSESSMENT OF TOTAL ENERGY SYSTEMS".
2."ADVANTAGES AND DISADVANTAGES OF DECENTRALIZATION".
ENERGY SERIES NO. 4.
Af: Bent Sørensen.

44/81 "HISTORISKE UNDERSØGELSER AF DE EKSPERIMENTELLE FORUDSÆTNINGER FOR RUTHERFORDS ATOMMODEL".
Projektrapport af: Niels Thor Nielsen.
Vejleder: Bent C. Jørgensen.

45/82 Er aldrig udkommet.

46/82 "EKSEMPLARISK UNDERVISNING OG FYSISK ERKENDESE-
1+11 ILLUSTRERET VED TO EKSEMPLER".
Projektrapport af: Torben O.Olsen, Lasse Rasmussen og Niels Dreyer Sørensen.
Vejleder: Bent C. Jørgensen.

47/82 "BARSEBÄCK OG DET VÆRST OFFICIELT-TENKELIGE UHELD".
ENERGY SERIES NO. 5.
Af: Bent Sørensen.

48/82 "EN UNDERSØGELSE AF MATEMATIKUNDERVISNINGEN PÅ ADGANGSKURSUS TIL KØBENHAVNS TEKNIKUM".
Projektrapport af: Lis Eilertzen, Jørgen Karrebæk, Troels Lange, Preben Nørregaard, Lissi Pedesen, Laust Rishøj, Lill Røn og Isac Showiki.
Vejleder: Mogens Niss.

49/82 "ANALYSE AF MULTISPEKTRALE SATELLITBILLEDER".
Projektrapport af: Preben Nørregaard.
Vejledere: Jørgen Larsen og Rasmus Ole Rasmussen.

50/82 "HERSLEV - MULIGHEDER FOR VEDVARENDE ENERGI I EN LANDSBY".
ENERGY SERIES NO. 6.
Rapport af: Bent Christensen, Bent Hove Jensen, Dennis B. Møller, Bjarne Laursen, Bjarne Lillethorup og Jacob Mørch Pedersen.
Vejleder: Bent Sørensen.

51/82 "HVAD KAN DER GØRES FOR AT AFHJÆLPE PIGERS BLOKERING OVERFOR MATEMATIK ?"
Projektrapport af: Lis Eilertzen, Lissi Pedersen, Lill Røn og Susanne Stender.

52/82 "DESUSPENSION OF SPLITTING ELLIPTIC SYMBOLS".
Af: Bernhelm Booss og Krzysztof Wojciechowski.

53/82 "THE CONSTITUTION OF SUBJECTS IN ENGINEERING EDUCATION".
Af: Arne Jacobsen og Stig Andur Pedersen.

54/82 "FUTURES RESEARCH" - A Philosophical Analysis of Its Subject-Matter and Methods.
Af: Stig Andur Pedersen og Johannes Witt-Hansen.

55/82 "MATEMATISKE MODELLER" - Litteratur på Roskilde Universitetsbibliotek.
En biografi.
Af: Else Høyrup.

Vedr. tekst nr. 55/82 se også tekst nr. 62/83.

56/82 "EN - TO - MANGE" -
En undersøgelse af matematisk økologi.
Projektrapport af: Troels Lange.
Vejleder: Anders Madsen.

57/83 "ASPECT EKSPERIMENTET"-
Skjulte variable i kvantemekanikken?
Projektrapport af: Tom Juul Andersen.
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen.
Nr. 57 er udgået.

58/83 "MATEMATISKE VANDRINGER" - Modelbetragtninger over spredning af dyr mellem småbiotoper i agerlandet.
Projektrapport af: Per Hammershøj Jensen og Lene Vagn Rasmussen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

59/83 "THE METHODOLOGY OF ENERGY PLANNING".
ENERGY SERIES NO. 7.
Af: Bent Sørensen.

60/83 "MATEMATISK MODEKSPERTISE"- et eksempel.
Projektrapport af: Erik O. Gade, Jørgen Karrebæk og Preben Nørregaard.
Vejleder: Anders Madsen.

61/83 "FYSIKS IDEOLOGISKE FUNKTION, SOM ET EKSEMPEL PÅ EN NATURVIDENSKAB - HISTORISK SET".
Projektrapport af: Annette Post Nielsen.
Vejledere: Jens Høyrup, Jens Højgaard Jensen og Jørgen Vogelius.

62/83 "MATEMATISKE MODELLER" - Litteratur på Roskilde Universitetsbibliotek.
En biografi 2. rev. udgave.
Af: Else Høyrup.

63/83 "CREATING ENERGY FUTURES:A SHORT GUIDE TO ENERGY PLANNING".
ENERGY SERIES No. 8.
Af: David Crossley og Bent Sørensen.

64/83 "VON MATEMATIK UND KRIEG".
Af: Bernhelm Booss og Jens Høyrup.

65/83 "ANVENDT MATEMATIK - TEORI ELLER PRAKSIS".
Projektrapport af: Per Hedegård Andersen, Kirsten Habekost, Carsten Holst-Jensen, Annelise von Moos, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
Vejledere: Bernhelm Booss og Klaus Grünbaum.

66/83 "MATEMATISKE MODELLER FOR PERIODISK SELEKTION I ESCHERICHIA COLI".
Projektrapport af: Hanne Lisbet Andersen, Ole Richard Jensen og Klavs Frisdahl.
Vejledere: Jørgen Larsen og Anders Hede Madsen.

67/83 "ELEPSOIDE METODEN - EN NY METODE TIL LINEÆR PROGRAMMERING?"
Projektrapport af: Lone Biilmann og Lars Boye.
Vejleder: Mogens Brun Heefelt.

68/83 "STOKASTISKE MODELLER I POPULATIONSGENETIK"
- til kritikken af teoriladede modeller.
Projektrapport af: Lise Odgård Gade, Susanne Hansen, Michael Hviid og Frank Mølgård Olsen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

69/83 "ELEVFORUDSÆTNINGER I FYSIK"
– en test i 1.g med kommentarer.
Af: Albert C. Paulsen.

70/83 "INDLÆRINGS - OG FORMIDLINGSPROBLEMER I MATEMATIK PÅ VOKSENUNDERVISNINGSNIVEAU".
Projektrapport af: Hanne Lisbet Andersen, Torben J. Andreasen, Svend Åge Houmann, Helle Glerup Jensen, Keld Fl. Nielsen, Lene Vagn Rasmussen.
Vejleder: Klaus Grünbaum og Anders Hede Madsen.

71/83 "PIGER OG FYSIK".
– et problem og en udfordring for skolen?
Af: Karin Beyer, Sussanne Blegaa, Birthe Olsen, Jette Reich og Mette Vedelsby.

72/83 "VERDEN IFØLGE PEIRCE" – to metafysiske essays, om og af C.S Peirce.
Af: Peder Voetmann Christiansen.

73/83 ""EN ENERGIANALYSE AF LANDBRUG"
– økologisk contra traditionelt.
ENERGY SERIES NO. 9
Specialeopgave i fysik af: Bent Hove Jensen.
Vejleder: Bent Sørensen.

74/84 "MINIATURISERING AF MIKROELEKTRONIK" – om videnskabeliggjort teknologi og nytten af at lære fysik.
Projektrapport af: Bodil Harder og Linda Szkotak Jensen.
Vejledere: Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen.

75/84 "MATEMATIKUNDERVISNINGEN I FREMTIDENS GYMNASIUM"
– Case: Lineær programmering.
Projektrapport af: Morten Blomhøj, Klavs Frisdahl og Frank Mølgaard Olsen.
Vejledere: Mogens Brun Heefelt og Jens Bjørneboe.

76/84 "KERNEKRAFT I DANMARK?" – Et høringssvar indkaldt af miljøministeriet, med kritik af miljøstyrelsens rapporter af 15. marts 1984.
ENERGY SERIES No. 10
Af: Niels Boye Olsen og Bent Sørensen.

77/84 "POLITISKE INDEKS – FUP ELLER FAKTA?"
Opinionsundersøgelser belyst ved statistiske modeller.
Projektrapport af: Svend Åge Houmann, Keld Nielsen og Susanne Stender.
Vejledere: Jørgen Larsen og Jens Bjørneboe.

78/84 "JÆVNSTRØMSLEDNINGSEVNE OG GITTERSTRUKTUT I AMORFT GERMANIUM".
Specialrapport af: Hans Hedal, Frank C. Ludvigsen og Finn C. Physant.
Vejleder: Niels Boye Olsen.

79/84 "MATEMATIK OG ALMENDANNELSE".
Projektrapport af: Henrik Coster, Mikael Wennerberg Johansen, Povl Kattler, Birgitte Lydholm og Morten Overgaard Nielsen.
Vejleder: Bernhelm Booss.

80/84 "KURSUSMATERIALE TIL MATEMATIK B".
Af: Mogens Brun Heefelt.

81/84 "FREKVENSAFHÆNGIG LEDNINGSEVNE I AMORFT GERMANIUM".
Specialerapport af: Jørgen Wind Petersen og Jan Christensen.
Vejleder: Niels Boye Olsen.

82/84 "MATEMATIK – OG FYSIKUNDERVISNINGEN I DET AUTOMATISEREDE SAMFUND".
Rapport fra et seminar afholdt i Hvidovre 25-27 april 1983.
Red.: Jens Højgaard Jensen, Bent C. Jørgensen og Mogens Niss.

83/84 "ON THE QUANTIFICATION OF SECURITY":
PEACE RESEARCH SERIES NO. 1
Af: Bent Sørensen
nr. 83 er p.t. udgået

84/84 "NOGLE ARTIKLER OM MATEMATIK, FYSIK OG ALMENDANNELSE".
Af: Jens Højgaard Jensen, Mogens Niss m. fl.

85/84 "CENTRIFUGALREGULATORER OG MATEMATIK".
Specialerapport af: Per Hedegård Andersen, Carsten Holst-Jensen, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
Vejleder: Stig Andur Pedersen.

86/84 "SECURITY IMPLICATIONS OF ALTERNATIVE DEFENSE OPTIONS FOR WESTERN EUROPE".
PEACE RESEARCH SERIES NO. 2
Af: Bent Sørensen.

87/84 "A SIMPLE MODEL OF AC HOPPING CONDUCTIVITY IN DISORDERED SOLIDS".
Af: Jeppe C. Dyre.

88/84 "RISE, FALL AND RESURRECTION OF INFINITESIMALS".
Af: Detlef Laugwitz.

89/84 "FJERNVARMEOPTIMERING".
Af: Bjarne Lillethorup og Jacob Mørch Pedersen.

90/84 "ENERGI I 1.G – EN TEORI FOR TILRETTELÆGGELSE".
Af: Albert Chr. Paulsen.

91/85 "KVANTETEORI FOR GYMNASIET".
1. Lærervejledning
Projektrapport af: Biger Lundgren, Henning Sten Hansen og John Johansson.
Vejleder: Torsten Meyer.

92/85 "KVANTETEORI FOR GYMNASIET".
2. Materiale
Projektrapport af: Biger Lundgren, Henning Sten Hansen og John Johansson.
Vejleder: Torsten Meyer.

93/85 "THE SEMIOTICS OF QUANTUM – NON – LOCALITY".
Af: Peder Voetmann Christiansen.

94/85 "TREENIGHEDEN BOURBAKI – generalen, matematikeren og ånden".
Projektrapport af: Morten Blomhøj, Klavs Frisdahl og Frank M. Olsen.
Vejleder: Mogens Niss.

95/85 "AN ALTERNATIV DEFENSE PLAN FOR WESTERN EUROPE".
PEACE RESEARCH SERIES NO. 3
Af: Bent Sørensen

96/85 "ASPEKTER VED KRAFTVARMEFORSYNING".
Af: Bjarne Lilletorup.
Vejleder: Bent Sørensen.

97/85 "ON THE PHYSICS OF A.C. HOPPING CONDUCTIVITY".
Af: Jeppe C. Dyre.

98/85 "VALGMULIGHEDER I INFORMATIONSALDEREN".
Af: Bent Sørensen.

99/85 "Der er langt fra Q til R".
Projektrapport af: Niels Jørgensen og Mikael Klintorp.
Vejleder: Stig Andur Pedersen.

100/85 "TALSYSTEMETS OPBYGNING".
Af: Mogens Niss.

101/85 "EXTENDED MOMENTUM THEORY FOR WINDMILLS IN PERTURBATIVE FORM".
Af: Ganesh Sengupta.

102/85 OPSTILLING OG ANALYSE AF MATEMATISKE MODELLER, BELYST VED MODELLER OVER KØERS FODEROPTAGELSE OG – OMSÆTNING".
Projektrapport af: Lis Eilertzen, Kirsten Habekost, Lill Røn og Susanne Stender.
Vejleder: Klaus Grünbaum.

103/85 "ØDSLE KOLDKRIGERE OG VIDENSKABENS LYSE IDEER".
Projektrapport af: Niels Ole Dam og Kurt Jensen.
Vejleder: Bent Sørensen.

104/85 "ANALOGREGNEMASKINEN OG LORENZLIGNINGER".
Af: Jens Jæger.

105/85 "THE FREQUENCY DEPENDENCE OF THE SPECIFIC HEAT AF THE GLASS REANSITION".
Af: Tage Christensen.

"A SIMPLE MODEL AF AC HOPPING CONDUCTIVITY".
Af: Jeppe C. Dyre.
Contributions to the Third International Conference on the Structure of Non - Crystalline Materials held in Grenoble July 1985.

106/85 "QUANTUM THEORY OF EXTENDED PARTICLES".
Af: Bent Sørensen.

107/85 "EN MYG GØR INGEN EPIDEMI"
- flodblindhed som eksempel på matematisk modellering af et epidemiologisk problem.
Projektrapport af: Per Hedegård Andersen, Lars Boye, CarstenHolst Jensen, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
Vejleder: Jesper Larsen.

108/85 "APPLICATIONS AND MODELLING IN THE MATEMATICS CURRICULUM" - state and trends -
Af: Mogens Niss.

109/85 "COX I STUDIETIDEN" - Cox's regressionsmodel anvendt på studenteroplysninger fra RUC.
Projektrapport af: Mikael Wennerberg Johansen, Poul Kattler og Torben J. Andreasen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

110/85 "PLANNING FOR SECURITY".
Af: Bent Sørensen

111/85 "JORDEN RUNDT PÅ FLADE KORT".
Projektrapport af: Birgit Andresen, Beatriz Quinones og Jimmy Staal.
Vejleder: Mogens Niss.

112/85 "VIDENSKABELIGGØRELSE AF DANSK TEKNOLOGISK INNOVATION FREM TIL 1950 - BELYST VED EKSEMPLER".
Projektrapport af: Erik Odgaard Gade, Hans Hedal, Frank C. Ludvigsen, Annette Post Nielsen og Finn Physant.
Vejleder: Claus Bryld og Bent C. Jørgensen.

113/85 "DESUSPENSION OF SPLITTING ELLIPTIC SYMBOLS II".
Af: Bernhelm Booss og Krzysztof Wojciechowski.

114/85 "ANVENDELSE AF GRAFISKE METODER TIL ANALYSE AF KONTIGENSTABELLER".
Projektrapport af: Lone Biilmann, Ole R. Jensen og Arne-Lise von Moos.
Vejleder: Jørgen Larsen.

115/85 "MATEMATIKKENS UDVIKLING OP TIL RENÆSSANCEN".
Af: Mogens Niss.

116/85 "A PHENOMENOLOGICAL MODEL FOR THE MEYER-NELDEL RULE".
Af: Jeppe C. Dyre.

117/85 "KRAFT & FJERNVARMEOPTIMERING"
Af: Jacob Mørch Pedersen.
Vejleder: Bent Sørensen

118/85 "TILFÆLDIGHEDEN OG NØDVENDIGHEDEN IFØLGE PEIRCE OG FYSIKKEN".
Af: Peder Voetmann Christiansen

119/86 "DET ER GANSKE VIST - - EUKLIDS FEMTE POSTULAT KUNNE NOK SKABE RØRE I ANDEDAMMEN".
Af: Iben Maj Christiansen
Vejleder: Mogens Niss.

120/86 "ET ANTAL STATISTISKE STANDARDMODELLER".
Af: Jørgen Larsen

121/86 "SIMULATION I KONTINUERT TID".
Af: Peder Voetmann Christiansen.

122/86 "ON THE MECHANISM OF GLASS IONIC CONDUCTIVITY".
Af: Jeppe C. Dyre.

123/86 "GYMNASIEFYSIKKEN OG DEN STORE VERDEN".
Fysiklærerforeningen, IMFUFA, RUC.

124/86 "OPGAVESAMLING I MATEMATIK".
Samtlige opgaver stillet i tiden 1974-jan. 1986.

125/86 "UVBY,β - systemet - en effektiv fotometrisk spektralklassifikation af B-,A- og F-stjerner".
Projektrapport af: Birger Lundgren.

126/86 "OM UDVIKLINGEN AF DEN SPECIELLE RELATIVITETSTEORI".
Projektrapport af: Lise Odgaard & Linda Szkotak Jensen
Vejledere: Karin Beyer & Stig Andur Pedersen.

127/86 "GALOIS' BIDRAG TIL UDVIKLINGEN AF DEN ABSTRAKTE ALGEBRA".
Projektrapport af: Pernille Sand, Heine Larsen & Lars Frandsen.
Vejleder: Mogens Niss.

128/86 "SMÅKRYB" - om ikke-standard analyse.
Projektrapport af: Niels Jørgensen & Mikael Klintorp.
Vejleder: Jeppe Dyre.

129/86 "PHYSICS IN SOCIETY"
Lecture Notes 1983 (1986)
Af: Bent Sørensen

130/86 "Studies in Wind Power"
Af: Bent Sørensen

131/86 "FYSIK OG SAMFUND" - Et integreret fysik/historieprojekt om naturanskuelsens historiske udvikling og dens samfundsmæssige betingethed.
Projektrapport af: Jakob Heckscher, Søren Brønd, Andy Wierød.
Vejledere: Jens Høyrup, Jørgen Vogelius, Jens Højgaard Jensen.

132/86 "FYSIK OG DANNELSE"
Projektrapport af: Søren Brønd, Andy Wierød.
Vejledere: Karin Beyer, Jørgen Vogelius.

133/86 "CHERNOBYL ACCIDENT: ASSESSING THE DATA.
ENERGY SERIES NO. 15.
AF: Bent Sørensen.

134/87 "THE D.C. AND THE A.C. ELECTRICAL TRANSPORT IN AsSeTe SYSTEM"
Authors: M.B.El-Den, N.B.Olsen, Ib Høst Pedersen, Petr Viščor

135/87 "INTUITIONISTISK MATEMATIKS METODER OG ERKENDELSESTEORETISKE FORUDSÆTNINGER"
MASTEMATIKSPECIALE: Claus Larsen
Vejledere: Anton Jensen og Stig Andur Pedersen

136/87 "Mystisk og naturlig filosofi: En skitse af kristendommens første og andet møde med græsk filosofi"
Projektrapport af Frank Colding Ludvigsen
Vejledere: Historie: Ib Thiersen
Fysik: Jens Højgaard Jensen

137/87 "HOPMODELLER FOR ELEKTRISK LEDNING I UORDNEDE FASTE STOFFER" - Resume af licentiatafhandling
Af: Jeppe Dyre
Vejledere: Niels Boye Olsen og Peder Voetmann Christiansen.

138/87 "JOSEPHSON EFFECT AND CIRCLE MAP."

Paper presented at The International Workshop on Teaching Nonlinear Phenomena at Universities and Schools, "Chaos in Education". Balaton, Hungary, 26 April-2 May 1987.

By: Peder Voetmann Christiansen

139/87 "Machbarkeit nichtbeherrschbarer Technik durch Fortschritte in der Erkennbarkeit der Natur"

Af: Bernhelm Booss-Bavnbek
Martin Bohle-Carbonell

140/87 "ON THE TOPOLOGY OF SPACES OF HOLOMORPHIC MAPS"

By: Jens Gravesen

141/87 "RADIOMETERS UDVIKLING AF BLODGASAPPARATUR - ET TEKNOLOGIHISTORISK PROJEKT"

Projektrapport af Finn C. Physant

Vejleder: Ib Thiersen

142/87 "The Calderón Projektor for Operators With Splitting Elliptic Symbols"

by: Bernhelm Booss-Bavnbek og
Krzysztof P. Wojciechowski

143/87 "Kursusmateriale til Matematik på NAT-BAS"

af: Mogens Brun Heefelt

144/87 "Context and Non-Locality - A Peircan Approach

Paper presented at the Symposium on the Foundations of Modern Physics The Copenhagen Interpretation 60 Years after the Como Lecture. Joensuu, Finland, 6 - 8 august 1987.

By: Peder Voetmann Christiansen

145/87 "AIMS AND SCOPE OF APPLICATIONS AND MODELLING IN MATHEMATICS CURRICULA"

Manuscript of a plenary lecture delivered at ICMTA 3, Kassel, FRG 8.-11.9.1987

By: Mogens Niss

146/87 "BESTEMMELSE AF BULKRESISTIVITETEN I SILICIUM"

- en ny frekvensbaseret målemetode.

Fysikspeciale af Jan Vedde

Vejledere: Niels Boye Olsen & Petr Viščor

147/87 "Rapport om BIS på NAT-BAS"

redigeret af: Mogens Brun Heefelt

148/87 "Naturvidenskabsundervisning med Samfundsperspektiv"

af: Peter Colding-Jørgensen DLH
Albert Chr. Paulsen

149/87 "In-Situ Measurements of the density of amorphous germanium prepared in ultra high vacuum"

by: Petr Viščor

150/87 "Structure and the Existence of the first sharp diffraction peak in amorphous germanium prepared in UHV and measured in-situ"

by: Petr Viščor

151/87 "DYNAMISK PROGRAMMERING"

Matematikprojekt af:
Birgit Andresen, Keld Nielsen og Jimmy Staal

Vejleder: Mogens Niss

152/87 "PSEUDO-DIFFERENTIAL PROJECTIONS AND THE TOPOLOGY OF CERTAIN SPACES OF ELLIPTIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS"

by: Bernhelm Booss-Bavnbek
Krzysztof P. Wojciechowski

153/88 "HALVLEDERTEKNOLOGIENS UDVIKLING MELLEM MILITÆRE OG CIVILE KRÆFTER"

Et eksempel på humanistisk teknologihistorie
Historiespeciale

Af: Hans Hedal

Vejleder: Ib Thiersen

154/88 "MASTER EQUATION APPROACH TO VISCOUS LIQUIDS AND THE GLASS TRANSITION"

By: Jeppe Dyre

155/88 "A NOTE ON THE ACTION OF THE POISSON SOLUTION OPERATOR TO THE DIRICHLET PROBLEM FOR A FORMALLY SELFADJOINT DIFFERENTIAL OPERATOR"

by: Michael Pedersen

156/88 "THE RANDOM FREE ENERGY BARRIER MODEL FOR AC CONDUCTION IN DISORDERED SOLIDS"

by: Jeppe C. Dyre

157/88 " STABILIZATION OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS BY FINITE DIMENSIONAL BOUNDARY FEEDBACK CONTROL: A pseudo-differential approach."

by: Michael Pedersen

158/88 "UNIFIED FORMALISM FOR EXCESS CURRENT NOISE IN RANDOM WALK MODELS"

by: Jeppe Dyre

159/88 "STUDIES IN SOLAR ENERGY"

by: Bent Sørensen

160/88 "LOOP GROUPS AND INSTANTONS IN DIMENSION TWO"

by: Jens Gravesen

161/88 "PSEUDO-DIFFERENTIAL PERTURBATIONS AND STABILIZATION OF DISTRIBUTED PARAMETER SYSTEMS:

Dirichlet feedback control problems"

by: Michael Pedersen

162/88 "PIGER & FYSIK - OG MEGET MERE"

AF: Karin Beyer, Sussanne Blegaa, Birthe Olsen,
Jette Reich , Mette Vedelsby

163/88 "EN MATEMATISK MODEL TIL BESTEMMELSE AF PERMEABILITETEN FOR BLOD-NETHINDE-BARRIEREN"

Af: Finn Langberg, Michael Jarden, Lars Frellesen

Vejleder: Jesper Larsen

164/88 "Vurdering af matematisk teknologi
Technology Assessment
Technikfolgenabschätzung"

Af: Bernhelm Booss-Bavnbek, Glen Pate med
Martin Bohle-Carbonell og Jens Højgaard Jensen

165/88 "COMPLEX STRUCTURES IN THE NASH-MOSER CATEGORY"

by: Jens Gravesen

166/88 "Grundbegreber i Sandsynligheds-regningen"

Af: Jørgen Larsen

167a/88 "BASISSTATISTIK 1. Diskrete modeller"

Af: Jørgen Larsen

167b/88 "BASISSTATISTIK 2. Kontinuerte modeller"

Af: Jørgen Larsen

168/88 "OVERFLADEN AF PLANETEN MARS"
Laboratorie-simulering og MARS-analoger undersøgt ved Mössbauerspektroskopi.

Fysikspeciale af:

Birger Lundgren

Vejleder: Jens Martin Knudsen
Fys.Lab./HCØ

169/88 "CHARLES S. PEIRCE: MURSTEN OG MØRTEL TIL EN METAFYSIK."

Fem artikler fra tidsskriftet "The Monist" 1891-93.

Introduktion og oversættelse:

Peder Voetmann Christiansen

170/88 "OPGAVESAMLING I MATEMATIK"

Samtlige opgaver stillet i tiden 1974 - juni 1988

171/88 "The Dirac Equation with Light-Cone Data"

af: Johnny Tom Ottesen

172/88 "FYSIK OG VIRKELIGHED"

Kvantemekanikkens grundlagsproblem i gymnasiet.

Fysikprojekt af:

Erik Lund og Kurt Jensen

Vejledere: Albert Chr. Paulsen og Peder Voetmann Christiansen

---

173/89 "NUMERISKE ALGORITMER"

af: Mogens Brun Heefelt

174/89 " GRAFISK FREMSTILLING AF FRAKTALER OG KAOS"

af: Peder Voetmann Christiansen

175/89 " AN ELEMENTARY ANALYSIS OF THE TIME DEPENDENT SPECTRUM OF THE NON-STATONARY SOLUTION TO THE OPERATOR RICCATI EQUATION

af: Michael Pedersen

176/89 " A MAXIUM ENTROPY ANSATZ FOR NONLINEAR RESPONSE THEORY"

af : Jeppe Dyre

177/89 "HVAD SKAL ADAM STÅ MODEL TIL"

af: Morten Andersen, Ulla Engström, Thomas Gravesen, Nanna Lund, Pia Madsen, Dina Rawat, Peter Torstensen

Vejleder: Mogens Brun Heefelt

178/89 "BIOSYNTESEN AF PENICILLIN - en matematisk model"

af: Ulla Eghave Rasmussen, Hans Oxvang Mortensen, Michael Jarden

vejleder i matematik: Jesper Larsen
biologi: Erling Lauridsen

179a/89 "LÆRERVEJLEDNING M.M. til et eksperimentelt forløb om kaos"

af: Andy Wierød, Søren Brønd og Jimmy Staal

Vejledere: Peder Voetmann Christiansen
Karin Beyer

179b/89 "ELEVHÆFTE: Noter til et eksperimentelt kursus om kaos"

af: Andy Wierød, Søren Brønd og Jimmy Staal

Vejledere: Peder Voetmann Christiansen
Karin Beyer