

**TEKST NR 179b 1989**

**ELEVHEFTE:**

Noter til et eksperimentelt kursus om kaos

Af

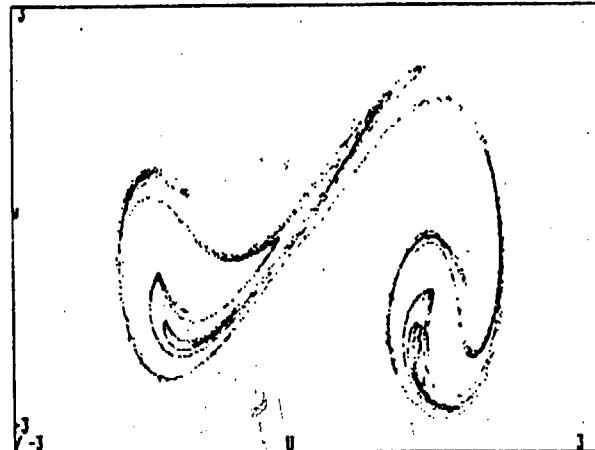
**Andy Wierød  
Søren Brønd  
Jimmy Staal**

vejledere:

Peder Voetmann Christiansen

&

Karin Beyer



**TEKSTER fra**

**IMFUFA**

**ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER**  
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES  
FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

Teksten er en del af et fysikspeciale om kaos, som spredes sig over tre IMFUFA tekster, nemlig nr. 179a: "Lærervejledning m.m. til et eksperimentelt forløb om kaos". nr. 179b: Elevhefte: "Noter til et eksperimentelt kursus om kaos", og nr. 180: "Kaos i fysiske systemer - eksemplificeret ved et torsionspendul og et dobbeltpendul".

Tekst 179a oplyser om et eksperimentelt forløb om kaos som IMFUFA tilbyder gymnasieklasser. Teksten omfatter apparaturoversigter, vejledning i og eksempel på sammensætning af et forløb. Desuden er der baggrundsstof til diskussioner samt en lang række øvelsesvejledninger m.m.

Tekst 179b er et elevhefte til dette eksperimentelle kursus. Med opstilling af en matematisk model for et ikke-lineært torsionspendul, som det gennemgående eksempel, introduceres deterministisk kaos og en række af de centrale begreber i beskrivelsen heraf, f.eks. uforudsigelighed, ikke-periodicitet, bifurkationer, Poincaré-snit, intermittens og Liapunov-eksponent.

Tekst 180 indeholder udover undersøgelser af karakteristiske bevægelsesmønstre for et ikke-lineært dissipativt torsionspendul og et ikke-lineært konservativt dobbeltpendul, introduktion til områdets teorier, metoder og litteratur. Det er vort håb, at teksten kan fungere som idé-katalog og introduktion for andre studerende, der påtænker projekter indenfor dette emne.

## INDHOLDSFORTEGNELSE

Sammenhæng, perspektiver og indhold.....	1
1. Modellering af torsionspendulet.....	4
1.1 Torsionspendulet.....	4
1.2 Apparaturbeskrivelse,.....	5
1.3 Modellering.....	6
1.4 Første model - med fjeder.....	8
1.5 $(t,y)$ -graf og " $(x,t)$ -skriveren".....	10
1.6 Anden model - med dæmpning.....	12
1.7 Tredje model - med motor.....	15
1.8 Faseplot.....	20
2. Introduktion til kaos.....	24
2.1 Idealiseringen af den fysiske virkelighed.....	24
2.2 Fjerde model - med lod.....	25
2.3 Grænsecyklus og veje til kaos.....	30
2.4 Tredimensional afbildning og torus.....	37
2.5 Poincaré-afbildning.....	40
2.6 Retur-afbildning.....	46
2.7 LiapunovekspONENT.....	51
Afrunding.....	55
Supplerende litteratur m.m.....	59

## SAMMENHÅNG, PERSPEKТИVER OG INDHOLD

Som titlen angiver er denne tekst primært tænkt som teoretisk understøttelse af et eksperimentelt kursus i "kaos"-fænomener på Roskilde Universitets Center.

Kurset, der tilbydes gymnasieelever med matematik og fysik på højt niveau, kan tilgodese forskellige dele af pensum. Kurset kan f.eks. indgå som del af kernestoffet i mekanik, tilgodese dele af dimensionerne "fysikkens verdensbillede" eller "fysikken i historisk og filosofisk belysning". Endvidere kan forløbet naturligvis indgå som et led i det almindelige eksperimentelle arbejde, her blot lagt udenfor dagligdagens normale rammer/muligheder.

De mere metafysiske aspekter der kan knyttes til forløbet samt de forskellige muligheder for forløbets tilrettelæggelse er samlet beskrevet i en særskilt "lærer"-vejledning.

Indholdet af teksten er først og fremmest valgt udfra hensynet til det samlede forløb (d.v.s. som supplement til mundtlige oplæg, demonstrationer og ikke mindst de eksperimentelle øvelser). Det har ikke været vores ambition at give en fuldstændig og konsistent indføring i kaosteorien.

Som motivation for emnet og som indgangsvinkel til lærebogen anbefaler vi, at man ser fjernsynsudsendelsen "Det kosmiske kaos" fra serien "Hvælv", samt videoen "Kaos på RUC" der kan rekviseres på IMFUFA (se referencelisten).

Vores interesse for kaosteorierne udspringer af den modsætning, vi finder mellem den hidtil praktiserede naturvidenskab og den "nye" kaosteori.

Den moderne naturvidenskab har stort set kun interesseret sig for de naturfænomener, der udviste "pæne" og forudsigelige sammenhænge. De øvrige naturfænomener som f.eks. worden i

atmosfæren, turbulens i havene og lignende, har man enten til en hvis grad ignoreret eller værre, direkte afvist som værende enkeltstående undtagelser, som man med tiden nok ville få styr på.

Nu hvor interessen for kaosteorierne er vakt, og man via datamaskinen har fået mulighed for numerisk at analysere mange "nye" fænomener, er de "enkeltstående" undtagelser snarere blevet reglen. Nu finder man kaotisk adfærd overalt, f.eks. i dryppende vandhaner, i røgfaner og i økonomiske og politiske modeller etc.. Kaosteori er nemlig ikke kun en teori af interesse for fysikere. Det er snarere en overordnet teori for systemer, der udvikler sig i tid.

Den brede vifte af fænomener, hvor kaosteorien finder anvendelse, rækker måske frem mod en helt ny tværvidenskabelig tænkning. En nytænkning, der på mange måder vil stå i modsætning til den vestlige verdens meget rationelle og deterministiske tænkemåde, som den hidtidige naturvidenskab har stået fadder til.

Selvom mange utvivlsomt vil mene, at de ikke finder en sådan modsætning, så vil fremkomsten af kaosteorierne i det mindste afstedkomme en fornyet interesse for de hidtidige videnskabelige fremgangsmåder og grænserne for deres udsagnskraft og evne til at forudsige naturens fænomener.

De naturlove, vi kender idag, er fremkommet ved, at man har idealiseret fænomener - set bort fra alle forstyrrende elementer, idet det har været antagelsen, at disse elementer ikke i væsentlig grad ville være forandrende for adfærdens af det analyserede fænomen. Med kaosteorierne bliver denne naturopfattelse sat i et nyt lys, idet man med kaosteorierne er blevet opmærksom på, at selv små påvirkninger af et system, på lang sigt, kan få dette til at opføre sig væsentligt anderledes. Det er bl.a. det, vi med denne tekst vil demonstrere.

Teksten tager udgangspunkt i et (kendt) gymnasieforsøg - "Torsionspendulet". Udfra de første grove tilnærmelser til det virkelige fænomen opstiller vi en matematisk model. Denne model udbygger vi så gradvis, idet vi tager flere og flere egenskaber ved pendulet med i modellen. Tilsidst opstiller vi en model, som udviser kaos.

Undervejs introducerer og illustrerer vi de matematiske og grafiske redskaber, der er nødvendige til beskrivelsen og forståelsen af de forskellige modellers adfærd. Her specielt de grafiske metoder man kan anvende for at skelne imellem periodiske og kaotiske systemer. Endvidere introducerer vi nogle af de nye begreber som kaosteorien har affødt, nemlig bifurkationer og intermittens.

Afslutningsvis skal det understreges, at den foreliggende tekst er tænkt som en nødvendig forberedelse før deltagelse i kurset. Samtidig må vi dog erkende, at teksten i sig selv, på flere måder er utilstrækkelig, (derfor titlen "Noter til..."), hvorfor vi opfordrer til klasseundervisning før besøget på RUC.

Teksten forudsætter kendskab til lineære differentialligninger og mekanik svarende til "højt niveau" i gymnasiet.

God læselyst!

Søren, Jimmy og Andy

RUC 1989.

## 1. MODELLERING AF TORSIONSPENDULET

I dette kapitel beskriver vi, hvorledes et torsionspendul mekanisk er opbygget, hvilke fysiske kræfter der virker på pendulet, og hvorledes disse kan formuleres i en matematisk model. Endvidere introduceres de grafiske redskaber  $(t, y)$ -plot og faseplot samt begreberne egenfrekvens og resonans.

### 1.1 Torsionspendulet

Som overskriften antyder, handler det følgende om et pendul og dermed om svingninger. Svingningsfænomener kender vi alle fra vores hverdag, ligesom du måske allerede har stiftet bekendtskab med dem i din gymnasieundervisning. Udover svingninger fra penduler kender vi også svingninger fra (vand-) bølgeudbredelse, lyd, lys og radio- og tv-signaler.

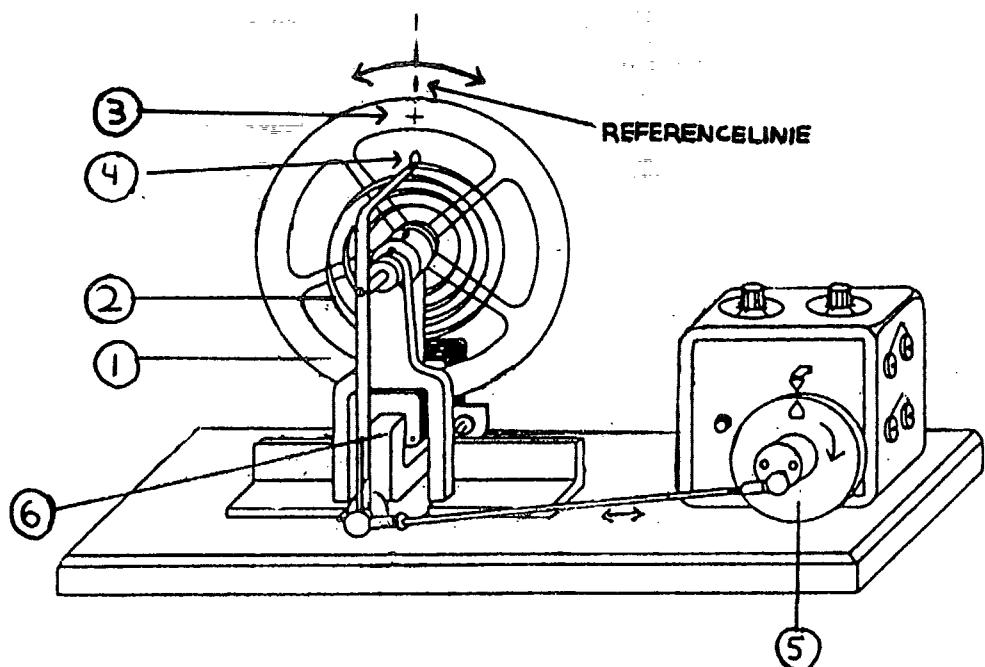
I denne tekst interesserer vi os specielt for mekaniske systemer. Systemer hvor vi fysisk kan se noget svinge frem og tilbage. I svingende systemer kan der opstå forskellige karakteristiske bevægelsesmønstre, fx. harmoniske og periodiske svingninger og de mindre kendte kaotiske svingninger. I undervisningssammenhæng, på stort set alle niveauer, har man indtil for nylig kun interesseret sig for de "påne" bevægelsesmønstre, d.v.s. dem man kunne forudse og analytisk beregne sig frem til.

Til demonstration af den slags bevægelser har Leybold-Heraeus produceret et torsionspendul. Det er et pendul med en dæmpningsanordning og en motor. I fabrikstilstanden kan pendulet udelukkende frembringe de påne bevægelser, her specielt de dæmpede, frie og tvungne svingninger. Endvidere kan apparatet også bruges til at demonstrere fysiske begreber som egenfrekvens og resonans. Vi vil i dette kapitel se nærmere på disse for naturvidenskaben meget velkendte og vigtige fænomener.

## 1.2 Apparaturbeskrivelse

Torsionspendulet består af en cirkulær skive (1), der kan dreje om en vandret aksel gennem centrum (Fig. 1).

Fig. 1 : Torsionspendul.



- (1) Skive (der kan svinge om en vandret aksel)
- (2) Fjeder
- (3) Målepunkt/ligevægtspunkt
- (4) Fjederophæng (hvortil motoren er koblet)
- (5) Motor (-drivhjul)
- (6) Elektromagnet (til dæmpningen)

På akselen gennem skiven er påsat en fjeder (2). Det er denne fjeder, der er årsag til, at man lidt forfejlet kalder pendulet et torsionspendul. "Torsion" betyder nemlig vridning/drejning, og i vores tilfælde er det fjederen, der under skivens svingning henholdsvis bliver spændt og strakt og således sørger for en svingende bevægelse. Størrelsen af kraften, eller rettere kraftmomentet, fjederen påvirker skiven med, er proportional med skivens drejning fra ligevægtsstillingen.

Hvis vi antager, at skivens masse er symmetrisk fordelt om

akselen, vil det alene være fjederen som bestemmer, hvor skiven er i ligevægt. Mens skiven står i sin ligevægtsstilling, vælger vi et punkt (3) på skiven - lodret under referencelinien. Det er dette punkts bevægelse i forhold til referencelinien og som funktion af tiden, vi i det følgende vil bruge til beskrivelsen af skivens bevægelse. Når punktet (3) er lodret under referencelinien, ved vi altså, at skiven er i ligevægt. Vi kan så passende kalde (3) for ligevægtspunktet.

Ligevægtsstillingen kan forskubbes gennem en flytning af fjederens andet ophængningspunkt (4). Skiven vil nu stille sig i en anden ligevægtsstilling, og vores ligevægtpunkt (mærket på skiven) vil have flyttet sig tilsvarende. Vinklen ( $V$ ) ligevægtsstillingen har drejet sig, er således vinklen mellem ligevægtpunktets nye placering og referencelinien (fig. 2).

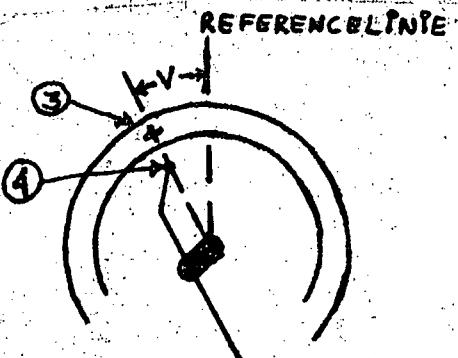
Ändringen af ophængningspunktet og dermed ligevægtsstillingen kan enten foretages manuelt med fast indstilling (uden motor), eller man kan ændre ligevægtsstillingen periodisk v.hj.a. motoren ((5) - fig. 1). Det er denne periodiske flytning af ligevægtsstillingen, der medfører den vedvarende bevægelse.

Skivens udsving kan dæmpes gennem en elektromagnet ((6) - fig. 1), der ved at inducere hvirvelstrømme i skiven kan påføre skiven en dæmpning, der antages proportional med skivens hastighed og strømmen gennem elektromagneten.

### 1.3 Modellering

Ved matematisk modellering af et mekanisk fysisk system må man overveje, hvilke kræfter, systemet er påvirket af. Det er nemlig disse kræfter, der (iflg. Newtons love) bestemmer, hvordan systemet opfører sig over en given tidsperiode.

Fig. 2 : Ändring af ligevægtsstillingen.



Ideelt set skulle en matematisk model så indeholde alle disse kræfter. I praksis er dette krav dog oftest umuligt at honorere. Det skyldes dels, at man ikke altid kender de kræfter, et system er påvirket af og dels, at nogle kraftpåvirkninger er så ustabile, at de kan være umulige at formulere på matematisk vis. Den slags kræfter kan naturligvis ikke indgå i modellen på samme måde som de kendte kræfter. Man kan her vælge at se bort fra de ubeskrivelige kræfter, eller man kan forsøge at beskrive kraften med et matematisk udtryk, der tænkes at kunne tilnærme et eventuelt udtryk for den faktiske kraft. Derudover kan det matematiske udtryk have en karakter, som gør, at de opstillede ligninger hverken kan løses analytisk eller v.hj.a. en datamaskine (d.v.s. numerisk løsning).

Ofte kan det dog være sådan, at de kræfter, der er svære at beskrive, også er dem, der på kort sigt påvirker bevægelsen relativt mindst. Derfor vælger fysikere som regel at se bort fra dem. Det kalder man at idealiserer systemet (fx. "masseløse" snore, se bort fra luftmodstand etc.). En anden form for idealisering er at antage, at de kræfter, der virker på systemet, gør det på en forudsigelig måde (f.eks. motorer der trækker/skubber/roterer med jævn hastighed etc.). I de følgende modeller af torsionspendulet, foretager vi begge former for idealisering.

Selvom der kan opstå problemer, når en datamaskine skal løse ligningerne for et fysisk system, er den alligevel et vigtigt og nødvendigt redskab til behandling af den slags modeller. Af fordele, fremfor det faktiske eksperiment, kan nævnes, at man ofte hurtigere kan få et overblik over systemets mulige opførsel, og at man ikke er afhængig af ofte unøjagtigt eller utilgængeligt måleudstyr. Derimod vil der sædvanligvis være variationer i det faktiske system som ikke genfindes i kørslerne på datamaskinen, da det ikke altid er muligt at medtage præcise udtryk for samtlige kraftpåvirkninger i systemet. Derfor vil en model oftest "kun" være en tilnærmelse til den eksperimentelle virkelighed.

#### 1.4 Første model - med fjeder (frie, udæmpede svingninger)

I den første model tager vi kun hensyn til, hvorledes kraften fra fjederen påvirker skivens svingning. Vi undlader altså at slå motoren til, vi dæmper ikke systemet (tænder ikke for elektromagneten), og ser desuden bort fra den gnidning, der nødvendigvis må være i lejerne i skivens aksel. Hvordan vil et sådant system opføre sig?

For at kunne svare på dette spørgsmål, må en matematisk model opstilles. Altså skal vi kende karakteren og størrelsen af de fysiske kræfter, der påvirker systemet.

Newton's 2. lov ( $F = m \cdot a$ ) for translatoriske bevægelser ser for roterende bevægelser lidt anderledes ud:

$$M = I \cdot \ddot{\alpha}$$

Kraft er erstattet med kraftmoment  $M$  (Nm), masse med inertimoment  $I$  ( $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ ) og acceleration med vinkelacceleration ( $\text{s}^{-2}$ ).

Inertimomentet  $I$  er et begreb, vi ikke her vil diskutere yderligere, men blot anføre, at det for stive roterende legemer er en konstant, hvis størrelse afhænger såvel af massen af legemet som af massefordelingen (i forhold til omdrejningsaksen).

Vinkelaccelerationen kan omskrives til

$$\alpha = \frac{dw}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = w'$$

hvor  $w$  ( $\text{s}^{-1}$ ) er vinkelhastigheden/vinkelfrekvensen og  $y$  skivens udsving (vinkel, målt i radianer og regnet med fortegn) fra ligevægtsstillingen.

I denne første tilnærmede ser vi kun på kraften fra fjederen. Den påvirker skiven med et kraftmoment  $M_F$ , der er proportionalt med skivens udsving  $y$  fra ligevægtsstillingen:

$$M_F = -k \cdot y$$

Minustegnet fremkommer fordi fjederen vil forsøge at trække pendulet (tilbage) til ligevægtsstillingen.  $k$  er torsionskonstanten/fjederkonstanten (målt i Nm).

Det resulterende kraftmoment er da:

$$M = M_F,$$

Bevægelsesligningen og hermed vores første model bliver da:

$$\begin{array}{c} I \cdot y'' = -k \cdot y \\ \updownarrow \\ \boxed{y'' + \frac{k}{I}y = 0} \end{array} \quad (1)$$

hvor  $I$  er skivens inertimoment.

Ligning (1) er en almindelig homogen, lineær differentialligning af 2. orden. Linære differentialligninger (med konstante koefficienter) kan altid løses analytisk. I dette tilfælde er løsningen:

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + q), \quad (2)$$

$$\text{hvor } \omega_0 = \sqrt{k/I} \quad (3)$$

som altså er løsningen til den første model. Den fortæller os, hvormeget skiven er drejet som funktion af tiden  $t$ .  $A$  og  $q$  er integrationskonstanter, der fastlægges ud fra begyndelsesbetingelserne, d.v.s. vinklen skiven var drejet og dens vinkelhastighed til tiden  $t = 0$ .

Efter at have løst det matematiske problem mangler vi nu at få den fysiske forståelse af problemet/bevægelsen. Til dette er det som regel en stor hjælp, hvis man på den ene eller anden måde kan anskueliggøre bevægelsen, altså f.eks. tegne grafer over bevægelsenstørrelsen i tid.

### 1.5 (t,y)-graf og "(x,t)-skriveren"

Tegning af grafer over sammenhænge mellem forskellige variabler og analysen af disse er en væsentlig del af undersøgelsen af modellens opførsel. Før man giver sig i kast hermed, er det dog klogt at gøre sig nogle overvejelser over hvilken form for koordinatsystem, der bedst gengiver indholdet af den ligning eller de data, man ønsker at få overblik over.

I løsningen (2) til den første model (1) ser vi, at bevægelsen er udtrykt ved en sinusfunktion. Dermed ved vi, at bevægelsen er periodisk med perioden:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (4)$$

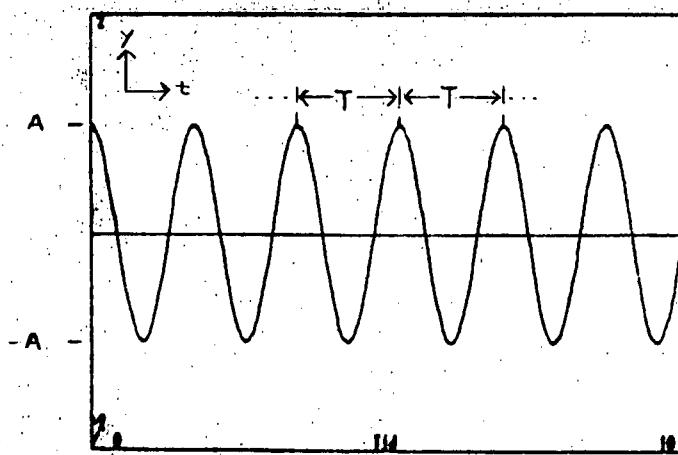
hvor frekvensen

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad (5)$$

Hvis vi vælger et koordinatsystem, hvor tiden t er ud ad førsteaksen og y op ad andenaksen, får vi således en graf, der er periodisk.

Lader vi en datamaskine tegne grafen for funktionen (2) med  $\varphi = \pi/2$ , får vi følgende (t,y)-plot:

Fig. 3 : Harmonisk svingning.



Som det fremgår af grafen, udfører skiven svingninger med konstant periode T omkring ligevægtsstillingen - en "ren" sinusfunktion. Svingningens yderpunkter er -A og A. Størrelsen

A kaldes bevægelsens amplitude. En sådan bevægelsesform kalder man harmonisk.

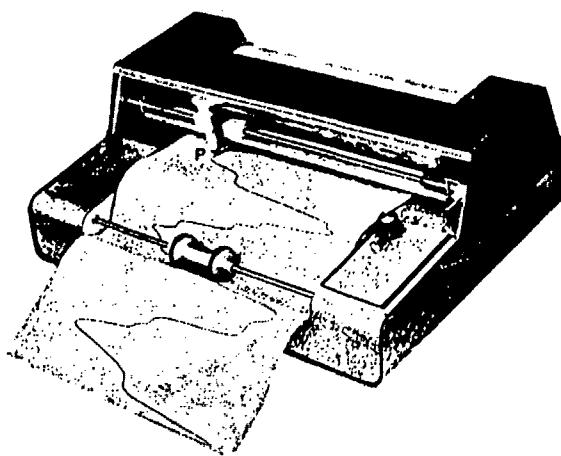
Sætter vi systemet i svingninger ved at dreje skiven vinklen  $y$  og derefter slipper, vil skiven svinge frit - foretage frie svingninger. Disse svingninger vil foregå med en frekvens  $v$ , der er specifik for systemet, kaldet egenfrekvensen. Udfra egenfrekvensen  $v$  og ligning (5) kan egenvinkelfrekvenen  $w_0$  bestemmes. Denne egenvinkelfrekvens har, som vi senere skal se, stor betydning, når vi begynder at påvirke systemet, f.eks. med en motor (kapitel 1.7).

I modellen vil svingningen fortsætte i det uendelige. I praksis ved vi dog godt, at dette ikke sker. På et eller andet tidspunkt vil bevægelsen stoppe, fordi skivens kinetiske energi efterhånden vil blive omsat til varme p.g.a. gnidningen i lejer m.m.

Til undersøgelse af den virkelige bevægelse har vi en såkaldt " $(x,t)$ -skriver" (fig. 4), der kan kobles direkte til torsionspendulet.

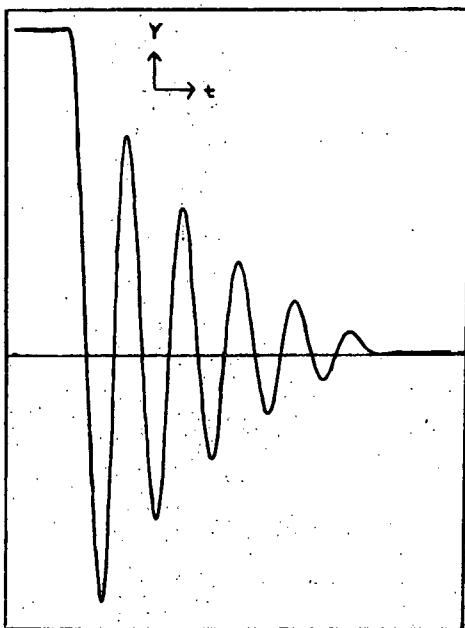
Fig. 4 :  $(x,t)$ -skriver.

$(x,t)$ -skriveren tegner grafen for bevægelsen analogt, idet pennen på skriveren flytter sig i overensstemmelse (analogt) og samtidigt med skivens bevægelse.



Med " $(x,t)$ -skriven" får vi:

Fig 5 : Dæmpet svingning - analogt.



Her ser vi tydeligt, at bevægelsen dør ud. Gnidningen er altså en væsentlig faktor, vi ikke kan tillade os at se bort fra. Den må vi tage højde for i den anden udgave af modellen.

#### 1.6 Anden model - med dampning (dæmpet svingning)

Udover den naturlige gnidning i lejerne, har vi som sagt også elektromagneten, der kan dæmpe bevægelsen. Dæmpningen fra elektromagneten, som vi selv (elektrisk) kan regulere, er proportional med skivens vinkelhastighed. Gnidningen fra lejerne er betydelig mere kompliceret. I modellen antager vi dog, at hele dæmpningen - såvel dæmpningen fra lejerne som fra elektromagneten - er proportional med skivens hastighed.

Matematisk formuleret bliver kraftmomentet fra gnidningen/dæmpningen:

$$M_{gn} = -\mu \cdot \omega \quad \text{hvor } \mu = \mu_{lej} + \mu_{magnet}$$
$$\Leftrightarrow M_{gn} = -\mu \cdot y'$$

hvor  $\mu$  ( $N \cdot m \cdot s$ ) er gnidnings-/dæmpningskoefficienten. Kraftmomentets  $M_{gn}$ 's bidrag til det samlede kraftmoment  $M$  er som fra fjederen også negativt, men her fordi det konstant virker

modsat retningen af hastigheden.

Det resulterende kraftmoment er da:

$$M = M_{\text{red}} + M_{\text{damp}}$$
$$\Leftrightarrow M = -k \cdot y - \mu \cdot y'$$

Bevægelsesligningen og hermed vores anden model bliver da:

$$I \cdot y'' = -k \cdot y - \mu \cdot y'$$
$$\Leftrightarrow I \cdot y'' + \mu \cdot y' + k \cdot y = 0$$
$$\Leftrightarrow y'' + \frac{\mu}{I} y' + \frac{k}{I} y = 0 \quad (6)$$

Ligning (6) er også en differentialligning, der kan løses analytisk. Her er løsningen dog mere kompliceret, idet vi får forskellige løsninger, afhængig af størrelsen af de forskellige parametre  $k$ ,  $\mu$  og  $I$ .

Da såvel fjederkonstanten  $k$  som inertimomentet  $I$  er konstante for vores torsionspendul, så er løsningen af differentialligningen (6) kun afhængig af gnidningskoefficientens  $\mu$ 's størrelse. Dens størrelse kan vi bortset fra bidraget fra gnidningen i lejerne, regulere v.hj.a. strømmen gennem elektromagneten.

Er dæmpningen lille, er løsningen:

$$y(t) = A e^{-\frac{\mu}{2I} t} \sin(\omega t + q) \quad (7)$$

hvor

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{I} - \frac{\mu^2}{4I^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\mu^2}{4I^2}} \quad (8)$$

$A \cdot \exp(-\mu/(2 \cdot I) \cdot t)$  er den tidsafhængige amplitude, og  $\omega$  er den nye vinkelhastighed ( $\omega_0$  er vinkelhastigheden/egenfrekvensen fra før d.v.s. fra forsøget uden dæmpning). Integrations-

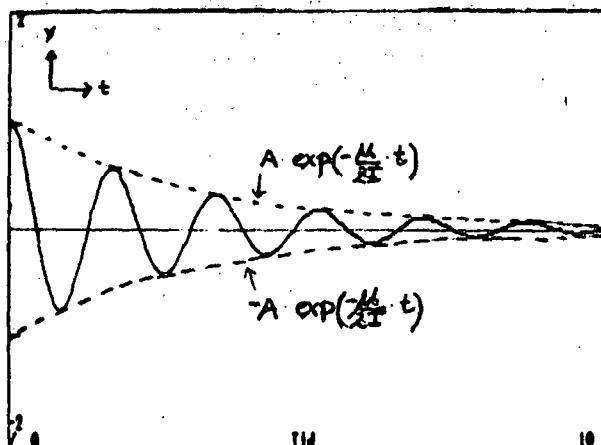
konstanterne  $A$  og  $q$  fastlægges som før udfra begyndelsesbetingelserne.

Er dæmpningen lille, er ligningen (7) altså løsningen til den anden model.

Til forskel fra løsningen til den første model (2), er amplituden her ikke længere konstant. Udfra den negative eksponent i eksponentialfunktionen kan vi se, at amplituden aftager med tiden.

En anden effekt af dæmpningen er, at vinkelhastigheden  $w$  i ligning (8) i forhold til vinkelhastigheden  $w_0$  fra forsøget uden dæmpning, bliver mindre ( $w < w_0$ ). Dette kan vi se på et  $(t, y)$ -plot, ved at der bliver længere mellem bølgetoppene - frekvensen (5) falder (fig. 6).

Fig. 6 : Dæmpet svingning - simuleret.

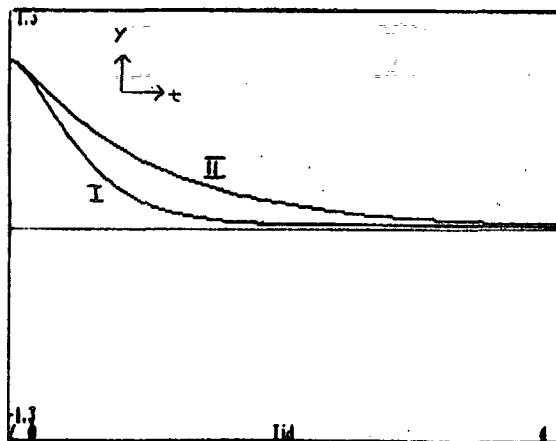


Sammenligner vi fig. 5 og fig. 6, ser vi, at de kvalitativt - dvs. ikke nødvendigvis talmæssigt (kvantitativt) er meget ens. Hermed kan vi sige, at den "anden model" (6) for små dæmpninger er en god tilnærmelse til den observerede bevægelse.

Udfra ligningen (8) kan vi se, at størrelsen under kvadratroden kan blive nul (kritisk dæmpning) eller negativ

ved kraftig dæmpning (stor  $\mu$ ). Vi vil ikke her gå nærmere i detaljer med de konkrete løsninger til differentialequationen (6) for disse tilfælde, men nøjes med at se på løsningskurverne:

Fig. 7: Kritisk og kraftig dæmpning.



For kritisk (graf I) og kraftig (graf II) dæmpning bliver første svingning i teorien aldrig færdig. Den bliver ved i det uendelige (ligevægtspunktet når aldrig ligevægtsstillingen), idet svingningstiden - perioden  $T$  går imod uendelig for  $w \rightarrow 0$  (jf. ligningerne (8) og (4)). Det er ved kritisk dæmpning man får den "hurtigste" bevægelse mod ligevægtsstillingen.

Som forventet ved stor dæmpning (fig. 7 graf II) svinger bevægelsen heller ikke, men den går endnu langsommere mod ligevægtsstillingen.

Da der i næsten alle systemer er gnidning/dæmpning, er det nødvendigt at tilføre energi, hvis man ønsker, at bevægelsen ikke skal dø ud. Derfor har torsionspendulet en motor, der trods dæmpningen kan holde en bevægelse igang.

### 1.7 Tredie model med motor (tvungen svingning)

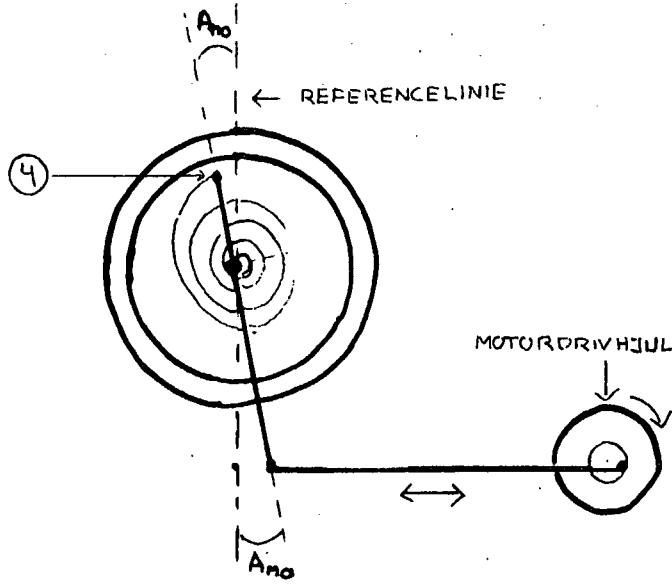
De systemer, vi hidtil har modelleret, er såkaldte autonome systemer. Autonomt betyder selvbestemmende og dækker her over, at systemet ikke bliver påvirket (udefra). I

modelmæssig henseende medfører det, at differentialligningen ikke indeholder led, der direkte er udtrykt som funktion af tiden  $t$ .

Når vi starter motoren til torsionspendulet tilføres der periodisk energi til systemet (motoren omsætter elektrisk energi til mekanisk energi til pendulbevægelsen). Dermed skal modellen tilføjes et led, som repræsenterer motorens kraftpåvirkning af systemet. Et sådant system, der bliver drevet udefra og hvor tiden direkte indgår i differentialligningen (kraftpåvirkningen ændrer sig i tiden) kaldes et ikke-autonomt system.

Motoren får et drivhjul til at rotere med en hastighed, hvis størrelse er afhængig af den elektriske spænding over motoren. Drivhjulet skubber en stang, hvortil fjederen er fastgjort, frem og tilbage (fig. 8). Det medfører, at fjederens andet ophængningspunkt (4) ligeledes flyttes frem og tilbage, og dermed drives ligevægtsstillingen i takt med drivhjulets rotation (jf. afsnit 1.2, fig. 1, s. 5). Vinklen  $A_{M0}$  (fig. 8) som ligevægtsstillingen skubbes, kalder vi motoramplituden.

Fig. 8: Motordrevet.



Når motoren skubber fjederophængningspunktet (4) påvirkes skiven med et kraftmoment på

$$M_{Mo} = -k \cdot A_{Mo}(t),$$

hvor  $k$  er fjederkonstanten.

Da motordrivhjulet roterer, er vinklen, motoren skubber ophængningspunktet, ikke konstant. For at kunne modellere denne ændring, må vi foretage en idealisering og antage, at drivhjulet roterer med en konstant vinkelfrekvens  $\omega_{Mo}$  (i realiteten varierer den med ca. 5%). Hermed bliver kraftmomentet motoren påvirker systemet med

$$M_{Mo} = -k \cdot A_{Mo} \cdot \cos(\omega_{Mo} \cdot t + p), \quad (9)$$

hvor  $p$  er drivhjulets begyndelsesfase.

Sætter vi dette led ind i den "anden" model (6), får vi:

$$\begin{array}{l} \uparrow \\ M = M_{Fe} + M_{em} + M_{Mo} \\ \downarrow \\ M - M_{em} - M_{Fe} = M_{Mo}, \end{array}$$

$$\Rightarrow I \cdot y'' + \mu \cdot y' + k \cdot y = -k \cdot A_{Mo} \cdot \cos(\omega_{Mo} \cdot t + p)$$

$$\Leftrightarrow y'' + \frac{\mu}{I} y' + \frac{k}{I} y = -k \frac{A_{Mo}}{I} \cos(\omega_{Mo} t + p) \quad (10)$$

Ligning (10) er bevægelsesligningen for det dæmpede og drevne torsionspendul og dermed vores tredie model.

Ligning (10) er en lineær 2. ordens inhomogen differentialligning, der kan løses analytisk. Løsningen består af to led, dels et led som er identisk med løsningen til model 2 - uden motor (7), og dels et nyt led, som er en følge af at motoren modarbejder den naturlige bevægelse.

$$y(t) = Ae^{-\frac{\mu}{2I}t} \sin(\omega_0 t + q) + C \sin(\omega_{Mo} t + \phi) \quad (11)$$

hvor

$$C = \frac{A_{Mo}}{I \sqrt{(\omega_{Mo}^2 - \omega_0^2)^2 + \frac{\mu^2 \omega_{Mo}^2}{I^2}}} \quad (12)$$

og

$$\operatorname{tg}(\phi) = \frac{\omega_{Mo}^2 - \omega_0^2}{\frac{\mu \omega_{Mo}}{I}}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{I}$$

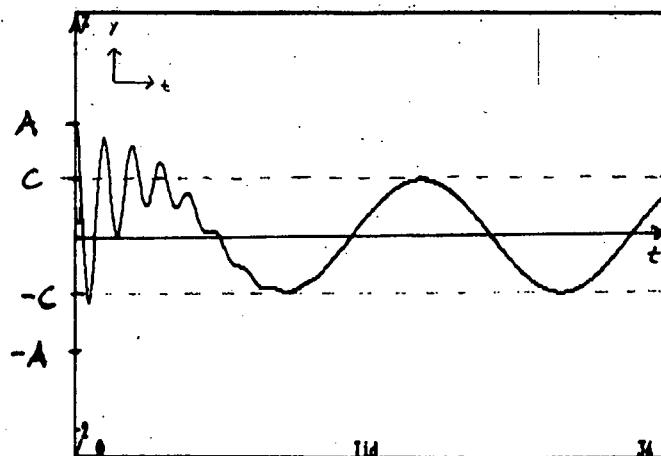
$A$  og  $q$  er som før integrationskonstanter, der bestemmes udfra begyndelsesbetingelserne.

Ligning (11), der er løsningen til vores tredie model, indeholder såvel fjederens, dæmpningens som motorens bidrag til bevægelsen.

Fra det foregående kapitel ved vi, at det første led i modellen  $A \cdot \exp(-\mu/(2I)t) \cdot \sin(\omega_0 t + q)$  med tiden vil forsvinde, idet  $\exp(-\mu/I \cdot t) \rightarrow 0$  for  $t \rightarrow \infty$ . Derfor vil det sidste led  $C \cdot \sin(\omega_{Mo} t + \phi)$ , der aldrig forsvinder, efterhånden få overtaget og således blive bestemmende for bevægelsesmønstret. Dette led, som er en følge af motorens kraftpåvirkning på pendulet, overvinder altså dæmpningen og tvinger pendulet ind i en bestemt bevægelse - heraf begrebet tvungne svingninger.

Bevægelsen kan vi få skrevet ud af  $(x, t)$ -skriveren, men vi har valgt datamaskinen, idet vi på den måde kan gøre udviklingen tydligere (fig. 9).

Fig. 9: Tvungen, dæmpet svingning.



Af grafen ses, at bevægelsen i starten ikke er harmonisk. Dette skyldes det første ledets indvirkning på bevægelsen. Men p.g.a. dæmpningen dør disse forstyrrende svingninger ud, og således overlades det til motoren at drive pendulet.

Denne første "ustabilitet" kaldes "indsvingninger", idet disse svingninger kun har indflydelse i starten af forløbet. Allerede efter kort tid har svingningen stabiliseret sig til en pån "harmonisk" svingning.

Det andet led i ligning (11) beskriver den harmoniske svingning:

$$y(t) = C \cdot \sin(\omega_m \cdot t + \phi) \quad (13)$$

Heraf kan vi se, at den harmoniske bevægelse, som torsionspendulet foretager, foregår med en vinkelfrekvens, der er lig den påtrykte motorvinkelfrekvens  $\omega_m$ .

Vi kan, af ligning (12) se, at amplituden  $C$  af bevægelsen afhænger såvel af den påtrykte vinkelfrekvens  $\omega_m$  som af systemets egenvinkelfrekvens  $\omega_0$  samt  $\mu$  og  $I$ . Jo nærmere  $\omega_m$  ligger på  $\omega_0$  jo større bliver amplituden. Når  $\omega_m = \omega_0$  får vi maksimal amplitude, hvis størrelse kun er afhængig af  $\mu$  og  $I$ . Denne situation kaldes resonans.

Vi har nu gennem fysiske betragtninger opstillet tre modeller. Til hjælp for analysen af modellerne har vi tegnet diverse  $(t, y)$ -grafer. Disse giver os tilsammen en god forståelse af, hvordan torsionspendulet opfører sig i de forskellige situationer. Men i en  $(t, y)$ -graf kan vi af gode grunde ikke se hele bevægelsen, idet t-aksen jo nødvendigvis må have en endelig længde. Til analysen af bevægelser, der foregår over lang tid eller udspringer et kompliceret forløb, er et fasediagram/faseplot mere velegnet. Det vil vi nu se nærmere på.

### 1.8 Faseplot

En af ideerne med et Faseplot er (til forskell fra et  $(t; y)$ -plot), at tiden ikke indgår direkte i afbildningen. På denne vis kan vi skalere vores koordinataksler således, at hele "bevægelsen" kan afbildes indenfor de grænser, som akserne afstikker.

Ser vi på vores harmoniske svingning fra første model, var udsvinget til tiden  $t$  (ligning (2), med  $q(\text{sat}) = 0$ ):

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$$

Differentierer vi den, får vi vinkelhastigheden  $w$  til tiden  $t$ :

$$y' = w(t) = \omega_0 \cdot A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$$

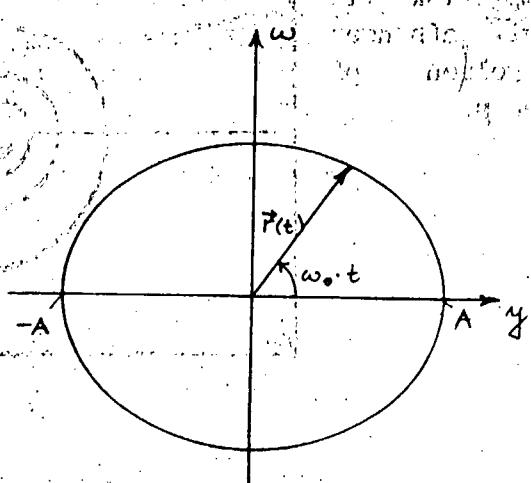
Sammensætter vi  $y(t)$  og  $w(t)$  til en vektor  $\vec{r}(t)$ , får vi:

$$\vec{r}(t) = (y(t), w(t)) = (A \cdot \sin(\omega_0 \cdot t), \omega_0 \cdot A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)),$$

hvilket er parameterfremstillingen for en ellipse.

Forestiller vi os nu, at vi afsætter vektoren  $\vec{r}(t)$  fra koordinatsystemets centrum med  $y(t)$  ud ad førsteaksen og  $w(t)$  op ad andenaksen, så vil denne vektor, som funktion af tiden, dreje om centrum, og aftegne en ellipse med halvaksene  $A$  og  $\omega_0 \cdot A$  (fig. 10).

Fig. 10: Faseplot.



En afbildning som figur 10 kaldes et faseplot, og koordinatsystemets plan betegnes et faserum.

I figur 10 har vi valgt  $y(t)$  og  $w(t)$  som dimensioner på akserne. At tegne faseplot med disse dimensioner kræver en datamaskine, idet vi ikke direkte (analogt) kan måle vinkelhastigheden af skiven.

Faseplottene for de tre foregående modeller er tegnet i figur 11, 12, og 13.

Fig. 11: Faseplot - Harmonisk bevægelse (svarer til fig. 3).

Her vil faseplottet altid være en ellipse. Halvakserne i ellipsen kan kun ændres ved at ændre amplituden, fjederen eller inertimomentet af skiven.

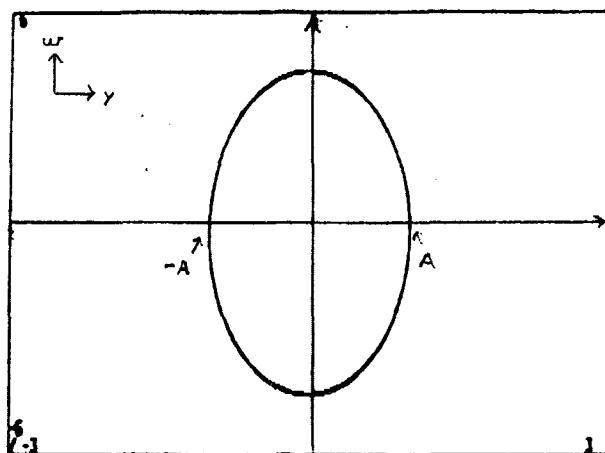


Fig. 12: Faseplot - Dæmpet svingning (svarer til fig. 6).

Her ser vi, at kurven nærmer sig  $(0,0)$ , svarende til ligevægtsstillingen - vinkelhastigheden gænde mod nul. Kurven vil altid nærme sig asymptotisk til  $(0,0)$ . Hvor hurtigt, afhænger primært af størrelsen på gnidningskoefficienten  $\mu$ .

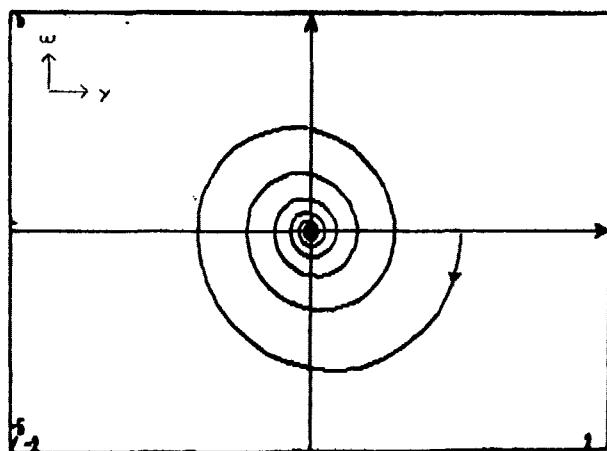
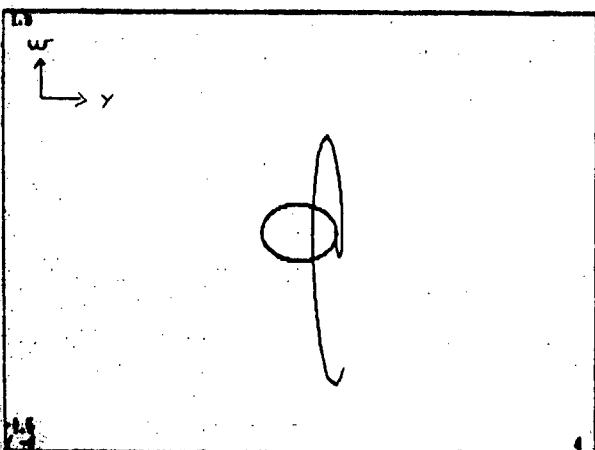


Fig. 13: Faseplot - Tvungen, dæmpet svingning (svarer til fig. 9).

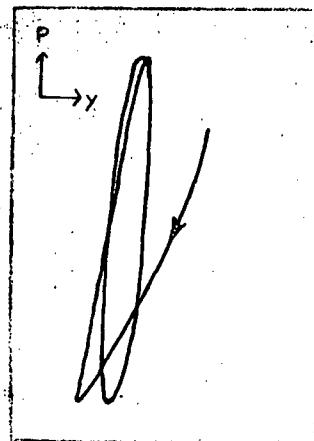
Her ser vi hvorledes bevægelsen efter indsvingning ender i den harmoniske svingning og forbliver der. Størrelsen af ellipsen (arealet) er primært afhængig af motoramplituden  $A_{M_0}$  og motorvinkelfrekvensen  $\omega_{M_0}$ .



Selvom vi ikke kan lave analoge faseplot med dimensionerne ( $y, w$ ), kan vi v.hj.a. en såkaldt "( $x, y$ )-skriver" lave en anden type faseplot, nemlig et, hvor vi har udsvinget af skiven  $y(t)$  ud ad førsteaksen og motorpositionen  $P(t) = A_{M_0} \cdot \cos(\omega_{M_0} t + p)$  op ad andenaksen (fig. 14).

Fig. 14: Faseplot - Tvungen, dæmpet svingning - analogt.

I fasesplottet ( $y, P$ ) tegnet med "( $x, y$ )-skriveren", ser vi samme kvalitative udvikling som i fig. 13. Kurverne er ikke kvantitativt ens, idet der ikke er den samme funktionelle sammenhæng mellem  $y$  og  $P$ , som mellem  $y$  og  $w$ .



Sammenligner vi figur 13 og 14 ser vi en rimelig kvalitativ overensstemmelse. Dette giver os et godt bevis for, at den tredie model (10) er en god tilnærmelse til det virkelige fænomen - torsionspendulet.

I dette kapitel har vi set, hvorledes man fra et konkret fysisk system - torsionspendulet, gennem fysiske betragtninger er næet frem til en rimelig model for, hvorledes systemet udvikler sig over tid. De bevægelsesligninger vi har fundet frem til, er bevægelsesligninger vi vil kalde "pæne", fordi det har været muligt, at løse dem analytisk. Løsningen til disse ligninger har da også vist sig, at være "pæne" - ordnede og forudsigelige.

I det næste kapitel skal vi se helt andre bevægelsesmønstre - nemlig kaotiske bevægelser.

## 2. INTRODUKTION TIL KAOS

I dette kapitel vil vi introducere en række metoder og begreber, som tilsammen kan danne fundament til en forståelse af kaotiske systemer.

Efter en mindre teknisk ombygning af torsionspendulet opstilles en ny (fjerde) model, der blandt andet kan udvise kaos. I tilknytning hertil introduceres de grafiske redskaber: tredimensionale afbildninger, torus, Poincare'- og returnafbildningen samt begreberne bifurcation, intermittens og Liapunov-eksponent.

### 2.1 Idealiseringen af den fysiske virkelighed

I det foregående kapitel så du, hvorledes vi gennem opstilling af tre stadig mere komplicerede modeller af torsionspendulet tilsidst endte med en model, der kvalitativt udviste samme adfærd som det virkelige/observerbare fænomen. Ved kvalitativ overensstemmelse forstår vi, at modellen udviser samme bevægelsesmønster som torsionspendulet, men ikke nødvendigvis med samme (kvantitative) talmæssige værdier, d.v.s. f.eks. med samme amplitude eller samme periode etc. For også at tilstræbe en kvantitativ overenstemmelse, så skal de forskellige konstanter/parametre  $k$ ,  $\mu$ ,  $I$ , og  $A_{\text{MO}}$  bestemmes/måles. Selvom vi som her kunne løse de opstillede modeller/bevægelsesligninger eksakt/analytisk, så er der altså endnu et stykke vej til den endelige model for det specifikke pendul.

Men her skal vi huske på, at selvom vi kunne bestemme konstanterne uden eksperimentelle usikkerheder, hvad der aldrig er tilfældet, så vil modellen af torsionspendulet altid kun være en model i ordets egentlige betydning, idet vi som forudsætning for den matematiske modellering foretog en del idealiseringer. Vores beskrivelse er således kun tilnærmedsvist korrekt.

Nogle af de idealiseringer, vi gjorde, var blandt andet, at antage, at skivens masse var symmetrisk fordelt om

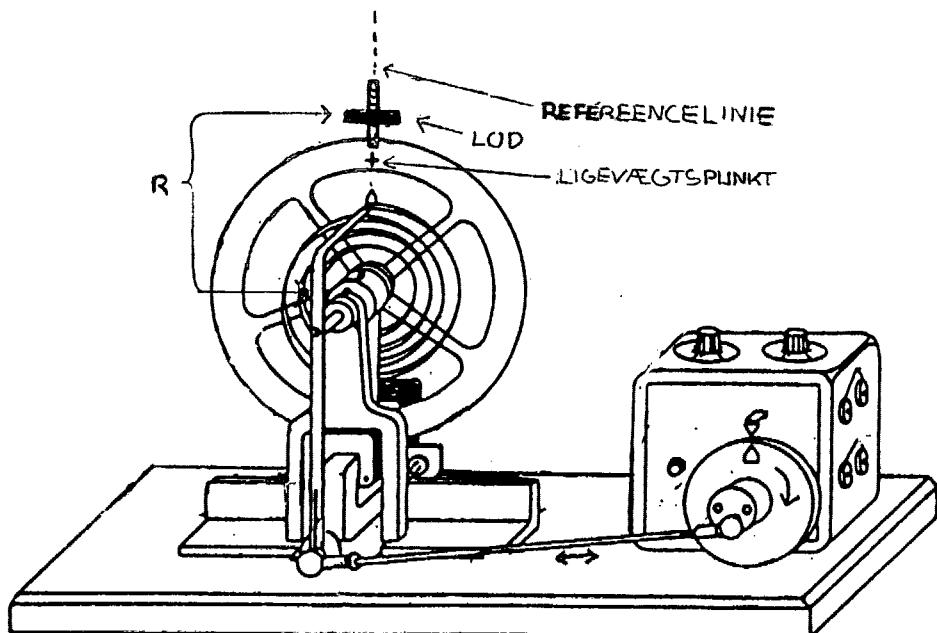
akselen (s. 5), at dæmpningen såvel fra lejer som fra elektromagnet er proportional med vinkelhastigheden (s. 12) og at motordrivhjulet roterer med jævn hastighed (s. 17). Disse antagelser er for fabriksudgaven af torsionspendulet ikke urimelige. Men hvad ville der egentlig ske med bevægelsesmønstret, hvis vi foretog en teknisk ændring på torsionspendulet, så bare een af disse antagelser ikke længere er rimelig?

Vi har i det følgende valgt at ændre een af de faktorer, der ihvertfald er af afgørende betydning for pendulets bevægelsesmønster, nemlig skivens massefordeling. Med andre ord: Hvad vil der ske, hvis massen af skiven ikke er jævnt fordelt?

## 2.2 Fjerde model - med lod

I denne fjerde modellering af torsionspendulet foretager vi en mindre teknisk ombygning af pendulet. Vi påsætter et lod på skivens kant. Loddet placerer vi præcis, ovenover ligevægtspunktet (fig. 15).

Fig. 15: Torsionspendul med lod.



Påsættelsen af dette lod medfører, at det ikke længere er rimeligt at antage, at skivens masse er symmetrisk fordelt om

akselen. Denne antagelse medførte (jf. s. 5), at vi med god ret kunne konkludere, at det alene var fjederen (og dens kobling til motoren), der bestemte, hvor skiven var i ligevægt. Med loddet påsat ændres dette radikalt, idet loddets tyngde vil bidrage til, at skiven stabiliserer sig i andre ligevægtsstillinger.

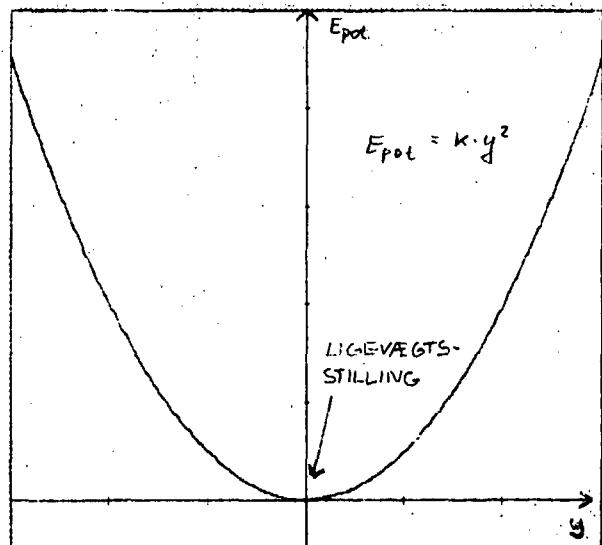
Hvordan ligevægtsstillingen vil ændre sig, kan vi få et overblik over ved at foretage nogle energibetrægninger.

Ved torsionspendulet uden lod så vi, hvorledes svingningen foregik omkring en ligevægtsstilling. Jo større udsving, jo mere blev fjederen spændt, og des mere potentiel energi optages i fjederen (fig. 16).

Fig. 16:  $E_{pot}$  som funktion af  $y$  for torsionspendulet - uden lod og motor.

Med udsvinget  $y$  ud ad første-aksen og systemets potentielle energi  $E_{pot}$  op ad andenaksen vil bevægelsen komme til at foregå på en parabel.

Som det fremgår af grafen, vil den potentielle energi være mindst, der hvor fjederen ikke er spændt ( $y = 0$ , og  $E_{pot} = 0$ ). Dette punkt svarer til vores ligevægtsstilling.

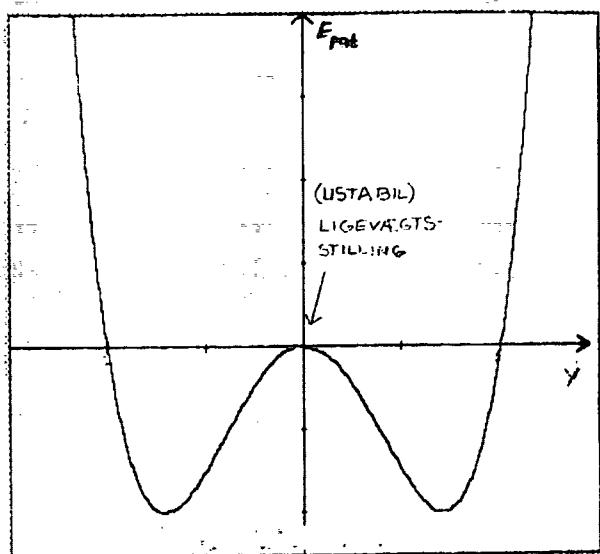


Når vi sætter loddet på skiven, vil den "gamle" ligevægtsstilling stadig være en ligevægtsstilling, idet fjederen jo stadig vil forsøge at fastholde skiven her. Men nu er denne ligevægtsstilling blevet en ustabil ligevægtsstilling. Skubber vi ganske lidt til loddet, vil tyngden af dette dreje skiven, og snart vil skiven igen stabilisere sig, men nu drejet med en fast vinkel til den side, loddet var skubbet til (fig. 17).

Fig. 17:  $E_{pot}$  som funktion af  $y$  for torsionspendulet - med lod og uden motor.

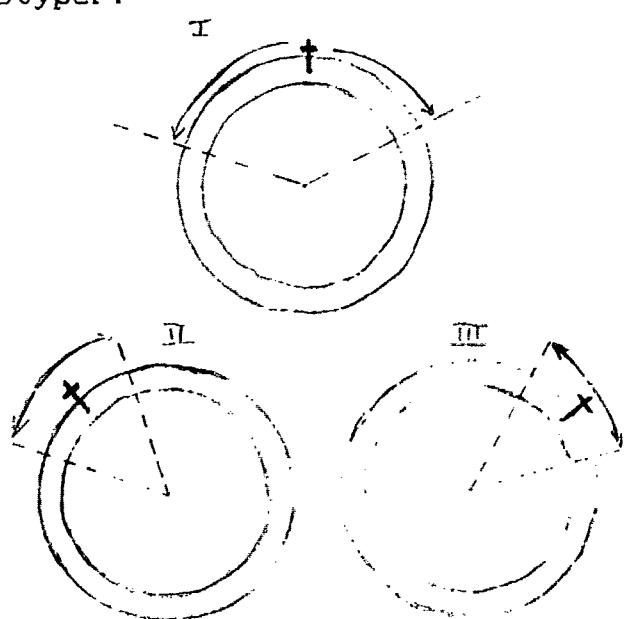
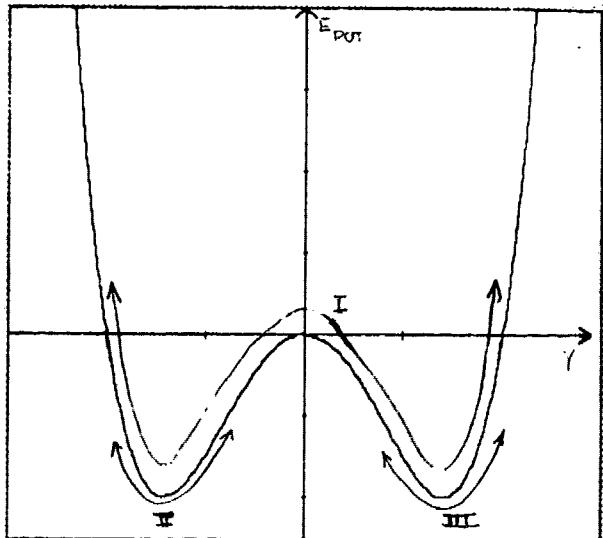
Som det fremgår af grafen, har vi nu to ligevægtsstillinger - een i hver "grøft" svarende til udsving til hver side - samt den ustabile ligevægtsstilling i midten.

De to ligevægtsstillinger svarer til en situation, hvor tyngden af loddet, netop modsvarer af fjederkraftens forsøg på at bringe skiven tilbage til den oprindelige ligevægtsstilling. I denne situation er den potentielle energi af systemet mindst.



Ved torsionspendulet med lod har vi altså tre ligevægtsstillinger og derfor også tre overordnede karakteristiske bevægelsesmønstre: enten kan pendulet svinge frem og tilbage omkring den ustabile ligevægtsstilling - fra venstre til højre grøft og omvendt (I) (fig. 18), eller det kan svinge omkring enten den venstre (II) eller højre (III) ligevægtsstilling. I de to sidste tilfælde vil loddet altså forblive i henholdsvis den venstre eller højre grøft.

Fig. 18: 3 forskellige svingningstyper.



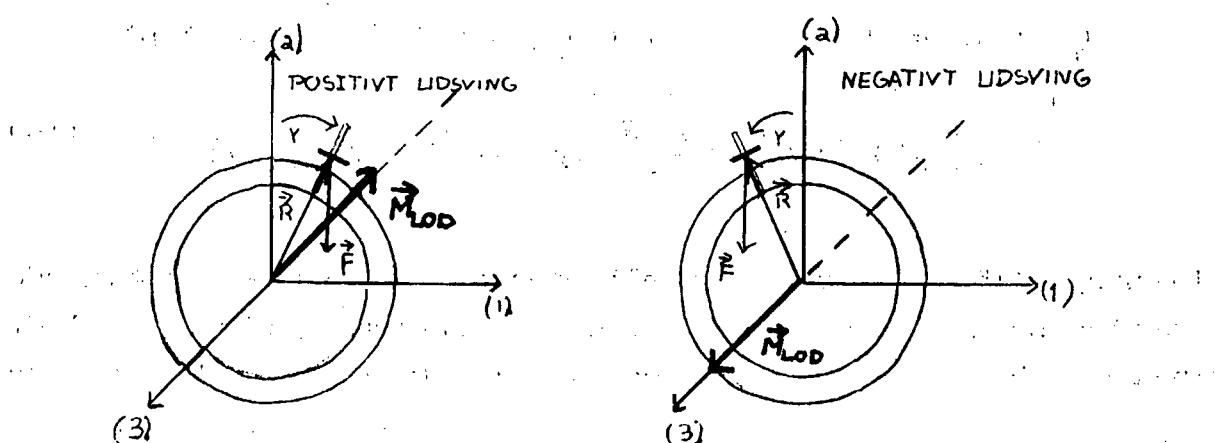
Skal man lave en fuldstændig analyse af torsionspendulets bevægelsesmønstre, skal man undersøge alle tre svingnings typer. I det følgende vil vi dog begrænse os til kun at analysere bevægelsesmønstret i højre grøft (III). Selvom den potentielle energi i bunden af højre grøft ligner den (næsten en parabel), så på figur 16 for torsionspendulet uden lod og motor, så udviser pendulet dog et væsentligt anderledes bevægelsesmønster. Dette skyldes, at de to ben i den højre grøft (som i den venstre) ikke er lige stejle. Den potentielle energi af torsionspendulet stiger hurtigere, når pendulet "svinger op" ad højre ben (stort udsving) end ad venstre ben (i højre grøft). Denne skævhed i potentielfeltet er en følge af, at det nu ikke længere alene er fiederen, der bestemmer torsionspendulets potentielle energi, men at denne nu også bestemmes udfra tyngdefeltets påvirkning af loddet. Ved små udsving er det tyngdefeltet, der dominerer, og ved store udsving er det fiederen, der dominerer.

Størrelsen af kraftmomentet, loddet påvirker skiven med, er afhængig af massen af loddet  $m$ , tyngdeaccelerationen  $g$ , afstanden fra massemidtpunktet af loddet til centrum af skiven  $R$  og vinklen  $\varphi$ , skiven er drejet (fig. 19).

Fig. 19: Kraftmomentet fra loddet.

19a:

19b:



Kraftmomentet loddet påvirker skiven med der:

$$\vec{M}_{led} = \vec{R} \times \vec{F}$$

$$\Rightarrow M_{led} = - R \cdot m \cdot g \cdot \sin y \quad (14)$$

Af figur 19a ses, at med det angivne udsving er tyngdekraftens momentvektor, m.h.t. akselen modsat rettet 3-aksens orientering, altså kraftmomentets fortegn er negativt. Er udsvinget til den anden side (fig. 19b), er ligning (14) stadig rigtig, idet udsvingsvinklen er negativ.

For roterende legemer så vi tidligere (s. 8), at det resulterende kraftmoment  $M$  for bevægelsen er lig:

$$M = I \cdot y''$$

Inertimomentet  $I$  er her hele systemets inertimoment. Inertimomentet er som sagt en størrelse, der bl.a. er afhængig af massefordelingen, så når vi påsætter loddet, ændrer vi også det samlede inertimoment ("I" fra før kalder vi nu " $I_{total}$ ");

$$I_T = I_{total} + I_{led}$$

Sætter vi det nye led - kraftmomentet fra loddet (14) - ind i vores tredie model (10) og erstatter  $I$  med  $I_T$  får vi:

$$M = M_{mem} + M_{m_m} + M_{led} + M_{mo}$$

$$M = M_{mem} - M_{mem} - M_{led} = M_{mo}$$

$$I_T \cdot y'' + \mu y' + k \cdot y + m \cdot g \cdot R \cdot \sin(y) = - k \cdot A_{Mo} \cdot \cos(\omega_{Mo} \cdot t + p)$$

$$y'' + \frac{\mu}{I_T} y' + \frac{k}{I_T} y + \frac{mgR}{I_T} \sin y = - k \frac{A_{Mo}}{I_T} \cos(\omega_{Mo} t + p) \quad (15)$$

Ligning (15) er bevægelsenligningen for vores ombyggede torsionspendul, d.v.s. med fjeder, dæmpning, motor og lod. Hermed har vi vores fjerde model. Denne model er en

inhomogen, ikke-lineær 2. ordens differentialligning med konstante koefficienter.

De modeller vi tidligere har analyseret, har været modeller hvor alle leddene indeholdende den variable  $y$ , har været lineære. Det "nye" led, henhørende fra loddet, er ikke-lineært p.g.a. sinusfunktionen. Løsningerne til de ikke-lineære differentialligninger er oftest umulige at finde analytisk (måske, fordi der ikke findes eksakte løsninger). Skal man analysere en sådan ligning, så løses den numerisk ud fra nogle konkrete begyndelsesbetingelser. For hvert sæt af begyndelsesbetingelser skal en ny numerisk beregning foretages. En sådan ligning er det derfor umiddelbart svært at sige noget generelt om. Det kræver mange datamaskine-simulationer, før man rigtigt har fået en forståelse af, hvilke typer bevægelser "ligningen" indeholder.

Den fjerde model (15) er netop sådan en ikke-lineær differentialligning, hvor en generel løsning er umulig at finde. Dens løsningskurver, såvel dem vi kan frembringe på  $(x,t)$ -skriven, som gennem simulationer på datamaskinen, udviser mange forskellige bevægelsesmønstre. I det næste afsnit skal vi se nærmere på, hvorledes de forskellige bevægelsesmønstre kan opstå.

### 2.3 Grænsecyklus og veje til kaos

Af afgørende betydning for bevægelsesmønstret af løsningskurverne til den fjerde model (15), er selvfølgelig størrelsen af modellens parametre  $k$ ,  $\mu$ ,  $I_r$ ,  $A_{max}$ , m.fl.

Det har hidtil usagt været antaget, at de kan fastlægges med en vis præcision. Det kan de naturligvis også, men det skal vise sig, at netop nøjagtigheden, hvormed de bestemmes, kan være af afgørende betydning for systemets udvikling i tid.

Når vi starter en simulering på datamaskinen, er det med et bestemt sæt af parametre, som der dog nemt kan ændres på, indlagt i maskinen. Desuden skal vi vælge et sæt af start-

betingelser, d.v.s. værdier af de variable:  $t$ ,  $y(t)$ ,  $y'(t)$ .

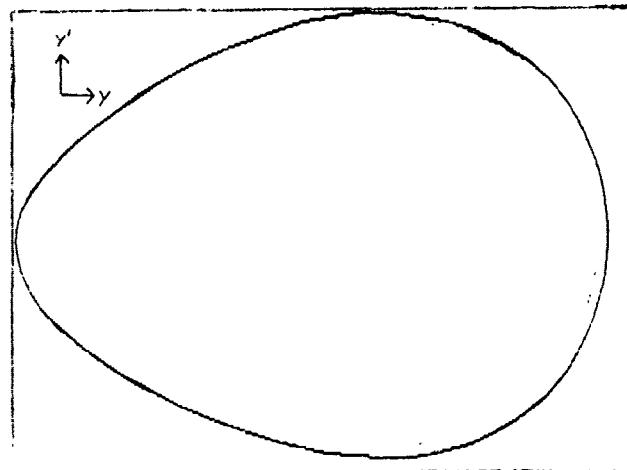
På den ene side kan vi starte systemet med forskellige startbetingelser, men med konstante parameterværdier. På den anden side kan vi ændre på parametrene og fastholde et givent sæt startbetingelser. Denne procedure tager (meget) lang tid at "gennemføre" - selv med meget hurtige datamaskiner.

I det følgende vil vi se på nogle enkelte af de karakteristiske løsningskurver som den fjerde model udviser. Men det skal understreges, at de som sagt kun repræsenterer et lille udpluk, af de mangfoldige muligheder modellen indeholder.

Antag nu, at vi har valgt et sæt af parametre. Vi vil så beskrive, hvad der kan ske med de enkelte løsningskurver, når vi ændrer på dette systems startbetingelser. Det vi specielt er interesseret i, er grænseadfærdens af de enkelte løsningskurver - d.v.s. hvorledes ser løsningningskurven ud efter indsvingningerne har fortaget sig.

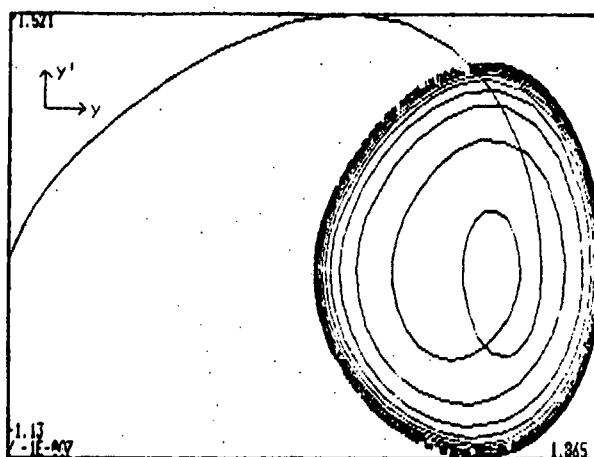
Nedenfor (fig. 20) ses en periodisk løsningskurve.

Fig. 20: Periodisk bevægelse (højre grøft).



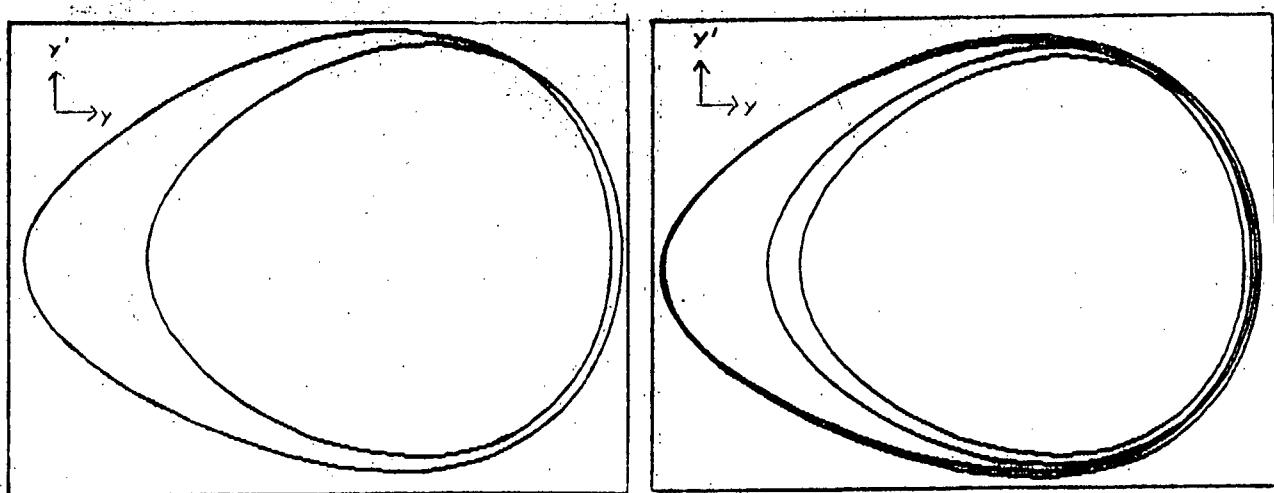
Den periodiske bane kaldes i det 2-dimensionale faseplot for en grænsecyklus. En grænsecyklus kaldes stabil, hvis alle løsninger, der er startet i nærheden af de betingelser, der førte til grænsecyklen, også ender op på den (fig. 21).

Fig. 21: Periodisk bevægelse - med indsvingning (højre grøft).



En anden type grænseadfærd er den  $n$ -periodiske bevægelse. Derved forstas en løsning, som gentager sig selv med en periode  $T$ , men hvor der er  $n$  forskellige svingninger inden for perioden (fig. 22).

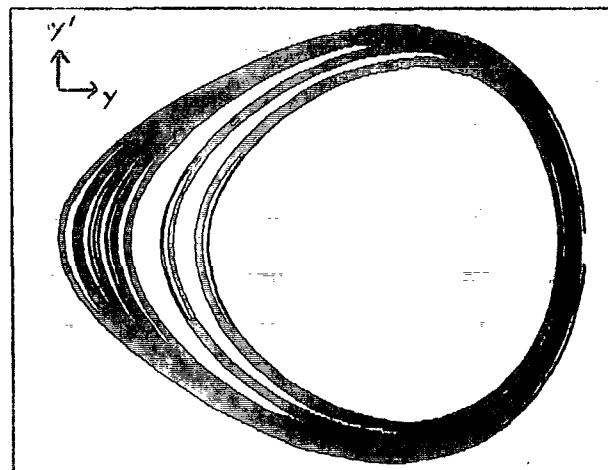
Fig. 22: 2- og 4-periodisk bevægelse (højre grøft).



Både den almindelige grænsecyklus og den  $n$ -periodiske grænsecyklus kan være stabil eller ustabil - dog ikke på en gang. Er en grænsecyklus stabil kaldes den en tiltrækker, og hvis den er ustabil en frastøder.

Endelig er der kaotiske bevægelser. Vi har nedenfor givet et par eksempler (fig. 23 og 24).

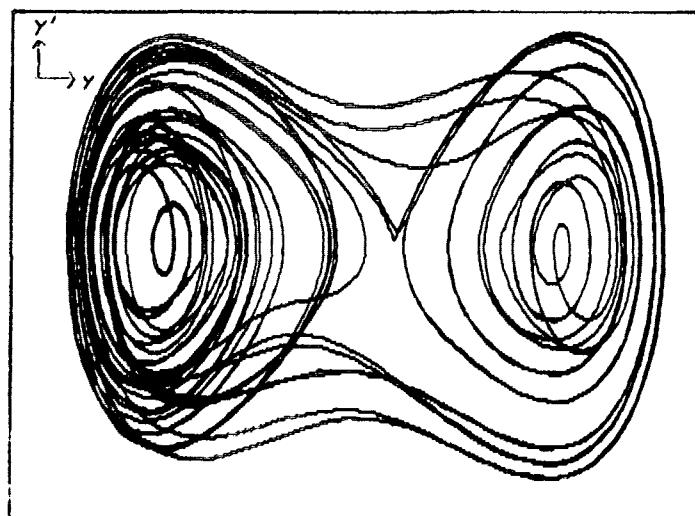
Fig. 23: Kaotisk bevægelse (højre grøft).



Som redskab til at skelne et kaotisk forløb fra et andet, er faseplottet dog ikke velegnet, idet alle faseplot hurtigt vil se ens ud, til trods for bevægelsernes vidt forskellige forløb. Kurverne i faseplottet vil nemlig efterhånden ligge så tæt, at de til sidst ikke vil være til at skelne fra hinanden. Vi skal senere demonstrere andre metoder, hvorved vi får mulighed for at foretage en sådan skelnen.

Ser vi på et kaotisk forløb, der ikke holder sig i højre grøft, kan vi dog godt v.hj.a. faseplottet se, at vi her har en radikal anderledes bevægelse (fig. 24).

Fig. 24: Kaotisk bevægelse (begge grøfter).



I forsøg på at kortlægge strukturerne i kaosfænomenerne, vil vi nu se på, hvorledes kaos overhovedet opstår. Vi vil her nøjes med at se på to forskellige veje til kaos.

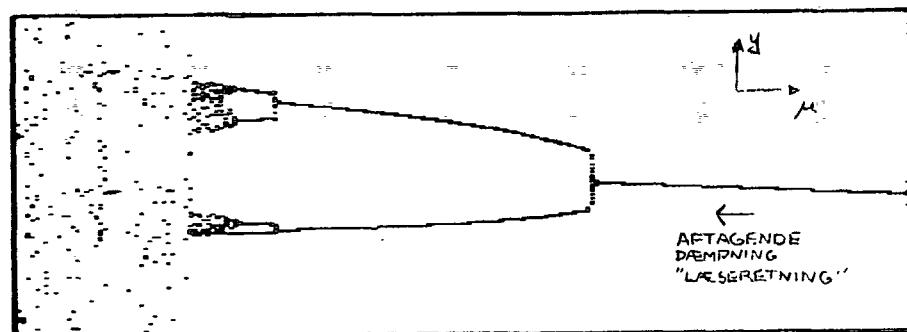
Lad os antage, at vi har startet et system med et givet sæt af parametre og et sæt af startbetingelser, samt at bevægelsen er endt op med en stabil grænsecyklus. Antag så, at vi for fastholdte startbetingelser forøger en af parametrene - det kunne f.eks. være motoramplituden  $A_{M_0}$ . Der kan da ske det, at grænsecyklus bliver ustabil, hvilket i så fald vil ske ved en bestemt værdi af  $A_{M_0}$ . Forøges  $A_{M_0}$  herefter blot en anelse, kan cyklus blive til en stabil 2-periodisk cyklus. Man siger, at systemet har bifurkeret ("gaffeldelt"). Fortsætter processen med at forøge  $A_{M_0}$ , kan systemet efter bifurkere således, at den 2-periodiske cyklus bliver ustabil, og bliver til en stabil periodisk 4-cyklus. Også denne kan blive ustabil og derved blive en stabil 8-cyklus. Denne gentagende periodefordobling kan fortsætte i det uendelige. Men afstanden mellem de parameterværdier, hvor periodefordoblingen sker, bliver mindre og mindre på en bestemt (og universel) måde. Ved en given parameterværdi vil systemet have bifurkeret et uendeligt antal gange, og det vil udvise et meget uregelmæssigt bevægelsesmønster - systemet er blevet kaotisk.

Har vi altså et system, der stadig bifurkerer, når vi forøger (eller formindsker) en given parameter, er der indicier for, at systemet med det givne sæt af startbetingelser vil blive kaotisk. Man siger, at systemet bliver kaotisk gennem periodefordoblinger. Denne metode til detection af, hvorvidt et system er kaotisk eller ej, er idag en af de grundigst behandlede i litteraturen.

I modellen for torsionspendulet har vi mulighed for langsomt at ændre en hvilken som helst af parametrene, der indgår i modellen og undersøge, hvorledes den vil opføre sig. I praksis er det dog lettere kun at ændre på dæmpningen  $\mu$  - som vi jo kan regulere via strømstyrken gennem elektromagneten.

Nedenfor på fig. 25 er vist en kørsel, hvor vi kontinuert har mindsket dæmpningen, og det ses, hvorledes systemet bifurkerer.

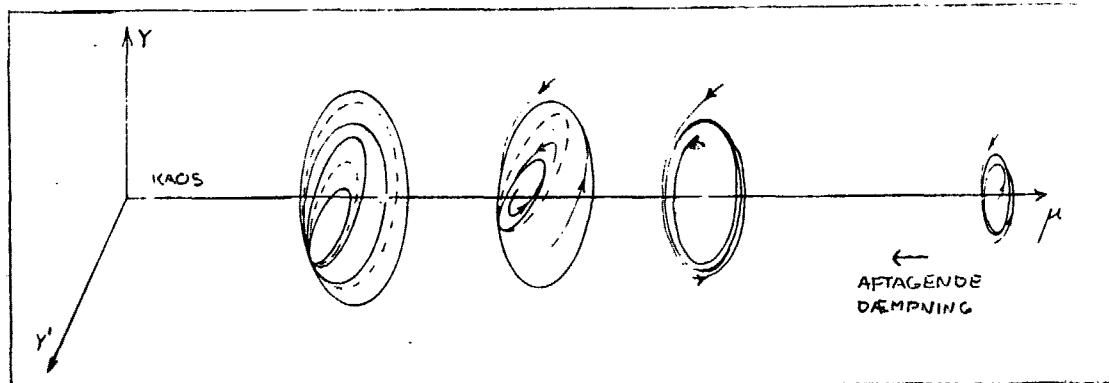
Fig. 25: Bifurkationsdiagram ("figentræ").



Ved at afbilde udsvinget som funktion af den kontinuert aftagende dæmpning, ser vi, at bevægelsen går fra en stabil 1-cyklus til en 2-cyklus, 4-cyklus ...etc. for til sidst at ende i kaos. Øgenavnet "figentræ" skyldes dels at figuren ligner et figentræ og dels at en af pionererne indenfor kaosforskningen hedder M. Feigenbaum.

For at illustrere situationen yderligere har vi i figur 26 skitseret en række faseplot, hvor vi både kan se indsvingningen såvel som de første to bifurkationer.

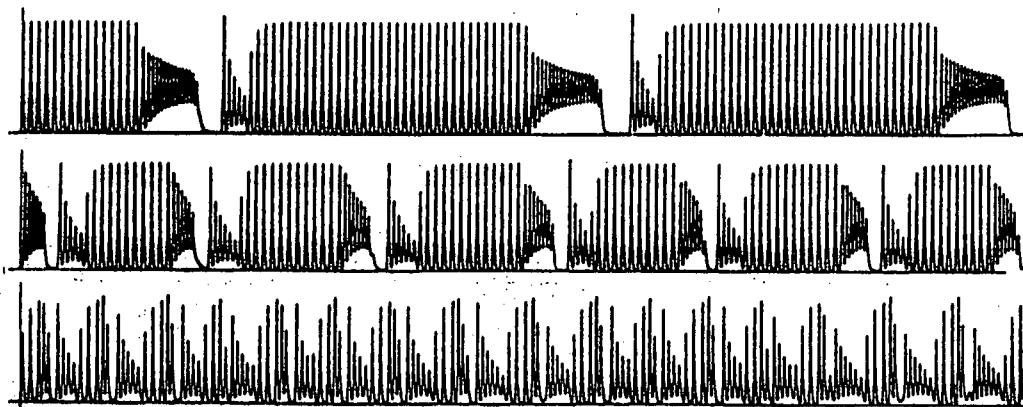
Fig. 26: Bifurkationer.



Figuren illustrerer "starten" på fig. 25, men her tegnet (frihånds) v.hj.a. faseplots. Først ser vi - for stor dæmpning - en stabil grænsecyklos. For yderligere sænkning af dæmpningen bifurkerer denne til en periodisk 2-cyklus etc. Midt mellem de to nye grænsecykler er den "gamle" cyklus der stadig, nu er den bare blevet ustabil (vist som punkteret linie).

En anden vej til kaos, vi her kort vil omtale, er intermittens. Et forløb, som vist på fig. 27, er et typisk intermittent forløb.

Fig. 27: Intermittens.



3 intermittente forløb ved 3 forskellige parameterværdier.

Karakteristisk for intermittens er, at bevægelsen over et vist tidsinterval ser periodisk ud, men faktisk ikke er det. Pludselig opstår en kort men drastisk forandring i denne regulære fase. Efter denne i reglen korte, irregulære afbrydelse af det tilsyneladende periodiske forløb genopstår den regulære fase. Sævel afbrydelserne som de regulære faser vil vedblive med at afløse hinanden, men på en ikke-periodisk måde.

Intermittens er en følge af en bifurkation - systemet bifurkerer fra en periodisk grænsecyklus til det intermittlete forløb. Og ligesom den tidligere omtalte bifurkation vil intermittens også opstå ved en kritisk parameterværdi. Jo mere parameterværdien ændres ud over den kritiske værdi, des hyppigere vil de irregulære faser være. Hyppigheden vil til sidst blive så stor, at bevægelsesmønstret bliver rent kaotisk. Intermittens er sædvanligvis et skridt fra et periodisk forløb til et kaotisk ditto. Men det kan også være en mellemstation mellem to andre kvalitativt forskellige slags adfærd i systemet.

I skrivende stund er det forholdsvis begrænset, hvad man kender af årsager til intermittens. I tilfældet med

torsionspendulet, hvor vi formentlig har observeret fænomenet, kan vi forestille os, at pendulet under den regulære fase for hver svingning opsamler en lille mængde energi, for så på et eller andet tidspunkt at have optaget så meget, at energien påtvinger pendulet en midlertidig kvalitativ anderledes opførsel, hvorunder energien i et vist mål bliver forbrugt. Og pendulet kan herefter vende tilbage til et tilsyneladende periodisk forløb. Pendulet optager og forbruger ikke lige meget energi for hver svingning. Derfor vil hyppigheden af de regulære faser og disses afbrydelser ikke være konstant.

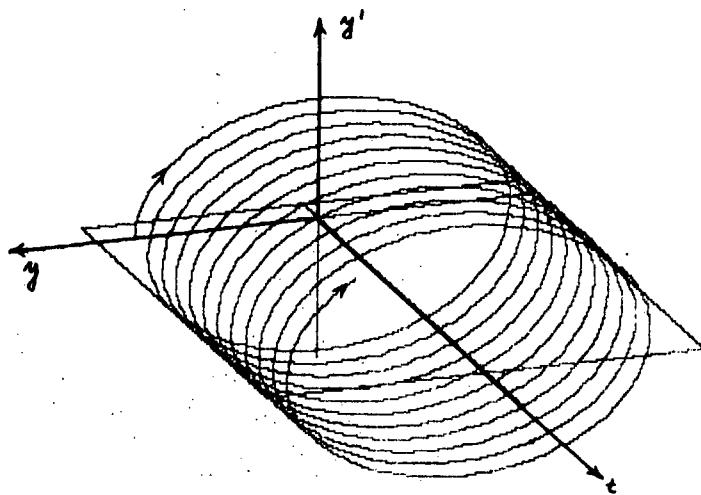
Skal man undersøge, om en given bevægelse overhovedet er kaotisk, kan vi ikke længere klare os med  $(t, y)$ -plot og faseplot. Derfor må vi indføre endnu to grafiske redskaber. Den første er en såkaldt Poincare'-afbildning. Den kan give os et fingerpeg om, hvorvidt bevægelsen overhovedet er kaotisk. Den anden er en retur-afbildning. Med denne metode er der mulighed for at kortlægge, hvorledes bevægelsen er endt op i det kaotiske forløb - er den bifurkeret, eller er der tale om f.eks. intermittens?

Men før vi ser på disse noget specielle afbildningsmetoder, skal vi vende tilbage til faseplottet fra kapitel 1 og udvide det med endnu en dimension.

#### 2.4 Tredimensional afbildning og torus

I afsnit 1.8 indførte vi det to-dimensionale faserum. I dette faserum har vi udeladt tidsaksen. Siden har vi set, hvorledes dette faserum er velegnet til at få overblik over langtidsadfærdens af bevægelsen, grænsecyklus etc. Nu vil vi "genindføre" tiden som dimension og danne et tre-dimensionalt faserum - nemlig  $(t, y, y')$  (fig. 28).

Fig. 28: Tredimensionalt faserum.



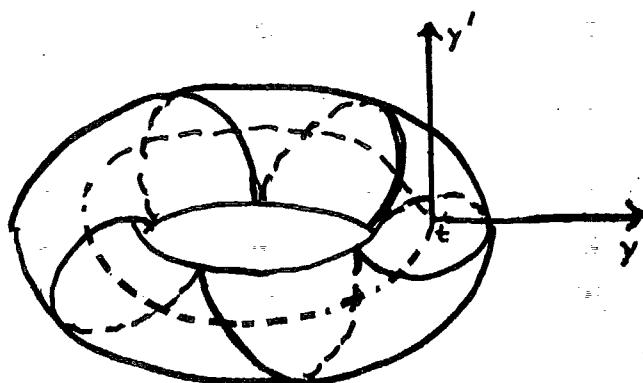
I det tredimensionale faserum er indtegnet en harmonisk bevægelse (svarende til figur 3 og 11).

Det todimensionale faseplot, som vi hidtil har betragtet, fremkommer ved, at vi projicerer kurveforløbet ind på  $(y, y')$ -planen. Tilsvarende får vi  $(t, y)$ -plottet ved at projicere det tredimensionale billede ned på  $(t, y)$ -planen.

I det tredimensionale faserum opstår der dog det tilsvarende problem som ved  $(t, y)$ -koordinatsystemet, nemlig at vi ikke kan afbilde bevægelsen til "uendelig" tid, idet  $t$ -aksen jo ikke kan blive længere, end papiret tillader. Men vi lave et kunstgreb, der bringer os udover dette problem. I afsnit 1.7 så vi, hvorledes motoren tvinger pendulet ind i et karakteristisk bevægelsesmønster, som afhænger af motorperioden  $T$ . Dette faktum vil vi nu udnytte til at lave en ny geometrisk fortolkning:

Vi begrænser  $t$ -aksen til at have længden  $T = 2\pi/\omega_m$  og "klistrer" spidsen af  $t$ -aksen på sin egen "ende", d.v.s. punktet  $(T, 0, 0) = (0, 0, 0)$ . Derved bliver  $t$ -aksen en cirkel (fig. 29).

Fig. 29: Torusen.



I det tredimensionale faserum er indtegnet en harmonisk bevægelse (svarende til figur 3, 11 og 28).

Den sinusformede bevægelse har her perioden  $1/5$  af  $T$ . Kurven, der fremkommer, ligger på "overfladen" af en såkaldt torus - en form som en (oppustet) badering. Enhver bevægelse, hvis periode er  $T/n$ , hvor  $n$  er et naturligt tal, vil "bide sig selv i halen", hver gang tiden  $T$  er gået.

Ved at lade tidsaksen gå (tilbage) i sig selv har vi skabt et faserum, hvor vi bliver i stand til at afbilde hele bevægelsen, uanset hvor lang tid den tager, men hvor vi alligevel har tidsaksen med.

Det skal bemærkes, at det kun er bevægelser, hvor amplituden er konstant, at løsningerne løber på en "pæn" torus (oppustet badering). For kaotiske eller intermittente forløb er der tale om kvalitativt aldeles anderledes flader. Men torus kan være et forestillingsbillede, der evt. gør det lettere at begribe løsningernes vandring i rummet.

Denne metode er dog i sig selv svær at håndtere i den forstand, at der er tale om et rumligt billede, som er kompliceret såvel at tegne som at overskue. Vi skal da heller ikke direkte anvende denne teknik, men bruge den som springbræt til at udvikle andre grafiske redskaber - nemlig Poincaré- og returnafbildninger.

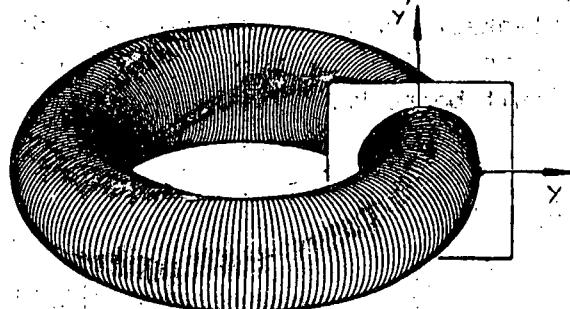
## 2.5 Poincare'-afbildning

Den første afbildningsmetode er navngivet efter den franske matematiker Henri Poincare', der i slutningen af forrige århundrede opfandt metoden.

Vi tager udgangspunkt i bevægelsen i det tredimensionale faserum. Ved et Poincare'-snit skal forstås et snit gennem den flade, bevægelsen foregår på (fx som på fig. 30). Eller med andre ord et Poincare'-snit laves, når en af bevægelsens variable har en bestemt værdi.

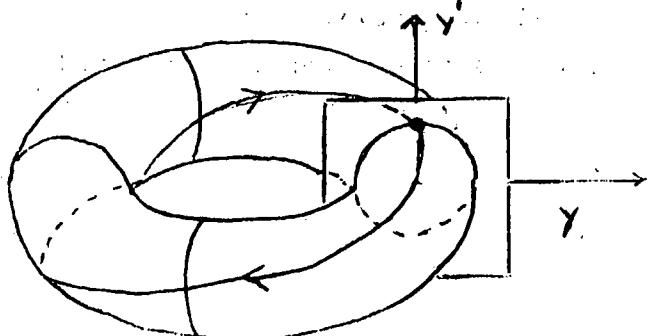
Fig. 30: Poincare'-snit.

I det tredimensionale faserum har vi her indlagt et snit - planen ( $y, y'$ ). Dette snit kaldes et Poincare'-snit.



Indtægner vi en vilkårlig løsningskurve, ser vi, at hver gang den har bevæget sig tiden  $T$  på fladen, vil den skære planen i et punkt. (fig. 31).

Fig. 31: Poincare'-snit af periodisk bevægelse.



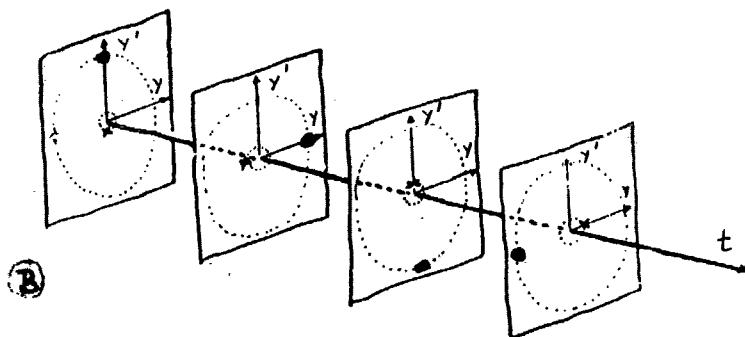
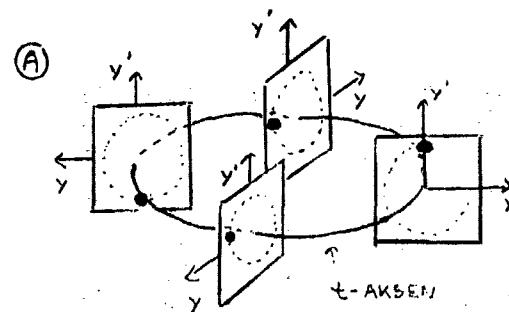
Hvis bevægelsen, som her er periodisk med perioden  $T$  eller periodisk med en periode der er  $T/n$ , hvor  $n$  er et naturligt tal (som i fig. 29), da vil kurven altid skære Poincare'-snittet i det samme punkt hver gang, perioden  $T$  er gået.

Et Poincare'-snit kan man lægge overalt på  $t$ -aksen. Forskellige snit giver nødvendigvis også forskellige Poincare'-afbildninger (fig. 32).

Fig. 32: Fire Poincare'-snit af en periodisk bevægelse.

Figur A viser den cirkelrunde  $t$ -akse, med 4 Poincare'-snit. Kun løsningskurvens skæring med disse snit er indtegnet.

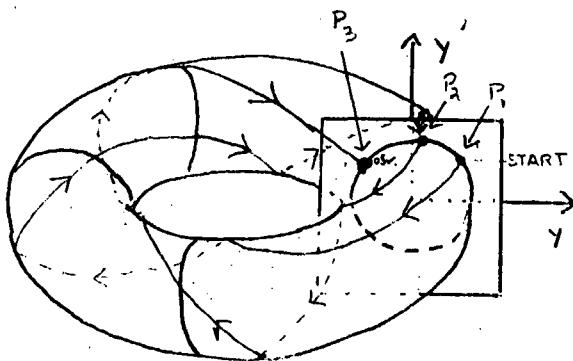
Figur B viser den samme  $t$ -akse, men nu foldet ud, så de fire forskellige Poincare'-snit bedre kan betragtes.



En af de smarte egenskaber ved Poincare'-snittet er, at vi får bragt dimensionen een ned - fra 3 til 2 - idet bevægelsesmønstret derved kan tegnes i en plan (på papiret) og bliver således lettere at overskue.

Matematisk kan vi forstå Poincare'-snittet således:

Fig. 33: Poincare'-afbildning.



Betragnet fig. 33. Den viser forløbet af en løsning samt et Poincare'-snit. Vi kan opfatte dannelsen af snittets punkter som fremkommende ved en afbildning  $f$ . Kaldes det første punkt for  $P_1$ , og det efterfølgende for  $P_2$ , altså det næste skæringspunkt efter forløbet af tiden  $T$ , gælder relationen:

$$P_2 = f(P_1)$$

Tilsvarende vil  $f$  sende  $P_m$  over i  $P_{m+1}$  osv. På denne vis er der skabt en såkaldt iterativ (gentagende) afbildning:

$$P_{m+1} = f(P_m).$$

En sådan iterativ afbildning er i realiteten en gentagen sammensætning af afbildningen  $f$ :

$$P_{m+1} = f \circ f \circ \dots \circ f(P_1) = f^m(P_1).$$

Den periodiske bevægelse med perioden  $T$  (fig. 32) får således følgende formelle fremstilling:

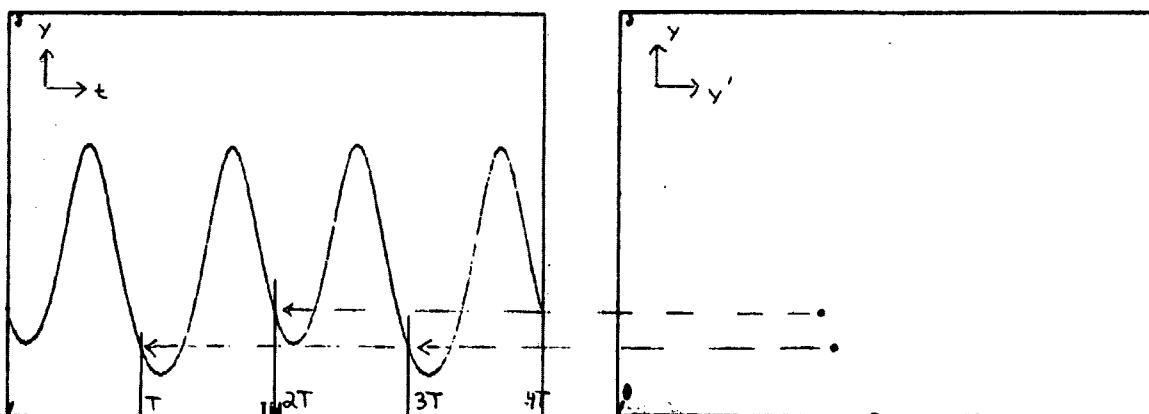
$$P_{m+1} = P_m = \dots = P_1,$$

hvilket er den matematiske formulering af, at kurven skærer det samme punkt i Poincare'-snittet efter hvert omløb.

Iterative afbildninger har ofte den egenskab, at de er relativt nemmere at håndtere matematisk. Til gengæld er det meget sjældent, at man i praksis kan opstille et bestemt funktionsudtryk ( $f$ ) for en Poincare'-afbildung. Men det kan der rådes bod på ved en passende indretning af programmet i datamaskinen. I stedet for "fysisk" at lave et geometrisk snit i fladen kan vi vælge et fast tidsrum - motorperioden  $T$  - som indikator for, at kurven har bevæget sig en omgang på fladen. Vi lader altså datamaskinen notere et punkt (koordinatsættet -  $(y, y')$ ) for hver gang, perioden  $T$  er gået. Når integrationen (d.v.s. den numeriske løsning af differentialligningen) har kørt tilstrækkelig længe, og der er etableret/opfanget et passende (stort) antal punkter, kan vi få maskinen til at tegne punktmængden i et  $(y, y')$ -koordinatsystem. Denne punktmængde svarer præcis til Poincare'-snittet lagt i  $(y, y')$ -planen.

Er bevægelsen periodisk med en periode forskellig fra  $T$ , vil vi f.eks. se et Poincaresnit som vist på figur 34.

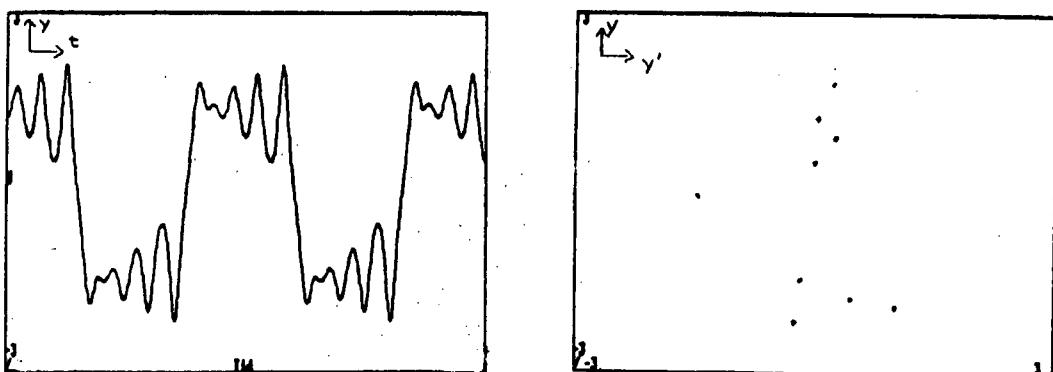
Fig. 34 :  $(t, y)$ -plot og den tilhørende Poincare-afbildung af en 2-periodisk bevægelse.



For en  $n$ -periodisk bevægelse vil der altså være  $n$  punkter, som vedvarende bliver gentaget i en fast rækkefølge.

Hidtil har vi vist torus som en oppustet badering, hvor snittet er en cirkel. Men dette vil kun indtræde, når vinkelhastigheden  $y'$  er lig med 1 og bevægelsen er harmonisk. Almindeligvis vil en periodisk bevægelse give et snit, hvis snitkurve er betydelig mere kompliceret. Dette kan man få en fornemmelse af i fig. 35, hvor en periode 9 er afbildet. De 9 punkter vil ligge på en svært gennemskuelig, "krellet" torus.

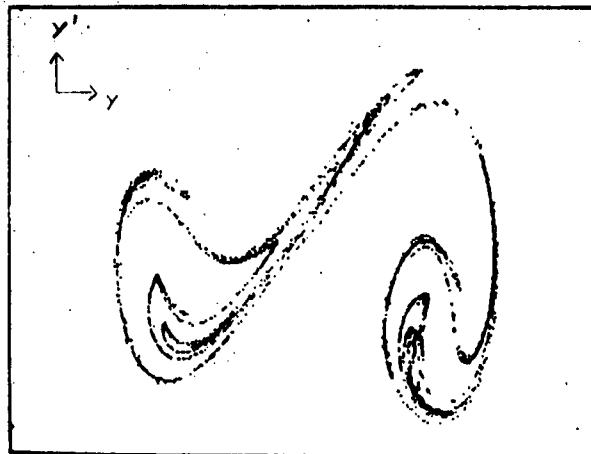
Fig. 35 :  $(t, y)$ -plot og den tilhørende Poincare'-afbildning af en 9-periodisk bevægelse.



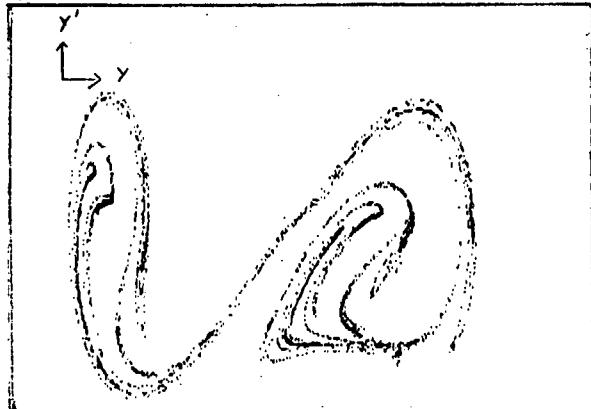
Poincare'-snittet for en kaotisk bevægelse kan antage mange forskellige former. Vi har udvalgt 3 afbildninger, som torsionspendulet har udvist (fig. 36).

Fig. 36: Poincare'-afbildning af kaotiske bevægelser hos torsionspendulet.

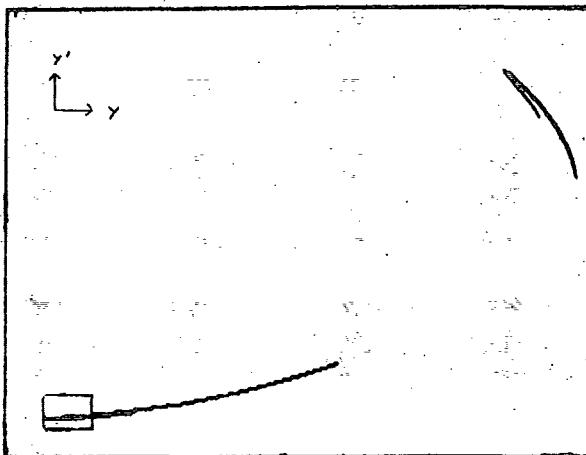
36a: (begge grøfter)



36b: (begge grøfter)



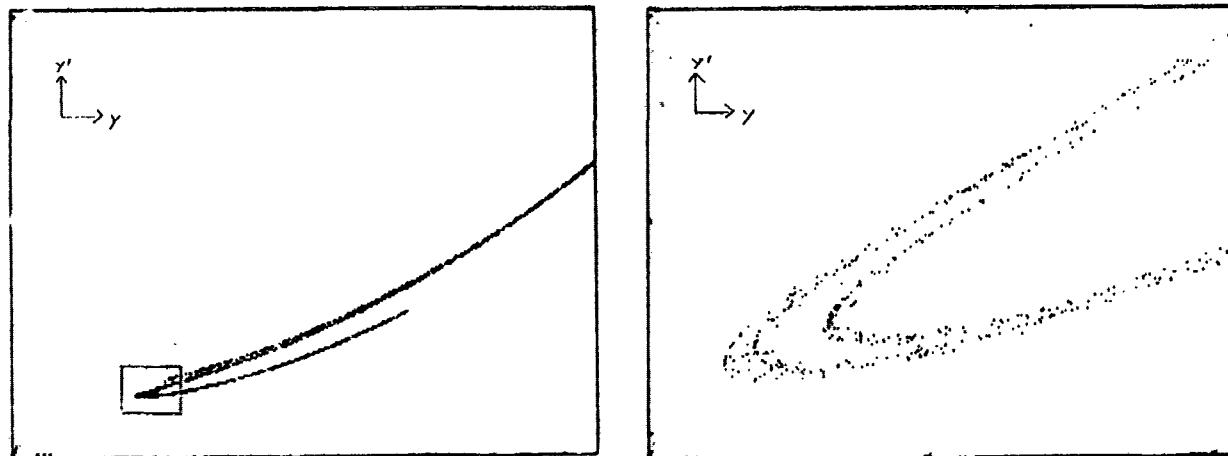
36c: (højre grøft)



Af illustrationerne fremgår, at der absolut ikke er tale om bevægelser på en simpel torusflade, men på en langt mere kompliceret flade. En sådan flade kaldes en "mærkelig" tiltrækker (eng. : strange attractor), bl.a. fordi den har en dimension, som ikke er heltallig. Dimensionen af en torus er 2, idet der skal to vinkler til at beskrive dens punkter. Dimensionen af de kaotiske tiltrækkerne for torsionspendulet vil ligge et sted mellem 1 og 2, og de siges da at have fraktal dimension.

Karakteristisk for de fraktale mønstre i Poincare'-snippetet er, at man kan forstørre dele af snippetet op og genfinde det oprindelige mønster. Denne proces kan i principippet gentages i det uendelige. I figur 37 har vi forstørret en del af Poincare'-snippetet i figur 36c op.

Fig. 37: Forstørrelser af fig. 36c.



På figuren kan vi se, hvorledes det samme mønster gentager sig inden i sig selv. Finder vi et sådan mønster i en Poincare'-afbildning, har vi et fingerpeg om, at bevægelsen er kaotisk. Vi kan ikke være sikre, idet bevægelsen jo bare kan være periodisk med en ekstrem stor periode. Dette aspekt vil vi vende tilbage til i afsnit 2.7.

Med Poincare'-snittet har vi altså en metode, der kan hjælpe os med at "afgøre", hvorvidt en given bevægelse er periodisk eller kaotisk, såvel som det også (til forskel fra faseplottet) kan hjælpe os til at skelne forskellige kaotiske tiltrækkere fra hinanden.

Synes Poincare'-afbildningen at vidne om et kaotisk bevægelsesmønster, er det til gengæld ikke muligt at afgøre, ad hvilken vej systemet har gået mod det kaotiske. Altså, er det f.eks. periodeforldoblingsvejen eller gennem intermittens - eller en helt tredie vej? Den slags afklaring kan derimod af og til aflæses af en retur-afbildning.

## 2.6 Retur-afbildning

Den anden af de grafiske redskaber, som er velegnet til analyse af systemets adfærd er returafbildningen. For at forklare denne type afbildning vil vi igen starte med at betragte bevægelsesforløbet på en flade i rummet.

Ligesom ved Poincare'-afbildningen vil vi - på datamaskinen - optage de punkter, som kommer hver gang motorperioden  $T$  er gået. Men denne gang vil vi nøjes med at notere een af de variables værdier - f.eks.  $y$ -værdierne. Derved dannes en talfølge:

$$y(T), y(2T), y(3T), \dots, y(nT), y((n+1)T), \dots$$

Vi kunne også have valgt f.eks.  $y'$  og fået en tilsvarende talfølge, men i det følgende vil vi antage, at vi har valgt  $y$ -værdierne.

Den fremkomne mængde af tal kan afbildes i et specielt

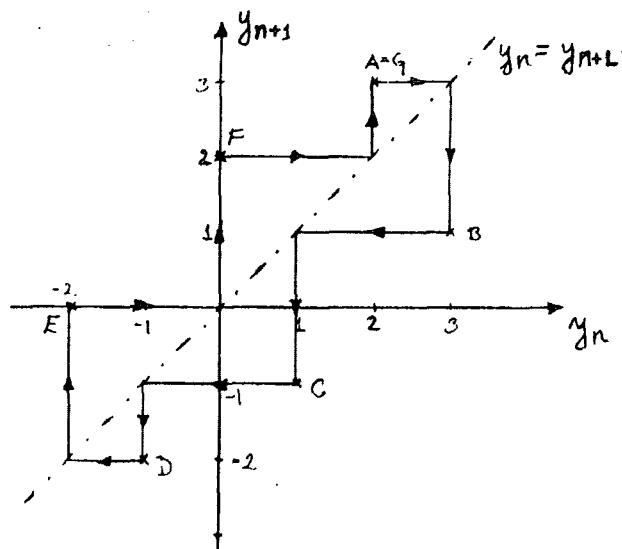
koordinatsystem. Et såkaldt  $(y_n, y_{n+1})$ -system. Vi kan nemlig opfatte talfølgens værdier som en afbildning, der sender  $y_n = y(nT)$  over i  $y_{n+1} = y((n+1)T)$ . Punkterne, der så afsættes i koordinatsystemet er:

$$(y_1, y_2), (y_2, y_3), (y_3, y_4), \dots, (y_n, y_{n+1}), \dots$$

Kort sagt, så afsættes et punkt ved, at man tager 2.-koordinaten fra et punkt og bruger som 1.-koordinat i det efterfølgende punkt. Man sender koordinater "retur". Deraf navnet returafbildning (fig. 38)

Fig. 38 : Eksempel på returafbildning.

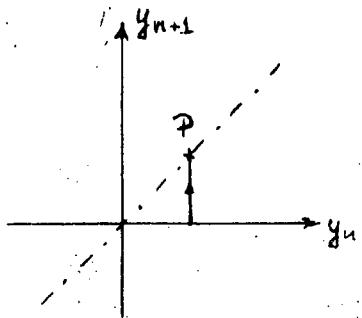
En punktfølge som f.eks.  $(2,3), (3,1), (1,-1), (-1,-2), (-2,0), (0,2), (2,3)$  osv. får det viste udseende. Bemærk, hvorledes man kan følge punkternes rækkefølge ved at benytte linjen med ligningen  $y_{n+1} = y_n$  som reflektor.



Vi vil nu se, hvorledes returafbildningerne for de forskellige bevægelsestyper, som vi tidligere har beskrevet, kan tage sig ud i et koordinatsystem. Dertil betragter vi først en bevægelse, som er periodisk med perioden  $T$  (= motorperioden). Det svarer til, at kurven har bevæget sig een gang rundt på torus og rammer ind i udgangspunktet. Dermed er  $y_1 = y_n$ . Det samme argument kan anvendes på de efterfølgende omgange. Derfor er  $y_1 = y_n$  for alle naturlige tal  $n$ . Altså bliver returafbildningens udseende (fig. 39):

Fig. 39: Retur-afbildning af en bevægelse med perioden T.  
(svarer til fig. 3, 11 og 27)

Har et punkt een gang fået et koordinatsæt, hvor begge koordinater er ens, vil alle fremtidige punkter også blive dette ene punkt.



Vi ser, at den afbildede punktmængde udelukkende består af ét punkt.

Er bevægelsen periodisk med en periode forskellig fra T, kan forløbet f.eks. se ud som på fig. 38 - her er bevægelsen periodisk med perioden 6T.

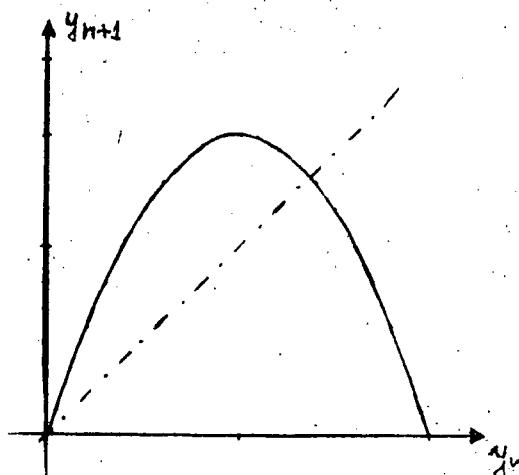
Billedet af en n-periodisk løsning (fig. 38) vil ligesom i Poincarésnittet bestå af n punkter, der vedblivende repeterer sig selv i en bestemt rækkefølge.

Er bevægelsen kaotisk, kan der fremkomme næsten hvad som helst. Vi har nedenfor i figur 40 illustreret nogle forskellige eksempler på returafbildninger for forskellige kaotiske forløb.

Fig. 40: Retur-afbildning af kaotiske bevægelser.

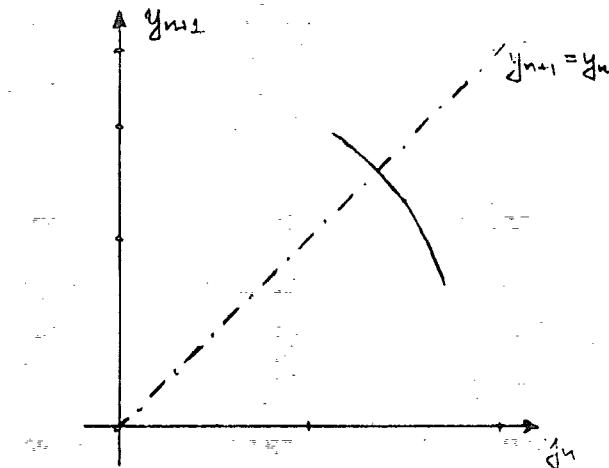
40a: Periodefordobling.

Returafbildningen er en parabel. Hvis man får et sådant billede, kan man med stor sikkerhed postulere, at vejen til kaos er sket gennem periodefordobling.



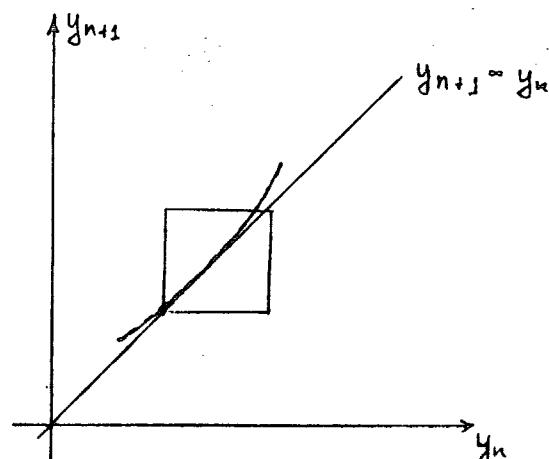
#### 40b: Periodefordobling.

Periodefordoblingsvejen kan også opnås, hvis der blot er tale om en del af en parabel.



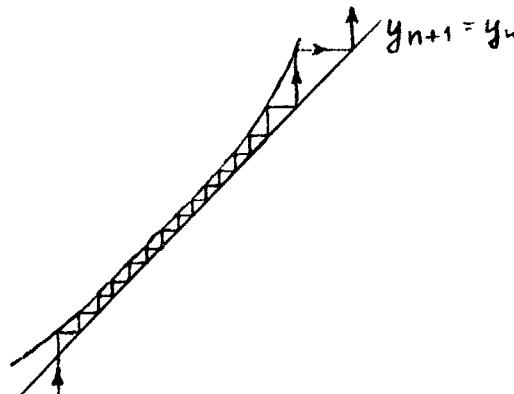
#### 40c: Intermittent forløb.

Der findes flere typer intermittens. Vi har skitseret en her. Det som på en  $(t, y)$ -graf ser periodisk ud svarer til det sted, hvor returkurven smyger sig op ad linjen  $y_{n+1} = y_n$ .



#### 40d: Forstørrelse af 40c.

Dette er en forstørrelse af kassen fra 40c. Vi ser, at  $y_n$  over et længere tidsforløb er næsten lig med  $y_{n+1}$ . Det svarer jo netop til, at swingingernes amplituder over dette tidsrum er næsten lige store - men ikke er det.



Som vi har set er fordelen ved returafbildningen, at man har en mulighed for at sige noget om, hvilken måde systemet er blevet kaotisk på. Men man har ikke kortlagt alle de mulige punktmængder returafbildningen kan frembringe, d.v.s. man sandsynligvis heller ikke kender samtlige måder systemer kan

blive kaotiske på.

Figur 41 viser, to af de mange mulige returafbildninger simulationer af torsionspendulet kan frembringe. Udfra sådanne komplicerede afbildninger, er det stort set umuligt at sige noget konkret.

Fig. 41a: Returafbildning fra torsionpendulet (højre grøft)

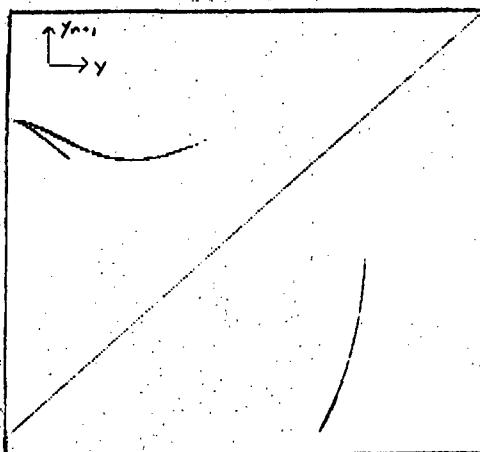
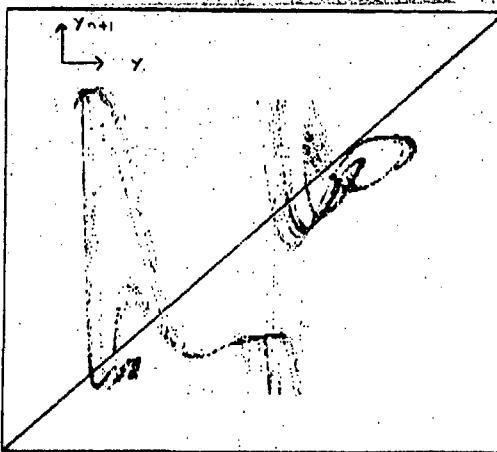


Fig. 41b: Returafbildning fra torsionpendulet (begge grøfter)



Udfra returafbildningen har man dog ingen sikker garanti for, at systemet bliver kaotisk på den eller hin måde. Returafbildningen giver os "kun" et fingerpeg.

Vi har iøvrigt kun omtalt 2 forskellige veje til kaos, men man kender flere på nuværende tidspunkt. Og der kan muligvis dukke flere op de kommende år.

## 2.7 LiapunovekspONENT

I forbindelse med indførelsen af Poincare'- og returnafbildninger talte vi om at kunne se et kaotisk forløb. Det er egentlig lidt af en tilsnigelse. Fysikere m.fl. er de seneste år begyndt at klassificere de punktmængder, som modellerne gennem disse afbildningstyper kan frembringe. Men der er tale om en proces, der kun lige er startet, og formentlig langtfra er færdig, om det overhovedet nogensinde sker.

Ideelt set kan man i praksis aldrig konstatere, om en given models adfærd er kaotisk. Der kan jo lige så godt være tale om, at løsningerne er periodiske med en meget lang periode. Så lang, at vi ikke kan kontrollere, om der faktisk er tale om et periodisk fænomen.

I modeller af faktisk forekommende systemer kan det dybest set være lige meget, om der er tale om det ene eller det andet af disse to fænomener. Det er f.eks. forholdsvis uinteressant, om vejret er kaotisk eller periodisk med en periode på fx flere millioner år.

Så når det siges, at et system er kaotisk, beror det på en tidshorisont, der ligger indenfor en ikke nærmere defineret laboratorietid - evt. en mindre årrække for visse biologiske (øko)systemer. Men selv inden for laboratorietidsrammen kan det være svært at afgøre, om der er kaos eller ej.

Vi skal her omtale endnu et matematisk redskab, som af mange bliver opfattet som en mulig metode til at detektere kaos. Nedenfor på fig. 42 ses et forløb bestående af 2 løsningskurver. Kurverne starter næsten samme sted.

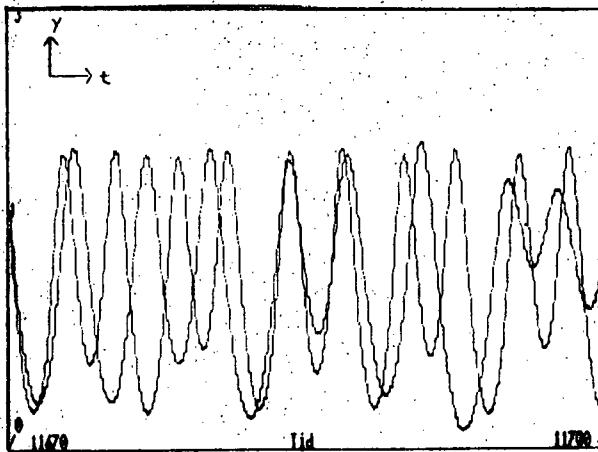
Fig. 42:  $(t, y)$ -plot af to løsninger med forskellige startbetingelser.

Startbetingelser:

$$1: y_1(0) = 1.730 \text{ (rad)} \quad y_1'(0) = -1.75413 \text{ (rad/sek)}$$

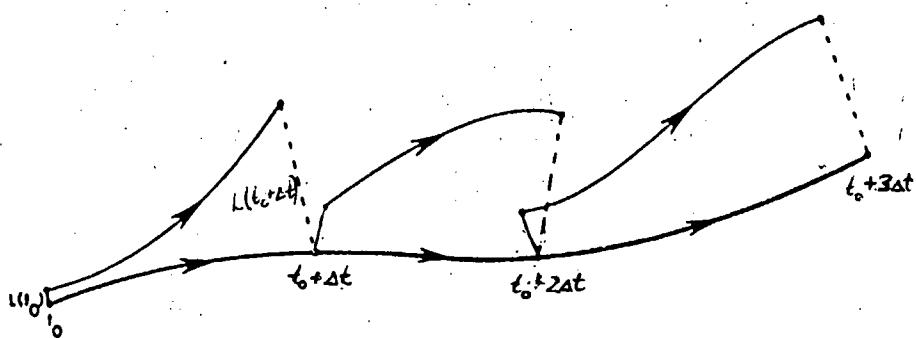
$$2: y_2(0) = 1.731 \text{ (rad)} \quad y_2'(0) = -1.75413 \text{ (rad/sek)}$$

$$\text{Afvigelse: } y_1(0) - y_2(0) = 10^{-3} \text{ (rad)}$$



Systemet er sat i gang med de samme parameterværdier, men med startbetingelser der er en anelse ( $10^{-3}$ ) forskellige. Alligevel ser vi, at løsningerne bevæger sig væk fra hinanden. Og det selvom indsvingningsfænomenerne har fortaget sig. Hvis alle løsningskurver - efter indsvingning - gensidigt bevæger sig væk fra hinanden, siges systemet at være kaotisk. Men det er ikke nok. Måden de bevæger sig væk fra hinanden på, skal være af eksponentiel art. Vi vil her forsøge at skitse, hvad dette betyder (fig. 43):

Fig. 43: Bestemmelse af LiapunovekspONENT



Den optrukne kurve repræsenterer en bestemt løsningskurve. De 3 øvrige kurvestykke er løsninger, som på forskellige tidspunkter ligger nær ved. Til tiden  $t_n$  er afstanden mellem den faste løsning og den første af de 3 lig med  $L(t_n)$ . Et kort tidsrum,  $\Delta t$ , senere er deres indbyrdes afstand øget til  $L(t_n + \Delta t)$ . Noget tilsvarende kan konkluderes med de to andre løsningers adfærd.

Findes der et positivt tal,  $\lambda$ , så den indbyrdes afstand,  $L$ , mellem samtlige løsningskurver tilfredsstiller udtrykket:

$$L(t_n + \Delta t) = L(t_n) \cdot \exp(\lambda \cdot t_n)$$

taget i gennemsnit over uendelig tid, da siges bevægelsen at være kaotisk. Dette er en noget abstrakt formulering, men det kan mere tilgængeligt fortolkes som, at systemet er ekstremt følsomt over startbetingelserne. Det vil sige, at systemet er kaotisk, såfremt to vilkårlige punkter, der på et tidspunkt er nær hinanden, staks efter separeres fra hinanden med eksponentiel fart.

Som vi tidligere har set, er et system ikke altid kaotisk, hvorfor der ikke altid findes et positivt  $\lambda$  som beskrevet ovenfor.  $\lambda$ 'erne kan også være negative eller nul. I alle tilfælde kaldes  $\lambda$ 'erne Liapunoveksponenter.

For hver af de 3 dimensioner systemet bevæger sig i findes et  $\lambda$ . Er blot et af disse  $\lambda$ 'er positivt, vil systemet være kaotisk.

Hvis vi istedet fat i en grænsecyklus, som er stabil, da vil alle nærtliggende løsningskurver blive trukket af grænsecyklus. I den situation vil to  $\lambda$ 'er være negative, og et  $\lambda=0$  - der er således ikke tale om en kaotisk bevægelse (fig. 44a).

Erf alle tre  $\lambda$ 'er =0 er bevægelsen periodisk. Her vil to løsningskurver, der startes tæt på hinanden, vedblivende fastholde forskellen i startbetingelserne (fig. 44b).

Fig. 44a :

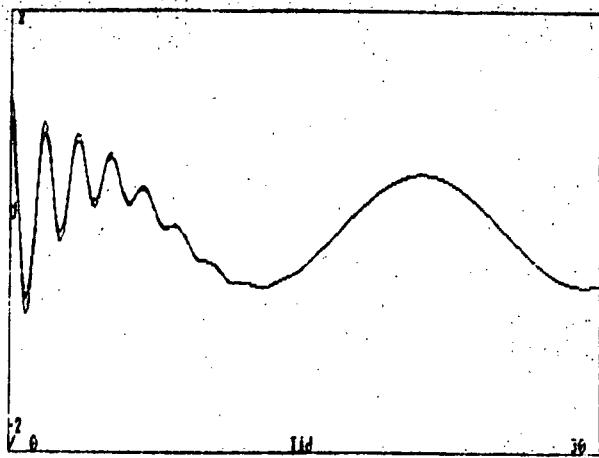
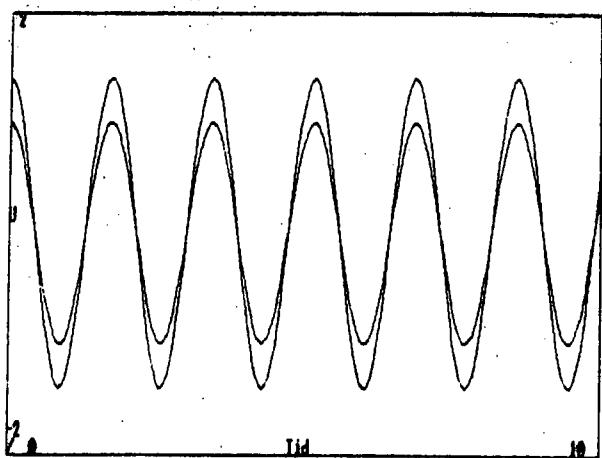


Fig. 44b :



Bestemmelse af en bevægelses Liapunov eksponenter må nok betegnes som den mest sikre måde overordnet at karakterisere bevægelsens type på. Finder man en positiv Liapunov eksponent, har man et stærkt indicium for, at bevægelsen er kaotisk. Skade er så bare, at man endnu ikke har udviklet algoritmer til bestemmelse af eksponenterne der virker hver gang...

## Afrunding

Efter at du kære læser, måske med megen møje, har kæmpet dig gennem denne bog, er det nok på sin plads at løne sig tilbage i stolen og tænke lidt over, hvad det hele var godt for. Hvad er kaos egentlig? Og hvad er det "nye" ved kaos? Det vil vi diskutere her i afrundingen.

Vi har gennem bogen opstillet en række matematiske modeller af fysiske systemer med stadigt stigende kompleksitet. Selvom det har været indviklet nok, er det dog nogle meget simple systemer sammenlignet med de fleste af dem, vi ser i naturen. Tænk bare på vind- og vejrforhold. Dertil kommer, at vi, selv i modelleringen af de simple systemer, endda var nødt til at gøre forenkrende antagelser, foretage tilnærmelser og idealiseringer. Den slags er en modelbygger i praksis altid nødt til at gøre. Målinger af reelle fænomener vil altid være påvirket af usikkerheder og støj, som ikke kan måles eller beregnes eksakt. F.eks. vil det, at vinduet eller døren i laboratoriet åbnes og lukkes, principielt forstyrre pendulet. Det vil give anledning til (omend små) fluktuationer i bevægelsesmønstret. Sådanne små fluktuationer er svære at måle (kvantificere). Dertil kommer, at dele af det fænomen man vil modellere, kan være så komplicerede, at man enten slet ikke kan modellere det eller har en matematisk form, som gør det stort set umuligt at programmere det ind i computere. Det gør sig f.eks. gældende med faststofgnidningen fra lejerne i torsionspendulet. Alt i alt vil en model altid være en (mere eller mindre god) tilnærmelse til den virkelighed, der forsøges modelleret. Alligevel vil man med rimelighed kunne forvente om ikke kvantitativ, så i hvert fald kvalitativ overensstemmelse mellem model og virkelighed. Er der sådan en overensstemmelse, havde de elementer, man af forskellige grunde så bort fra, altså ikke væsentlig betydning. Man siger, at systemet er stabilt overfor (små) påvirkninger udefra.

Vi har dog set i bogen, at det ikke er alle slags påvirk-

ninger. Et system er stabil overfor. Endrer vi på visse af systemets parametre, kan systemet pludselig blive fuldstændigt uforudsigeligt. Udviser et system en sådan opførsel, siger man, at det opfører sig kaotisk.

Der findes ikke kun én, men flere forskellige definitioner på kaos, og vi skal ikke hæfte os ved en bestemt her. Derimod vil vi opsummere de karakteristiske træk ved kaotiske systemer, vi har nævnt i denne bog.

### 1) Ikke-periodisk adfærd.

Dét betyder at systemet aldrig kommer tilbage til den helt samme tilstand. En sådan opførsel er i sig selv ikke tilstrækkelig til, at afgøre om systemet er kaotisk. Dérfor må man gribé til andre metoder for at checke det. F.eks. en

### 2) Periodefordoblings-række.

Det er et fænomen, hvor en stabil tilstand under variation af systemets parametre pludselig bifurkerer og bliver til to stabile tilstænde ..., fire stabile tilstænde etc. Ser man sådan en udvikling, kan man være ret sikker på, at man står overfor en kaotisk adfærd.

Man kan også undersøge systemets

### 3) Følsomhed overfor begyndelsesbetingelserne.

Er det sådan, at to kørsler (hvad enten der er tale om konkrete fysiske fænomener eller simulationer), som er startet med begyndelsesbetingelser, der ligger ganske tæt ved hinanden, og de alligevel udvikler sig med eksponentiel afvigelse fra hinanden, så er der kaos. Man siger, at systemet har (mindst) én positiv Liapunov-eksponent.

Kan man ikke bestemme systemets Liapunov-eksponenter, kan man undersøge om systemet har

#### 4) Fraktale Poincaré-afbildninger.

Har man et Poincaré-snit, hvor man ved gentagende forstørrelser, genfinder det samme mønster inden i sig selv, har Poincaré-afbildningen fraktal struktur. Finder man en sådan struktur, har man et godt indicium for, at systemet er kaotisk.

Endelig kan man se efter om systemet udviser

#### 5) Intermittens.

Fænomenet intermittens ser man, når et periodisk system pludselig afbrydes og svinger på en irregulær måde, for siden igen at vende tilbage til det periodiske etc. En sådan opførsel er et indicium på, at systemet på sin vis allerede er kaotisk, om ikke andet så ihvertfald på vej til det.

I torsionspendulet og især i simuleringer af modellen heraf kan man finde alle disse udtryk for kaos.

Og hvad kan man så lære af det? Jo, hvad var det egentlig vi gjorde ved det helt simple torsionspendul. Et pendul som kun kunne udvise periodisk adfærd? Vi puttede et ekstra lod på ude i kanten af skiven. Og vips! pludselig er torsionspendulet blevet overordentligt følsomt overfor næsten enhver påvirkning. Man kunne så spørge sig selv om, hvor tungt loddet skal være for, at det kan forstyrre det ellers ret stabile torsionspendul. Eller man skulle måske vende spørgsmålet om og undersøge, hvor let loddet skal være for at man slet ikke kan få torsionspendulet til at udvise kaotisk adfærd. Men her skal man huske på, at jo lettere loddet bliver, jo sværere bliver det at skelne det kaotiske fra den støj, som altid findes. Ja, måske er støjen i sig selv udtryk for den uorden, for den del af den fysiske virkelighed, som ikke kan rummes i matematikken. Måske

bliver teorierne om kaos, dét som leder til et opgør med Galilei's (den oprindelige grundlægger af den klassiske fysik) opfattelse nemlig den, at fysikken

".. er skrevet i denne storslæde bog - jeg mener universet - som står åben for, at De kan betragte den, men den kan ikke forstås, med mindre man først lærer at fatte sproget og tolke tegnene den er skrevet med. Den er skrevet i matematikkens sprog."

(Galileo Galilei: "Il Saggiatore", 1618. cit. fra Ronan: "Galileo Galilei". 174. s. 180, vor oversættelse.)

Det vil vise sig i den kommende kaotiske tid.

Supplerende litteratur m.m.:

Olsen F. & Christensen I. :

"Kaos på RUC"

IMFUFA 89.

Video (VHS) der introducerer de centrale begreber, vi benytter i denne bog.

Christiansen, Voetmann, P. :

"Tilfældighedens nødvendighed"

"Paradigma", nr.1, dec. 1986.

Kort artikel om kaos, heri bl.a. omtale af figentræet.

Christiansen, Voetmann, P. :

"Den fraktale uendelighed"

"Paradigma", nr. 4, okt. 1987.

Kort artikel om fraktaler.

Christiansen, Voetmann, P. :

"Fraktaler og Kaos", IMFUFA tekst 174, 1989.

Introducerer nogle simpel kaotiske systemer, og deres grafiske karakteristika m.m.

Hvælv :

"Det kosmiske kaos",

Fjernsynsudsendelse fra DR, d. 16.5.88 (60 min.).

Programmet introducerer og giver eksempler på kaotiske fænomener.

Jakobsen, K. :

"Fra lineær vækst til kaos".

Lademann Lærermidler a/s, Kbh. 1989.

Matematisk indføring i kaosteori på gymnasialt niveau.

- 1/78 "TANKER OM EN PRAKSIS" - et matematikprojekt.  
Projektrapport af: Anne Jensen, Lena Linden-skov, Marianne Kesselhahn og Nicolai Lomholt.  
Vejleder: Anders Madsen
- 2/78 "OPTIMERING" - Menneskets forøgede beher-selsesmuligheder af natur og samfund.  
Projektrapport af: Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen, Gert Krenøe og Peter H. Lassen  
Vejleder: Bernhelm Boss.
- 3/78 "OPCAVESAMLING", breddekursus i fysik.  
Af: Lasse Rasmussen, Aage Bonde Kræmmer og Jens Højgaard Jensen.
- 4/78 "TRE ESSAYS" - om matematikundervisning, matematiklæreruddannelsen og videnskabs-rindalismen.  
Af: Mogens Niss  
Nr. 4 er p.t. udgået.
- 5/78 "BIBLIOGRAFISK VEJLEDNING til studiet af DEN MODERNE FYSIKS HISTORIE".  
Af: Helge Kragh.  
Nr. 5 er p.t. udgået.
- 6/78 "NOGLE ARTIKLER OG DEBATINDLÆG OM - lærer-uddannelse og undervisning i fysik, og - de naturvidenskabelige fags situation efter studenteroprøret".  
Af: Karin Beyer, Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen.
- 7/78 "MATEMATIKKENS FORHOLD TIL SAMFUNDSØKONOMIEN".  
Af: B.V. Gnedenko.  
Nr. 7 er udgået.
- 8/78 "DYNAMIK OG DIAGRAMMER". Introduktion til energy-bond-graph formalismen.  
Af: Peder Voetmann Christiansen.
- 9/78 "OM PRAKSIS' INDFLYDELSE PÅ MATEMATIKKENS UD-VIKLING". - Motiver til Kepler's: "Nova Stereometria Doliorum Vinarium".  
Projektrapport af: Lasse Rasmussen.  
Vejleder: Anders Madsen.
- 
- 10/79 "TERMODYNAMIK I GYMNASIET".  
Projektrapport af: Jan Christensen og Jeanne Mortensen.  
Vejledere: Karin Beyer og Peder Voetmann Christiansen.
- 11/79 "STATISTISCHE MATERIALER".  
Af: Jørgen Larsen.
- 12/79 "LINEÆRE DIFFERENTIALLIGNINGER OG DIFFERENTIALLIGNINGSSYSTEMER".  
Af: Mogens Brun Heefelt.  
Nr. 12 er udgået.
- 13/79 "CAVENDISH'S FORSØG I GYMNASIET".  
Projektrapport af: Gert Kreinøe.  
Vejleder: Albert Chr. Paulsen.
- 14/79 "BOOKS ABOUT MATHEMATICS: History, philosophy, Education, Models, System Theory, and Works of".  
Af: Else Høyrup.  
Nr. 14 er p.t. udgået.
- 15/79 "STRUKTUREL STABILITET OG KATASTROFER i systemer i og udenfor termodynamisk ligevægt".  
Specialeopgave af: Leif S. Striegler.  
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen.
- 16/79 "STATISTIK I KÆFTFORSKNINGEN".  
Projektrapport af: Michael Olsen og Jørn Jensen.  
Vejleder: Jørgen Larsen.
- 17/79 "AT SPØRGE OG AT SVARE i fysikundervisningen".  
Af: Albert Christian Paulsen.
- 18/79 "MATHEMATICS AND THE REAL WORLD", Proceedings af an International Workshop, Roskilde University Centre, Denmark, 1978.  
Preprint.  
Af: Bernhelm Booss og Mogens Niss (eds.)
- 19/79 "GEOMETRI, SKOLE OG VIRKELIGHED".  
Projektrapport af: Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen og Per H.H. Larsen.  
Vejleder: Mogens Niss.
- 20/79 "STATISTISCHE MODELLER TIL BESTEMMELSE AF SIKRE DOSER FOR CARCINOGENE STOFFER".  
Projektrapport af: Michael Olsen og Jørn Jensen.  
Vejleder: Jørgen Larsen
- 21/79 "KONTROL I GYMNASIET-FORMÅL OC KONSEKVENSER".  
Projektrapport af: Crilles Bacher, Per S. Jensen, Preben Jensen og Torben Nysteen.
- 22/79 "SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (1)".  
1-port lineært response og støj i fysikken.  
Af: Peder Voetmann Christiansen.
- 23/79 "ON THE HISTORY OF EARLY WAVE MECHANICS - with special emphasis on the role of relativity".  
Af: Helge Kragh.
- 
- 24/80 "MATEMATIKOPFATTELSER HOS 2.G'ERE".  
atb 1. En analyse. 2. Interviewmateriale.  
Projektrapport af: Jan Christensen og Knud Lindhardt Rasmussen.  
Vejleder: Mogens Niss.
- 25/80 "EKSAMENSOPGAVER", Dybdemodulet/fysik 1974-79.
- 26/80 "OM MATEMATISCHE MODELLER".  
En projektrapport og to artikler.  
Af: Jens Højgaard Jensen m.fl.
- 27/80 "METHODOLOGY AND PHILOSOPHY OF SCIENCE IN PAUL DIRAC'S PHYSICS".  
Af: Helge Kragh.
- 28/80 "DIKELEKTRISK RELAXATION - et forslag til en ny model bygget på væskernes viscoelastiske egenskaber".  
Projektrapport af: Gert Kreinøe.  
Vejleder: Niels Boye Olsen.
- 29/80 "ODIN - undervisningsmateriale til et kursus i differentialligningsmodeller".  
Projektrapport af: Tommy R. Andersen, Per H.H. Larsen og Peter H. Lassen.  
Vejleder: Mogens Brun Heefelt.
- 30/80 "FUSIONENERGIEN --- ATOMSAMFUNDETS ENDESTATION".  
Af: Oluf Danielsen.  
Nr. 30 er udgået.
- 31/80 "VIDENSKABSTEORETISCHE PROBLEMER VED UNDERSKNINGSSYSTEMER BASERET PÅ MENGEDELÆRE".  
Projektrapport af: Troels Lange og Jørgen Karrebæk.  
Vejleder: Stig Andur Pedersen.  
Nr. 31 er p.t. udgået.
- 32/80 "POLYMERE STOFFERS VISCOELASTISCHE EGENSKABER - BELYST VED HJÆLP AF MEKANISKE IMPEDANSMÅLINGER".  
Projektrapport af: Crilles Bacher og Preben Jensen.  
Vejledere: Niels Boye Olsen og Peder Voetmann Christiansen.
- 33/80 "KONSTITUERING AF FAG INDEN FOR TEKNISK - NATURVIDENSKABELIGE UDDANNELSER. I-II".  
Af: Arne Jakobsen.
- 34/80 "ENVIRONMENTAL IMPACT OF WIND ENERGY UTILIZATION".  
ENERGY SERIES NO. I.  
Af: Bent Sørensen  
Nr. 34 er udgået.

- 35/80 "HISTORISKE STUDIER I DEN NYERE ATOMFYSIKS UDVIKLING".  
Af: Helge Kragh.
- 36/80 "HVAD ER MENINGEN MED MATEMATIKUNDERVISNINGEN?".  
Fire artikler.  
Af: Mogens Niss.
- 37/80 "RENEWABLE ENERGY AND ENERGY STORAGE".  
ENERGY SERIES NO. 2.  
Af: Bent Sørensen.
- 
- 38/81 "TIL EN HISTORIETEORI OM NATURERKENDELSE, TEKNOLOGI OG SAMFUND".  
Projektrapport af: Erik Gade, Hans Nedal, Henrik Lau og Finn Physant.  
Vejledere: Stig Andur Pedersen, Helge Kragh og Ib Thiersen.  
Nr. 38 er p.t. udgået.
- 39/81 "TIL KRITIKKEN AF VÆKSTØKONOMIEN".  
Af: Jens Højgaard Jensen.
- 40/81 "TELEKOMMUNIKATION I DANMARK - oplæg til en teknologivurdering".  
Projektrapport af: Arne Jørgensen, Bruno Petersen og Jan Vedde.  
Vejleder: Per Nørgaard.
- 41/81 "PLANNING AND POLICY CONSIDERATIONS RELATED TO THE INTRODUCTION OF RENEWABLE ENERGY SOURCES INTO ENERGY SUPPLY SYSTEMS".  
ENERGY SERIES NO. 3.  
Af: Bent Sørensen.
- 42/81 "VIDENSKAB TEORI SAMFUND - En introduktion til materialistiske videnskabsopfattelser".  
Af: Helge Kragh og Stig Andur Pedersen.
- 43/81 1."COMPARATIVE RISK ASSESSMENT OF TOTAL ENERGY SYSTEMS".  
2."ADVANTAGES AND DISADVANTAGES OF DECENTRALIZATION".  
ENERGY SERIES NO. 4.  
Af: Bent Sørensen.
- 44/81 "HISTORISKE UNDERSØGELSER AF DE EKSPERIMENTELLE FORUDSENINGER FOR RUTHERFORDS ATOMMODEL".  
Projektrapport af: Niels Thor Nielsen.  
Vejleder: Bent C. Jørgensen.
- 
- 45/82 Er aldrig udkommet.
- 46/82 "EKSEMPLARISK UNDERSØGELSE OG FYSISK ERKENDELSE - ILLUSTRETET VED TO EKSEMPLER".  
1+1 Projektrapport af: Torben O. Olsen, Lasse Rasmussen og Niels Dreyer Sørensen.  
Vejleder: Bent C. Jørgensen.
- 47/82 "BARSEBÄCK OG DET VERST OFFICIELT-TÅNKELIGE UHELD".  
ENERGY SERIES NO. 5.  
Af: Bent Sørensen.
- 48/82 "EN UNDERSØGELSE AF MATEMATIKUNDERVISNINGEN PÅ ADGANGSKURSUS TIL KØBENHAVNS TEKNIKUM".  
Projektrapport af: Lis Eilertzen, Jørgen Karrebæk, Troels Lange, Preben Nørregaard, Lissi Pedesen, Laust Rishøj, Lill Røn og Isac Showiki.  
Vejleder: Mogens Niss.
- 49/82 "ANALYSE AF MULTISPEKTRALE SATELLITBILLEDER".  
Projektrapport af: Preben Nørregaard.  
Vejledere: Jørgen Larsen og Rasmus Ole Rasmussen.
- 50/82 "HERSLEV - MULIGHEDER FOR VEDVARERDE ENERGI I EN LANDSBY".  
ENERGY SERIES NO. 6.  
Rapport af: Bent Christensen, Bent Hove Jensen, Dennis B. Møller, Bjarne Laursen, Bjarne Lilletorup og Jacob Mørch Pedersen.  
Vejleder: Bent Sørensen.
- 51/82 "HVAD KAN DER GØRES FOR AT AFHJÆLPE PIGERS BLOKERING OVERFOR MATEMATIK ?"  
Projektrapport af: Lis Eilertzen, Lissi Pedersen, Lill Røn og Susanne Stender.
- 52/82 "DESUSPENSION OF SPLITTING ELLIPTIC SYMBOLS".  
Af: Berthelm Booss og Krzysztof Wojciechowski.
- 53/82 "THE CONSTITUTION OF SUBJECTS IN ENGINEERING EDUCATION".  
Af: Arne Jacobsen og Stig Andur Pedersen.
- 54/82 "FUTURES RESEARCH" - A Philosophical Analysis of Its Subject-Matter and Methods.  
Af: Stig Andur Pedersen og Johannes Witt-Hansen.
- 55/82 "MATEMATISCHE MODELLER" - Litteratur på Roskilde Universitetsbibliotek.  
En biografi.  
Af: Else Høyrup.  
Vedr. tekst nr. 55/82 se også tekst nr. 62/83.
- 56/82 "EN - TO - MANGE" -  
En undersøgelse af matematisk økologi.  
Projektrapport af: Troels Lange.  
Vejleder: Anders Madsen.
- 
- 57/83 "ASPECT EKSPERIMENTET"-  
Skjulte variable i kvantemekanikken?  
Projektrapport af: Tom Juul Andersen.  
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen.  
Nr. 57 er udgået.
- 58/83 "MATEMATISCHE VANDRINGER" - Modelbetragninger over spredning af dyr mellem småbiotoper i agerlandet.  
Projektrapport af: Per Hammershøj Jensen og Lene Vagn Rasmussen.  
Vejleder: Jørgen Larsen.
- 59/83 "THE METHODOLOGY OF ENERGY PLANNING".  
ENERGY SERIES NO. 7.  
Af: Bent Sørensen.
- 60/83 "MATEMATISK MODEKSPERTISE"- et eksempel.  
Projektrapport af: Erik O. Gade, Jørgen Karrebæk og Preben Nørregaard.  
Vejleder: Anders Madsen.
- 61/83 "FYSIKS IDEOLOGISKE FUNKTION, SOM ET EKSEMPEL PÅ EN NATURVIDENSKAB - HISTORISK SET".  
Projektrapport af: Annette Post Nielsen.  
Vejledere: Jens Høyrup, Jens Højgaard Jensen og Jørgen Vogelius.
- 62/83 "MATEMATISCHE MODELLER" - Litteratur på Roskilde Universitetsbibliotek.  
En biografi 2. rev. udgave.  
Af: Else Høyrup.
- 63/83 "CREATING ENERGY FUTURES:A SHORT GUIDE TO ENERGY PLANNING".  
ENERGY SERIES No. 8.  
Af: David Crossley og Bent Sørensen.
- 64/83 "VON MATEMATIK UND KRIEG".  
Af: Berthelm Booss og Jens Høyrup.
- 65/83 "ANVENDT MATEMATIK - TEORI ELLER PRAKSIS".  
Projektrapport af: Per Hedegård Andersen, Kirsten Habekost, Carsten Holst-Jensen, Annelise von Moos, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.  
Vejledere: Berthelm Booss og Klaus Grünbaum.
- 66/83 "MATEMATISCHE MODELLER FOR PERIODISK SELEKTION I ESCHERICHIA COLI".  
Projektrapport af: Hanne Lisbet Andersen, Ole Richard Jensen og Klavs Friisdal.  
Vejledere: Jørgen Larsen og Anders Hede Madsen.
- 67/83 "ELEPSOIDE METODEN - EN NY METODE TIL LINEÆR PROGRAMMERING?"  
Projektrapport af: Lone Biilmann og Lars Boye.  
Vejleder: Mogens Brun Heefelt.
- 68/83 "STOKASTISCHE MODELLER I POPULATIONSGENETIK"  
- til kritikken af teoriladede modeller.  
Projektrapport af: Lise Odgaard Gade, Susanne Hansen, Michael Hviid og Frank Mølgård Olsen.  
Vejleder: Jørgen Larsen.

- 69/83 "ELEVFORUDSENINGER I FYSIK"  
 - en test i 1.g med kommentarer.  
 Af: Albert C. Paulsen.
- 70/83 "INDLERINGS - OG FORMIDLINGSPROBLEMER I MATEMATIK PÅ VOKSENUNDERVISNINGSNIVEAU".  
 Projektrapport af: Hanne Lisbet Andersen, Torben J. Andreassen, Svend Åge Houmann, Helle Glærup Jensen, Keld Fl. Nielsen, Lene Vagn Rasmussen.  
 Vejleder: Klaus Grünbaum og Anders Hede Madsen.
- 71/83 "PIGER OG FYSIK"  
 - et problem og en udfordring for skolen?  
 Af: Karin Beyer, Sussanne Bleagaard, Birthe Olsen, Jette Reich og Mette Vedelsby.
- 72/83 "VERDEN IFØLGE PEIRCE" - to metafysiske essays, om og af C.S Peirce.  
 Af: Peder Voetmann Christiansen.
- 73/83 ""EN ENERGIANALYSE AF LANDBRUG"  
 - økologisk contra traditionelt.  
 ENERGY SERIES NO. 9  
 Specialeopgave i fysik af: Bent Hove Jensen.  
 Vejleder: Bent Sørensen.
- 
- 74/84 "MINIATURISERING AF MIKROELEKTRONIK" - om videnskabelig gjort teknologi og nytten af at lære fysik.  
 Projektrapport af: Bodil Harder og Linda Szkoatak Jensen.  
 Vejledere: Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen.
- 75/84 "MATHEMATIKUNDERVISNINGEN I FREMTIDENS GYMNASIUM"  
 - Case: Lineær programmering.  
 Projektrapport af: Morten Blomhøj, Klavs Frisdahl og Frank Mølgaard Olsen.  
 Vejledere: Mogens Brun Heefelt og Jens Bjørneboe.
- 76/84 "KERNEKRAFT I DANMARK?" - Et høringsvar indkaldt af miljøministeriet, med kritik af miljøstyrelsens rapporter af 15. marts 1984.  
 ENERGY SERIES No. 10  
 Af: Niels Boye Olsen og Bent Sørensen.
- 77/84 "POLITISKE INDEKS - FUP ELLER FAKTA?"  
 Opinionsundersøgelser belyst ved statistiske modeller.  
 Projektrapport af: Svend Åge Houmann, Keld Nielsen og Susanne Stender.  
 Vejledere: Jørgen Larsen og Jens Bjørneboe.
- 78/84 "JÆVNSTRØMSLEDNINGSEVNE OG GITTERSTRUKTUR I AMORT GERMANIUM".  
 Specialrapport af: Hans Medal, Frank C. Ludvigsen og Finn C. Physant.  
 Vejleder: Niels Boye Olsen.
- 79/84 "MATHEMATIK OG ALMENDANNELSE".  
 Projektrapport af: Henrik Coster, Mikael Wennerberg Johansen, Povl Kattler, Birgitte Lydholm og Morten Overgaard Nielsen.  
 Vejleder: Bernhelm Booss.
- 80/84 "KURSUSMATERIALE TIL MATEMATIK B".  
 Af: Mogens Brun Heefelt.
- 81/84 "FREKVENSAFHÆNGIG LEDNINGSEVNE I AMORT GERMANIUM".  
 Specialrapport af: Jørgen Wind Petersen og Jan Christensen.  
 Vejleder: Niels Boye Olsen.
- 82/84 "MATHEMATIK - OG FYSIKUNDERVISNINGEN I DET AUTO-MATISEREDE SAMFUND".  
 Rapport fra et seminar afholdt i Hvidovre 25-27 april 1983.  
 Red.: Jens Højgaard Jensen, Bent C. Jørgensen og Mogens Niss.
- 83/84 "ON THE QUANTIFICATION OF SECURITY":  
 PEACE RESEARCH SERIES NO. 1  
 Af: Bent Sørensen  
 nr. 83 er p.t. udgået
- 84/84 "NOGLE ARTIKLER OM MATEMATIK, FYSIK OG ALMENDANNELSE".  
 Af: Jens Højgaard Jensen, Mogens Niss m. fl.
- 85/84 "CENTRIFUGALREGULATORER OG MATEMATIK".  
 Specialrapport af: Per Hedegård Andersen, Carsten Holst-Jensen, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.  
 Vejleder: Stig Andur Pedersen.
- 86/84 "SECURITY IMPLICATIONS OF ALTERNATIVE DEFENSE OPTIONS FOR WESTERN EUROPE".  
 PEACE RESEARCH SERIES NO. 2  
 Af: Bent Sørensen.
- 87/84 "A SIMPLE MODEL OF AC HOPPING CONDUCTIVITY IN DISORDERED SOLIDS".  
 Af: Jeppe C. Dyre.
- 88/84 "RISE, FALL AND RESURRECTION OF INFINITESIMALS".  
 Af: Detlef Laugwitz.
- 89/84 "FJERNVARMEOPTIMERING".  
 Af: Bjarne Lillethorup og Jacob Mørch Pedersen.
- 90/84 "ENERGI I 1.G - EN TEORI FOR TILRETTELAGGELSE".  
 Af: Albert Chr. Paulsen.
- 
- 91/85 "KVANTETEORI FOR GYMNASIET".  
 1. Lærervejledning  
 Projektrapport af: Biger Lundgren, Henning Sten Hansen og John Johansson.  
 Vejleder: Torsten Meyer.
- 92/85 "KVANTETEORI FOR GYMNASIET".  
 2. Materiale  
 Projektrapport af: Biger Lundgren, Henning Sten Hansen og John Johansson.  
 Vejleder: Torsten Meyer.
- 93/85 "THE SEMIOTICS OF QUANTUM - NON - LOCALITY".  
 Af: Peder Voetmann Christiansen.
- 94/85 "TRENINGHENDET BOURBAKI - generalen, matematikeren og ånden".  
 Projektrapport af: Morten Blomhøj, Klavs Frisdahl og Frank M. Olsen.  
 Vejleder: Mogens Niss.
- 95/85 "AN ALTERNATIV DEFENSE PLAN FOR WESTERN EUROPE".  
 PEACE RESEARCH SERIES NO. 3  
 Af: Bent Sørensen
- 96/85 "ASPEKTER VED KRAFTVARMEFORSYNING".  
 Af: Bjarne Lillethorup.  
 Vejleder: Bent Sørensen.
- 97/85 "ON THE PHYSICS OF A.C. HOPPING CONDUCTIVITY".  
 Af: Jeppe C. Dyre.
- 98/85 "VALGMULIGHEDER I INFORMATIONSALDEREN".  
 Af: Bent Sørensen.
- 99/85 "Der er langt fra Q til R".  
 Projektrapport af: Niels Jørgensen og Mikael Klintorp.  
 Vejleder: Stig Andur Pedersen.
- 100/85 "TALSYSTEMETS OPBYGNING".  
 Af: Mogens Niss.
- 101/85 "EXTENDED MOMENTUM THEORY FOR WINDMILLS IN PERTURBATIVE FORM".  
 Af: Ganesh Sengupta.
- 102/85 "OPSTILLING OG ANALYSE AF MATEMATISKE MODELLER, BELYST VED MODELLER OVER KØERS FODEROPTACELSE OG - OMMINING".  
 Projektrapport af: Lis Eileitzen, Kirsten Habekost, Lilli Røn og Susanne Stender.  
 Vejleder: Klaus Grünbaum.

- 103/85 "ØDSLE KOLDKRIGERE OG VIDENSKABENS LYSE IDEER".  
Projektrapport af: Niels Ole Dam og Kurt Jensen.  
Vejleder: Bent Sørensen.
- 104/85 "ANALOCRECNEMASKINEN OG LORENZLIGNINGER".  
Af: Jens Jæger.
- 105/85 "THE FREQUENCY DEPENDENCE OF THE SPECIFIC HEAT AT THE GLASS TRANSITION".  
Af: Tage Christensen.
- "A SIMPLE MODEL AF AC HOPPING CONDUCTIVITY".  
Af: Jeppe C. Dyre.  
Contributions to the Third International Conference on the Structure of Non - Crystalline Materials held in Grenoble July 1985.
- 106/85 "QUANTUM THEORY OF EXTENDED PARTICLES".  
Af: Bent Sørensen.
- 107/85 "EN MYG GØR INGEN EPIDEMI".  
- flodblindhed som eksempel på matematisk modellering af et epidemiologisk problem.  
Projektrapport af: Per Hedegård Andersen, Lars Boye, Carsten Holst Jensen, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.  
Vejleder: Jesper Larsen.
- 108/85 "APPLICATIONS AND MODELLING IN THE MATHEMATICS CURRICULUM" - state and trends -  
Af: Mogens Niss.
- 109/85 "COX I STUDIETIDEN" - Cox's regressionsmodel anvendt på studenteroplysninger fra RUC.  
Projektrapport af: Mikael Wennerberg Johansen, Poul Køller og Torben J. Andreasen.  
Vejleder: Jørgen Larsen.
- 110/85 "PLANNING FOR SECURITY".  
Af: Bent Sørensen
- 111/85 "JORDEN RUNDT PÅ FLADE KORT".  
Projektrapport af: Birgit Andresen, Beatriz Quinones og Jimmy Staal.  
Vejleder: Mogens Niss.
- 112/85 "VIDENSKABELIGGØRELSE AF DANSK TEKNOLOGISK INNOVATION FREM TIL 1950 - BELYST VED EKSEMPLER".  
Projektrapport af: Erik Odgaard Gade, Hans Hedal, Frank C. Ludvigsen, Annette Post Nielsen og Finn Physant.  
Vejleder: Claus Bryld og Bent C. Jørgensen.
- 113/85 "DESUSPENSION OF SPLITTING ELLIPTIC SYMBOLS II".  
Af: Bernhelm Booss og Krzysztof Wojciechowski.
- 114/85 "ANVENDELSE AF GRAFISKE METODER TIL ANALYSE AF KONVIGENSTABELLER".  
Projektrapport af: Lone Biilmann, Ole R. Jensen og Anne-Lise von Moos.  
Vejleder: Jørgen Larsen.
- 115/85 "MATEMATIKKENS UDVIKLING OP TIL RENAISSANCEN".  
Af: Mogens Niss.
- 116/85 "A PHENOMENOLOGICAL MODEL FOR THE MEYERNELDEL RULE".  
Af: Jeppe C. Dyre.
- 117/85 "KRAFT & FUERNVARMEOPTIMERING"  
Af: Jacob Mørch Pedersen.  
Vejleder: Bent Sørensen
- 118/85 "TILFÆLDIGHEDEN OG NØDVENDIGHEDEN IFØLGE PEIRCE OG FYSIKKEN".  
Af: Peder Voetmann Christiansen
- 
- 119/86 "DET ER CANSKE VIST -- EUKLIDS FEMTE POSTULAT KUNNE NOK SKABE RØRE I ANDEDAMMEN".  
Af: Iben Maj Christiansen  
Vejleder: Mogens Niss.
- 120/86 "ET ANTAL STATISTISCHE STANDARDMODELLER".  
Af: Jørgen Larsen
- 121/86 "SIMULATION I KONTINUERT TID".  
Af: Peder Voetmann Christiansen.
- 122/86 "ON THE MECHANISM OF GLASS IONIC CONDUCTIVITY".  
Af: Jeppe C. Dyre.
- 123/86 "GYMNASIEFYSIKKEN OG DEN STORE VERDEN".  
Fysklærerforeningen, IMFUFA, RUC.
- 124/86 "OPGAVESAMLING I MATEMATIK".  
Samtlige opgaver stillet i tiden 1974-jan. 1986.
- 125/86 "UVBY, - systemet - en effektiv fotometrisk spektralklassifikation af B-, A- og F-stjerner".  
Projektrapport af: Birger Lundgren.
- 126/86 "QM UDVIKLINGEN AF DEN SPECIELLE RELATIVITETSTEORI".  
Projektrapport af: Lise Odgaard & Linda Szokotak Jensen  
Vejledere: Karin Beyer & Stig Andur Pedersen.
- 127/86 "GALOIS' BIDRAG TIL UDVIKLINGEN AF DEN ABSTRAKTE ALGEBRA".  
Projektrapport af: Pernille Sand, Heine Larsen & Lars Frandsen.  
Vejleder: Mogens Niss.
- 128/86 "SMÅKRYB" - om ikke-standard analyse.  
Projektrapport af: Niels Jørgensen & Mikael Klintorp.  
Vejleder: Jeppe Dyre.
- 129/86 "PHYSICS IN SOCIETY"  
Lecture Notes 1983 (1986)  
Af: Bent Sørensen
- 130/86 "Studies in Wind Power"  
Af: Bent Sørensen
- 131/86 "FYSIK OG SAMFUND" - Et integreret fysik/historieprojekt om naturanskuelsens historiske udvikling og dens samfundsmæssige betingethed.  
Projektrapport af: Jakob Heckscher, Søren Brønd, Andy Wierød.  
Vejleder: Jens Høyrup, Jørgen Vogelius, Jens Højgaard Jensen.
- 132/86 "FYSIK OG DANNELSE"  
Projektrapport af: Søren Brønd, Andy Wierød.  
Vejleder: Karin Beyer, Jørgen Vogelius.
- 133/86 "CHERNOBYL ACCIDENT: ASSESSING THE DATA. ENERGY SERIES NO. 15."  
Af: Bent Sørensen.
- 
- 134/87 "THE D.C. AND THE A.C. ELECTRICAL TRANSPORT IN AsSeTe SYSTEM"  
Authors: M.B.El-Den, N.B.Olsen, Ib Høst Pedersen, Petr Visčor
- 135/87 "INTUITIONISTISK MATEMATIKS METODER OG ERKENNELSES-TEORETISKE FORUDSETNINGER"  
MATHEMATIKSPECIALE: Claus Larsen  
Vejledere: Anton Jensen og Stig Andur Pedersen
- 136/87 "Mystisk og naturlig filosofi: En skitse af kristendommens første og andet møde med græsk filosofi"  
Projektrapport af Frank Colding Ludvigsen  
Vejleder: Historie: Ib Thiersen  
Fysik: Jens Højgaard Jensen
- 137/87 "HOPMODELLER FOR ELEKTRISK LEDNING I UORDNEDE FASTE STOFFER" - Resumé af licentiatafhandling  
Af: Jeppe Dyre  
Vejleder: Niels Boye Olsen og Peder Voetmann Christiansen.

- 138/87 "JOSEPHSON EFFECT AND CIRCLE MAP."  
 Paper presented at The International Workshop on Teaching Nonlinear Phenomena at Universities and Schools, "Chaos in Education". Balaton, Hungary, 26 April-2 May 1987.
- By: Peder Voetmann Christiansen
- 
- 139/87 "Machbarkeit nichtbeherrschbarer Technik durch Fortschritte in der Erkennbarkeit der Natur"  
 Af: Bernhelm Booss-Bavnbek  
 Martin Bohle-Carbonell
- 140/87 "ON THE TOPOLOGY OF SPACES OF HOLOMORPHIC MAPS"  
 By: Jens Gravesen
- 141/87 "RADIOMETERS UDVIKLING AF BLODGASAPPARATUR - ET TEKNOLOGIHISTORISK PROJEKT"  
 Projektrapport af Finn C. Physant  
 Vejleder: Ib Thiersen
- 142/87 "The Calderón Projektor for Operators With Splitting Elliptic Symbols"  
 by: Bernhelm Booss-Bavnbek og Krzysztof P. Wojciechowski
- 143/87 "Kursusmateriale til Matematik på NAT-BAS"  
 af: Mogens Brun Heefelt
- 144/87 "Context and Non-Locality - A Peircian Approach  
 Paper presented at the Symposium on the Foundations of Modern Physics The Copenhagen Interpretation 60 Years after the Como Lecture. Joensuu, Finland, 6 - 8 august 1987.  
 By: Peder Voetmann Christiansen
- 145/87 "AIMS AND SCOPE OF APPLICATIONS AND MODELLING IN MATHEMATICS CURRICULA"  
 Manuscript of a plenary lecture delivered at ICMTA 3, Kassel, FRC 8.-11.9.1987  
 By: Mogens Niss
- 146/87 "BESTEMMELSE AF BULKRESISTIVITETEN I SILICIUM - en ny frekvensbaseret målemetode.  
 Fysikspeciale af Jan Vedde  
 Vejledere: Niels Boye Olsen & Petr Viščor
- 147/87 "Rapport om BIS på NAT-BAS"  
 redigeret af: Mogens Brun Heefelt
- 148/87 "Naturvidenskabsundervisning med Samfundsperspektiv"  
 af: Peter Golding-Jørgensen DLH  
 Albert Chr. Paulsen
- 149/87 "In-Situ Measurements of the density of amorphous germanium prepared in ultra high vacuum"  
 by: Petr Viščor
- 150/87 "Structure and the Existence of the first sharp diffraction peak in amorphous germanium prepared in UHV and measured in-situ"  
 by: Petr Viščor
- 151/87 "DYNAMISK PROGRAMMERING"  
 Matematikprojekt af:  
 Birgit Andresen, Keld Nielsen og Jimmy Staal  
 Vejleder: Mogens Niss
- 
- 152/87 "PSEUDO-DIFFERENTIAL PROJECTIONS AND THE TOPOLOGY OF CERTAIN SPACES OF ELLIPTIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS"  
 by: Bernhelm Booss-Bavnbek  
 Krzysztof P. Wojciechowski
- 
- 153/88 "HALVLEDERTEKNOLOGIENS UDVIKLING MELLEM MILITÆRE OG CIVILE KRAFTER"  
 Et eksempel på humanistisk teknologihistorie Historiespeciale  
 Af: Hans Hedal  
 Vejleder: Ib Thiersen
- 154/88 "MASTER EQUATION APPROACH TO VISCOS LIQUIDS AND THE GLASS TRANSITION"  
 By: Jeppe Dyre
- 155/88 "A NOTE ON THE ACTION OF THE POISSON SOLUTION OPERATOR TO THE DIRICHLET PROBLEM FOR A FORMALLY SELFADJOINT DIFFERENTIAL OPERATOR"  
 by: Michael Pedersen
- 156/88 "THE RANDOM FREE ENERGY BARRIER MODEL FOR AC CONDUCTION IN DISORDERED SOLIDS"  
 by: Jeppe C. Dyre
- 157/88 "STABILIZATION OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS BY FINITE DIMENSIONAL BOUNDARY FEEDBACK CONTROL: A pseudo-differential approach."  
 by: Michael Pedersen
- 158/88 "UNIFIED FORMALISM FOR EXCESS CURRENT NOISE IN RANDOM WALK MODELS"  
 by: Jeppe Dyre
- 159/88 "STUDIES IN SOLAR ENERGY"  
 by: Bent Sørensen
- 160/88 "LOOP GROUPS AND INSTANTONS IN DIMENSION TWO"  
 by: Jens Gravesen
- 161/88 "PSEUDO-DIFFERENTIAL PERTURBATIONS AND STABILIZATION OF DISTRIBUTED PARAMETER SYSTEMS: Dirichlet feedback control problems"  
 by: Michael Pedersen
- 162/88 "PIGER & FYSIK - OG MEGET MERE"  
 Af: Karin Beyer, Sussanne Blegaa, Birthe Olsen, Jette Reich, Mette Vedelsby
- 163/88 "EN MATEMATISK MODEL TIL BESTEMMELSE AF PERMEABILITETEN FOR BLOD-NETHINDE-BARRIEREN"  
 Af: Finn Langberg, Michael Jorden, Lars Frælses  
 Vejleder: Jesper Larsen
- 164/88 "Vurdering af matematisk teknologi Technology Assessment Technikfolgenabschätzung"  
 Af: Bernhelm Booss-Bavnbek, Glen Pate med Martin Bohle-Carbonell og Jens Højgaard Jensen
- 165/88 "COMPLEX STRUCTURES IN THE NASH-MOSER CATEGORY"  
 by: Jens Gravesen

166/88 "Grundbegreber i Sædsynligheds-regningen"

Af: Jørgen Larsen

167a/88 "BASISSTATISTIK 1. Diskrete modeller"

Af: Jørgen Larsen

167b/88 "BASISSTATISTIK 2. Kontinuerte modeller"

Af: Jørgen Larsen

168/88 "OVERFLADEN AF PLANETEN MARS"

Laboratorie-simulering og MARS-analoger undersøgt ved Mössbauerspektroskopi.

Fysikspeciale af:

Birger Lundgren

Vejleder: Jens Martin Knudsen

Fys.Lab./HCØ

169/88 "CHARLES S. PEIRCE: MURSTEN OG MØRTEL TIL EN METAFYSIK."

Fem artikler fra tidsskriftet "The Monist" 1891-93.

Introduktion og oversættelse:

Peder Voetmann Christensen

170/88 "OPGAVESAMLING I MATEMATIK"

Samtlige opgaver stillet i tiden 1974 - juni 1988

171/88 "The Dirac Equation with Light-Cone Data"

af: Johnny Tom Ottesen

172/88 "FYSIK OG VIRKELIGHED"

Kvantemekanikkens grundlagsproblem i gymnasiet.

Fysikprojekt af:

Erik Lund og Kurt Jensen

Vejledere: Albert Chr. Paulsen og Peder Voetmann Christiansen

---

173/89 "NUMERISKE ALGORITMER"

af: Mogens Brun Heefelt

174/89 "GRAFISK FREMSTILLING AF

"FRAKTALER OG KAOS"

af: Peder Voetmann Christiansen

175/89 "AN ELEMENTARY ANALYSIS OF THE TIME DEPENDENT SPECTRUM OF THE NON-STATIONARY SOLUTION TO THE OPERATOR RICCATI EQUATION

af: Michael Pedersen

176/89 "A MAXIMUM ENTROPY ANSATZ FOR NONLINEAR RESPONSE THEORY"

af : Jeppe Dyre

177/89 "HVAD SKAL ADAM STÅ MODEL TIL"

af: Morten Andersen, Ulla Engström, Thomas Gravesen, Nanna Lund, Pia Madsen, Dina Rawat, Peter Torstensen

Vejleder: Mogens Brun Heefelt

178/89 "BIOSYNTESSEN AF PENICILLIN - en matematisk model"

af: Ulla Eghave Rasmussen, Hans Oxvang Mortensen, Michael Jarden

vejleder i matematik: Jesper Larsen  
biologi: Erling Lauridsen